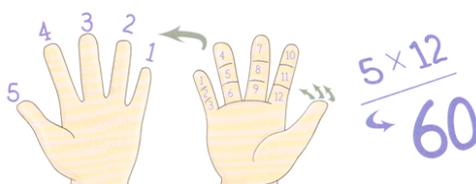


# El sistema sexagesimal. Medidas de ángulos y de tiempo

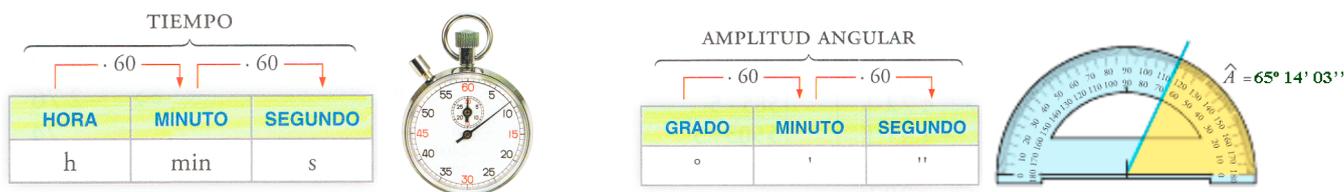
## 1. INTRODUCCIÓN

- \* De la misma forma que nosotros contamos de 10 en 10 (**sistema decimal**), otras culturas a lo largo de la historia han contado de 60 en 60 (**sistema sexagesimal**).
- \* La adopción de 10 como base del sistema de numeración decimal se fundamenta en la forma primitiva de contar utilizando los diez dedos de la mano.
- \* La adopción del 60 se basa, probablemente, en una forma más sofisticada de contar, utilizando las 12 falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique de una mano recorridos con el pulgar como guía. La cuenta del número de recorridos se llevaba con los dedos de la otra mano.



## 2. MEDIDA DEL TIEMPO Y DE LA AMPLITUD ANGULAR

- \* En la **actualidad**, el **sistema sexagesimal** se utiliza en la medida del **tiempo** y en la de la **amplitud angular**. En estas magnitudes, cada unidad se divide en 60 unidades del orden inferior.



Observa que las notaciones de los minutos y los segundos difieren de una magnitud a otra.

Es  $1h = 60\text{min}$  y  $1\text{min} = 60s$ , por tanto  $1h = (60 \cdot 60)s = 3600s$

Es  $1^\circ = 60'$  y  $1' = 60''$ , por tanto  $1^\circ = (60 \cdot 60)'' = 3600''$

Pasamos de una unidad superior a otra inferior multiplicando por 60.

Por ejemplo:  $2h = 120\text{min}$ ;  $1,25h = 75\text{min}$ ;  $13,2^\circ = 792'$ .

Pasamos de una unidad inferior a otra superior dividiendo entre 60.

Por ejemplo:  $1\text{min} = \frac{1}{60}h$ ;  $12\text{min} = 0,2h$ ;  $15\text{min} = 0,25h$ ;  $30'' = 0,5' = \frac{1}{120}^\circ$

\* Para la magnitud angular, además de los **grados sexagesimales** que se denotan con el símbolo  $^\circ$ , se utilizan otras unidades de medida: los **grados centesimales** que se denotan con  $^s$  siendo  $360^\circ = 400^s$  y los **radianes** que se denotan con  $rad$  siendo  $360^\circ = 2\pi rad$ . Se estudiarán en cursos superiores

### 3. EXPRESIONES COMPLEJAS E INCOMPLEJAS. PASO DE COMPLEJO A INCOMPLEJO Y VICEVERSA

\* Recuerda que la medida de las cantidades relativas a una magnitud se pueden expresar utilizando simultáneamente varias unidades (**forma compleja**) o una unidad única (**forma incompleja**). Por ejemplo,  $1\text{ h } 30\text{ min} = 1,5\text{ h}$ . A la izquierda de la igualdad, el tiempo está expresado de forma compleja y a la derecha de forma incompleja.

