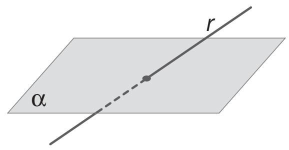
EJERCICIOS PROPUESTOS

13.1 Observa la figura y di qué elemento geométrico determinan la recta y el plano.

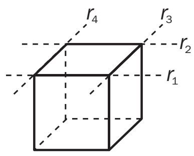


La recta r y el plano α determinan un punto.

13.2 Con los cuatro puntos que delimitan una cara de un cubo, ¿cuántas rectas se pueden determinar?

Se pueden determinar seis rectas: las cuatro que contienen las aristas y las dos diagonales.

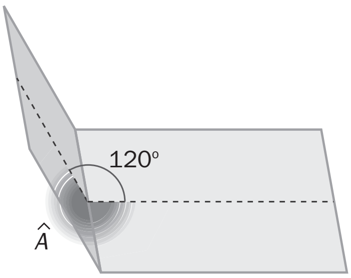
13.3 Dibuja el cubo y señala en él todas las rectas determinadas por aristas paralelas al plano de la base.



13.4 Observa tu libro de texto, que tiene forma de ortoedro, y di cuántos pares de planos paralelos determinan sus caras.

Sus caras determinan tres pares de planos paralelos.

13.5 Calcula la medida del ángulo diedro $\widehat{A}$ y clasifícalo.



La medida del ángulo es $\widehat{A} = 360° - 120° = 240°$.

Ángulo cóncavo

13.6 Dados $\widehat{A} = 76°\ 18'\ 39''$ y $\widehat{B} = 35°\ 50'\ 5''$, calcula:
a) $\widehat{A} + \widehat{B}$
b) $\widehat{A} - \widehat{B}$
c) El complementario de $\widehat{A}$
d) El suplementario de $\widehat{A} + \widehat{B}$

a) $\widehat{A} + \widehat{B} = 76°\ 18'\ 39'' + 35°\ 50'\ 5'' = 112°\ 8'\ 44''$
b) $\widehat{A} - \widehat{B} = 76°\ 18'\ 39'' - 35°\ 50'\ 5'' = 40°\ 28'\ 34''$
c) $90° - \widehat{A} = 90° - 76°\ 18'\ 39'' = 13°\ 41'\ 21''$
d) $180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180° - 112°\ 8'\ 44'' = 67°\ 51'\ 16''$

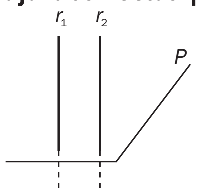
13.7 Clasifica todos los ángulos del ejercicio anterior.

a) $\widehat{A} + \widehat{B}$ es un ángulo obtuso.
b) $\widehat{A} - \widehat{B}$ es un ángulo agudo.
c) El complementario de $\widehat{A}$ es un ángulo agudo.
d) El suplementario de $\widehat{A} + \widehat{B}$ es un ángulo agudo.

13.8 **Una mesa circular está sujeta por una sola pata situada en su centro.**
¿Qué posición debe tener la pata respecto al tablero para que éste quede horizontal?

La pata ha de ser perpendicular al tablero.

13.9 **Dibuja dos rectas perpendiculares a un plano. ¿Cuál es la posición de ambas?**



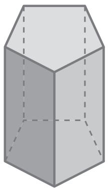
Ambas rectas son paralelas entre sí.

13.10 **¿Qué relación tienen la línea que forma la base de la puerta abierta y la recta sobre la que gira?**

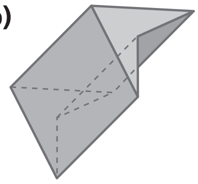
Ambas rectas son perpendiculares.

13.11 **Clasifica en cóncavo o convexo:**

a)



b)

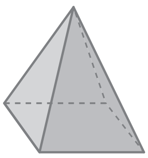


a) Convexo

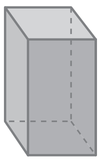
b) Cóncavo

13.12 **Comprueba la relación de Euler.**

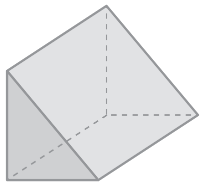
a)



b)



c)



a) $c = 5$; $v = 5$; $a = 8$
$c + v = 5 + 5 = 10$
$a + 2 = 8 + 2 = 10$

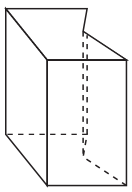
b) $c = 6$; $v = 8$; $a = 12$
$c + v = 6 + 8 = 14$
$a + 2 = 12 + 2 = 14$

c) $c = 5$; $v = 6$; $a = 9$
$c + v = 5 + 6 = 11$
$a + 2 = 9 + 2 = 11$

13.13 **Indica el tipo de prisma que es una caja de zapatos.**

Una caja de zapatos es un ortoedro.

13.14 **Dibuja un prisma pentagonal cóncavo.**



13.15 **¿Es algún paralelepípedo un prisma regular?**

Un cubo es un prisma regular.

13.16 **Comprueba en los prismas pentagonal y hexagonal que $c + v = a + 2$.**

Prisma pentagonal:
$c = 7$; $v = 10$; $a = 15$
$c + v = 7 + 10 = 17 = a + 2 = 15 + 2$

Prisma hexagonal:
$c = 8$; $v = 12$; $a = 18$
$c + v = 8 + 12 = 20 = a + 2 = 18 + 2$

En efecto, en ambos casos se cumple la relación de Euler.

13.17 **¿Qué pirámide tiene todas sus caras iguales?**

Una pirámide triangular formada por cuatro triángulos equiláteros tiene todas sus caras iguales.

13.18 **Una pirámide está formada por 7 polígonos.**

a) ¿Cómo es su base?

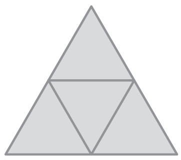
b) ¿Qué tipo de pirámide es?

a) Su base es un hexágono.

