4 Proporcionalidad

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir entre magnitudes directa e inversamente proporcionales.
- Resolver distintas situaciones sobre proporcionalidad directa e inversa con dos o más magnitudes.
- Hacer repartos directa e inversamente proporcionales.
- Calcular porcentajes.
- Calcular directamente aumentos y disminuciones porcentuales.
- Resolver distintos ejercicios sobre porcentajes.

Antes de empezar

1.Proporción numérica.....pág. 62
Razón entre dos números
Proporción numérica

2.Proporcionalidad directa.....pág. 64
Razón de proporcionalidad
Regla de tres directa
Reducción a la unidad

3.Proporcionalidad inversa.....pág. 66
Razón de proporcionalidad
Regla de tres inversa
Reducción a la unidad

4.Proporcionalidad compuesta.....pág. 68
Proporcionalidad compuesta

5.Repartos proporcionales.....pág. 70
Directamente proporcionales
Inversamente proporcionales

6.Porcentajes ..... pág. 72
Tanto por ciento de una cantidad
Tanto por ciento correspondiente a una proporción

7.Variaciones porcentuales ..... pág. 74
Aumentos porcentuales
Disminuciones porcentuales
Encadenamiento de aumentos y Disminuciones porcentuales.

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

Antes de empezar

Elaborar una receta de cocina es una actividad de magnitudes directamente proporcionales

Calcular el precio de una excursión es una actividad de magnitudes inversamente proporcionales

Planificar un trabajo para acabarlo a tiempo es una actividad de proporcionalidad compuesta

Repartir los beneficios de un trabajo entre los realizadores es un reparto directamente proporcional

Repartir dinero entre personas según sus necesidades es un reparto inversamente proporcional

Para medir la capacidad de un pantano o de un depósito se utilizan porcentajes

Para calcular la subida salarial de los trabajadores se aplica un aumento porcentual

Las rebajas en supermercados y comercios se calculan aplicando una disminución porcentual

Las variaciones en el precio de la vivienda se expresan también mediante porcentajes

Algunas aplicaciones: ofertas de supermercados

Continuamente vemos distintas ofertas en supermercados y comercios que intentan atraer la atención del consumidor:

- Llévese 3 y pague 2.
- La segunda unidad a mitad de precio.
- Cuatro por el precio de tres.
- 15% de descuento en todos los productos.

En esta unidad obtendrás los conocimientos necesarios para saber la que más te interesa.

1. Proporción numérica

Razón entre dos números

Recordando lo visto en el curso anterior, una **razón** entre dos números a y b es el cociente entre a y b.

Razón entre a y b $= \frac{a}{b}$.

En mi clase hay 18 chicas y 12 chicos. ¿Cuál es la razón entre chicas y chicos? ¿Y entre chicos y chicas?

Razón entre chicas y chicos

$$\frac{\text{chicas}}{\text{chicos}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Por cada tres chicas hay dos chicos.

Razón entre chicos y chicas

$$\frac{\text{chicos}}{\text{chicas}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Por cada dos chicos hay tres chicos.

Proporción numérica

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas.

En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c\,.$$

a y d se llaman **extremos**, b y c **medios**.

La siguiente tabla indica la cantidad de agua registrada en dos ciudades A y B, en un año completo y en un mes. Comparar las razones del agua del mes de enero y de todo el año.

	Año	Enero
Ciudad A	1200	150
Ciudad B	480	80

Ciudad A: $\frac{\text{enero}}{\text{año}} = \frac{150}{1200} = \frac{1}{8}$

Ciudad B: $\frac{\text{enero}}{\text{año}} = \frac{80}{480} = \frac{1}{6}$

Las razones obtenidas para ambas ciudades son distintas, por tanto la expresión:

$$\frac{150}{1200} = \frac{80}{480}$$

no es una proporción.

No es se verifica que:

$$150 \cdot 480 = 1200 \cdot 80$$

$$72000 \neq 96000$$

EJERCICIOS resueltos

1. Un equipo ha marcado 68 goles y ha encajado 44. ¿Cuál es la razón entre las dos cantidades?

Razón entre goles marcados y goles encajados: $\frac{68}{44} = \frac{17}{11} = 1,55$

Razón entre goles encajados y goles marcados: $\frac{44}{68} = \frac{11}{17} = 0,65$

2. Calcular el valor de "x" para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

	Año	Enero
Ciudad A	x	150
Ciudad B	480	80

$$\frac{150}{x} = \frac{80}{480} \Rightarrow 150 \cdot 480 = 80 \cdot x \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 480}{80} = 900$$

3. Calcular el valor de "x" para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

	Año	Enero
Ciudad A	1200	x
Ciudad B	480	80

$$\frac{x}{1200} = \frac{80}{480} \Rightarrow x \cdot 480 = 1200 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 80}{480} = 200$$

4. Calcular el valor de "x" para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

	Año	Enero
Ciudad A	1200	150
Ciudad B	x	80

$$\frac{150}{1200} = \frac{80}{x} \Rightarrow 150 \cdot x = 1200 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 80}{150} = 640$$

5. Calcular el valor de "x" para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

	Año	Enero
Ciudad A	1200	150
Ciudad B	480	x

$$\frac{150}{1200} = \frac{x}{480} \Rightarrow 150 \cdot 480 = 1200 \cdot x \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 480}{1200} = 60$$

2. Proporcionalidad directa

Constante de proporcionalidad

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el cociente o razón entre estos dos valores es siempre constante. A esta cantidad se le llama **constante o razón de proporcionalidad directa**.

Razón de proporcionalidad: $r = \frac{m_2}{m_1}$.

Si 1 kilogramo de manzanas vale 1,80 euros, ¿cuál será el precio de la compra según el peso?