\* En los siguientes 4 ejemplos aprenderás los procedimientos para pasar de una forma a otra:

#### ■ Paso de complejo a incomplejo

▼ EJEMPLO 1: Pasar a segundos  $2\text{ h } 15\text{ min } 54\text{ s}$ .

$$\begin{array}{rcl} 2\text{ h} & = & 2 \cdot 3\,600 = 7\,200\text{ s} \\ 15\text{ min} & = & 15 \cdot 60 = 900\text{ s} \\ 54\text{ s} & = & 54\text{ s} \\ \hline 2\text{ h } 15\text{ min } 54\text{ s} & \longrightarrow & 8\,154\text{ s} \end{array}$$

▼ EJEMPLO 2: Pasar a horas  $2\text{ h } 15\text{ min } 54\text{ s}$ .

$$\begin{array}{rcl} 2\text{ h} & = & 2\text{ h} \\ 15\text{ min} & = & 15 : 60 = 0,25\text{ h} \\ 54\text{ s} & = & 54 : 3\,600 = 0,015\text{ h} \\ \hline 2\text{ h } 15\text{ min } 54\text{ s} & \longrightarrow & 2,265\text{ h} \end{array}$$

#### ■ Paso de incomplejo a complejo

▼ EJEMPLO 3: Pasar a horas, minutos y segundos  $8\,154\text{ s}$ .

$$\begin{array}{r} 8\,154\text{ s} \quad | \quad 60 \\ 215 \quad | \quad 135\text{ min} \quad | \quad 60 \\ 354 \quad | \quad 15\text{ min} \quad | \quad 2\text{ h} \\ \hline 54\text{ s} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 8\,154\text{ s} \\ \swarrow \quad \searrow \\ 135\text{ min} \quad 54\text{ s} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 2\text{ h} \quad 15\text{ min} \quad 54\text{ s} \end{array}$$

▼ EJEMPLO 4: Pasar a horas, minutos y segundos  $2,265\text{ h}$ .

$$\begin{array}{l} 2,265\text{ h} = \begin{cases} 2\text{ h} \\ 0,265\text{ h} \end{cases} \xrightarrow{\cdot 60} 15,9\text{ min} = \begin{cases} 15\text{ min} \\ 0,9\text{ min} \end{cases} \xrightarrow{\cdot 60} 54\text{ s} \\ 2,265\text{ h} = 2\text{ h } 15\text{ min } 54\text{ s} \end{array}$$

\* En los siguientes 2 ejemplos aprenderás a pasar de grados (o horas) a grados (o horas) minutos y segundos o viceversa con ayuda de la calculadora CASIO fx-82MS.

Lo primero que debes hacer es seleccionar el modo sexagesimal (no el de radianes o

centesimal) para medir los ángulos. Para ello pulsa varias veces la tecla "MODE"  que está en la parte superior hasta poder seleccionar la opción "DEG". Debe aparecer en la parte superior de la pantalla una "D" pequeña.



**Ejemplo 1:** Pasar  $8^\circ 30' 02''$  a grados sexagesimales.

$$8 \quad \text{MODE} \quad 30 \quad \text{MODE} \quad 2 \quad \text{MODE} \quad = \quad \text{SHIFT} \quad \text{MODE}$$

**Solución:**  $8,5005^\circ$

**Ejemplo 2:** Pasar  $25,562^\circ$  a grados sexagesimales, minutos y segundos.

25.562  

**Solución:**  $25^\circ 33' 43,2''$

Observa que los ejercicios 2 y 4 del apartado anterior se hacen muy fácil con la calculadora pero no el 1 y 3.

