

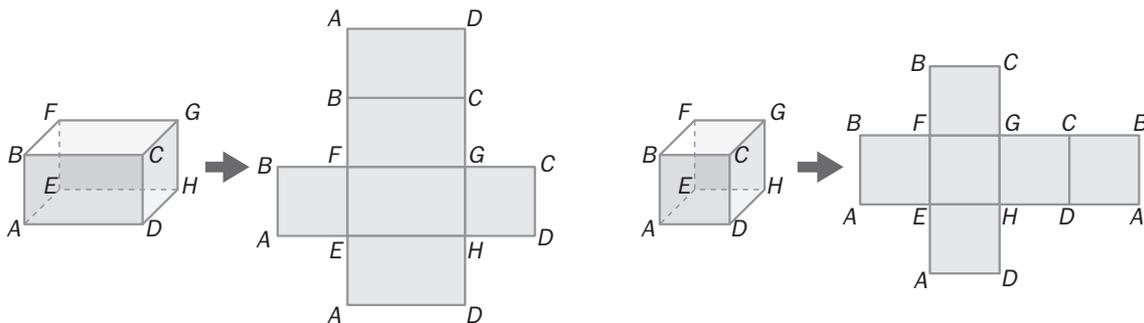
EJERCICIOS PROPUESTOS

14.1 ¿Qué condiciones debe cumplir un prisma triangular para ser regular? Dibújalo

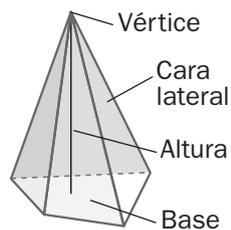


Para que un prisma triangular sea regular su base tiene que ser un triángulo equilátero y sus caras laterales rectángulos.

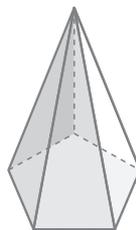
14.2 Dibuja el desarrollo plano de un ortoedro y el de un cubo.



14.3 Dibuja una pirámide que no sea regular y describe sus elementos.



14.4 Dibuja una pirámide regular, de modo que tenga cinco caras laterales.
¿Qué polígono forma su base?



La base de esta pirámide es un pentágono.

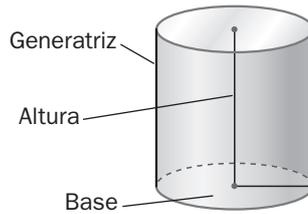
14.5 Elige como base de una pirámide un triángulo rectángulo. ¿Puedes construir con esta base una pirámide regular?

No se puede construir una pirámide regular eligiendo como base un triángulo rectángulo pues este no es un polígono regular.

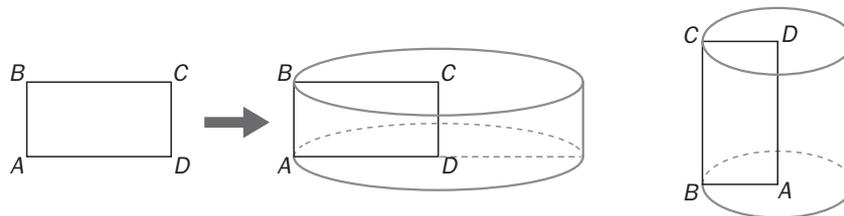
14.6 Con un cuadrado como base, ¿podrías dibujar una pirámide que fuera poliedro regular?

Con un cuadrado como base no se puede dibujar una pirámide que sea poliedro regular pues el poliedro no tendría todos sus lados iguales: la base sería un cuadrado y las caras laterales triángulos.

14.7 Dibuja un cilindro y señala sus elementos.

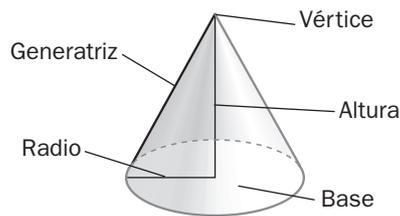


14.8 Una cartulina tiene forma de rectángulo. ¿Cuántos cilindros distintos puede generar? Dibújalos.



Puede generar dos cilindros: uno con generatriz el lado AB, y el otro con generatriz el lado BC.

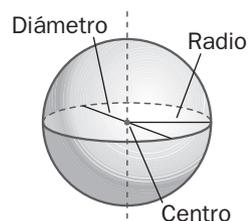
14.9 Dibuja un cono y señala sus elementos.



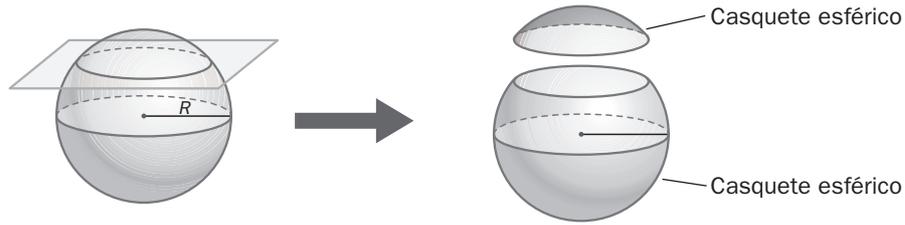
14.10 Una cartulina tiene forma de triángulo rectángulo escaleno. ¿Cuántos conos distintos puede generar?

Puede generar dos conos, eligiendo como eje de giro cada uno de los dos catetos.

14.11 Dibuja una esfera y señala sus elementos.

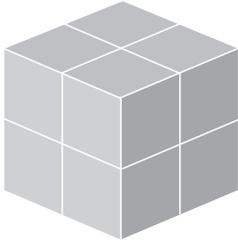


14.12 Señala los elementos que obtienes al cortar una esfera por un plano secante.



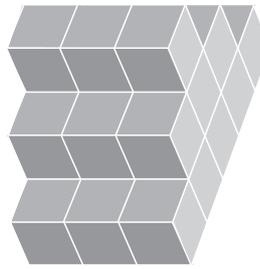
14.13 Determina el volumen de los siguientes cuerpos, tomando como unidad un cubo.

a)



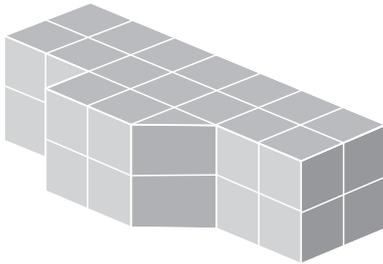
a) 8 cubos

b)



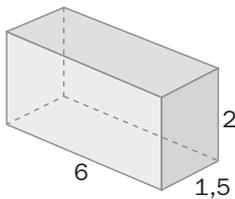
b) 27 cubos

14.14 Averigua el volumen del cuerpo de la figura si cada cubo representa 1 decímetro cúbico.



$$\text{El volumen del cuerpo es: } 7 \cdot 4 + 4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 28 + 4 + 1 = 33 \text{ dm}^3.$$