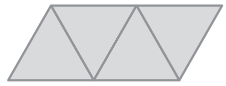
b) Se trata de una pirámide hexagonal.

13.19 **¿Qué tipo de pirámide resulta de cada desarrollo?**

a)



b)

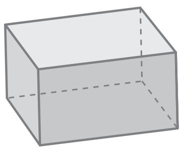


a) Pirámide triangular convexa y recta

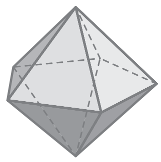
b) Pirámide triangular convexa y oblicua

13.20 **Explica por qué no son regulares estos poliedros.**

a)



b)



No son regulares porque sus caras no son polígonos regulares. En el apartado a) las caras son rectángulos, que no tienen sus lados iguales. En el apartado b) las caras son triángulos isósceles, que no tienen todos sus lados iguales y además, en unos vértices concurren cinco caras y en otros sólo cuatro.

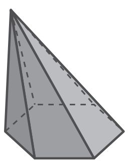
13.21 **Completa la tabla siguiente.**

Poliedro	Polígono de las caras	N.° de caras que concurren en un vértice
Cubo		
Dodecaedro		
Icosaedro		

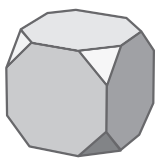
Poliedro	Polígono de las caras	N.° de caras que concurren en un vértice
Cubo	Cuadrado	3
Dodecaedro	Pentágono regular	3
Icosaedro	Triángulo equilátero	5

13.22 **Explica el procedimiento por el que se han obtenido los siguientes poliedros.**

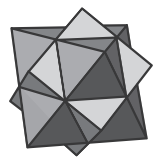
a)



b)



c)



a) Deformación de pirámide hexagonal

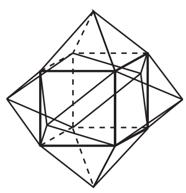
b) Truncamiento de cubo

c) Intersección de cubo y octaedro

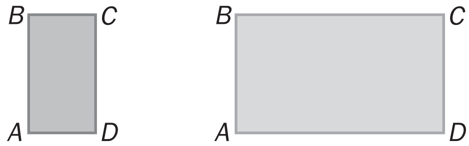
13.23 **Si se corta una pirámide pentagonal con un plano paralelo a la base, ¿qué poliedro se obtiene?**

Se obtiene un tronco de pirámide.

13.24 **Dibuja el poliedro que se obtiene al unir una pirámide cuadrangular a cada una de las caras de un cubo.**



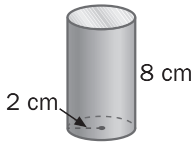
13.25 **Si se hace girar el rectángulo por uno de sus lados grandes, *AD*, ¿qué figura se obtiene?**



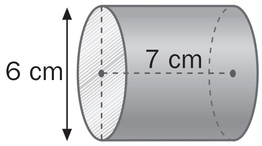
Se obtiene un cilindro.

13.26 **Haz el desarrollo plano de los cilindros siguientes dando las dimensiones.**

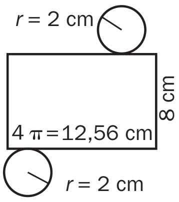
a)



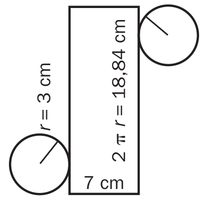
b)



a)

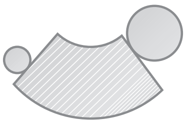


b)

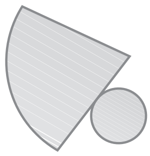


13.27 **Indica cuáles de los siguientes desarrollos corresponden a conos.**

a)

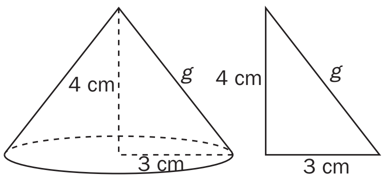


b)



Solo el desarrollo del apartado b) corresponde a un cono.

13.28 **En un cono de 3 centímetros de radio y 4 centímetros de altura, ¿cuánto mide la generatriz?**



Por el teorema de Pitágoras: $g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = 5$

La generatriz mide 5 cm.

13.29 **Se ha dibujado un sector circular de 20 centímetros de radio y 29,3 de arco, y una circunferencia de 5 centímetros de radio.**
¿Es posible construir un cono con ellos?

No es posible construir un cono porque la longitud del arco ha de coincidir con la de la circunferencia. La longitud de una circunferencia de 5 cm de radio es:

$L_c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ cm, y no coincide con la longitud de arco dada en el problema.

13.30 **El giro de un círculo alrededor de una cuerda, ¿da lugar a una esfera?**

No, salvo que la cuerda sea un diámetro.

13.31 **Al cortar una esfera por un plano, ¿qué figura plana se forma?**

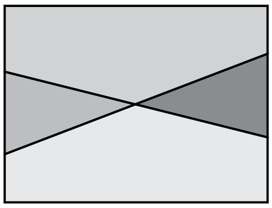
Una circunferencia.

13.32 **Se corta una esfera de radio 9 centímetros por un plano que pasa por el centro. ¿Cuánto mide la circunferencia que se determina en la superficie esférica?**

La circunferencia tiene 9 cm de radio. Su longitud es: $L_c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 56{,}52$ cm

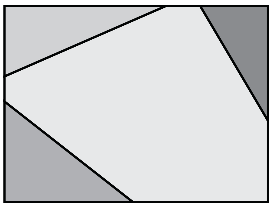
PROBLEMAS PROPUESTOS

13.33 **¿En cuántas partes queda dividida la hoja si todas las rectas que trazamos se cortan en el mismo punto?**



Al dibujar en una hoja n rectas que se cortan en un punto que no forma parte del contorno de la hoja, esta queda dividida en $2n$ partes.