Número de kilos	Precio	Razón de proporcional.
1	1,80	1,80/1=**1,80**
2	3,60	3,60/2=**1,80**
3	5,40	5,40/3=**1,80**
4	7,20	7,20/4=**1,80**
5	9,00	9,00/5=**1,80**

Al dividir cualquier valor de la segunda magnitud por el valor de la primera magnitud se obtiene el mismo cociente.

Regla de tres directa

Una forma muy fácil de resolver una actividad de proporcionalidad directa es un procedimiento llamado **regla de tres**.

Consiste en aprovechar la razón o constante de proporcionalidad directa para calcular el cuarto término.

Si 8 kilos de manzanas valen 10,40 euros, ¿cuánto costarán 13 kilos?

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº kilos		**2ª magnitud** euros
8	----------	**10,40**
13	----------	**x**

$$\frac{10,40}{8} = \frac{x}{13} \Rightarrow x = \frac{10,40 \cdot 13}{8} = 16,90$$

Solución: **16.90 euros**.

Reducción a la unidad

Sin embargo la regla de tres se convierte en un procedimiento mecánico, que aunque permite resolver de forma fácil cualquier actividad, no se razona de forma conveniente su resolución.

Otro procedimiento que podemos llamar de **reducción a la unidad**, consiste en calcular el valor de la segunda magnitud correspondiente a la unidad de la primera. Este valor es el que se ha llamado anteriormente constante de proporcionalidad directa. A partir de aquí es más fácil calcular el valor final de la segunda magnitud.

Si 8 kilos de manzanas valen 10,40 euros, ¿cuánto costarán 13 kilos?

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº kilos		**2ª magnitud** euros
8	---------	**10,40**
↓ : 8		**↓ : 8**
1	----------	**1,30**
↓ x 13		**↓ x 13**
13	----------	**16,90**

Solución: **16.90 euros**.

EJERCICIOS resueltos

6. Un coche ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 minutos. Calcula el tiempo que tardará en recorrer en el mismo circuito 40 vueltas.

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº vueltas		2ª magnitud minutos
60	----------	105
40	----------	x

$$\frac{105}{60} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = \frac{105 \cdot 40}{60} = 70$$

Solución: 70 minutos.

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº vueltas		2ª magnitud minutos
60	---------	105
↓ : 60		↓ : 60
1	----------	1,75
↓ x 40		↓ x 40
40	----------	70

Solución: 16.90 euros.

7. Si 12 bolas de acero iguales tienen un peso de 7200 gramos, ¿cuánto pesarán 50 bolas iguales a las anteriores?

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº bolas		2ª magnitud gramos
12	----------	7200
50	----------	x

$$\frac{7200}{12} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = \frac{7200 \cdot 50}{12} = 30000$$

Solución: 30000 gramos = 30 kg.

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº bolas		2ª magnitud gramos
12	---------	7200
↓ : 12		↓ : 12
1	----------	600
↓ x 50		↓ x 50
50	----------	30000

Solución: 30000 gramos = 30 kg.

8. A cierta hora del día un palo de 1,5 metros de largo proyecta una sombra de 60 centímetros. ¿Cuánto mide un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 2,40 metros?

Regla de tres directa

1ª magnitud sombra m.		2ª magnitud altura m.
0,60	----------	1,5
2,40	----------	x

$$\frac{1,5}{0,60} = \frac{x}{2,40} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 2,40}{0,60} = 6$$

Solución: 6 metros.

Reducción a la unidad

1ª magnitud sombra m.		2ª magnitud altura m.
0,60	---------	1,5
↓ : 0,60		↓ : 0,60
1	----------	2,5
↓ x 2,40		↓ x 2,40
2,40	----------	6

Solución: 6 metros.

3. Proporcionalidad inversa

Constante de proporcionalidad

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el producto de estos dos valores es siempre constante. A este producto se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Razón de proporcionalidad: $m_1 \cdot m_2$.

Regla de tres inversa

Una forma muy fácil de resolver una actividad de proporcionalidad inversa es un procedimiento llamado regla de tres.

Consiste en aprovechar la constante de proporcionalidad inversa para calcular el cuarto término.

Reducción a la unidad

Sin embargo la regla de tres se convierte en un procedimiento mecánico, que aunque permite resolver de forma fácil cualquier actividad, no se razona de forma conveniente su resolución.

Otro procedimiento que podemos llamar de reducción a la unidad, consiste en calcular el valor de la segunda magnitud correspondiente a la unidad de la primera. Este valor es el que se ha llamado anteriormente constante de proporcionalidad inversa. A partir de aquí es más fácil calcular el valor final de la segunda magnitud.

Una alumna compra un regalo de 72 euros para una compañera de la clase. ¿Cuánto tendrán que pagar según el número de compañeros que participen?

Núm. de personas	Precio	Constante de proporcional.
1	72	$1 \cdot 72 = \mathbf{72}$
2	36	$2 \cdot 36 = \mathbf{72}$
3	24	$3 \cdot 24 = \mathbf{72}$
4	18	$4 \cdot 18 = \mathbf{72}$
5	14,40	$5 \cdot 14{,}40 = \mathbf{72}$

Al multiplicar los valores correspondientes a las dos magnitudes se obtiene se obtiene el mismo producto.

18 alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº personas		**2ª magnitud** euros
18	----------	**6**
24	----------	**x**

$$18 \cdot 6 = 24 \cdot x \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 6}{24} = 4{,}50$$

Solución: **16,90 euros**.

18 alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº personas		**2ª magnitud** euros
18	----------	**6**
↓ **: 18**		↓ **x 18**
1	----------	**108**
↓ **x 24**		↓ **: 24**
24	----------	**4,50**

Solución: **16,90 euros**.

EJERCICIOS resueltos

9. Un coche circulando a 90 km/h ha tardado 12 horas en realizar un viaje. ¿Cuánto tiempo tardará en el mismo trayecto a una velocidad de 80 km/h?

