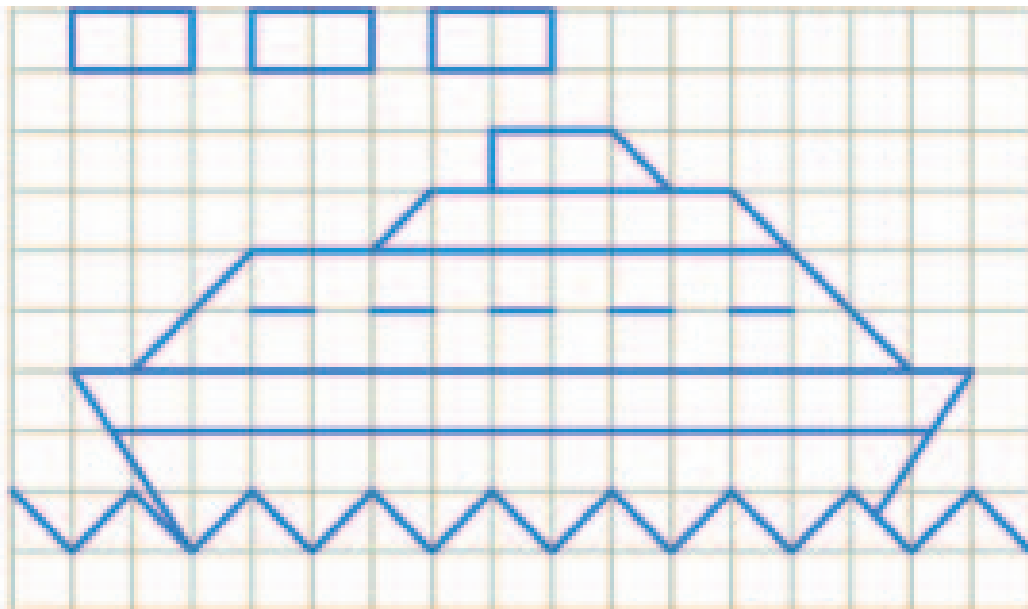
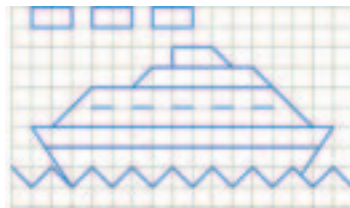


PÁGINA 180

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Semejanza de figuras

- 1 ▲▲▲ Sobre un papel cuadriculado, haz un dibujo semejante a este ampliado al triple de su tamaño:



- 2 ▲▲▲ En un mapa a escala 1 : 50 000 la distancia entre dos pueblos, P y Q, es 11 cm. ¿Cuál es la distancia real entre P y Q? La distancia real entre otros dos pueblos, M y N, es 18 km.

¿A qué distancia estarán en el mapa?

- Distancia real entre P y Q:
 $11 \cdot 50\,000 \text{ cm} = 550\,000 = 5,5 \text{ km}$
- Distancia en el mapa entre M y N:
 $(18 \text{ km} = 1\,800\,000 \text{ cm})$
 $1\,800\,000 : 50\,000 = 36 \text{ cm}$

- 3 ▲▲▲ Una maqueta de una avioneta hecha a escala 1:50 tiene las siguientes medidas:

largo: 32 cm, ancho: 24 cm, alto: 8 cm

Halla las dimensiones reales del aparato.

Largo $\rightarrow 32 \cdot 50 = 1\,600 \text{ cm} = 16 \text{ m}$

Ancho $\rightarrow 24 \cdot 50 = 1\,200 \text{ cm} = 12 \text{ m}$

Alto $\rightarrow 8 \cdot 50 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$

- 4 ▲▲▲ Mide sobre el plano $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Averigua cuáles son las verdaderas distancias entre esos tres pueblos.