13.34 **¿En cuántas partes queda dividida la hoja si las rectas que trazamos no se cortan en la superficie de la hoja?**



Al dibujar en una hoja n rectas que no se cortan en la superficie de la misma, esta queda dividida en $n + 1$ partes.

CÁLCULO MENTAL

13.35 **La medida de dos ángulos diedros es $\widehat{A} = 93°$ y $\widehat{B} = 32° \ 50'$. Calcula:**
a) $\widehat{A} + \widehat{B}$
b) $\widehat{A} - \widehat{B}$

a) $\widehat{A} + \widehat{B} = 93° + 32° \ 50' = 125° \ 50'$

b) $\widehat{A} - \widehat{B} = 93° - 32° \ 50' = 60° \ 10'$

13.36 **¿Son complementarios los ángulos diedros que miden 73° 20′ y 16° 40′?**

Sí, son complementarios. En efecto: $73° \ 20' + 16° \ 40' = 90°$

13.37 **Una pirámide tiene 4 vértices y 6 aristas.**
a) Calcula el número de caras.
b) ¿De qué pirámide se trata?

a) Usando la relación de Euler: $c + v = a + 2 \Rightarrow c + 4 = 8 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow$ Tiene 4 caras.

b) Pirámide triangular.

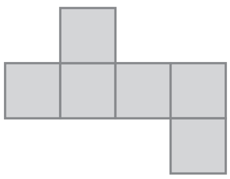
13.38 Completa la siguiente tabla.

	Pirámide triangular	**Prisma octogonal**	**Ortoedro**
Caras	**4**		
Vértices	**4**		
Aristas	**6**		
c* + *v* − *a	**2**		

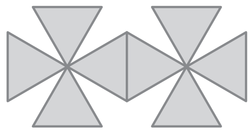
	Pirámide triangular	**Prisma octogonal**	**Ortoedro**
Caras	**4**	10	6
Vértices	**4**	16	8
Aristas	**6**	24	12
c* + *v* − *a	**2**	2	2

13.39 Indica a qué poliedro regular corresponden los siguientes desarrollos planos.

a)



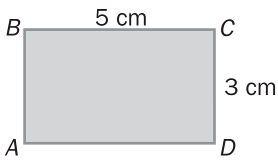
b)



a) Cubo

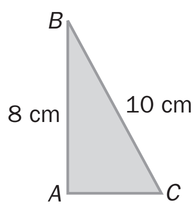
b) Octaedro

13.40 Un cilindro se ha construido haciendo girar por el lado *AD* el siguiente rectángulo. Indica la medida del radio de la base del cilindro y de la generatriz.



El radio mide 3 cm, y la generatriz, 5 cm.

13.41 Se hace girar el triángulo rectángulo de la figura alrededor del lado *AC*. ¿Cuánto miden el radio y la altura del cono que engendra?



El radio del cono se corresponde con el lado *AB*.

Mide, por tanto, 8 cm.

La altura del cono se corresponde con el lado *AC*.

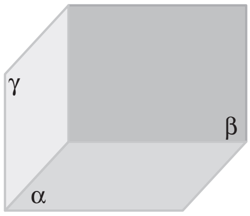
Usando el teorema de Pitágoras:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 10^2 = 8^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow AC = 6$

La altura del cono mide 6 cm.

Planos, rectas y puntos en el espacio

13.42 Observa los siguientes planos.



a) ¿Qué elemento determinan de dos en dos?
b) ¿Y entre los tres?

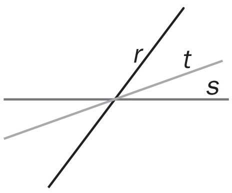
a) Una recta
b) Un punto

13.43 Cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* que no están en el mismo plano, ¿cuántos planos determinan?

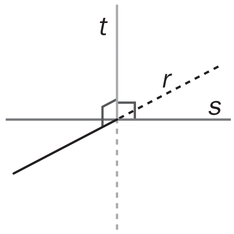
Determinan 4 planos: *ABC*, *ABD*, *BCD* y *ACD*.

13.44 Halla el número de planos que determinan tres rectas que se cortan en un mismo punto en los siguientes casos.

a)



b)



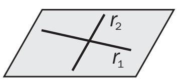
a) Un plano

b) Tres planos

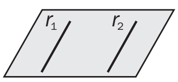
Posiciones de rectas y planos. Recta y plano perpendiculares

13.45 Dibuja en un plano:
a) Dos rectas que se cortan.
b) Dos rectas paralelas.
c) Dos rectas que se cruzan.

a)



b)

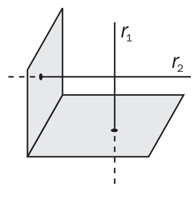


c) Dos rectas que se cruzan no están contenidas en el mismo plano

13.46 ¿Qué posición tienen dos planos que son perpendiculares a una misma recta?

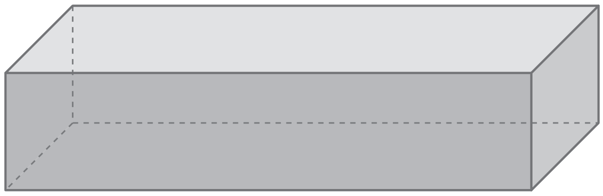
Ambos planos son paralelos entre sí.

13.47 Dibuja dos planos perpendiculares y una recta perpendicular a cada uno de ellos. ¿Cuál es la posición de las dos rectas?

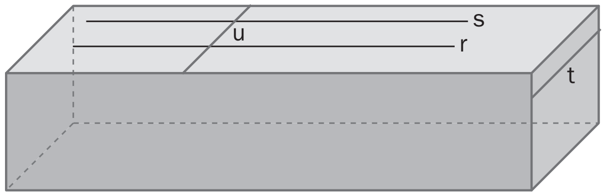


Ambas rectas se cruzan o son secantes. En este último caso son perpendiculares.