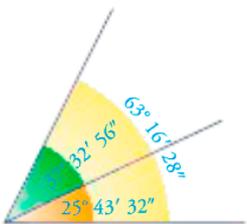
**ERV 1 al 4**

**4. OPERACIONES CON MEDIDAS DE ÁNGULOS O DE TIEMPOS**

**\* Suma de medidas de ángulos o tiempo:**

- 1) Se colocan los grados ( u horas) debajo de los grados ( u horas), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.
- 2) Se comienza sumando los segundos. Por cada 60" se toma 1' más.
- 3) Se suman con los minutos. Por cada 60' se toma 1° más.

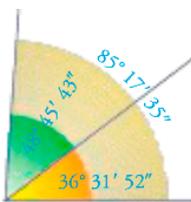
**Ejemplo:** Suma los ángulos  $25^\circ 43' 32''$  y  $37^\circ 32' 56''$

$\begin{array}{r} 25^\circ 43' 32'' \\ + 37^\circ 32' 56'' \\ \hline 62^\circ 75' 88'' \\ 62^\circ 76' 28'' \\ 63^\circ 16' 28'' \end{array}$	$88'' = 1' 28''$ $76' = 1^\circ 16'$	
---	---	--

**\* Restar ángulos o tiempo:**

- 1) Se colocan los grados (u horas) debajo de los grados (u horas), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.
- 2) Se comienza restando los segundos. Si el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa un minuto a segundos para poder hacer la resta.
- 3) Se hace lo mismo con los minutos.

**Ejemplo:** Halla la diferencia entre el ángulo  $85^\circ 17' 37''$  y  $36^\circ 31' 52''$

$\begin{array}{r} 85^\circ 17' 35'' \\ - 36^\circ 31' 52'' \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 85^\circ 16' 95'' \\ - 36^\circ 31' 52'' \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 84^\circ 76' 95'' \\ - 36^\circ 31' 52'' \\ \hline 48^\circ 45' 43'' \end{array}$	
---	---	---	---

**\* Multiplicar un ángulo por un número:**

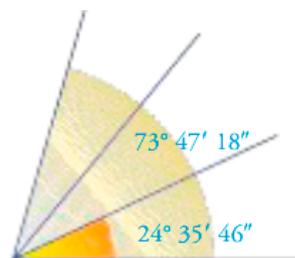
- 1) Se multiplica el número por los segundos, minutos y grados (u horas) sucesivamente.
- 2) Si los segundos pasan de 60", se dividen entre 60. El resto son segundos, y el cociente son minutos, que se suman a los minutos.
- 3) Si los minutos pasan de 60', se dividen entre 60. El resto son minutos, y el cociente son grados (u horas), que se suman a los grados (u horas).

**Ejemplo:** Halla el ángulo triple de  $24^\circ 35' 46''$

$$\begin{array}{r}
 24^\circ \ 35' \ 46'' \\
 \times 3 \\
 \hline
 72^\circ \ 105' \ 138'' \\
 72^\circ \ 107' \ 18'' \\
 73^\circ \ 47' \ 18''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 138'' \ \underline{60} \\
 18'' \ 2'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 107' \ \underline{60} \\
 47' \ 1^\circ
 \end{array}$$



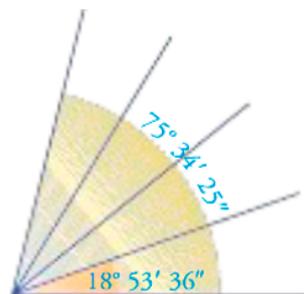
**\* Dividir un ángulo entre un número:**

- 1) Se dividen los grados (u horas) entre el número.
- 2) El resto de los grados (u horas) se pasa a minutos multiplicando por 60, y estos se suman a los minutos del dividendo.
- 3) Se dividen los minutos entre el número.
- 4) El resto de los minutos se pasa a segundos multiplicando por 60, y estos se suman a los segundos del dividendo.
- 5) Se dividen los segundos entre el número.