	DISTANCIA EN EL PLANO		DISTANCIA REAL
$\overline{AB}$	4 cm	$\times 400\,000$	16 km
$\overline{BC}$	4,5 cm	$\times 400\,000$	18 km
$\overline{AC}$	1,7 cm	$\times 400\,000$	6,8 km

- 5 ▲▲▲ Sabiendo que la distancia real entre A y B (en línea recta) es 6,4 km, halla la escala y las distancias reales $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \text{ en el plano} = 2 \text{ cm} \\ 6,4 \text{ km} = 640\,000 \text{ cm} \end{array} \right\} \frac{2}{640\,000} = \frac{1}{320\,000}$$

Escala $\rightarrow 1:320\,000$

	DISTANCIA EN EL PLANO		DISTANCIA REAL
$\overline{AB}$	2,5 cm	$\times 320\,000$	8 km
$\overline{CD}$	3,5 cm	$\times 320\,000$	11,2 km
$\overline{AD}$	6,4 cm	$\times 320\,000$	20,48 km

- 6 ▲▲▲ La verdadera distancia de La Coruña a Gijón, en línea recta, es de 220 km. En un mapa la medimos con la regla y resulta ser de 11 cm. ¿Cuál es la escala del mapa?

$$\frac{220 \text{ km}}{11 \text{ cm}} = \frac{22\,000\,000}{11} = 2\,000\,000$$

La escala es 1 : 2 000 000.

- 7 ▲▲▲ Cecilia es la chica de la derecha y mide 161 cm. Calcula las estaturas de los otros tres.



Midiendo sobre la fotografía la estatura de los cuatro jóvenes (de los pies a la cabeza), obtenemos, de izquierda a derecha:

$$4,2 \text{ cm} \quad 4 \text{ cm} \quad 4,4 \text{ cm} \quad 3,6 \text{ cm}$$

Conocemos la estatura real de Cecilia, 161 cm.

Por tanto:

$$\frac{161 \text{ cm}}{3,6 \text{ cm}} = 44,72 \text{ es la razón de semejanza}$$

La estatura real de los otros tres es, aproximadamente:

$$4,2 \cdot 44,72 = 187,8 \text{ cm}$$

$$4 \cdot 44,72 = 178,8 \text{ cm}$$

$$4,4 \cdot 44,72 = 196,7 \text{ cm}$$

8 $\triangle\triangle\triangle$ Un rectángulo tiene unas dimensiones de $8\text{ cm} \times 20\text{ cm}$. El lado menor de otro rectángulo semejante a él, mide 6 cm . Halla:

- La razón de semejanza para pasar del primero al segundo.
- El lado mayor del segundo.
- Las áreas de ambos rectángulos.

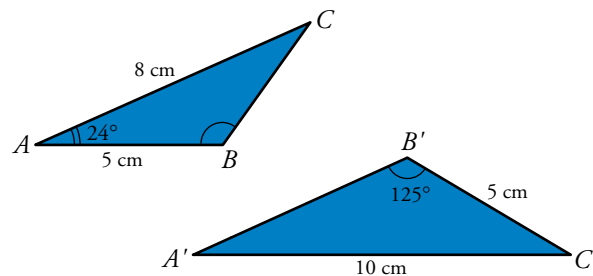
$$\text{a)} = \frac{6\text{ cm}}{8\text{ cm}} = 0,75$$

$$\text{b)} 20 \cdot 0,75 = 15\text{ cm}$$

$$\text{c)} \text{Área del primero} = 8\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = 160\text{ cm}^2$$

$$\text{Área del segundo} = 6\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} = 90\text{ cm}^2$$

9 $\triangle\triangle\triangle$ Nos aseguran que estos dos triángulos son semejantes:



Halla los lados y los ángulos que les faltan a cada uno de ellos.

$$\hat{A}' = \hat{A} = 24^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{B}' = 125^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (24^\circ + 125^\circ) = 31^\circ = \hat{C}'$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{8}{10} = 0,8 \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} = 0,8$$

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} \cdot 0,8 = 5 \cdot 0,8 = 4\text{ cm}$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \cdot 0,8 \rightarrow 5 = \overline{A'B'} \cdot 0,8 \rightarrow \overline{A'B'} = \frac{5}{0,8} = 6,25\text{ cm}$$

10 $\triangle\triangle\triangle$ Los lados de un triángulo miden 3 cm , 4 cm y 5 cm . Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 15 cm .

- ¿Cuál es la razón de semejanza?
- Halla los otros dos lados del segundo triángulo.
- El primer triángulo es rectángulo. ¿Podemos asegurar que el segundo también lo será?

$$a) = \frac{15 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 5$$

Razón de semejanza = 5

$$b) 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$$

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}$$

c) Dos triángulos semejantes tienen los ángulos respectivamente iguales. Por tanto, si uno es rectángulo, también lo es el otro.