14.15 Determina el volumen de este ortoedro si las medidas vienen dadas en centímetros.



$$V = 6 \cdot 1,5 \cdot 2 = 18 \text{ cm}^3$$

14.16 Calcula el volumen, en decímetros cúbicos, de los ortoedros cuyas medidas se indican.

a) $a = 4 \text{ dm}$ $b = 2 \text{ dm}$ $c = 7 \text{ dm}$

b) $a = 0,5 \text{ dm}$ $b = 25 \text{ cm}$ $c = 1 \text{ dm}$

c) $a = 0,07 \text{ m}$ $b = 0,8 \text{ dm}$ $c = 4,25 \text{ cm}$

d) $a = 8 \text{ m}$ $b = 80 \text{ dm}$ $c = 800 \text{ cm}$

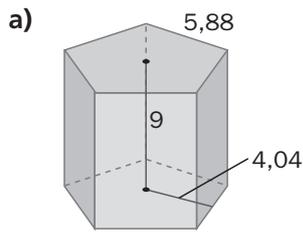
a) $V = 4 \cdot 2 \cdot 7 = 56 \text{ dm}^3$

c) $V = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,425 = 0,238 \text{ dm}^3$

b) $V = 0,5 \cdot 2,5 \cdot 1 = 1,25 \text{ dm}^3$

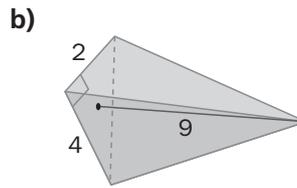
d) $V = 80 \cdot 80 \cdot 80 = 80^3 \text{ dm}^3 = 512\,000 \text{ dm}^3$

14.17 Calcula el volumen de estos poliedros si las medidas vienen expresadas en centímetros.



$$a) V = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{p \cdot a}{2} \cdot h = \frac{29,4 \cdot 4,04}{2} \cdot 9 = 534,492 \text{ cm}^3$$

$$b) V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4 \cdot 2}{2} \right) \cdot 9 = 12 \text{ cm}^3$$



14.18 La base de un prisma es un hexágono regular de lado 7 centímetros y apotema 6,06 centímetros. Halla el volumen del prisma sabiendo que su altura mide 10 centímetros.

$$V = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{p \cdot a}{2} \cdot h = \frac{42 \cdot 6,06}{2} \cdot 10 = 1272,6 \text{ cm}^3$$

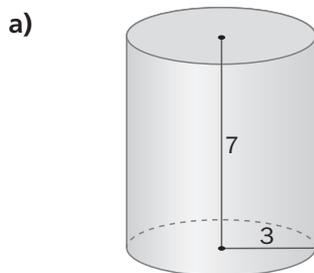
El volumen del prisma es de 1272,6 cm³.

14.19 La base de una pirámide es un cuadrado de 5 centímetros de lado, y la altura es el triple del lado de la base. Halla el volumen de la pirámide.

Altura de la pirámide: $3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}$

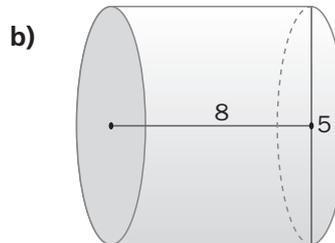
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 15 = 125 \text{ cm}^3$$

14.20 Calcula el volumen de estos cilindros sabiendo que las medidas vienen dadas en centímetros.

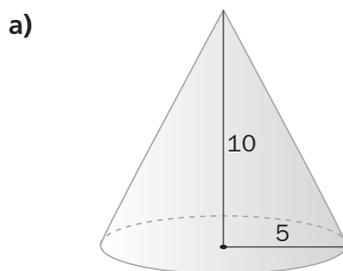


$$a) V = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 7 = 197,82 \text{ cm}^3$$

$$b) V = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 8 = 157 \text{ cm}^3$$

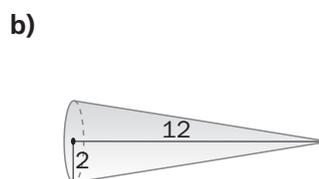


14.21 Calcula el volumen de estos conos cuyas medidas vienen dadas en centímetros.



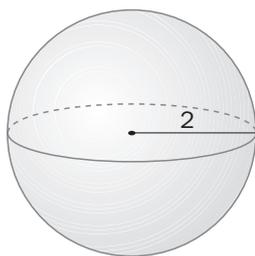
$$a) V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^2 \cdot 10 = 261,67 \text{ cm}^3$$

$$b) V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 2^2 \cdot 12 = 50,24 \text{ cm}^3$$



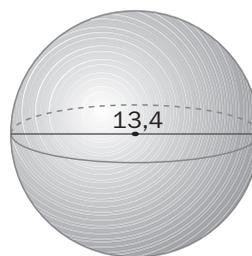
14.22 Calcula el volumen de estas esferas cuyas medidas vienen dadas en centímetros.

a)



$$a) V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2^3 = 33,493 \text{ cm}^3$$

b)

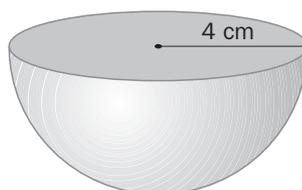


$$b) V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6,7^3 = 1259,194 \text{ cm}^3$$

14.23 El diámetro de un balón reglamentario de fútbol mide 22,3 centímetros. Calcula su volumen en decímetros cúbicos.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 11,15^3 = 5803,540 \text{ cm}^3$$

14.24 Calcula el volumen de la siguiente semiesfera.



$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^3 \right) = 133,973 \text{ cm}^3$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

14.25 De un bloque de madera con forma de ortoedro y dimensiones 90, 48 y 36 centímetros, queremos obtener piezas cúbicas del mayor tamaño posible sin que nos sobre nada de madera.

- a) ¿Cuáles son las dimensiones de las aristas de los cubos?
 b) ¿Cuántos cubos podemos obtener?

a) Para obtener a partir del ortoedro un número exacto de cubos, la arista de cada cubo tiene que ser divisor de 90, 48 y 36. Y para que sea del mayor tamaño posible, la medida de la arista tiene que ser el máximo común divisor de dichas dimensiones:

$$90 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5 \quad 48 = 2^4 \cdot 3 \quad 36 = 2^2 \cdot 3^2 \rightarrow \text{m.c.d.}(90, 48, 36) = 2 \cdot 3 = 6$$

La arista de cada cubo debe ser de 6 centímetros.

b) Volumen del bloque de madera: $90 \cdot 48 \cdot 36 = 155\,520 \text{ cm}^3$

$$\text{Volumen de cada cubo: } 6^3 = 216 \text{ cm}^3$$

$$\text{Número de cubos: } 155\,520 : 216 = 720$$

14.26 Un fabricante de zapatos, los empaqueta en cajas de dimensiones 50, 30 y 20 centímetros. Quiere transportar las cajas en contenedores cúbicos lo más pequeños posibles, de modo que en ellos quepan exactamente las cajas.