**Ejemplo:** Halla la cuarta parte del ángulo  $75^\circ 34' 25''$

$$\begin{array}{r}
 75^\circ \quad 34' \quad 25'' \\
 35 \\
 \textcircled{3}^\circ \times 60 = \frac{180'}{214'} \\
 14 \\
 \textcircled{2}' \times 60 = \frac{120''}{145''} \\
 25 \\
 \textcircled{1}''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \underline{4} \\
 18^\circ \ 53' \ 36''
 \end{array}$$



\* Operar con ángulos o tiempo expresados en forma compleja es muy fácil con ayuda de una calculadora

## EJERCICIOS

### **Pasar de la expresión compleja a incompleja y viceversa**

1. a) Convierte el ángulo  $73^{\circ} 25' 32''$  a forma incompleja.  
b) Convierte el tiempo  $37,5243$  h a forma compleja.
2. a) Pasa mentalmente los siguientes ángulos a forma incompleja:  
a1)  $85^{\circ} 30'$                       a2)  $167^{\circ} 45'$   
b) Pasa mentalmente los siguientes ángulos a forma compleja:  
b1)  $42,5^{\circ}$                               b2)  $92,25^{\circ}$   
c) Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:  
c1)  $5$  h  $15$  min                      c2)  $4$  h  $30$  min  
d) Pasa mentalmente las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:  
d1)  $3,25$  h                              d2)  $32,75$  h
3. a) Utilizando la calculadora, pasa los siguientes ángulos a forma incompleja:  
a1)  $45^{\circ} 33' 22''$                       a2)  $127^{\circ} 15' 29''$   
b) Utilizando la calculadora, pasa los siguientes ángulos a forma compleja:  
b1)  $34,789^{\circ}$                               b2)  $122,045^{\circ}$   
c) Utilizando la calculadora, pasa las siguientes unidades de tiempo a forma incompleja:  
c1)  $6$  h  $15$  min  $23$  s                      c2)  $115$  h  $45$  min  $23$  s  
d) Utilizando la calculadora, pasa las siguientes unidades de tiempo a forma compleja:  
d1)  $8,567$  h                              d2)  $58,28$  h
4. De modo bastante aproximado, la duración de un año es de  $365,256363$  días. Pasa esta unidad de tiempo a forma compleja. *Nota: utiliza la calculadora.*

### **Operaciones con ángulos o tiempos expresados en forma compleja**

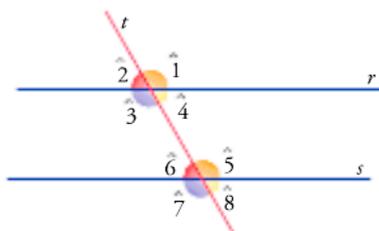
5. Realiza las siguientes operaciones:  
a)  $93$  h  $47$  min  $+ 18$  h  $49$  min  $23$  s  
b)  $25$  h  $12$  min  $5$  s  $- 14$  h  $12$  s  
c)  $(87$  h  $14$  min  $32$  s)  $\cdot 13$   
d)  $(125$  h  $35$  min  $43$  s):  $19$   
e) Comprueba los resultados con la calculadora
6. Realiza mentalmente las siguientes operaciones:  
a)  $5$  h  $30$  min  $+ 2$  h  $15$  min  
b)  $8$  h  $30$  min  $- 4$  h  $45$  min  
c)  $(3$  h  $10$  min)  $\cdot 5$   
d)  $(13$  h):  $5$
7. (1° ESO) a) Define algunos elementos del plano: recta, semirrecta, ángulo, medidas de ángulos: grados sexagesimales, grados decimales y radianes. Clases de ángulos: agudo, recto, obtuso, llano, completo, convexo, cóncavo, ángulo complementario a otro, ángulo suplementario a otro.  
b) Suma los siguientes ángulos  $\alpha = 35^{\circ} 41' 35''$  y  $\beta = 40^{\circ} 25' 58''$   
c) Efectúa  $\alpha - \beta$ , siendo  $\alpha = 93^{\circ} 21' 14''$  y  $\beta = 42^{\circ} 15' 32''$   
d) Multiplica un ángulo por un número:  $4 \cdot (15^{\circ} 55' 44'')$   
e) Divide un ángulo por un número:  $(17^{\circ} 55' 40'')$ :  $4$   
f) Halla el ángulo complementario de  $\alpha = 34^{\circ} 12' 47''$   
g) Halla el ángulo suplementario de  $\alpha = 73^{\circ} 47' 21''$   
h) Dos rectas secantes forman un ángulo de  $70^{\circ}$ . ¿cuánto miden cada uno de los otros tres ángulos que