Regla de tres inversa

1ª magnitud Km/h		2ª magnitud horas
90	----------	12
80	----------	x

$$90 \cdot 12 = 80 \cdot x \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 12}{80} = 13{,}5$$

Solución: 13,5 horas.

Reducción a la unidad

1ª magnitud Km/h		2ª magnitud horas
90	----------	12
↓ : 90		↓ x 90
1	----------	1080
↓ x 80		↓ : 80
80	----------	13,5

Solución: 13,5 horas.

10. 6 fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, ¿cuánto tiempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?

Regla de tres inversa

1ª magnitud fotocopiadoras		2ª magnitud horas
6	----------	6
4	----------	x

$$6 \cdot 6 = 4 \cdot x \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$$

Solución: 9 horas.

Reducción a la unidad

1ª magnitud fotocopiadoras		2ª magnitud horas
6	----------	6
↓ : 6		↓ x 6
1	----------	36
↓ x 4		↓ : 80
4	----------	9

Solución: 9 horas.

11. Al repartir una cantidad de euros entre 7 personas cada una recibe 12 euros. ¿Cuánto recibirían si el reparto se hiciera entre 6 personas?

Regla de tres inversa

1ª magnitud personas		2ª magnitud euros
7	----------	12
6	----------	x

$$7 \cdot 12 = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 12}{6} = 14$$

Solución: 14 euros.

Reducción a la unidad

1ª magnitud personas		2ª magnitud euros
7	----------	12
↓ : 7		↓ x 7
1	----------	84
↓ x 6		↓ : 6
6	----------	14

Solución: 14 euros.

4. Proporcionalidad compuesta

Proporcionalidad compuesta

Una actividad de proporcionalidad compuesta relaciona más de dos magnitudes que pueden ser directa o inversamente proporcionales.

Para resolver una actividad de proporcionalidad compuesta se hace de forma ordenada con el procedimiento de reducción a la unidad.

Procedimiento de resolución:

En primer lugar se deja fija la segunda magnitud y se relaciona la primera con la tercera.

En segundo lugar se deja fija la primera magnitud y se relaciona la segunda con la tercera.

Tres motores iguales funcionando 6 horas necesitan 9000 litros de agua para refrigerarse. ¿Cuántos litros de agua necesitarán 5 motores funcionando 8 horas?

1ª magnitud motores		**2ª magnitud** horas		**3ª magnitud** litros
3	----------	6	----------	9000
↓ : 3		↓		↓ : 3
1	----------	6	----------	3000
↓ x 5		↓		↓ x 5
5	----------	6	----------	15000
↓		↓ : 6		↓ : 6
5	----------	1	----------	2500
↓		↓ x 8		↓ x 8
5	----------	8	----------	20000

Solución: **20000 litros de agua**.

1ª magnitud: número de motores.
2ª magnitud: número de horas.
3ª magnitud: número de litros.

Se deja fija la segunda magnitud.

La primera y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Más motores necesitarán más litros de agua para refrigerarse.

Se deja fija la primera magnitud.

La segunda y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Si funcionan durante más horas necesitarán más litros de agua para refrigerarse.

Tres obreros trabajando 8 horas diarias realizan un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando 9 horas?

1ª magnitud obreros		**2ª magnitud** horas		**3ª magnitud** días
3	----------	8	----------	15
↓ : 3		↓		↓ x 3
1	----------	8	----------	45
↓ x 5		↓		↓ : 5
5	----------	8	----------	9
↓		↓ : 8		↓ x 8
5	----------	1	----------	72
↓		↓ x 9		↓ : 9
5	----------	9	----------	8

Solución: **8 días**.

1ª magnitud: número de obreros.
2ª magnitud: número de horas.
3ª magnitud: número de días.

Se deja fija la segunda magnitud.

La primera y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Más obreros tardarán menos días en realizar el trabajo.

Se deja fija la primera magnitud.

La segunda y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Si trabajan más horas diarias tardarán menos días en realizar el trabajo.

EJERCICIOS resueltos

12. Tres grifos llenan un depósito de 10 m^3 en 5 horas. ¿Cuánto tardarán en llenar un depósito de 8 m^3 dos grifos iguales a los anteriores?

La primera y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Más grifos tardarán menos tiempo en llenar el depósito.

La segunda y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Si el depósito es más grande se tardará más tempo en llenarlo.

1ª magnitud grifos		2ª magnitud metros cúbicos		3ª magnitud horas
3	----------	10	----------	5
↓ : 3		↓		↓ x 3
1	----------	10	----------	15
↓ x 2		↓		↓ : 2
2	----------	10	----------	7,5
↓		↓ : 10		↓ : 10
2	----------	1	----------	0,75
↓		↓ x 8		↓ x 8
2	----------	8	----------	6

Solución: 6 horas.

13. Con 12 kilos de pienso 9 conejos comen durante 6 días. ¿Cuántos días tardarán 4 conejos en comerse 8 kilos de pienso?

La primera y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Más kilos de pienso supone alimento para más días.

La segunda y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Más conejos comiendo tardarán menos días en comerse el pienso.

1ª magnitud Kilos de pienso		2ª magnitud conejos		3ª magnitud días
12	----------	9	----------	6
↓ : 12		↓		↓ : 12
1	----------	9	----------	0,5
↓ x 8		↓		↓ x 8
8	----------	9	----------	6
↓		↓ : 9		↓ x 9
8	----------	1	----------	36
↓		↓ x 4		↓ : 4
8	----------	4	----------	9

Solución: 9 días.

5. Repartos proporcionales

Directamente proporcionales

Se va a repartir una cantidad en varias partes con unas condiciones determinadas.

Cada una de las partes debe recibir una cantidad directamente proporcional a unos valores iniciales.