- a) ¿Cuál es el volumen del contenedor?
 b) ¿Cuántas cajas pueden transportarse en cada contenedor?

a) Para que en el contenedor cúbico quepan un número exacto de cajas, la medida de la arista del contenedor tiene que ser múltiplo de la medida de las aristas de las cajas: 50, 30 y 20 cm. Y como el contenedor ha de ser lo más pequeño posible, su arista tiene que ser el mínimo común múltiplo de 50, 30 y 20:

$$50 = 2 \cdot 5^2 \quad 30 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \rightarrow \text{m.c.m.}(50, 30, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$$

$$\text{El volumen del contenedor es: } 300^3 = 27\,000\,000 \text{ cm}^3.$$

b) Volumen de cada caja: $50 \cdot 30 \cdot 20 = 30\,000 \text{ cm}^3$

$$27\,000\,000 : 30\,000 = 900 \text{ cajas}$$

C Á L C U L O M E N T A L

14.27 Las siguientes cantidades vienen dadas en metros, y corresponden a distintas habitaciones. Calcula el volumen de cada una de ellas.

a) 4 3 3

a) $V = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 \text{ m}^3$

b) 10 8 3

b) $V = 10 \cdot 8 \cdot 3 = 240 \text{ m}^3$

c) 9 9 6

c) $V = 9 \cdot 9 \cdot 6 = 486 \text{ m}^3$

14.28 Determina el volumen de las siguientes cajas cuyas medidas vienen dadas en centímetros.

a) 34 6 3

b) 15 4 3

a) $V = 4 \cdot 6 \cdot 3 = 72 \text{ cm}^3$

b) $V = 15 \cdot 4 \cdot 3 = 180 \text{ cm}^3$

c) 5 4 23

d) 6 3 5

c) $V = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ cm}^3$

d) $V = 6 \cdot 3 \cdot 5 = 90 \text{ cm}^3$

14.29 Averigua las aristas de los ortoedros sabiendo el volumen que ocupan.

a) 24 cm^3

b) 18 cm^3

c) 30 cm^3

d) 50 cm^3

e) 200 cm^3

f) 2 cm^3

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) 2 cm, 3 cm, 4 cm

b) 6 cm, 3 cm, 1 cm

c) 5 cm, 3 cm, 2 cm

d) 5 cm, 2 cm, 5 cm

e) 10 cm, 5 cm, 4 cm

f) 2 cm, 1 cm, 1 cm

14.30 Dado el volumen y la altura de los siguientes ortoedros de base cuadrada, halla el lado de la base.

a) 100 cm^3 ; 4 cm

b) 80 cm^3 ; 5 cm

c) 108 cm^3 ; 3 cm

a) $100 : 4 = 25 \text{ cm}^2 \Rightarrow 5 \text{ cm}$

b) $80 : 5 = 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4 \text{ cm}$

c) $108 : 3 = 36 \text{ cm}^2 \Rightarrow 6 \text{ cm}$

14.31 El primer dato corresponde al área de la base de un prisma y el segundo, a la altura. Calcula el volumen de cada prisma.

a) 6 cm^2 ; 4 cm

b) 10 cm^2 ; 8 cm

c) 2 dm^2 ; 20 cm

a) 24 cm^3

b) 80 cm^3

c) 4000 cm^3

14.32 Calcula el volumen que contienen los vasos cilíndricos cuyos radios y alturas se indican.

a) Radio = 10 cm Altura = 10 cm

b) Radio = 1 dm Altura = 10 cm

c) Radio = 5 cm Altura = 4 cm

a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 10 = 3140 \text{ cm}^3$

b) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 10 = 3140 \text{ cm}^3$

c) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 4 = 314 \text{ cm}^3$

Poliedros

14.33 Calcula la suma de los ángulos de las caras que concurren en un vértice de los poliedros regulares. ¿Qué observas?

TETRAEDO: En un vértice concurren tres triángulos equiláteros; $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

CUBO: En un vértice concurren tres cuadrados; $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$

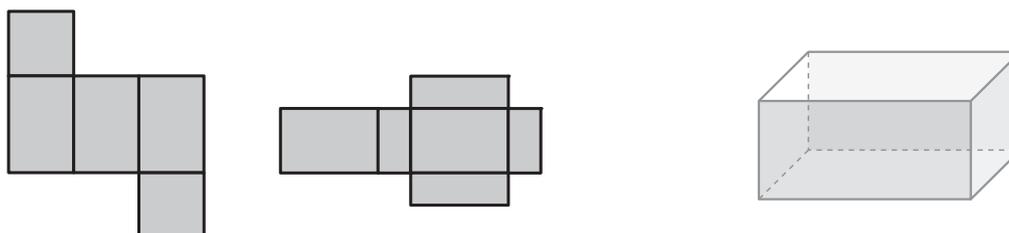
OCTAEDRO: En un vértice concurren cuatro triángulos equiláteros; $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

DODECAEDRO: En un vértice concurren tres pentágonos regulares; $108^\circ + 108^\circ + 108^\circ = 324^\circ$

ICOSAEDRO: En un vértice concurren cinco triángulos equiláteros; $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 300^\circ$

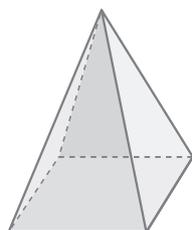
Observamos que en todos los casos la suma de los ángulos es menor de 360° .

14.34 ¿Cuál de estos dos desarrollos planos daría lugar a un ortoedro? Dibújalo.



El segundo desarrollo es el que da lugar a un ortoedro.

14.35 Si una pirámide tiene 8 aristas, ¿qué polígono es su base? Dibuja la pirámide.

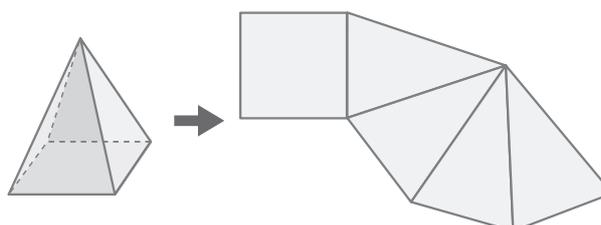


La base es un cuadrado.

14.36 ¿Existe alguna pirámide con 9 aristas? Razona la respuesta.

NO. El número de aristas de una pirámide es la suma de las aristas de la base más las aristas que no están en ella; ambos números de aristas son iguales, porque en los dos casos coinciden con el número de vértices de la base, por tanto, el número total de aristas de una pirámide siempre es par porque es el resultado de multiplicar por dos el número de vértices de la base.

14.37 Dibuja una pirámide cuya base sea un cuadrilátero y su desarrollo plano.



Cuerpos redondos

- 14.38 La altura de un cilindro mide 10 centímetros y el radio de sus bases, 4 centímetros. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo de su desarrollo plano?

ALTURA: es igual a la altura del cilindro, es decir, 10 cm.

BASE: es igual a la longitud de la circunferencia de su base, es decir, $2 \cdot \pi \cdot 4 = 25,13$ cm

- 14.39 Indica cuáles de estas figuras generan un cono al girar en torno a uno de sus lados.

- a) Un cuadrado.
- b) Un pentágono regular.
- c) Un triángulo rectángulo.
- d) Un triángulo equilátero.