forman?

i) Repite los apartados anteriores utilizando la calculadora.

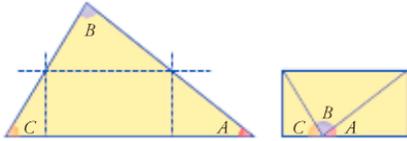
### Problemas de operaciones de ángulos o tiempos

8. (1° ESO) **Ángulos en figuras planas. Triángulos:**
- ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero?
  - En un triángulo isósceles el ángulo desigual mide  $19^\circ 50'$ , ¿cuánto miden los ángulos iguales?
  - En un triángulo escaleno, dos de sus ángulos miden  $23^\circ 0' 12''$  y  $45^\circ 2' 14''$ , ¿cuánto mide el tercer ángulo?.
  - Si un triángulo es rectángulo e isósceles, ¿cuánto mide cada uno de los ángulos agudos?
  - En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos mide  $20^\circ$ , ¿cuánto mide el otro?.
  - Un ángulo de un triángulo escaleno mide  $102^\circ 21' 44''$ , otro ángulo la mitad, ¿cuánto mide el tercer ángulo?
9. (1° ESO) **Ángulos en figuras planas**
- Dibuja un rectángulo y sus diagonales. Si uno de los ángulos de las diagonales es  $70^\circ$ , ¿cuánto miden los demás ángulos?. Ver figura:
  - ¿Qué es un romboide? Si el ángulo obtuso de un romboide mide  $150^\circ$ , ¿cuánto mide el ángulo agudo?
  - ¿Cuánto mide el ángulo central de un pentágono regular? ¿Y los ángulos interiores del pentágono regular?
  - ¿Cuánto mide el ángulo central de un hexágono regular? ¿Y los ángulos interiores del hexágono regular?
  - Deduce una fórmula para hallar el ángulo central de un polígono regular de  $n$  lados y una fórmula para hallar los ángulos interiores de ese polígono.
10. En el IES La Asunción he tenido 6 clases de 55 minutos, y en casa he estado estudiando 2 h 30 min. ¿Cuánto tiempo del día me queda para otras cosas?
11. a) En una carrera de Fórmula 1, Fernando Alonso emplea, por término medio, 1 min 35 s en dar una vuelta al circuito. Si la carrera se compone de 50 vueltas, ¿en cuánto tiempo completará la carrera?  
b) En una carrera de Fórmula 1, un coche tarda 1 h 27 min y 30 s en dar 50 vueltas al circuito. ¿Cuánto tiempo invierte de media en cada vuelta?
12. Un ángulo mide  $43^\circ 28' 45''$ .
- Halla cuánto mide el complementario. *Nota: dos ángulos son complementarios si suman  $90^\circ$ .*
  - Halla cuánto mide su suplementario. *Nota: dos ángulos son suplementarios si suman  $180^\circ$ .*
13. Si Pedro ha hablado por el teléfono móvil con sus amigos un total de 18 min 32 s y le cuesta 0,18 €/min, ¿cuánto tiene que pagar?
14. Un autobús tarda 1 h 20 min 32 s en hacer un trayecto de ida. En el camino de vuelta tarda 1 h 35 min 15 s
- ¿Cuánto tiempo ha invertido entre la ida y la vuelta?
  - ¿Cuánto tiempo tarda más en la vuelta que en la ida?
15. Si el ángulo  $\hat{1}$  mide  $119^\circ 12' 37''$ , calcula cuánto mide cada uno de los otros ángulos.