13.48 **Dos rectas paralelas a un mismo plano, ¿son paralelas entre sí? ¿Pueden cortarse? ¿Pueden cruzarse? Razona las respuestas ayudándote del poliedro siguiente.**



Puede darse cualquiera de los casos, tal como se indica en el dibujo: las rectas *r* y *s* son paralelas, las rectas *s* y *u* se cortan y las rectas *s* y *t* se cruzan.



Ángulos diedros

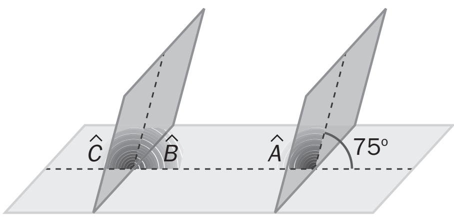
13.49 **Con dos semiplanos que se cortan perpendicularmente, ¿cuántos ángulos diedros se forman? ¿Cuánto mide cada uno de ellos?**

Se forman cuatro ángulos diedros. Cada uno de ellos mide 90°.

13.50 **Calcula el complementario y el suplementario de los siguientes ángulos diedros.**
a) 65° **b) 32°** **c) 40°** **d) 59°**

a) Complementario: $\alpha = 90° - 65° = 25°$; suplementario: $\beta = 180° - 65° = 115°$
b) Complementario: $\alpha = 90° - 32° = 58°$; suplementario: $\beta = 180° - 32° = 148°$
c) Complementario: $\alpha = 90° - 40° = 50°$; suplementario: $\beta = 180° - 40° = 140°$
d) Complementario: $\alpha = 90° - 59° = 31°$; suplementario: $\beta = 180° - 59° = 121°$

13.51 **Calcula $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ en la siguiente figura.**

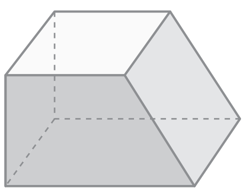


$\widehat{A} = 180° - 75° = 105°$, $\widehat{B} = 75°$ y $\widehat{C} = \widehat{A} = 105°$

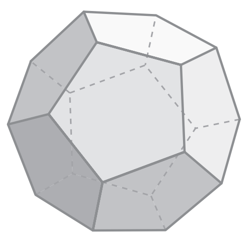
Poliedros

13.52 **¿Cuáles de las siguientes figuras son poliedros? Indica en su caso si son o no regulares.**

a)



b)



a) Poliedro no regular

b) Poliedro regular

13.53 Un poliedro regular tiene 12 aristas y 6 vértices. Calcula el número de caras y di qué poliedro es.

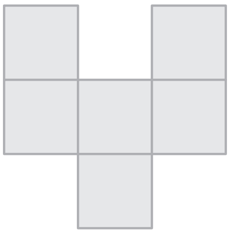
Usando la relación de Euler: $c + v = a + 2 \Rightarrow c + 6 = 12 + 2 \Rightarrow c = 14 - 6 = 8 \Rightarrow$ Tiene 8 caras.
Se trata de un octaedro.

13.54 ¿Qué poliedro regular tiene el mismo número de caras que de vértices?

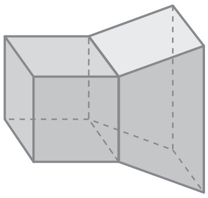
El tetraedro: tiene 4 caras y 4 vértices.

13.55 ¿Puede ser la figura el desarrollo plano de un cubo?

No



13.56 Observa la siguiente figura.



a) ¿Cómo está formada? **b) Estudia si se cumple la relación de Euler.**

a) Se trata de un poliedro formado por composición, uniendo un cubo y un tronco de pirámide.

b) $c + v = 10 + 12 = 22 = 20 + 2 = a + 2$. Sí se cumple la relación de Euler.

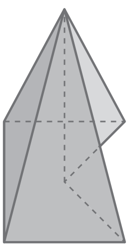
13.57 Calcula la suma de los ángulos que concurren en un vértice del dodecaedro.

Los ángulos interiores de un pentágono regular miden 72°. En un vértice de un dodecaedro concurren 3 de estos ángulos, luego $72° \cdot 3 = 216°$. La suma de los ángulos que concurren en un vértice del dodecaedro es 216°.

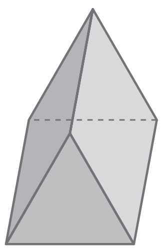
Prismas. Paralelepípedos. Pirámides

13.58 Di de qué tipo son los siguientes prismas y pirámides.

a)



b)



a) Pirámide cóncava pentagonal y recta

b) Prisma triangular

13.59 Un prisma tiene 12 aristas y 8 vértices.
a) Calcula el número de caras.
b) ¿Es posible saber qué prisma es?
c) Si todas sus caras son rombos, ¿qué tipo de prisma es? ¿Cómo se llama?

a) $c + v = a + 2 \Rightarrow c + 8 = 12 + 2 = 14 \Rightarrow c = 14 - 8 = 6$. Tiene 6 caras.

b) No, solo se puede saber que la base es un cuadrilátero.

c) Es un paralelepípedo llamado romboedro.

13.60 **¿Cuántos vértices y cuántas caras tienen las pirámides cuadrangular, pentagonal y hexagonal? ¿Cumplen la relación de Euler?**

	Vértices	Caras	Aristas	$c + v - a$
Pirámide cuadrangular	5	5	8	2
Pirámide pentagonal	6	6	10	2
Pirámide hexagonal	7	7	12	2

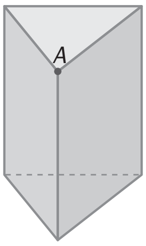
Todas cumplen la relación de Euler.

13.61 **¿Se puede obtener un poliedro regular uniendo dos pirámides cuadrangulares por sus bases?**

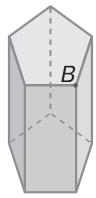
Sí, el octoedro se puede obtener uniendo por la base dos pirámides cuadrangulares.