PÁGINA 181

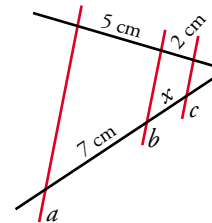
■ TEOREMA DE TALES

11    Las rectas a , b y c son paralelas. Halla la longitud de x .

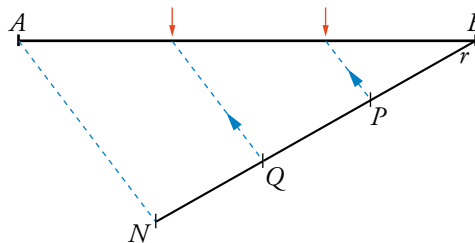
¿Qué teorema estás aplicando?

Aplicando el Teorema de Tales:

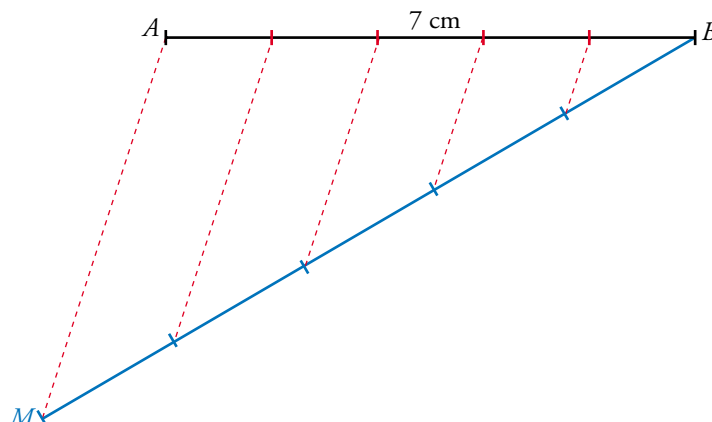
$$\frac{x}{2} = \frac{7}{5} \rightarrow x = \frac{14}{5} = 2,8 \text{ cm}$$



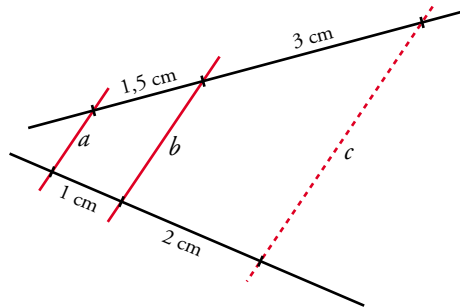
12    Observa cómo se parte un segmento AB en tres partes iguales:



Por uno de sus extremos se traza una recta r , cualquiera. Sobre ella, se toman tres segmentos iguales. Se unen A y N . Por Q y P se trazan paralelas a AN . Se obtienen así los puntos señalados con flechas, con los que se parte el segmento AB en tres trozos iguales. Traza un segmento AB de 7 cm y pártelo en cinco trozos iguales.



- 13  Sabemos que las rectas a y b son paralelas. Teniendo en cuenta las medidas que se dan en el dibujo, ¿podemos asegurar que c es paralela a las rectas a y b ? ¿En qué te basas?

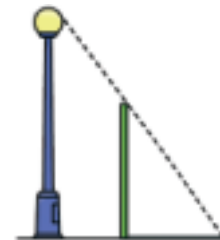


Las medidas en cada una de las rectas negras son proporcionales: $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$

Por tanto, la recta c es paralela a las rectas a y b .

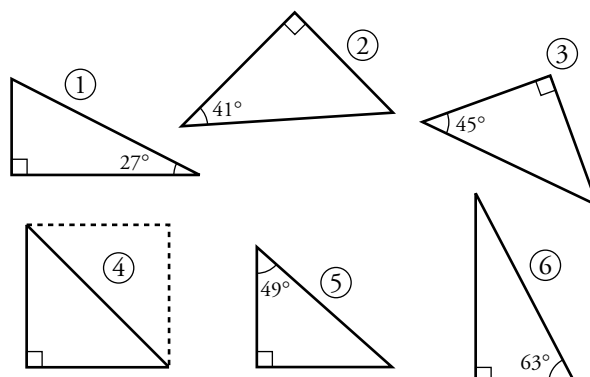
- 14  Los triángulos formados por una farola, un poste vertical y su sombra están en posición de Tales. Justifícalo.