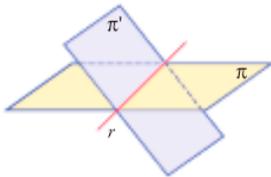


16. Benjamín se acuesta a las once y treinta y dos de la noche, y se levanta al día siguiente a las siete y cuarenta y dos. ¿Cuánto tiempo ha estado en la cama?

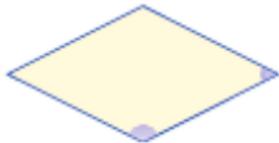
17. Se divide un ángulo recto en 7 partes iguales. ¿Cuánto mide cada una de ellas?
18. Si un móvil recorre 100 m en 9 s, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 1 hora?
19. El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide  $56^\circ 23' 42''$ . Halla cuánto mide cada uno de los otros ángulos.
20. En el siguiente triángulo, el ángulo A mide  $37^\circ 22' 45''$  y el ángulo B mide  $83^\circ 53' 48''$ . ¿Cuánto mide el ángulo C?



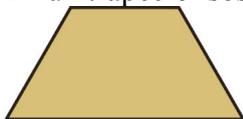
21. Ana trabaja 12 h 15 min un día, y 7 h 13 min otro día. Si le pagan la hora a 7 €, ¿cuánto dinero habrá ganado?
22. Uno de los ángulos diedros que forman los siguientes planos mide  $127^\circ 30' 43''$ . ¿Cuánto mide el otro?



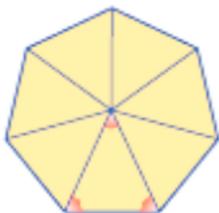
23. Un autobús tarda 44 min 45 s en hacer un trayecto. Si ha hecho 15 paradas y en cada parada tarda un minuto, ¿cuánto tiempo tarda de media entre parada y parada?
24. Un ángulo de un rombo mide  $52^\circ 23' 43''$ . ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?



25. Para maquetar con el ordenador la revista del IES La Asunción, 5 alumnos han tardado 20 h 30 min trabajando conjuntamente. Si se les pagase a 17 € la hora, ¿cuánto costaría la maquetación de la revista?
26. Juan ha pagado 15,25 € por 5 llamadas de teléfono móvil, y le cobran a 0,18 €/min. ¿Cuánto tiempo ha estado hablando? Expresa el resultado en unidades complejas.
27. En un trapecio isósceles un ángulo mide  $50^\circ 32' 47''$ . ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?



28. Halla cuánto mide cada uno de los ángulos coloreados de rojo del siguiente heptágono regular:



29. De Madrid a Sevilla hay 540 km, y el AVE va a 220 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer la distancia que hay entre las dos ciudades? Expresa el resultado en unidades complejas.
30. La cadena de montaje de una fábrica de electrodomésticos está programada para lanzar un lavavajillas cada 5 minutos y 13 segundos. ¿Cuánto tardará en cubrir un pedido de 50 lavavajillas?