13.62 **Calcula la suma de los ángulos de las caras que concurren en los vértices indicados.**

a)



b)



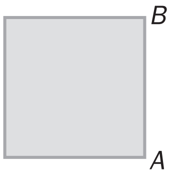
a) $\widehat{A} = 90° + 90° + 60° = 240°$

b) $\widehat{B} = 90° + 90° + 72° = 252°$

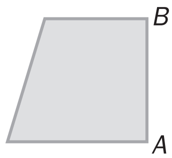
Cilindros. Conos. Esferas

13.63 **Di qué tipo de figura del espacio se genera cuando giran los siguientes polígonos por el lado *AB*.**

a)



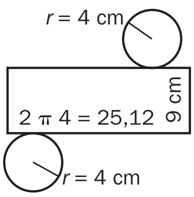
b)



a) Cilindro

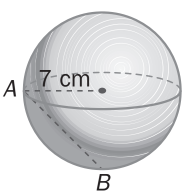
b) Tronco de cono

13.64 **Un cilindro tiene 4 centímetros de radio y 9 centímetros de altura. Dibuja su desarrollo plano indicando las dimensiones de cada una de las figuras que lo forman.**



Longitud de la circunferencia: $L_c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3,14 \cdot 4 = 25,12$ cm

13.65 **Calcula la longitud de la cuerda *AB*.**



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$AB^2 = 7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98$

$AB = \sqrt{98} = 9,9$ cm

13.66 Observa un rincón de una habitación formado por el techo, el suelo y dos paredes laterales.

a) ¿Cuántos planos distintos hay?

b) ¿Cuántos ángulos diedros se forman? Calcula la medida de cada uno.

a) 4 planos

b) 5 ángulos diedros. Todos ellos miden 90°.

13.67 Imagina que la calzada de una carretera es un plano.

a) Las rectas que delimitan los carriles y el arcén, ¿qué posición tienen respecto al plano?

b) ¿Cuál es la posición del plano y las rectas imaginarias que forman los semáforos?

a) Las rectas que delimitan los carriles y el arcén están contenidas en el plano de la calzada.

b) El plano de la calzada y las rectas de los semáforos son secantes y perpendiculares.

13.68 Para celebrar el Día de las Matemáticas (12 de mayo), Pilar y sus compañeros de clase van a construir figuras geométricas con las que decorarán el aula.

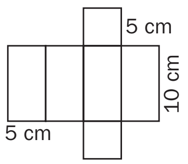
¿Cómo tienen que dibujar el desarrollo plano de las siguientes figuras?

a) Un prisma cuadrangular con la base de 5 centímetros de lado y la altura de 10 centímetros.

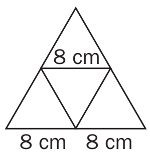
b) Un tetraedro de 8 centímetros de lado.

c) Un cubo de 6 centímetros de lado.

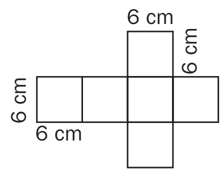
a)



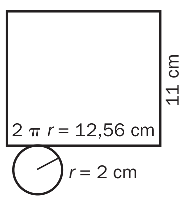
b)



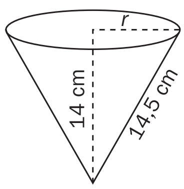
c)



13.69 Pedro tiene un bote cilíndrico blanco para colocar los lapiceros y lo quiere forrar con un papel de colores. Elradio de la base mide 2 centímetros, y la altura, 11. Dibuja la figura plana que debe construir en el papel para poder forrar el bote, indicando las dimensiones. Recuerda que el bote no tiene tapa.



13.70 El cucurucho de un helado tiene 14,5 centímetros de generatriz y 14 de altura. Calcula el radio máximo de la bola de helado que se puede poner en él.



Haciendo uso del teorema de Pitágoras:

$14^2 + r^2 = 14{,}5^2$

$196 + r^2 = 210{,}25$

$r^2 = 210{,}25 - 196 = 14{,}25$

$r = \sqrt{14{,}25} = 3{,}77$ cm

El radio máximo de la bola de helado es de 3,77 cm.

13.71 **Calcula el número de caras e indica qué tipo de poliedro es cada uno de los siguientes.**

a) Un prisma de 6 vértices y 9 aristas.

b) Una pirámide de 10 aristas y 6 vértices.

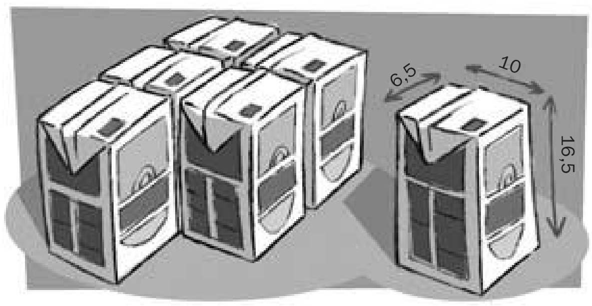
a) El problema se resuelve usando la relación de Euler. $c + v = a + 2 \Rightarrow c + 6 = 9 + 2 \Rightarrow c = 11 - 6 = 5$. El prisma tiene 5 caras. Se trata de un prisma triangular.

b) $c + v = a + 2 \Rightarrow c + 6 = 10 + 2 \Rightarrow c = 12 - 6 = 6$. La pirámide tiene 6 caras. Se trata de una pirámide pentagonal.

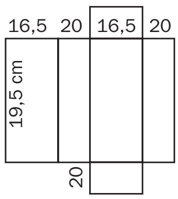
13.72 **Un *tetra brik* de leche mide 10 centímetros de largo, 6,5 de ancho y 16,5 de alto. En un paquete se envasan 6 de ellos.**

a) ¿Qué figura geométrica tiene el paquete?

b) Haz su desarrollo plano e indica sus dimensiones.



a) El paquete tiene forma de prisma rectangular.