A mayor valor inicial de una parte le corresponderá mayor cantidad en el reparto.

1. En primer lugar hay que sumar los valores iniciales de cada una de las partes.

2. A continuación se divide la cantidad a repartir entre la suma obtenida.

3. Por último se multiplica el cociente obtenido por los valores iniciales de cada una de las partes.

Dos amigas juntan 1,20 y 1,80 euros que tenían para comprar un paquete de pegatinas de una serie de dibujos animados. El paquete contiene 120 pegatinas. ¿Cómo deben repartírselas de forma justa?

1. Se suman los valores iniciales:

$$1{,}20 + 1{,}80 = 3$$

2. Se divide 120 entre 3

$$120 : 3 = 40$$

3. Se multiplican los valores iniciales por 40.

$$1{,}20 \cdot 40 = \mathbf{48\ pegatinas}$$
$$1{,}80 \cdot 40 = \mathbf{72\ pegatinas}$$

Comprobación:

$$48 + 72 = 120$$

Inversamente proporcionales

Se va a repartir una cantidad en varias partes con unas condiciones determinadas.

Cada una de las partes debe recibir una cantidad inversamente proporcional a unos valores iniciales.

A mayor valor inicial de una parte le corresponderá menor cantidad en el reparto.

Hacer un reparto inversamente proporcional a unos valores iniciales es igual que hacer un reparto directamente proporcional a los inversos de dichos valores iniciales.

1. En primer lugar se calculan los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

2. Después hay que sumar los inversos de los valores iniciales que se han calculado.

3. A continuación se divide la cantidad a repartir entre la suma obtenida.

4. Por último se multiplica el cociente obtenido por los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

Los dos camareros de un bar se reparten un bote con 136 euros de propina de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado, que ha sido respectivamente 3 y 5 días. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

1. Se suman los inversos de los valores iniciales:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

2. Se divide 136 entre 8/15

$$136 : \frac{8}{15} = \frac{2040}{8} = 255$$

3. Se multiplican los inversos de los valores iniciales por 255.

$$255 \cdot \frac{1}{3} = 85 \qquad 255 \cdot \frac{1}{5} = 51$$

Comprobación:

$$85 + 51 = 136$$

EJERCICIOS resueltos

14. Por un reportaje fotográfico tres fotógrafos cobraron 6720 euros. Del reportaje, 14 fotos eran del primer fotógrafo, 18 del segundo y 24 del tercero. ¿Qué cantidad de euros le corresponde a cada uno?

1. Se suman los valores iniciales: $14 + 18 + 24 = 56$
2. Se divide 6720 entre 56: $6720 : 56 = 120$
3. Se multiplican los valores iniciales por 120.

$120 \cdot 14 = 1680$ euros $\quad 120 \cdot 18 = 2160$ euros $\quad 120 \cdot 24 = 2880$ euros

15. Repartir 540 caramelos entre cuatro niños de forma directamente proporcional a las edades de cada uno de ellos, que son 3, 4, 5 y 6 años.

1. Se suman los valores iniciales: $3 + 4 + 5 + 6 = 18$
2. Se divide 540 entre 18: $540 : 18 = 30$
3. Se multiplican los valores iniciales por 30.

$30 \cdot 3 = 90$ caramelos $\quad 30 \cdot 4 = 120$ caramelos

$30 \cdot 5 = 150$ caramelos $\quad 30 \cdot 6 = 180$ caramelos

16. Según un testamento una fortuna de 65000 euros se reparte entre tres personas en partes inversamente proporcionales al sueldo de cada una que es 900, 1350 y 1800 euros. ¿Cuánto corresponde a cada una?

1. Se suman los inversos de los valores iniciales: $\frac{1}{900} + \frac{1}{350} + \frac{1}{1800} = \frac{13}{5400}$
2. Se divide 65000 entre 13/5400: $65000 : \frac{13}{5400} = 27000000$
3. Se multiplican los inversos de lo valores iniciales por 27000000.

$$27000000 \cdot \frac{1}{900} = 30000 \;;\; 27000000 \cdot \frac{1}{1350} = 20000 \;;\; 27000000 \cdot \frac{1}{1800} = 15000$$

17. Repartir 114 caramelos entre cuatro niños de forma inversamente proporcional a las edades de cada uno de ellos, que son 3, 4, 5 y 6 años.

1. Se suman los inversos de los valores iniciales: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$
2. Se divide 114 entre 19/20: $114 : \frac{19}{20} = 120$
3. Se multiplican los inversos de los valores iniciales por 120.

$$120 \cdot \frac{1}{3} = 40 \;;\; 120 \cdot \frac{1}{4} = 30 \;;\; 120 \cdot \frac{1}{5} = 24 \;;\; 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

6. Porcentajes

Tanto por ciento de una cantidad

Calcular el r % de una cantidad C equivale a resolver una actividad de magnitudes directamente proporcionales: "Si al valor 100 de la primera magnitud le corresponde el valor C de la segunda, entonces al valor r de la primera magnitud le corresponde el valor buscado r % de C".

100 ---------- C
r ---------- r % de C

Sin embargo al desarrollar este procedimiento se puede comprobar que para calcular el r % de C se multiplica C por r y se divide por 100.

$$r\,\%\text{ de }C = \frac{r \cdot C}{100}$$

La capacidad de un pantano es de 53 Hm^3. ¿Cuántos litros de agua tiene si está lleno en un 15%?

Regla de tres directa

1ª magnitud Porcentaje	**2ª magnitud** Hm^3
100	**53**
15	**x**

$$\frac{53}{100} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{53 \cdot 15}{100} = 7,95$$

Solución: **7,95 Hm^3 =**
= 7950000000 litros

Directamente:

$$15\%\text{ de }53 = \frac{15 \cdot 53}{100} = \mathbf{7,95}$$

Tanto por ciento correspondiente a una proporción

Calcular el % que representa una cantidad P de un total C equivale a resolver una actividad de magnitudes directamente proporcionales: "Si al valor C de la primera magnitud le corresponde el valor 100 de la segunda, entonces al valor P de la primera magnitud le corresponde el porcentaje buscado.