Tienen un ángulo igual, el recto, y los lados opuestos a este ángulo, las hipotenusas, son paralelos.



■ CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

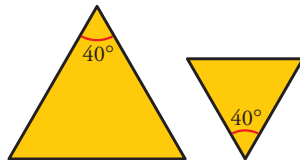
- 15  Explica por qué son semejantes dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual. Entre estos triángulos, hay algunos semejantes entre sí. Averigua cuáles son calculando previamente el ángulo que le falta a cada uno de ellos:



Si dos triángulos son rectángulos y, además, tienen un ángulo agudo igual, entonces tienen tres ángulos iguales. Por tanto, son semejantes.

- ① $180^\circ - 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$. El ángulo desconocido mide 63° .
- ② $180^\circ - 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$. El ángulo desconocido mide 49° .
- ③ $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. El ángulo desconocido mide 45° .
- ④ La hipotenusa es la diagonal de un cuadrado. Sus ángulos agudos miden 45° cada uno.
- ⑤ $180^\circ - 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$. El ángulo desconocido mide 41° .
- ⑥ $180^\circ - 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$. El ángulo desconocido mide 27° .
- ① es semejante a ⑥, pues sus dos ángulos agudos miden 27° y 63° .
- ② es semejante a ⑤, pues sus dos ángulos agudos miden 41° y 49° .
- ③ es semejante a ④, pues sus dos ángulos miden, ambos, 45° .

16 ▲▲▲

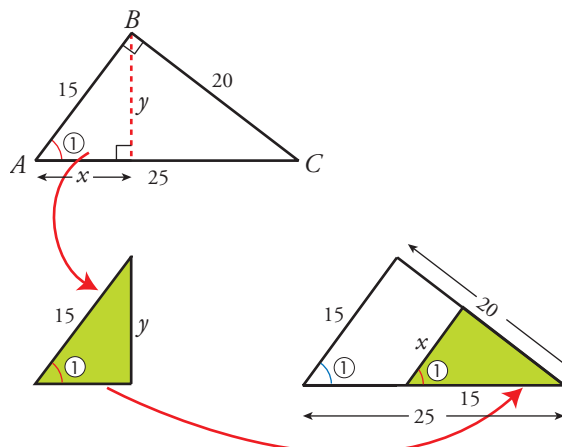


Explica por qué estos dos triángulos isósceles son semejantes partiéndolos en triángulos rectángulos.

Si dividimos cada triángulo isósceles, por el ángulo que conocemos, en dos triángulos rectángulos, los cuatro triángulos rectángulos tienen uno de sus ángulos agudos iguales, el de 20° .

17 ▲▲▲ El triángulo grande ABC y el pequeño, rojo, son rectángulos. Explica por qué son semejantes.

Puesto que son semejantes, los situamos en posición de Tales para que se aprecie cuáles son los lados correspondientes en la semejanza.



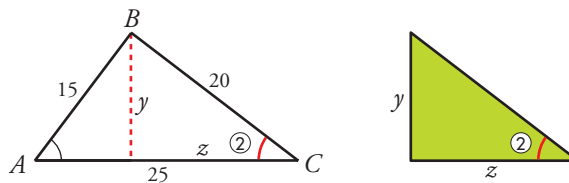
Halla los lados x e y del triángulo verde.

$$\frac{x}{15} = \frac{15}{25} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 15}{25} = 9$$

$$\frac{y}{20} = \frac{15}{25} \rightarrow y = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$$

PÁGINA 182

- 18 ▲▲▲ Procediendo como en el ejercicio anterior, calcula los lados y , z del triángulo verde.



La hipotenusa del triángulo ABC es AC . Si los dos triángulos son semejantes:

$$\frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{20}{25}$$

$$\frac{y}{15} = \frac{20}{25} \rightarrow y = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ cm}$$