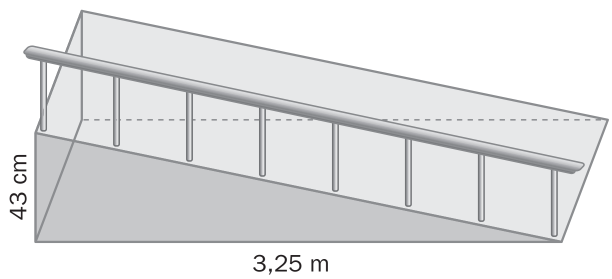
b) 

13.73 **La etiqueta que envuelve una lata es un rectángulo de 21,98 centímetros de base y 9 de altura. Calcula el diámetro de la lata.**

Longitud de la circunferencia: $L_c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 21{,}98 \text{ cm} \Rightarrow r = \dfrac{21{,}98}{2 \cdot \pi} = 3{,}5 \text{ cm}$

El diámetro de la lata mide: $2 \cdot r = 2 \cdot 3{,}5 = 7$ cm

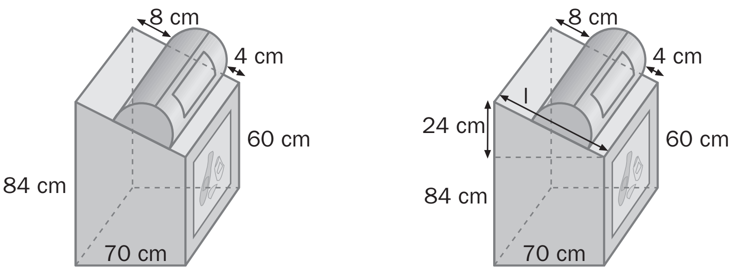
13.74 **Para eliminar barreras arquitectónicas, se ha construido una rampa en el instituto. ¿Qué forma tiene? Calcula su longitud.**



Tiene forma de prisma triangular. Para calcular la longitud de la rampa se expresan todas las dimensiones en las mismas unidades y se aplica el teorema de Pitágoras:

3,25 m = 325 cm. $l^2 = 43^2 + 325^2 \Rightarrow l^2 = 1849 + 105\,625 = 107\,474 \Rightarrow l = \sqrt{107\,474} = 327{,}83 \text{ cm} = 3{,}28$ m

13.75 **Los contenedores de reciclaje subterráneos tienen la siguiente forma. Calcula el diámetro del cilindro.**

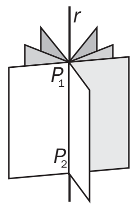


Por el teorema de Pitágoras, $l^2 = 24^2 + 70^2 = 576 + 4900 = 5476 \Rightarrow l = \sqrt{5476} = 74$ cm.
$74 - 4 - 8 = 62$ cm. El diámetro del cilindro es de 62 cm.

R E F U E R Z O

Planos, rectas y puntos en el espacio

13.76 **Con dos puntos del plano, ¿cuántas rectas se pueden determinar? ¿Cuántos planos?**



Dos puntos determinan una recta e infinitos planos.

Ángulos diedros

13.77 **a) Calcula la suma y la diferencia de los ángulos diedros $\widehat{A} = 65°\ 40'$ y $\widehat{B} = 50°\ 30'$.**
b) Halla el complementario de $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{A} - \widehat{B}$.
c) Halla el suplementario de $\widehat{A} + \widehat{B}$.

a) $\widehat{A} + \widehat{B} = 65°\ 40' + 50°\ 30' = 116°\ 10'$; $\widehat{A} - \widehat{B} = 65°\ 40' - 50°\ 30' = 15°\ 10'$
b) Complementario de $\widehat{A}$: $90° - \widehat{A} = 90° - 65°\ 40' = 24°\ 20'$
Complementario de $\widehat{B}$: $90° - \widehat{B} = 90° - 50°\ 30' = 39°\ 30'$
Complementario de $\widehat{A} - \widehat{B}$: $90° - (\widehat{A} - \widehat{B}) = 90° - 15°\ 10' = 74°\ 50'$
c) Suplementario de $\widehat{A} + \widehat{B}$: $180° - 116°\ 10' = 63°\ 50'$

Poliedros

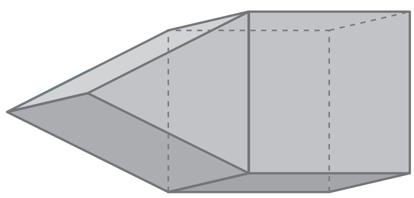
13.78 **¿Es posible que un poliedro convexo tenga 8 caras, 10 aristas y 8 vértices?**

No. Un poliedro convexo ha de cumplir la relación de Euler: $c + v = a + 2$
Puesto que $8 + 8 \neq 10 + 2$, no se verifica dicha relación.

13.79 **Un poliedro regular tiene 12 aristas y 8 vértices. Calcula el número de caras y di de qué poliedro se trata.**

Por la relación de Euler, $c + v = a + 2 \Rightarrow c + 8 = 12 + 2 \Rightarrow c = 14 - 8 = 6$. El poliedro tiene seis caras. Se trata de un cubo.

13.80 **a) ¿Cómo está formada la siguiente figura?**
b) Estudia si se cumple la relación de Euler.



a) La figura está formada por composición, uniendo dos poliedros.
b) Sí se cumple la relación de Euler.
En efecto, la figura tiene 9 caras, 17 aristas y 10 vértices.
Se tiene que $c + v = 9 + 10 = 19 = 17 + 2 = a + 2$.

Prismas. Paralelepípedos. Pirámides

13.81 Un prisma tiene 9 caras. ¿Cómo son sus bases? ¿Qué tipo de prisma es?

Sus bases son heptágonos. Es un prisma heptagonal.

13.82 Una pirámide tiene 6 vértices. ¿Cuál es su base? ¿Qué tipo de pirámide es?

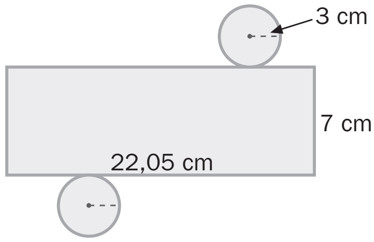
Su base es un pentágono. Es una pirámide pentagonal.