C ---------- 100
P ---------- ?

Sin embargo al desarrollar este procedimiento se puede comprobar que para calcular el % se divide P por C y se multiplica por 100.

$$\frac{P}{C} \cdot 100\ \%$$

En mi clase hay 32 estudiantes. Si hay 20 alumnas, ¿qué porcentaje del total representan las alumnas y los alumnos?

Regla de tres directa

1ª magnitud Estudiantes	**2ª magnitud** Porcentaje
32	**100**
20	**x**

$$\frac{100}{32} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 20}{32} = 62,5$$

Directamente:

$$\frac{20}{32} \cdot 100 = \mathbf{62,5\ \%}$$

Solución:

Alumnas: 20 de 32 → 62,5 %
Alumnos: 12 de 32 → 37,5 %

EJERCICIOS resueltos

18. a) Calcular el 32 % de 125. b) a) Calcular el 78 % de 4960.

$$32\% \text{ de } 125 = \frac{32 \cdot 125}{100} = 125 \cdot 0{,}32 = 40$$

$$78\% \text{ de } 4960 = \frac{78 \cdot 4960}{100} = 4960 \cdot 0{,}78 = 3868.8$$

19. a) ¿Qué porcentaje representa 396 de un total de 600?
b) ¿Qué porcentaje representa 3576 de un total de 4622?

$$\frac{396}{600} \cdot 100 = 66\,\% \qquad \frac{3576}{4622} \cdot 100 = 77.37\,\%$$

20. a) El 83 % de una cantidad es 9130. Calcular dicha cantidad.
b) El 12 % de una cantidad es 8,4. Calcular dicha cantidad.

$$C \cdot 0{,}83 = 9130 \Rightarrow C = \frac{9130}{0{,}83} = 11000$$

$$C \cdot 0{,}12 = 8{,}4 \Rightarrow C = \frac{8{,}4}{0{,}12} = 70$$

21. El censo electoral de una población es de 24600 personas. En unas elecciones un partido político ha obtenido el 42,5 % de los votos. ¿Cuántas personas lo han votado?

$$42{,}5\% \text{ de } 24600 = \frac{42{,}5 \cdot 24600}{100} = 24600 \cdot 0{,}425 = 10455 \text{ personas}$$

22. Una máquina fabrica al día 450 piezas de las que 18 presentan algún defecto y se desechan. ¿Qué porcentaje de piezas defectuosas fabrica la máquina?

$$\frac{18}{450} \cdot 100 = 4\,\%$$

23. El 34% de las personas asistentes a un congreso son españoles. Sabiendo que hay 85 españoles, ¿cuántas personas asisten al congreso?

$$C \cdot 0{,}34 = 85 \Rightarrow C = \frac{85}{0{,}34} = 250$$

7. Variaciones porcentuales

Aumentos porcentuales

Para aumentar una cantidad C, un r %, se calcula el r % de C y se suma el resultado a la cantidad C.

También se puede calcular directamente. Para ello se calcula el aumento que corresponde a una unidad, llamado **índice de variación**:

$$\textbf{Índice de variación: } I.V. = 1 + \frac{r}{100}$$

Para calcular el aumento que corresponde a una cantidad inicial C, bastará multiplicar C por el índice de variación.

El precio de una bicicleta era de 240 euros. A este precio hay que añadirle el 16% de I.V.A. ¿Cuál es el precio final?

Paso a paso:

$16\%\ \text{de}\ 240 = \frac{16 \cdot 240}{100} = 38,40$

$240 + 38,40 =$ **278,40 euros**

Directamente:

$I.V. = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0,16 = 1,16$

$240 \cdot 1,16 =$ **278,40 euros**

Solución: **278,40 euros**

Disminuciones porcentuales

Para disminuir una cantidad C, un r %, se calcula el r % de C y se resta el resultado a la cantidad C.

También se puede calcular directamente. Para ello se calcula la disminución que corresponde a una unidad, llamada **índice de variación**:

$$\textbf{Índice de variación: } I.V. = 1 - \frac{r}{100}$$

Para calcular el aumento que corresponde a una cantidad inicial C, bastará multiplicar C por el índice de variación.

El precio de un ordenador era de 1200 euros, pero me han hecho un 15% de descuento. ¿Cuál es el precio final?

Paso a paso:

$15\%\ \text{de}\ 1200 = \frac{15 \cdot 1200}{100} = 180$

$1200 - 180 =$ **1020 euros**

Directamente:

$I.V. = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$

$1200 \cdot 0,85 =$ **1020 euros**

Solución: **1020 euros**

Encadenamiento de aumentos y disminuciones porcentuales

Se trata ahora de aplicar de forma consecutiva dos o más aumentos o disminuciones porcentuales a una cantidad.

El primer aumento o disminución se aplicará a la cantidad inicial y el segundo a la cantidad resultante después de la primera variación.