31. Si divides una hora en 25 intervalos iguales, ¿cuánto dura cada intervalo?
32. Una cadena de radio inicia a las 18 h 45 min 13 s la emisión de un programa de música, pregrabado, que tiene una duración de 1 h 16 min 52 s. ¿A qué hora terminará el programa?
33. Un camión de mudanzas ha realizado un viaje de 169,29 km en 2 h 42 min. ¿Cuál ha sido su velocidad media?
34. Un autobús interurbano da una vuelta a su recorrido cada hora y doce minutos. ¿Cuántas vueltas dará en las 12 horas que dura su servicio?
35. ¿Qué ángulo recorre la manecilla horaria de un reloj analógico durante una hora?
36. Calcula el ángulo que forman las agujas del reloj a las:  
a) 2 h 24 min                      b) 7 h 42 min

### SOLUCIONES:

1. Ver vídeo. a)  $72,425^\circ$  o  $4345,53'$  o  $260732''$  b) 37h 31 min 27 sg
2. Ver vídeo a1)  $85,5^\circ$ ; a2)  $167,75^\circ$ ; b1)  $42^\circ 30'$ ; b2)  $92^\circ 15'$ ; c1) 5,25h; c2) 4,5h; d1) 3h 15min; d2) 32h 45min
3. Ver vídeo. a1)  $45,5561^\circ$ ; a2)  $127,2581^\circ$ ; b1)  $34^\circ 47' 20,4''$ ; b2)  $122^\circ 2' 42''$ ; c1) 6,25638h; c2) 115,75639h; d1) 8h 34min 1,2sg; d2) 58h 16 min 48 sg
4. Ver vídeo. 365días 6h 9min 10sg
5. Ver vídeo. a) 112h 36min 23sg; b) 11h 11min 53sg; c) 47días 6h 8min 56sg; d) 6h 36 min 37 sg
6. Ver vídeo. a) 7h 45min; b) 3h 45min; c) 15h 50min
7. Ver vídeo. b)  $76^\circ 7' 33''$ ; c)  $51^\circ 5' 42''$ ;  $63^\circ 42' 56''$ ; e)  $4^\circ 28' 55''$ ; f)  $55^\circ 47' 13''$ ; g)  $106^\circ 12' 39''$
8. Ver vídeo. a)  $60^\circ$ ;  $80^\circ 5'$ ; c)  $111^\circ 57' 34''$ ; d)  $45^\circ$ ; e)  $70^\circ$ ; f)  $26^\circ 27' 24''$
9. Ver vídeo. b)  $30^\circ$ ; c)  $108^\circ$ ; d)  $60^\circ$ ;  $120^\circ$ ; e)  $\alpha = 360^\circ / n$ ;  $\beta = (n - 2) \cdot 180^\circ / n$
10. Ver vídeo. 16h
11. Ver vídeo. 1h 19min 10sg
12. Ver vídeo. a)  $46^\circ 31' 15''$ ; b)  $136^\circ 31' 15''$
13. Ver vídeo. 3,34€
14. Ver vídeo. a) 2h 55min 47 sg; b) 14 min 43sg
15. Ver vídeo.  $\hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7} = 119^\circ 12' 37''$   
 $\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8} = 60^\circ 47' 23''$
16. Ver vídeo. 8h 10min
17. Ver vídeo.  $12^\circ 51' 25,71''$
18. Ver vídeo. 40 km
19. Ver vídeo.  $61^\circ 48' 9''$
20. Ver vídeo.  $58^\circ 43' 27''$
21. Ver vídeo. 136,27€
22. Ver vídeo.  $52^\circ 29' 17''$
23. Ver vídeo. 1 min 51,6sg o 1min 59sg
24. Ver vídeo.  $127^\circ 36' 17''$
25. Ver vídeo. 1742,5 €
26. Ver vídeo. 84 min 43,3 sg
27. Ver vídeo.  $129^\circ 27' 13''$
28. Ver vídeo.  $51^\circ 25' 42''$  y  $64^\circ 17' 9''$
29. Ver vídeo. 2h 27min 16,2sg
30. Ver vídeo. 4h 20min 50sg
31. Ver vídeo. 2min 24 sg
32. Ver vídeo. 20h 2min 5sg
33. Ver vídeo. 62,7 km/h
34. Ver vídeo. 10 vueltas.
35. Ver vídeo.  $30^\circ$
36. Ver vídeo. a)  $72^\circ$ ;  $21^\circ$