13.83 Si se unen dos cubos por una de sus caras, ¿qué tipo de poliedro se obtiene?

Un prisma cuadrado.

Cilindros. Conos. Esferas

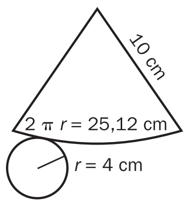
13.84 Observa la siguiente figura. ¿Es posible que sea el desarrollo plano de un cilindro?



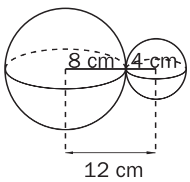
La longitud de las circunferencias de las bases es: $L_c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 = 18{,}84$ cm.

No es posible que sea el desarrollo plano de un cilindro, ya que la longitud de las circunferencias de las bases del cilindro no coincide con la longitud de la base del rectángulo.

13.85 Construye el desarrollo plano de un cono de 8 centímetros de diámetro y 10 centímetros de generatriz, indicando las dimensiones de cada figura.



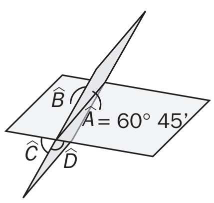
13.86 Dos esferas tienen un punto común. Sus centros están situados a 12 centímetros de distancia y el radio de una de ellas es de 8 centímetros.
¿Cuál es el radio de la otra?



$12 - 8 = 4$ cm. El radio de la otra esfera es de 4 cm.

AMPLIACIÓN

13.87 Uno de los ángulos diedros determinados por dos planos que se cortan mide 60° 45′. Calcula la medida de los otros ángulos diedros formados.



Las medidas de los cuatro ángulos diedros son las siguientes:

$\widehat{A} = \widehat{C} = 60° \, 45'$

$\widehat{B} = \widehat{D} = 180° - 60° \, 45' = 119° \, 15'$

13.88 **¿Puede existir una pirámide con un número impar de aristas?**

No. El número de aristas de una pirámide es siempre el doble del número de lados de la base. Por tanto, siempre ha de ser un número par.

13.89 **¿Cuántas aristas tiene un prisma triangular? ¿Y uno cuadrangular? ¿Y uno pentagonal? ¿Y uno decagonal? A partir de las respuestas anteriores, deduce una relación que dé el número de aristas conocida la base.**

Un prisma triangular tiene 9 aristas; uno cuadrangular, 12; uno pentagonal, 15, y uno decagonal, 30.

Si la base de un prisma tiene n lados, el prisma tiene 3n aristas.

13.90 **Estudia si las siguientes figuras tienen algún punto en común.**

a) Dos esferas de 8 y 10 centímetros de radio, respectivamente, y cuya distancia entre los centros es de 20 centímetros.

b) Dos esferas de 5 y 6 centímetros de radio, respectivamente, y cuya distancia entre los centros es de 11 centímetros.

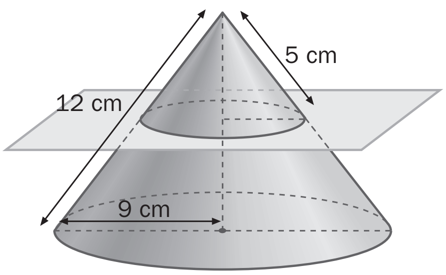
a) No tienen ningún punto en común, ya que la distancia entre los centros de dos esferas tangentes es igual a la suma de los radios.

b) Sí tienen un punto en común: son tangentes.

13.91 **¿Con cuántos tetraedros se puede formar un cubo?**

No es posible formar un cubo con tetraedros. Las caras de un cubo son cuadrados, por lo que todos los ángulos son de 90°. Las caras de un tetraedro son triángulos equiláteros, por lo que todos los ángulos son de 60°. No es posible formar un ángulo de 90° sumando ángulos de 60°.

13.92 **Un cono de 9 centímetros de radio y 12 de generatriz se corta por un plano paralelo a la base como se ve en la figura.**



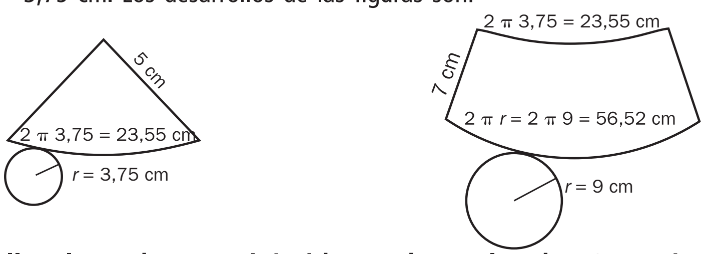
a) ¿Qué dos figuras geométricas se determinan?

b) Haz su desarrollo plano, indicando las dimensiones de cada figura plana.

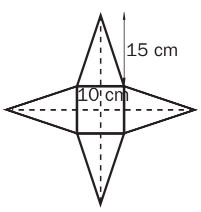
a) Al cortar un cono por un plano paralelo a la base se determinan un cono y un tronco de cono.

b) Los dos triángulos rectángulos de la figura son semejantes. Por el teorema de Tales, el radio del cono que se obtiene verifica:

$\frac{r}{5} = \frac{9}{12} \Rightarrow r = \frac{9 \cdot 5}{12} = 3{,}75$ cm. Los desarrollos de las figuras son:



13.93 **Construye el desarrollo plano de una pirámide cuadrangular de 10 centímetros de lado de la base y de 15 de altura indicando las dimensiones de cada figura plana.**