Para aplicar un encadenamiento de aumentos y disminuciones porcentuales se calcula el índice de variación de cada variación porcentual. **La cantidad final se calcula multiplicando la cantidad inicial por los índices de variación**:

$$\textbf{CF = CI · IV1 · IV2}$$

EJERCICIOS resueltos

24. Al subir el precio de una bicicleta un 20%, el precio final es ahora de 360 euros. ¿Cuál era el precio inicial?

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$$

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow C.I. \cdot 1,20 = 360 \Rightarrow C.I. = \frac{360}{1,20} = 300 \text{ euros}$$

25. Al aumentar el precio de una bicicleta ha pasado de 450 a 504 euros. ¿Qué tanto por ciento ha subido?

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow 450 \cdot I.V. = 504 \Rightarrow I.V. = \frac{504}{450} = 1,12 = 1 + \frac{12}{100} \Rightarrow 12\%$$

26. Después de rebajar el precio de un ordenador un 8%, me ha costado 1196 euros. ¿Cuál era su precio inicial?

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 - \frac{8}{100} = 1 - 0,08 = 0,92$$

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow C.I. \cdot 0,92 = 1196 \Rightarrow C.I. = \frac{1196}{0,92} = 1300 \text{ euros}$$

27. Al rebajar el precio de un ordenador ha pasado de 1100 euros a 957 euros. ¿Qué tanto por ciento ha bajado?

$$C.I. \cdot I.V. = C.F. \Rightarrow 1100 \cdot I.V. = 957 \Rightarrow I.V. = \frac{957}{1100} = 0,87 = 1 - \frac{13}{100} \Rightarrow 13\%$$

28. Un juguete vale en una juguetería 40 euros. Durante las fiestas navideñas sube un 22% y una vez que éstas han pasado, baja un 9%. Calcular su precio final.

Aumento del 22%: Índice de variación: $I.V.1 = 1 + \frac{22}{100} = 1 + 0,22 = 1,22$

Disminución del 9%: Índice de variación: $I.V.1 = 1 - \frac{9}{100} = 1 - 0,09 = 0,91$

$$C.F. = C.I. \cdot I.V.1 \cdot I.V.2 = 40 \cdot 1,22 \cdot 0,91 = 44,41 \text{ euros}$$

29. El precio de un móvil era de 420 euros. Me han rebajado un 16%, pero después me han cargado el 16% de I.V.A. ¿Cuánto me ha costado?

Disminución del 16%: Índice de variación: $I.V.1 = 1 - \frac{16}{100} = 1 - 0,16 = 0,84$

Aumento del 16%: Índice de variación: $I.V.1 = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0,16 = 1,16$

$$C.F. = C.I. \cdot I.V.1 \cdot I.V.2 = 420 \cdot 0,84 \cdot 1,16 = 409,25 \text{ euros}$$

Para practicar

1. Se ha pagado 255 euros por la compra de 3 calculadoras. ¿Cuánto valen 7 calculadoras? ¿Y 30? ¿Y 23?

2. Un automóvil consume 56 litros de gasolina al recorrer 800 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina consumirá en un viaje de 500 kilómetros?

3. Una tubería tiene una fuga de agua y pierde 322 litros de agua cada 7 minutos. ¿En cuánto tiempo se perderán 2300 litros?

4. Se dispone de 420 litros de agua almacenados en 7 depósitos iguales. ¿Cuántos litros de agua contendrán 13 depósitos iguales a los anteriores?

5. Una máquina envasa 1200 latas de refresco en una jornada de 8 horas. ¿Cuántas latas de refresco envasará en un día que trabaje 5 horas?

6. Completar la tabla sabiendo que las dos magnitudes son directamente proporcionales:

24	8	b	40	d	6,6	f
60	a	30	c	75	e	0,25

7. Nueve personas realizan un trabajo en 16 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 8 personas?

8. Un grifo echa 20 litros de agua por minuto y tarda en llenar un depósito una hora y 30 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el mismo depósito un grifo que eche 30 litros de agua por minuto?

9. Cuatro personas tardan 40 días en pintar la pared exterior de un campo de fútbol, ¿cuántos días tardarán 5 personas en hacer el mismo trabajo?

10. Un tren circulando a 120 km/h ha tardado 6 horas en hacer un recorrido. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacer el mismo recorrido un tren que circula a una velocidad de 90 km/h?

11. Un rectángulo tiene 25 centímetros de base y 18 centímetros de altura. ¿Qué altura deberá tener un rectángulo de 15 centímetros de base para que tenga la misma superficie?

12. Completar la tabla sabiendo que las dos magnitudes son directamente proporcionales:

15	40	b	180	d	0,5	f
24	a	60	c	120	e	0,01

13. Seis obreros enlosan 1200 m^2 de suelo en 4 días. ¿Cuántos metros cuadrados de suelo enlosarán 12 obreros en 5 días?

14. En una campaña publicitaria 6 personas reparten 5000 folletos en 5 días. ¿Cuántos días tardarán 2 personas en repartir 3000 folletos?

15. Para construir 4 casas iguales en 30 días hacen falta 60 albañiles. ¿Cuántos albañiles se necesitarán para construir 6 casas en 90 días

16. Para imprimir unos folletos publicitarios, 9 impresoras han funcionado 8 horas diarias durante 40 días. ¿Cuántos días tardarán en imprimir el mismo trabajo 6 impresoras funcionando 10 horas diarias?

17. Veinte obreros han colocado durante 6 días 400 metros de cable trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 24 obreros durante 14 días para tender 700 metros de cable?

18. Repartir 2100 euros de forma directamente proporcional a:

a) 1 y 2
b) 1, 2 y 3
c) 1, 2, 3 y 4
d) 1, 2, 3, 4 y 5
e) 1, 2, 3, 4, 5 y 6

19. Cinco concursantes participan en una competición en la que tienen que encontrar objetos en el fondo de una piscina. Por orden de actuación consiguen respectivamente 8, 12, 13, 7 y 10 objetos. El premio de la prueba consiste en 150 puntos repartidos de forma proporcional a los objetos que encuentren. ¿Cuántos puntos corresponden a cada participante?

20. Tres socios pusieron en marcha un negocio aportando, 5000 euros el primero, 25000 euros el segundo y 20000 euros el tercero. El primer año se obtienen 60000 euros de beneficio, ¿cómo deben repartírselos?