Solamente el triángulo rectángulo, que puede generar dos conos diferentes, eligiendo como eje de giro cada uno de los dos catetos.

- 14.40 El radio de un cono mide 10 centímetros. ¿Cuánto mide el arco del sector circular correspondiente a su desarrollo?

La longitud del arco del sector circular del desarrollo del cono es igual a la longitud de la circunferencia de la base del mismo: $2 \cdot \pi \cdot 10 = 62,83$ cm

- 14.41 Los radios de dos esferas miden 6 y 8 centímetros, respectivamente. Si la distancia entre sus centros es de 14 centímetros, ¿cuántos puntos tienen en común?

Las esferas tienen un único punto en común, ya que son tangentes.

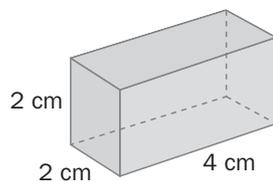
- 14.42 El diámetro de una pelota de plástico mide 12 centímetros. ¿Cuánto mide la circunferencia máxima?

La circunferencia máxima mide: $\pi \cdot 12 = 37,7$ cm

Volumen del prisma

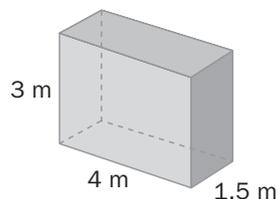
- 14.43 Calcula el volumen de las siguientes cajas.

a)



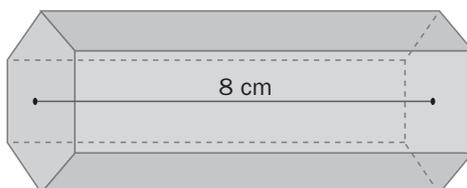
$$a) V = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16 \text{ cm}^3$$

b)



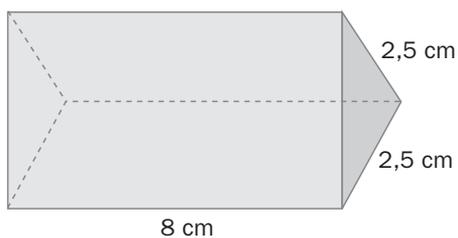
$$b) V = 4 \cdot 1,5 \cdot 3 = 18 \text{ m}^3$$

- 14.44 El área de la base de este prisma mide 226,16 centímetros cuadrados. Calcula su volumen.



$$V = A_{\text{base}} \cdot h = 226,16 \cdot 8 = 1809,28 \text{ cm}^3$$

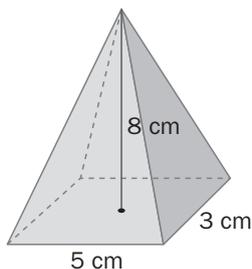
14.45 Calcula el volumen de este prisma.



$$V = A_{\text{base}} \cdot h = \left(\frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot 8 = 25 \text{ cm}^3$$

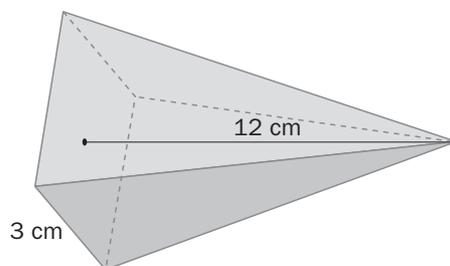
Volumen de la pirámide

14.46 Calcula el volumen de esta pirámide.



$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 40 \text{ cm}^3$$

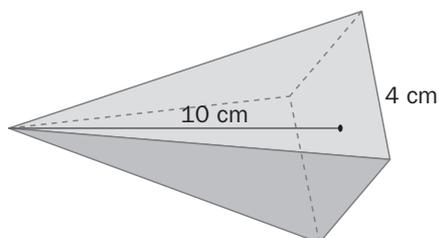
14.47 La base de la pirámide representada en la figura es un rectángulo, de largo el doble que de ancho. Calcula su volumen.



Largo de la base: $2 \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (6 \cdot 3) \cdot 12 = 72 \text{ cm}^3$$

14.48 La base de la siguiente pirámide es un cuadrado. ¿Cuál es su volumen?



$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 10 = 53,333 \text{ cm}^3$$

Volumen del cilindro y del cono

14.49 Calcula el volumen de los cilindros sabiendo que las medidas de la altura y el radio de la base son las siguientes.

a) $h = 8 \text{ cm}$ $r = 50 \text{ mm}$

b) $h = 20 \text{ cm}$ $r = 1 \text{ dm}$

c) $h = 2,5 \text{ dm}$ $r = 15 \text{ cm}$

a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 8 = 628 \text{ cm}^3$

b) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 20 = 6280 \text{ cm}^3$

c) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 15^2 \cdot 25 = 17662,5 \text{ cm}^3$

14.50 Halla el volumen de los conos sabiendo que las medidas de la altura y el radio de la base son las siguientes.

a) $h = 0,5 \text{ dm}$ $r = 1 \text{ cm}$

b) $h = 20 \text{ cm}$ $r = 1 \text{ dm}$

c) $h = \frac{2}{5}r$ $r = 50 \text{ mm}$

a) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 1^2 \cdot 5 = 5,233 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 20 = 2093,333 \text{ cm}^3$

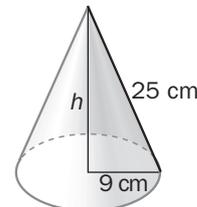
c) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 50^2 \cdot 20 = 52333 \text{ mm}^3 = 52,333 \text{ cm}^3$

14.51 Calcula el volumen de un cono cuya generatriz mide 25 centímetros y el diámetro de su base 18 centímetros.

Para calcular la altura del cono aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{25^2 - 9^2} = \sqrt{625 - 81} = \sqrt{544} = 23,32 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 9^2 \cdot 23,32 = 1977,069 \text{ cm}^3$$



Volumen de la esfera

14.52 Calcula el volumen de las esferas de radio el indicado. Expresa el resultado en centímetros cúbicos.

a) 1,1 cm

b) 1,5 dm

c) 0,05 m

a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1,1^3 = 5,572 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 15^3 = 14130 \text{ cm}^3$

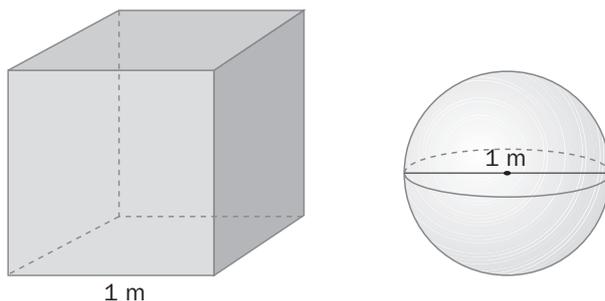
c) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3 = 523,33 \text{ cm}^3$

14.53 El diámetro interior de una esfera hueca mide medio metro. Expresa su capacidad en litros.

$$\text{Radio: } \frac{1}{2} \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m} = 2,5 \text{ dm} \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2,5^3 = 67,417 \text{ dm}^3$$

Como $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, la capacidad de esta esfera es de 67,417 litros.