La base es un cuadrado de 10 centímetros de lado. Las caras laterales son triángulos isósceles de 10 centímetros de base. La altura de la pirámide es de 15cm. Por el teorema de Pitágoras, las alturas de los triángulos miden:

$$h = \sqrt{5^2 + 15^2} = \sqrt{250} = 15{,}81 \text{ cm}$$

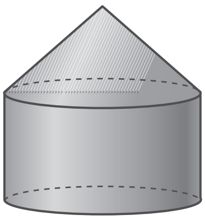
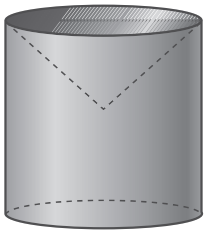
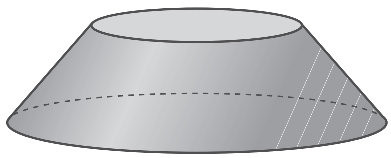
Aplicando de nuevo Pitágoras, los lados iguales de los triángulos miden:

$$l = \sqrt{5^2 + 15{,}81^2} = \sqrt{275} = 16{,}58 \text{ cm}$$

13.94 **Generación de cuerpos geométricos**

Para animar a sus equipos, Juan y Marta hacen girar sus banderines.

a) Señala cuál de los siguientes cuerpos geométricos se obtiene al hacer girar el banderín de cada niño.

1  **2**  **3** 

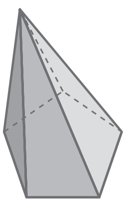
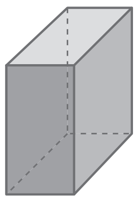
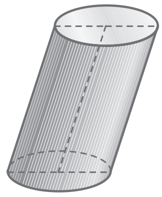
b) De las opciones anteriores, la que no se obtiene al hacer girar el banderín de Juan ni el de Marta es, sin embargo, el cuerpo geométrico que resulta al hacer girar el trapecio *ABCD* alrededor de otro de sus lados. ¿De qué lado se trata?

a) El banderín de Marta genera el cuerpo 1, y el de Juan genera el cuerpo 3.

b) El cuerpo geométrico 2 resulta al hacer girar el trapecio *ABCD* alrededor del lado *AB*.

AUTOEVALUACIÓN

13.A1 **Clasifica las siguientes figuras geométricas.**

a)  **b)**  **c)** 

a) Pirámide pentagonal convexa y oblicua

b) Prisma rectangular convexo y recto. Paralelopípedo (ortoedro).

c) Cilindro oblicuo.

13.A2 **Estudia si son complementarios los siguientes pares de ángulos diedros.**

a) $\widehat{A} = 35° \ 50'$ $\quad \widehat{B} = 54° \ 10'$

b) $\widehat{A} = 42° \ 30'$ $\quad \widehat{B} = 48° \ 30'$

a) Sí son complementarios. En efecto: $35° \ 50' + 54° \ 10' = 90°$

b) No son complementarios. En efecto: $42° \ 30' + 48° \ 30' \neq 90°$

13.A3 Comprueba si se cumple la relación de Euler en los siguientes poliedros.

a) Un prisma octogonal.

b) Una pirámide heptagonal.

a) Sí se verifica la relación de Euler: $a = 24$, $c = 10$, $v = 16 \Rightarrow c + v = 26 = a + 2$

b) Sí se verifica la relación de Euler: $a = 14$, $c = 8$, $v = 8 \Rightarrow c + v = 16 = a + 2$

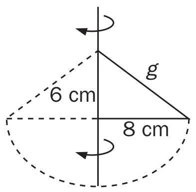
13.A4 Calcula la longitud de la circunferencia que se obtiene al cortar una esfera de 8 centímetros de radio por un plano que contiene su diámetro.

Se obtiene una circunferencia de 8 cm de radio. La longitud de la circunferencia es: $L_c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 = 50{,}24$ cm

13.A5 Indica los elementos del espacio que pueden determinar dos rectas que se cortan.

Dos rectas que se cortan determinan un punto y un plano: el punto de corte y el plano que contiene ambas rectas.

13.A6 Los catetos de un triángulo rectángulo son de 6 y 8 centímetros. Calcula la generatriz del cono que se obtiene al girar el triángulo alrededor del cateto mayor.

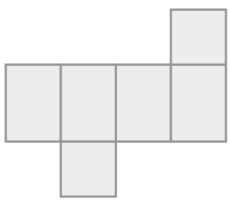


Aplicando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g^2 = 100 \Rightarrow g = 10$

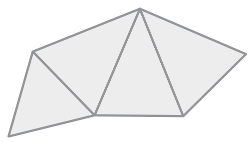
La generatriz mide 10 centímetros.

13.A7 Escribe el poliedro cuyo desarrollo plano es cada uno de los siguientes.

a)



b)



a) Prisma cuadrangular recto.

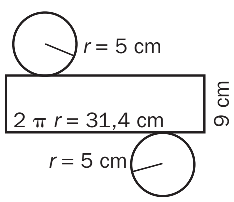
b) Pirámide triangular oblicua.

13.A8 Construye el desarrollo plano de cada figura indicando las dimensiones.

a) Un cilindro de 5 centímetros de radio y 9 de altura.

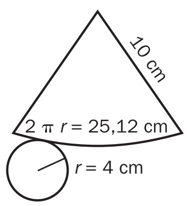
b) Un cono de 4 centímetros de radio y 10 de generatriz.

a)



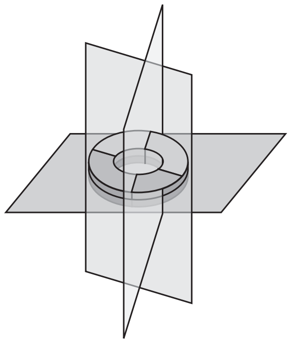
b)

b)



La rosquilla

¿Cómo cortarías una rosquilla en ocho partes iguales usando sólo tres cortes de cuchillo?



Corte 1: corte longitudinal por un plano paralelo a la mesa.

Corte 2: corte transversal por un plano perpendicular al primero.

Corte 3: corte transversal por un plano perpendicular a los dos anteriores.