21. Realizar los siguientes repartos inversamente proporcionales:
a) Repartir 144 entre 1 y 2
b) Repartir 132 entre 1, 2 y 3
c) Repartir 175 entre 1, 2, 3 y 4
d) Repartir 137 entre 1, 2, 3, 4 y 5
e) Repartir 294 entre 1, 2, 3, 4, 5 y 6

22. Tres amigos se reparten una pizza de forma inversamente proporcional a sus pesos que son respectivamente 60, 72 y 90 kilogramos. ¿Qué parte de pizza se debe comer cada uno?

23. Un profesor entrega una relación de 86 ejercicios a cuatro alumnos para que se los repartan con la condición de que cada uno resuelva una cantidad inversamente proporcional a las calificaciones obtenidas en un examen. Las calificaciones han sido 2, 4, 5 y 8. ¿Cuántos ejercicios debe resolver cada uno?

24. La factura de dos meses de luz de una familia es de 65 euros, a falta de añadir el 16 % de I.V.A. ¿Cuánto supone el I.V.A.? ¿Cuál es el precio final de la factura?

25. El 45 % de los alumnos de un instituto ha aprobado todas las asignaturas al final del curso. Sabiendo que han aprobado 234 alumnos, ¿cuántos estudiantes hay en el instituto?

26. Un trabajo realizado en un taller de automóviles vale 80 euros. Por pagarlo al contado me hacen un descuento del 7 %. ¿Cuánto me han descontado? ¿Cuánto tengo que pagar?

27. Un reloj valía 32 euros, pero el relojero me lo ha rebajado y he pagado finalmente 28.80 euros. ¿Qué % me ha rebajado?

28. Durante un incendio ha ardido el 40 % de los árboles de un bosque. Si después del incendio contamos 4800 árboles, ¿cuántos árboles había al principio?

29. El precio de un traje es de 360 euros. En las rebajas se le ha aplicado un primer descuento del 30% y después se ha vuelto a rebajar un 20%. ¿Cuál es el precio final?

30. El precio de un coche es de 11400 euros. Al comprarlo me han hecho un descuento del 22 %, pero después había que pagar un 17% de impuestos de matriculación. ¿Cuál es el precio final?

31. Un artículo que vale 50 euros tiene los siguientes cambios de precio: primero sube un 30 %, a continuación baja un 15 %, vuelve a bajar un 25 %, y por último tiene una subida del 10 %. ¿Cuál es su precio final? ¿Qué porcentaje ha variado respecto del precio inicial?

32. Un empleado ha tenido dos subidas de sueldo en un año por un porcentaje de un 5 % y un 4 % respectivamente. El sueldo final es de 2184. ¿Cuál era el sueldo a principios de año?

33. En distintos supermercados nos hemos encontrado las siguientes ofertas. Decidir razonadamente la que más interesa al consumidor:
a) Pague dos y llévese tres.
b) Pague 3 y llévese cuatro.
c) La segunda a mitad de precio.

Para saber más

Son muchas las situaciones de la vida cotidiana y las aplicaciones a cualquier rama del saber de la Proporcionalidad y los Porcentajes. Por poner algún ejemplo citamos la Ley de Gravitación Universal:

Sir Isaac Newton, (4 de enero de 1643 – 31 de marzo de 1727).

Fue un científico, físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los ***Philosophiae naturalis principia mathematica***, más conocidos como los *Principia*, donde describió la **Ley de Gravitación Universal** y estableció las bases de la Mecánica Clásica mediante las leyes que llevan su nombre.

Dice así:

La fuerza que ejerce un objeto dado con masa (m_1) sobre otro con masa (m_2) es **directamente proporcional** al producto de las masas, e **inversamente proporcional** al cuadrado de la distancia (d) que separa sus centros de gravedad.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

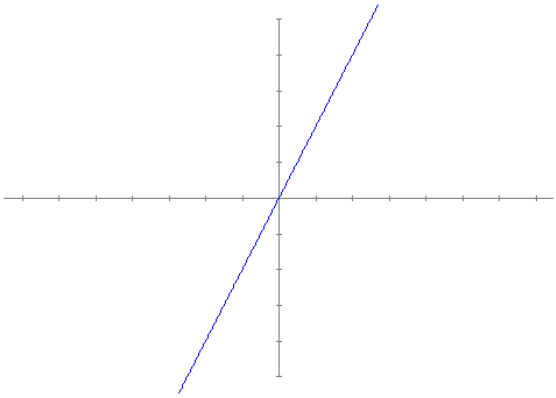
G es la constante de gravitación.
Su valor es: $G = 6'67x10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

Además en este curso estudiarás la **función de proporcionalidad directa** y la **función de proporcionalidad inversa** en la unidad 11.

La función de proporcionalidad directa es de la forma **f(x)=m·x**, donde **m** es la constante de proporcionalidad directa.

Para m=2, una tabla de valores es:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	4	6	8	10	12	14	16	18

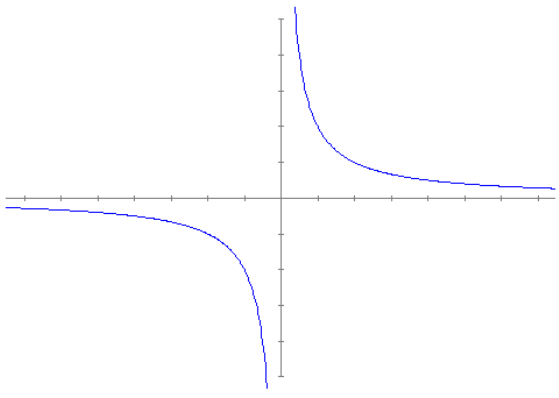


La gráfica es una línea recta.

La función de proporcionalidad inversa es de la forma **f(x)=k/x**, donde **k** es la constante de proporcionalidad inversa.