- 14.54 Observa las figuras y estima cuál tiene mayor volumen, un cubo de 1 metro de arista o una esfera de 1 metro de diámetro.



Comprueba tu estimación calculando los volúmenes de ambos cuerpos.

Observando ambas figuras vemos que el cubo tiene mayor volumen que la esfera, ya que esta se podría introducir en el cubo, quedando huecos en el mismo.

$$V_{\text{cubo}} = a^3 = 1^3 = 1 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,5^3 = 0,523 \text{ m}^3$$

PROBLEMAS PARA APLICAR

- 14.55 La arista de un depósito cúbico mide 1,5 metros. ¿Con cuántos litros de agua se llenará?

$$V = a^3 = 1,5^3 = 3,375 \text{ m}^3 = 3375 \text{ dm}^3 = 3375 \text{ L}$$

El depósito se llena con 3 375 litros.

- 14.56 Para construir parte de los cimientos de un edificio se ha tenido que hacer un cilindro de 6 metros de diámetro y 5 metros de profundidad. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra se han tenido que extraer?

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 5 = 141,3 \text{ m}^3$$

- 14.57 El radio de la Tierra mide 6 369 kilómetros, y el de la Luna, 1 738 kilómetros. ¿Cuántas veces es mayor el volumen de la Tierra que el de la Luna?

$$V_{\text{Tierra}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6\,369^3 \text{ km}^3$$

$$V_{\text{Luna}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1\,738^3 \text{ km}^3$$

$$\frac{V_{\text{Tierra}}}{V_{\text{Luna}}} = \frac{6\,369^3}{1\,738^3} = 49,2$$

El volumen de la Tierra es 49,2 veces mayor que el de la Luna.

- 14.58 Calcula el volumen de este salón.



El volumen del salón es igual al de un ortoedro de 6 m de largo, 4 m de ancho y 3 m de alto, menos el volumen de la esquina, que es otro ortoedro de 1 m de largo por 1 m de ancho y 3 m de alto.

$$V_{\text{ortoedro salón}} = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{salón}} = 72 - 3 = 69 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{esquina}} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \text{ m}^3$$

- 14.59 Se han fabricado unos radiadores eléctricos para calentar recintos de entre 60 y 65 metros cúbicos. ¿Compraría un radiador de este tipo para un salón que tiene 6 metros de largo, 3,8 metros de ancho y 2,8 metros de alto?

$$V_{\text{salón}} = 6 \cdot 3,8 \cdot 2,8 = 63,84 \text{ m}^3$$

Como el volumen del salón está comprendido entre 60 y 65 m³, sí compraríamos el radiador.

- 14.60 Una torre tiene forma de pirámide hexagonal regular. El lado de la base mide 2 metros y la apotema 1,72 metros. La altura de la pirámide mide 6 metros. Halla su volumen.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{p \cdot a}{2} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 1,72}{2} \cdot 6 = 20,64 \text{ m}^3$$

- 14.61 En un recinto ferial se ha instalado una carpa, siendo la parte inferior cilíndrica y la superior cónica. El diámetro de la parte cilíndrica mide 30 metros y su altura 10 metros. La altura de la parte cónica es de 8 metros. ¿Cuál es el volumen del circo?

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 15^2 \cdot 10 = 7065 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 15^2 \cdot 8 = 1884 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{circo}} = 7065 \text{ m}^3 + 1884 \text{ m}^3 = 8949 \text{ m}^3$$

- 14.62 Un bloque de madera de forma de ortoedro tiene 1 metro de largo, 1 metro de ancho y medio metro de alto. ¿Cuál es el máximo número de bloques cúbicos de 1 decímetro de arista que se pueden obtener serrando adecuadamente el bloque?

La arista del cubo cabe 10 veces en el largo del ortoedro.

La arista del cubo cabe 10 veces en el ancho del ortoedro.

La arista del cubo cabe 5 veces en el alto del ortoedro.

El número máximo de bloques cúbicos será: $10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$.

- 14.63 El diámetro de la base de un vaso cilíndrico mide 4,5 centímetros, y la altura, 5 centímetros. Con el refresco de una botella de 1,5 litros, ¿cuántos vasos se pueden llenar?

$$V_{\text{vaso}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 2,25^2 \cdot 5 = 79,481 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{botella}} = 1,5 \text{ L} = 1,5 \text{ dm}^3 = 1500 \text{ cm}^3$$

$$1500 : 79,481 = 18,87$$

Se pueden llenar 18 vasos.

- 14.64 Las aristas de una caja de madera miden 2, 2 y 3 decímetros.

a) ¿Cuántas bolas de 1 decímetro de diámetro caben en la caja?

b) Calcula el volumen de la caja que queda sin ocupar.

a) En un piso se pueden colocar 4 bolas. Se pueden formar 3 pisos. Luego caben 12 bolas.

$$b) V_{\text{una bola}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,5^3 = 0,523 \text{ dm}^3$$

$$V_{12 \text{ bolas}} = 12 \cdot 0,523 \text{ dm}^3 = 6,276 \text{ dm}^3$$

$$V_{\text{caja}} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \text{ dm}^3$$

El volumen de la caja que queda sin ocupar es: $12 \text{ dm}^3 - 6,276 \text{ dm}^3 = 5,724 \text{ dm}^3$.

- 14.65 La altura de una torre cónica es $\frac{3}{5}$ del diámetro, que mide 8 metros. Calcula el volumen de la torre.

$$\text{Altura de la torre: } \frac{3}{5} \cdot 8 \text{ m} = 4,8 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 4,8 = 80,384 \text{ m}^3$$

14.66 Dos canicas de 1 centímetro de diámetro se guardan en un tubo del mismo diámetro y 5 centímetros de longitud.

a) ¿Qué volumen queda sin ocupar en el tubo?

b) ¿Es mayor o menor que el de una canica?

$$a) V_{\text{tubo}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 5 = 3,925 \text{ cm}^3$$

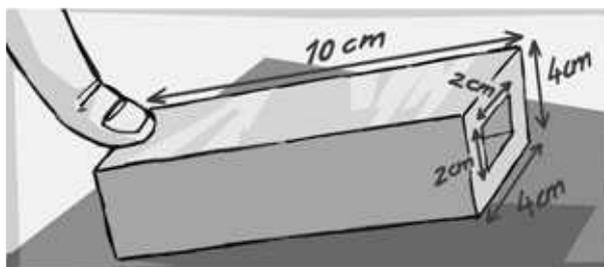
$$V_{\text{canica}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,5^3 = 0,523 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{dos canicas}} = 2 \cdot 0,523 \text{ cm}^3 = 1,046 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{sin ocupar}} = 3,925 \text{ cm}^3 - 1,046 \text{ cm}^3 = 2,879 \text{ cm}^3$$

b) El volumen que queda sin ocupar en el tubo es mayor que el de una canica.