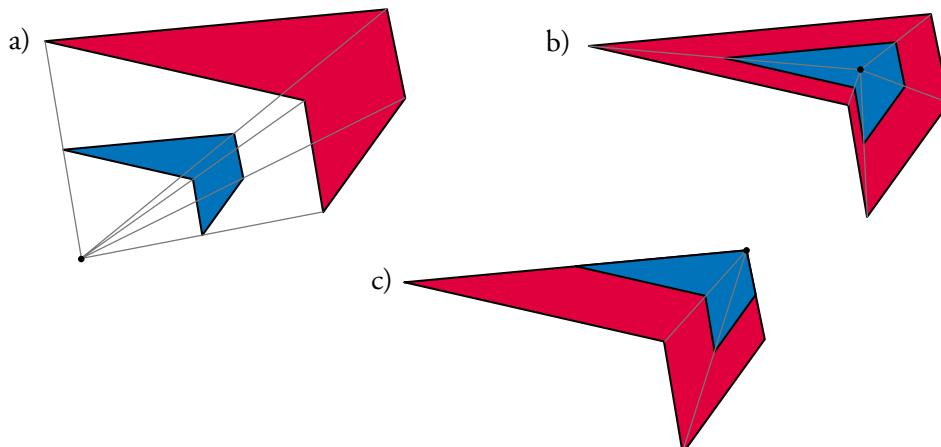
$$\frac{z}{20} = \frac{20}{25} \rightarrow z = \frac{20 \cdot 20}{25} = 16 \text{ cm}$$

■ CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS SEMEJANTES

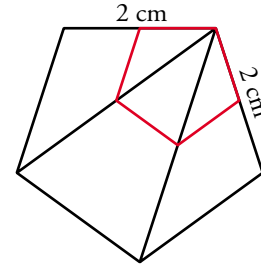
- 19 ▲▲▲ Haz en tu cuaderno un pentágono irregular. Amplíalo al doble de su tamaño:

- Proyectándolo desde un punto exterior.
- Proyectándolo desde un punto interior.
- Proyectándolo desde uno de sus vértices.

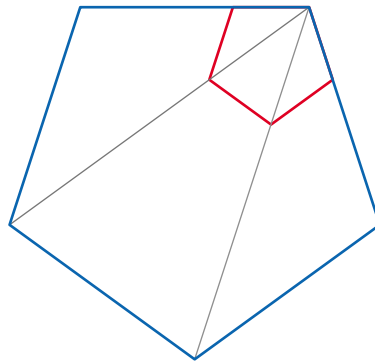
Construcción libre. Por ejemplo:



- 20 ▲▲▲ Para construir un pentágono regular de 2 cm de lado, copiamos un pentágono regular cualquiera (figura roja), alargamos dos de sus lados consecutivos hasta 2 cm y completamos una figura semejante a la roja con los lados paralelos.

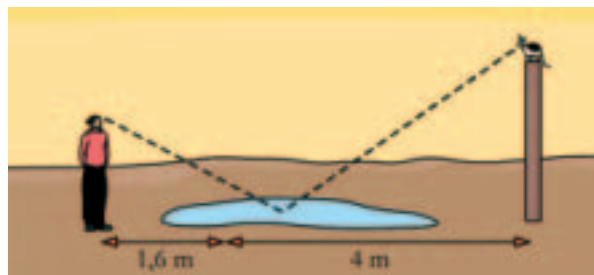


Calca en tu cuaderno el pentágono rojo y, procediendo como arriba, dibuja un pentágono regular de 3 cm de lado.



■ APLICACIONES DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

- 21 ▲▲▲ El gato de Leticia se ha subido a un poste. Leticia puede ver a su gato reflejado en un charco. Toma las medidas que se indican en el dibujo y mide la altura de sus ojos: 1,44 cm. ¿A qué altura se encuentra el gato?



Los triángulos formados por Leticia y el charco y el poste con el charco, son rectángulos. Además, los ángulos que forman con el charco son iguales. Luego, los dos triángulos son semejantes.

$$\frac{1,44}{1,6} = \frac{x}{4} \quad x = \frac{4 \cdot 1,44}{1,6} = 3,6 \text{ m mide el poste}$$

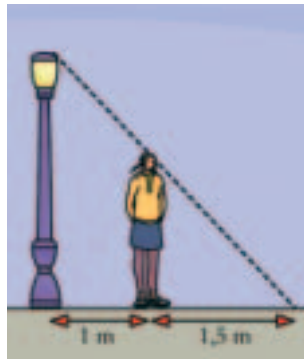
El gato se encuentra a 3,6 m de altura.

- 22 ▲▲▲ Un gran pino, a las once de la mañana de un cierto día, arroja una sombra de 6,5 m. Próximo a él, una caseta de 2,8 m de altura proyecta una sombra de 70 cm. ¿Cuál es la altura del pino?

$$\frac{x}{6,5} = \frac{2,8}{0,70} \rightarrow x = \frac{6,5 \cdot 2,8}{0,70} = 26 \text{ m}$$

El pino mide 26 m.