Para k=2, una tabla de valores es:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,29	0,25	0,22



La gráfica es una curva llamada hipérbola.

Recuerda lo más importante

1. Proporción numérica.

Se llama razón entre a y b al cociente $\frac{a}{b}$.

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$.

2. Proporcionalidad directa.

Magnitudes directamente proporcionales.

Si se multiplica (o divide) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

El cociente entre cada pareja de valores de ambas magnitudes es constante. Se llama razón de proporcionalidad directa.

3. Proporcionalidad inversa.

Magnitudes inversamente proporcionales.

Si se multiplica (o divide) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

El producto entre cada pareja de valores de ambas magnitudes es constante. Se llama razón de proporcionalidad inversa.

4. Proporcionalidad compuesta.

La proporcionalidad compuesta consiste en relacionar tres o más magnitudes.

Al resolver una actividad de proporcionalidad compuesta se relacionan las magnitudes de dos en dos y se mantienen constantes las demás.

5a. Repartos directamente proporcionales.

Consiste en dividir una cantidad entre varias partes de forma que cada una de ellas reciba una cantidad directamente proporcional a un valor inicial de cada parte.

Se divide la cantidad a repartir por la suma de los valores iniciales de cada parte y se multiplica el resultado obtenido por cada valor inicial.

5b. Repartos inversamente proporcionales.

Consiste en dividir una cantidad entre varias partes de forma que cada una de ellas reciba una cantidad inversamente proporcional a un valor inicial de cada parte.

Se hace el reparto de forma directamente proporcional a los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

6. Tanto por ciento.

Para aplicar un porcentaje **r %** a una cantidad **C**, se puede plantear una actividad de magnitudes directamente proporcionales.

$$r\% \text{ de } C = \frac{C \cdot r}{100} = C \cdot \frac{r}{100}$$

Con esta última fórmula se puede deducir que para calcular un porcentaje, basta multiplicar la cantidad **C** por el número **r/100**.

(Se puede aplicar la fórmula inferior sustituyendo índice de variación por r/100)

7. Variaciones porcentuales.

Para aumentar o disminuir un porcentaje **r %** a una cantidad **C**, se puede calcular el r% de C y sumar o restar esta cantidad a la cantidad inicial C.

Se puede calcular directamente la cantidad final calculando la variación correspondiente a cada unidad, llamada índice de variación, y multiplicarlo por la cantidad inicial.

Para un aumento: $I.V. = 1 + \frac{r}{100}$

Para una disminución: $I.V. = 1 - \frac{r}{100}$

Cantidad inicial x Índice de variación = Cantidad final

Autoevaluación

1. En una canalización se pierden por fugas 96 litros de agua cada 15 minutos. ¿En cuánto tiempo se perderán 288 litros?

2. Doce personas realizan un trabajo en 30 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 18 personas?

3. En una campaña publicitaria 10 personas reparten 5000 folletos en 12 días. ¿Cuánto tiempo tardarán 6 personas en repartir 2500 folletos?

4. Repartir 344 objetos de forma directamente proporcional a 10, 14 y 19.

5. Repartir 70 objetos de forma inversamente proporcional a 6 y 8.

6. A una reunión asisten 340 personas. De ellas, el 70 % son mujeres. ¿Cuántas mujeres hay en la reunión?

7. El 75 % de los árboles de un bosque son pinos. Sabiendo que hay 900 pinos, ¿cuántos árboles hay en el bosque?

8. El pasado curso había en el instituto 750 alumnos y este año ha aumentado un 12 %. ¿Cuántos alumnos hay ahora?

9. La población de mi pueblo ha pasado en un año de 2600 a 2678 habitantes. ¿Qué tanto por ciento ha aumentado?

10. El precio de una bicicleta era de 360 euros. En primer lugar se le aplica un aumento del 25% y después una rebaja del 15%. ¿Cuál es su precio final?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 595 €, 2550 €, 1955 €
2. 35 litros
3. 50 minutos
4. 780 litros
5. 750 latas
6. a=20, b=12, c=100, d=30, e=16,5, f=0,1
7. 18 días
8. 60 minutos
9. 32 días
10. 8 horas
11. 30 centímetros
12. a=9, b=6, c=2, d=3, e=720, f=36000
13. 3000 metros^2
14. 9 días
15. 30 albañiles
16. 48 días
17. 10 horas
18. a) 700 y 1400 €
    b) 350, 700 y 1050 €
    c) 210, 420, 630 y 840 €
    d) 140, 280, 420, 560 y 700 €
    e) 100, 200, 300, 400, 500 y 600 €
19. 24, 36, 39, 21 y 30 puntos
20. 6000, 30000 y 24000 euros
21. a) 96 y 48
    b) 72, 36 y 24
    c) 84, 42, 28 y 21
    d) 60, 30, 20, 15 y 12
    d) 120, 60, 40, 30, 24 y 20
22. 2/5, 1/3 y 4/15 de pizza
23. 40, 20, 16 y 10 ejercicios
24. I.V.A.: 10,40 €.
    Precio final: 75,40 €
25. 520 estudiantes
26. Descuento: 5,6 €
    Precio final: 74,4 €
27. 10 %
28. 8000 árboles
29. 201,60 €
30. 10403,64 €
31. Precio final: 45,58 €
    Descuento: 8,8375 %
32. 2000 euros
33. a) paga: 66,67%, rebaja: 33,33%
    b) paga: 75%, rebaja: 25%
    c) paga: 75%, rebaja: 25 %

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 45 minutos
2. 20 días
3. 10 días
4. 80, 112 y 152 objetos respectivamente
5. 40 y 30 objetos respectivamente
6. 238 mujeres
7. 1200 árboles
8. 840 alumnos
9. 3 %
10. 382,5 euros

No olvides enviar las actividades al tutor ▸