14.67 Observa las medidas de la pieza y calcula el volumen del material del que está construida.

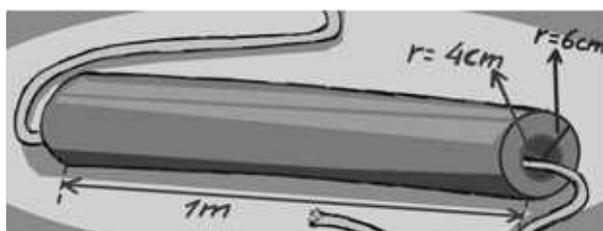


$$V_{\text{total}} = 4 \cdot 4 \cdot 10 = 160 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{agujero}} = 2 \cdot 2 \cdot 10 = 40 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{pieza}} = 160 \text{ cm}^3 - 40 \text{ cm}^3 = 120 \text{ cm}^3$$

14.68 Observa las medidas del tubo y calcula el volumen del material del que está construido.



$$V_{\text{total}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 6^2 \cdot 100 = 11\,304 \text{ cm}^3$$

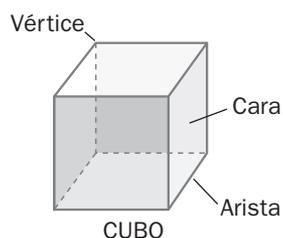
$$V_{\text{cilindro vacío}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 100 = 5\,024 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{tubo}} = 11\,304 \text{ cm}^3 - 5\,024 \text{ cm}^3 = 6\,280 \text{ cm}^3$$

REFUERZO

Prismas y pirámides

14.69 Dibuja un poliedro regular cuyas caras sean cuadrados. Señala sus elementos.

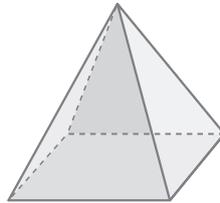


14.70 Un prisma cuya base es un rectángulo, ¿es regular? ¿Y una pirámide? Dibújalos.

Si la base de un prisma es un rectángulo el prisma no puede ser regular, porque el rectángulo no es un polígono regular.



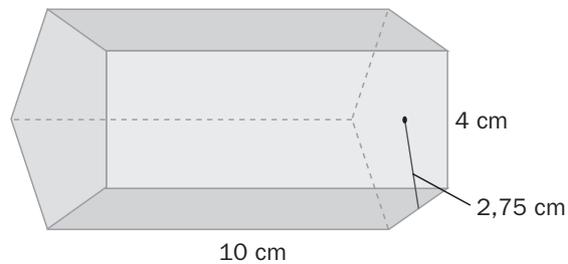
Si la base de una pirámide es un rectángulo, la pirámide no puede ser regular porque el rectángulo no es un polígono regular.



14.71 Expresa en decímetros cúbicos el volumen de un cubo de arista 0,8 metros.

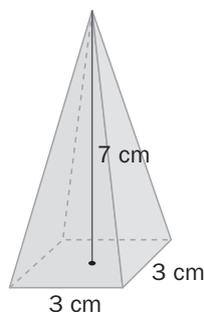
$$V = a^3 = 0,8^3 = 0,512 \text{ m}^3 = 512 \text{ dm}^3$$

14.72 Calcula el volumen de este prisma.



$$V = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{p \cdot a}{2} \cdot h = \frac{20 \cdot 2,75}{2} \cdot 10 = 275 \text{ cm}^3$$

14.73 Calcula el volumen de esta pirámide.



$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 3) \cdot 7 = 21 \text{ cm}^3$$

14.74 La base de un prisma recto es un cuadrado de 49 centímetros cuadrados, y su altura mide el triple del lado de la base. Calcula el volumen de este prisma.

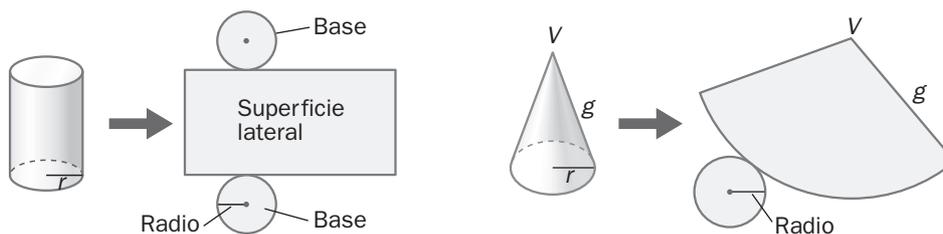
Lado de la base: $\sqrt{49} = 7 \text{ cm}$

Altura del prisma: $3 \cdot 7 \text{ cm} = 21 \text{ cm}$

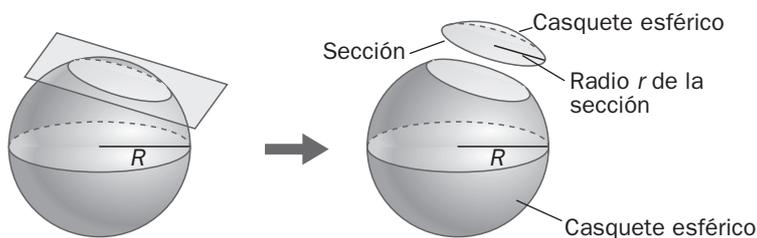
$V = A_{\text{base}} \cdot h = 49 \cdot 21 = 1029 \text{ cm}^3$

Cuerpos redondos

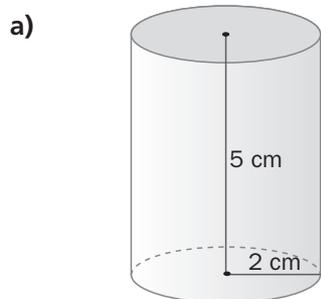
14.75 Dibuja un cilindro, un cono y sus desarrollos planos. Indica en ellos sus elementos.



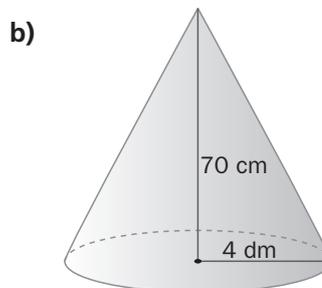
14.76 Dibuja un plano que corte una esfera y marca los dos casquetes esféricos. Señala el radio de la sección.



14.77 Determina el volumen de estos cuerpos cuyas medidas se indican en las siguientes figuras.

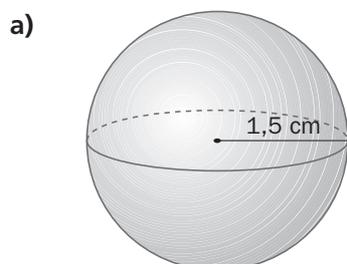


a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 2^2 \cdot 5 = 62,8 \text{ cm}^3$

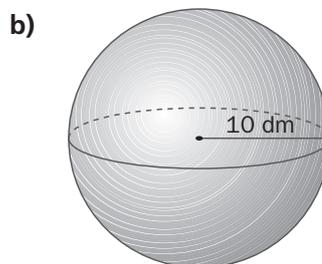


b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 40^2 \cdot 70 = 117227,667 \text{ cm}^3$

14.78 Calcula el volumen de estas esferas y expresa los resultados en centímetros cúbicos.



a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1,5^3 = 14,13 \text{ cm}^3$



b) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 100^3 = 4186666,67 \text{ cm}^3$

14.79 El diámetro de un vaso cilíndrico mide 7 centímetros y la altura 8 centímetros. Calcula su volumen.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 8 = 307,72 \text{ cm}^3$$

14.80 Se tiene una canica de 1 centímetro de radio y otra de 2 centímetros.

a) Calcula el volumen de cada canica.

b) ¿Cuántas veces es mayor el volumen de una canica respecto al de la otra?

$$a) V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1^3 = 4,187 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2^3 = 33,493 \text{ cm}^3$$

b) $33,493 : 4,187 = 8$. El volumen de la canica de radio 2 es 8 veces mayor que el de la otra canica.