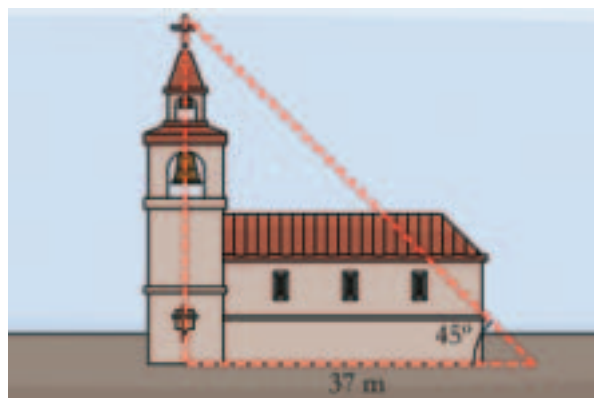
- 23 ▲▲▲ Sabiendo que Amelia tiene una altura de 162 cm, halla la altura de la farola.



$$\frac{162}{x} = \frac{150}{250} \rightarrow x = \frac{162 \cdot 250}{150} = 270 \text{ cm}$$

La farola mide 2,7 m.

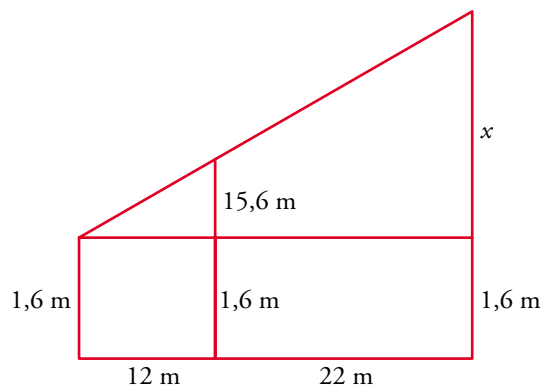
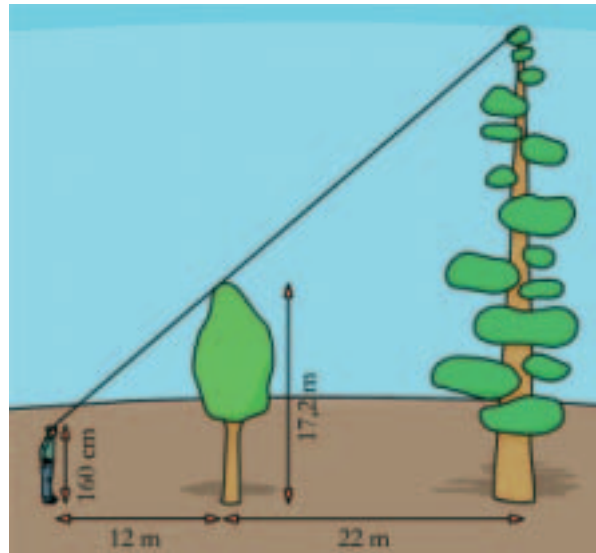
- 24 ▲▲▲ ¿Cuánto miden los ángulos de los triángulos rectángulos isósceles? Ténlo en cuenta para hallar la altura de la torre de la iglesia.



El triángulo que se ve es isósceles rectángulo: tiene un ángulo recto y dos ángulos de 45° . Los lados iguales son la base y la altura de la torre.

La altura de la torre es 37 m.

25 ▲▲△ Halla la altura del árbol grande:



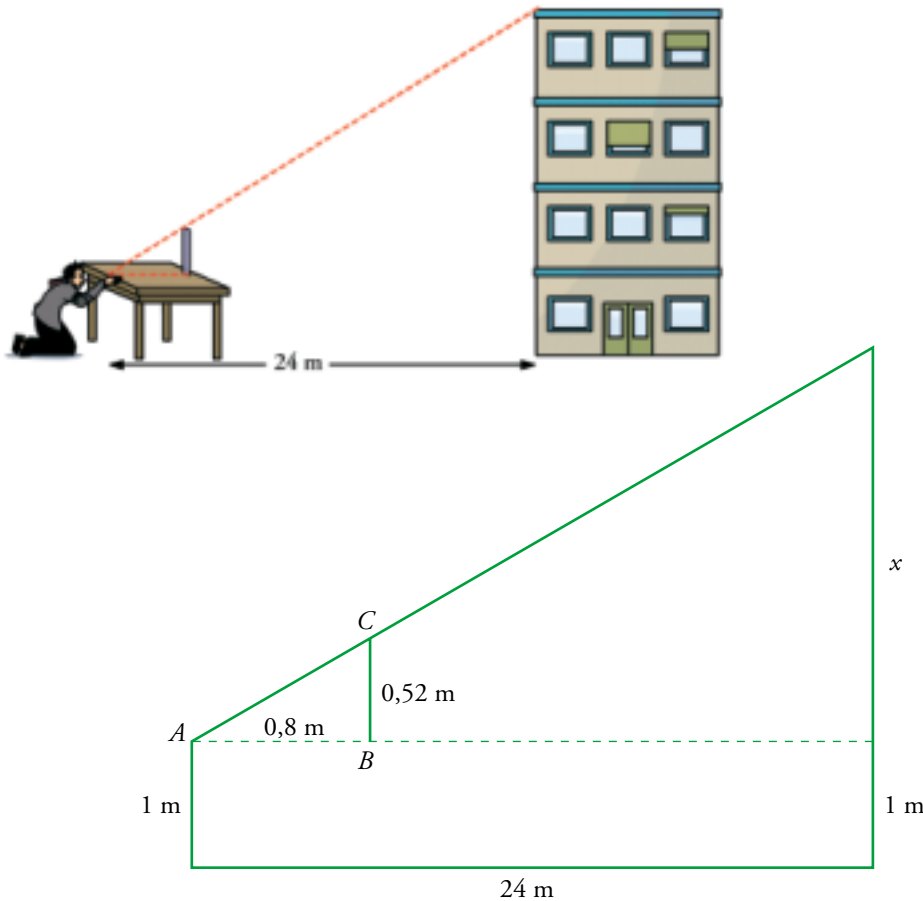
$$\frac{15,6}{x} = \frac{12}{12 + 22} \rightarrow \frac{15,6}{x} = \frac{12}{34} \rightarrow x = \frac{34 \cdot 15,6}{12} = 44,2 \text{ m}$$

El árbol grande mide $44,2 \text{ m} + 1,6 \text{ m} = 45,8 \text{ m}$

PÁGINA 183

26 ▲▲△ Halla la altura del edificio sabiendo que:

- La mesa tiene 1 m de altura.
- $\overline{AB} = 80 \text{ cm}$.
- $\overline{BC} = 52 \text{ cm}$.



$$\frac{0,52}{x} = \frac{0,8}{24} \rightarrow x = \frac{24 \cdot 0,52}{0,8} = 15,6 \text{ m}$$

La altura del edificio es de $15,6 + 1 = 16,6 \text{ m}$.

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

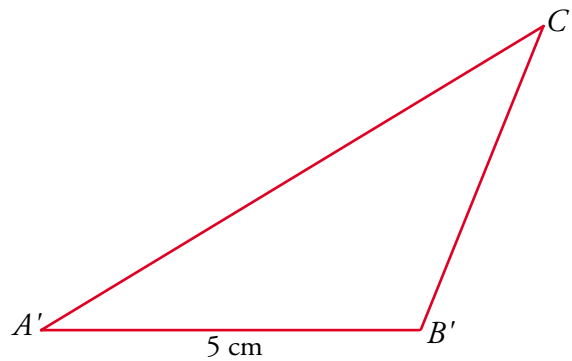
- 27 Desde los extremos A y B de la recta de los 100 m de una pista de atletismo, se ve la torre de una iglesia.

Medimos los ángulos $\hat{A} = 31^\circ$ y $\hat{B} = 112^\circ$.

Dibuja en tu cuaderno un triángulo semejante, $A'B'C'$, con $\overline{A'B'} = 5 \text{ cm}$.

Midiendo $\overline{A'C'}$, calcula la distancia real, $\overline{AC}$.





Midiendo se obtiene $\overline{A'C'} = 7,8 \text{ cm}$

Por tanto:

$$\frac{0,05 \text{ m}}{100 \text{ m}} = \frac{0,078 \text{ m}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{7,8}{0,05} = 156 \text{ m}$$