AMPLIACIÓN

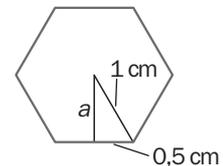
14.81 Un depósito tiene forma de prisma hexagonal regular. El lado de la base mide 1 metro, y la altura del prisma 2 metros. Se echa agua a razón de 100 litros por minuto. Calcula el tiempo que tarda en llenarse.

Para calcular la apotema, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{1^2 - 0,5^2} = \sqrt{0,75} = 0,87 \text{ m}$$

$$V = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{p \cdot a}{2} \cdot h = \frac{6 \cdot 0,87}{2} \cdot 2 = 5,22 \text{ m}^3 = 5220 \text{ dm}^3 = 5220 \text{ L}$$

$$5220 : 100 = 52,20 \text{ minutos} = 52 \text{ min } 12 \text{ seg}$$



14.82 Un recipiente cilíndrico de plomo sin tapa tiene de dimensiones exteriores las siguientes: 17 centímetros de diámetro y 16 centímetros de altura. El espesor de la base mide 6 milímetros y el de la parte lateral, 4 milímetros. ¿Cuánto pesa el recipiente si un decímetro cúbico de plomo pesa 11,4 kilogramos?

$$V_{\text{total}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 8,5^2 \cdot 16 = 3629,84 \text{ cm}^3$$

Dimensiones del cilindro vacío:

$$\text{Diámetro de la base: } 17 \text{ cm} - 2 \cdot 0,4 \text{ cm} = 17 \text{ cm} - 0,8 \text{ cm} = 16,2 \text{ cm}$$

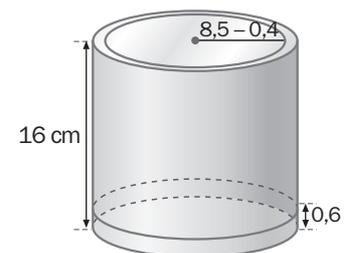
$$\text{Radio de la base: } 16,2 \text{ cm} : 2 = 8,1 \text{ cm}$$

$$\text{Altura: } 16 \text{ cm} - 0,6 \text{ cm} = 15,4 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cilindro vacío}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 8,1^2 \cdot 15,4 = 3172,64 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{material}} = 3629,84 \text{ cm}^3 - 3172,64 \text{ cm}^3 = 457,2 \text{ cm}^3 = 0,4572 \text{ dm}^3$$

$$\text{Peso del recipiente: } 0,4572 \cdot 11,4 = 5,21 \text{ kilogramos.}$$



14.83 Una pelota de plástico tiene 50 milímetros de diámetro exterior y 4 milímetros de espesor. ¿Cuántos kilogramos de plástico necesita una fábrica que produce 25 000 pelotas, sabiendo que 1 decímetro cúbico de plástico pesa 0,85 kilogramos?

$$V_{\text{pelota}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2,5^3 = 65,417 \text{ cm}^3$$

Dimensiones de la esfera vacía:

$$\text{Diámetro: } d = 5 - 2 \cdot 0,4 = 5 - 0,8 = 4,2 \text{ cm} \Rightarrow \text{Radio: } r = 4,2 \text{ cm} : 2 = 2,1 \text{ cm}$$

$$V_{\text{esfera vacía}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2,1^3 = 38,773 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{material}} = 65,417 \text{ cm}^3 - 38,773 \text{ cm}^3 = 26,644 \text{ cm}^3 = 0,026644 \text{ dm}^3$$

$$\text{Masa de cada pelota: } 0,026644 \cdot 0,85 = 0,0226 \text{ kilogramos.}$$

$$\text{Masa total: } 0,0226 \text{ kg} \cdot 25\,000 = 565 \text{ kg de plástico necesita.}$$

14.84 El área total de un cubo hueco es 216 decímetros cuadrados. ¿Podrá contener este cubo un número exacto de ortoedros de base cuadrada de lado 2 centímetros y 3 centímetros de altura?

Área de una cara: $216 : 6 = 36 \text{ dm}^2$

Longitud de la arista: $\sqrt{36} = 6 \text{ dm} = 60 \text{ cm}$

La arista del cubo es múltiplo de 2 y de 3: a lo largo caben 30 ortoedros; a lo ancho, 30, y a lo alto, 20.

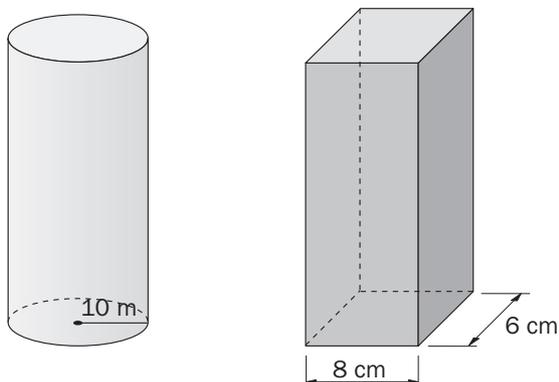
El cubo sí puede contener un número exacto de ortoedros: $30 \cdot 30 \cdot 20 = 18\,000$ ortoedros.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

14.85 Midiendo la lluvia

Paco y su vecino han colocado en sus tierras recipientes como los que aparecen en la figura, para medir el agua que cae cuando llueve.

Calcula la altura alcanzada por el agua en cada recipiente tras una tormenta en la que cayeron 15 litros por metro cuadrado.



Primera figura: Habrá recogido $\frac{100\pi \cdot 15}{10\,000} = 0,15\pi$ litros = $150\pi \text{ cm}^3$

Aplicando la fórmula del volumen de un cilindro:

$$V = \pi \cdot 10^2 \cdot h = 150\pi$$

Despejando el valor de la altura:

$$h = \frac{150\pi}{100\pi} = 1,5 \text{ cm}$$

Segunda figura: Habrá recogido $\frac{6 \cdot 8 \cdot 15}{10\,000} = 0,072$ litros = 72 cm^3

Aplicando la fórmula del volumen de un ortoedro:

$$V = 8 \cdot 6 \cdot h = 72$$

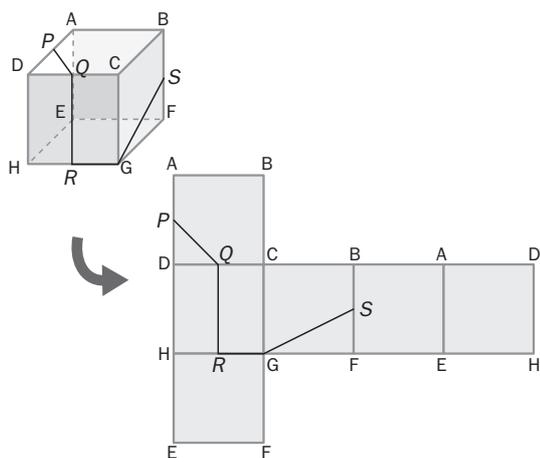
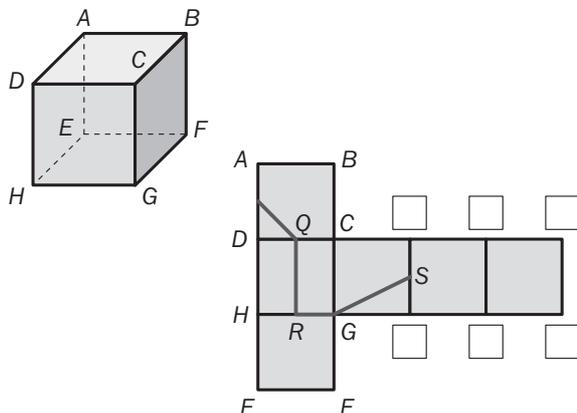
Despejando el valor de la altura:

$$h = \frac{72}{48} = 1,5 \text{ cm}$$

14.86 Caminos de hormigas

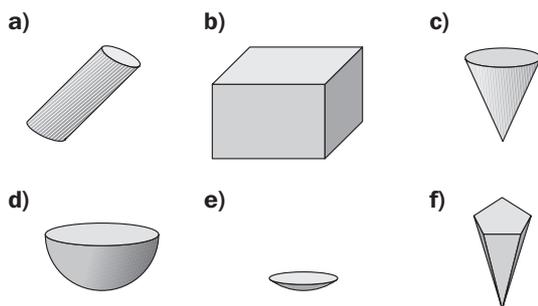
La figura representa un cubo y su desarrollo.

Señala sobre el desarrollo los vértices que faltan por nombrar, y sobre el cubo, el trayecto $PQRGS$ que ha seguido una hormiga al caminar sobre su superficie.



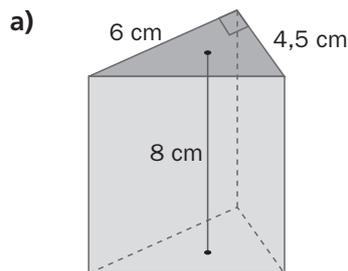
AUTOEVALUACIÓN

14.A1 Indica qué tipo de cuerpo geométrico representa cada una de las siguientes figuras.

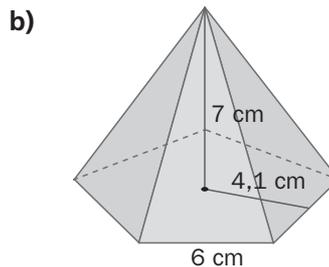


- a) Cilindro
- b) Ortoedro
- c) Cono
- d) Semiesfera
- e) Casquete esférico
- f) Pirámide

14.A2 Calcula el volumen de los siguientes poliedros.



$$a) V = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{4,5 \cdot 6}{2} \cdot 8 = 108 \text{ cm}^3$$



$$b) V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4,1}{2} \cdot 7 = 143,5 \text{ cm}^3$$

14.A3 El diámetro de un cono mide 1,2 decímetros. La altura mide los $\frac{3}{4}$ del diámetro. Determina el volumen de este cono.

$$d = 1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm} \Rightarrow r = 6 \text{ cm}$$

$$h = \frac{3}{4} \cdot 12 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 6^2 \cdot 9 = 339,12 \text{ cm}^3$$

14.A4 Un recipiente de plástico tiene forma de semiesfera, de 24 centímetros de diámetro. Halla el volumen de líquido que puede contener y exprésalo en centímetros cúbicos, y su capacidad, en litros.

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot 3,14 \cdot 12^3 = 3617,28 \text{ cm}^3 \cong 3,617 \text{ dm}^3 = 3,6 \text{ L}$$

14.A5 Las medidas de una piscina son 50 metros, 21 metros y 18 decímetros. Se llena hasta los cuatro quintos de su capacidad. ¿Cuántos metros cúbicos de agua se necesitarán para llenarla?

$$V = 50 \cdot 21 \cdot 1,8 \text{ m}^3 = 1890 \text{ m}^3$$

$$\text{Los cuatro quintos: } \frac{4}{5} \cdot 1890 \text{ m}^3 = 1512 \text{ m}^3$$

Se necesitan 1512 m³ para llenar la piscina.

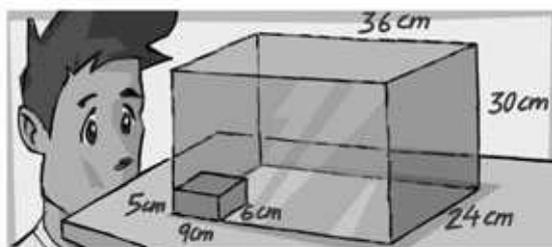
14.A6 Un gran depósito de agua de forma cilíndrica de 10 metros de diámetro y 8 metros de altura, abastece a otros depósitos más pequeños de forma cúbica y arista 1,5 metros. ¿A cuántos depósitos puede abastecer hasta llenarlos de agua?

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 8 \text{ m}^3 = 628 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 = 1,5^3 \text{ m}^3 = 3,375 \text{ m}^3$$

$$628 : 3,375 = 186 \text{ depósitos}$$

14.A7 ¿Cuántos paquetes se pueden colocar en la caja del dibujo?



$$V_{\text{caja}} = B \cdot h = 36 \cdot 24 \cdot 30 = 25920$$

$$V_{\text{paquete}} = B \cdot h = 9 \cdot 6 \cdot 5 = 270$$

El número de paquetes que caben en la caja son: $25920 : 270 = 96$.

Jugando con las matemáticas

CONSTRUYENDO RECIPIENTES

Tenemos una cartulina rectangular que mide 40 por 60 centímetros. Todos sabemos que si la enrollamos obtenemos un cilindro. Claro que dependiendo de cómo la enrollemos, por el lado más largo o por el más corto, los cilindros que conseguimos son diferentes. Pero... ¿tienen los dos el mismo volumen?

$$\left. \begin{array}{l} L_{\text{base}} = 60 \text{ cm} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r = 60 \Rightarrow r = 9,55 \text{ cm} \\ h = 40 \text{ cm} \end{array} \right\} V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 9,55^2 \cdot 40 = 11,455 \text{ cm}^3$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{\text{base}} = 40 \text{ cm} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r = 40 \Rightarrow r = 6,37 \text{ cm} \\ h = 60 \text{ cm} \end{array} \right\} V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 6,37^2 \cdot 60 = 7\,645 \text{ cm}^3$$

Tienen diferente volumen.