3º ESO

MATEMÁTICAS

José Margallo

Índice

ACTIVIDADES PAG. 7

ACTIVIDADES

1. Realiza las siguientes operaciones con potencias.

a) $2^{34} \cdot 5^{34} =$

b) $12^{98} : 6^{56} =$

c) $13^{63} \cdot 13^{12} =$

d) $5^{76} : 5^{27} =$

e) $(-5)^{2^{15}} =$

f) $(-1)^{123} =$

g) $(-3)^5 =$

h) $(-2)^6 =$

1.

$$2^{34} \cdot 5^{34} = (2 \cdot 5)^{34} = 10^{34}$$

$$12^{98} : 6^{56} = \frac{2^{98} \cdot 6^{98}}{6^{56}} = 2^{98} \cdot 6^{42} = 2^{98} \cdot (2 \cdot 3)^{42} = 2^{98} \cdot 2^{42} \cdot 3^{42}$$
$$= 2^{140} \cdot 3^{42}$$

$$13^{63} \cdot 13^{12} = 13^{75}$$

$$5^{76} : 5^{27} = 5^{49}$$

$$(-5)^{2^{15}} = (-5)^{30} = 5^{30}$$

$$(-1)^{123} = -1$$

$$(-3)^5 = -\ 3^5$$

$$(-2)^6 = \ 2^6$$

ACTIVIDADES PAG. 7

ACTIVIDADES

2. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 20, 24 y 32.

2.

$$\text{MCD}(20,24,32) = 2^2 = 4$$

$$\text{mcm}\ (20,24,32) = 2^5 \cdot 5 \cdot 3 = 2^5 \cdot 5 \cdot 3 = 480$$

ACTIVIDADES PAG. 9

ACTIVIDADES

3. Tres botellas de leche cuestan 3´45 €. ¿Cuánto costarán 5 botellas?

4. Un coche que circula de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad media de 80 km/h tarda 30 minutos en realizar el trayecto de ida. A la hora del regreso circula a 110 km/h ¿Cuánto tardará en realizar el viaje de vuelta?

3.

3 botellas cuestan 345 $\Rightarrow$1 botella cuesta 115 $\Rightarrow$ 5 botellas cuestan 575 €

4.

$$espacio = velocidad \cdot tiempo$$

$$e = v \cdot t$$

$$e = 80 \cdot 05 \Rightarrow e = 40 \text{ km}$$

Las dos ciudades distan entre sí 40 km:

$$t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{40}{110} h \Rightarrow t \cong 0´3636363636364 \text{ h}$$

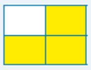
$$t \cong 2181 \text{ minutos}$$

UNIDAD 1. NÚMEROS RACIONALES

ACTIVIDADES PAG. 12

ACTIVIDADES

1. Si de una tarta de 5 raciones nos comemos 1 ración, ¿qué parte de la tarta nos hemos comido? Si comiéramos $\frac{5}{5}$ de la tarta, ¿cuánto nos habríamos comido?
2. De las siguientes figuras, indica con una fracción qué parte del total está coloreada:

a)    b) 

1.

$\frac{1}{5}$ de la tarta .

Si nos hubiéramos comido los $\frac{5}{5}$ nos hubiéramos comido la tarta entera.

2 .

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{4}$

ACTIVIDADES PAG. 13

ACTIVIDADES

3. Clasifica los siguientes números racionales:

a) $\frac{13}{1\,000}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{65}{56}$ e) $\frac{12}{12}$ f) $\frac{7}{4}$ g) $2\frac{3}{4}$

4. Expresa como números mixtos las fracciones impropias del ejercicio anterior y los números mixtos exprésalos como fracciones impropias.
5. Un pintor tarda tres horas y media en pintar una casa. Su ayudante tarda cuatro horas y cuarto en hacer el mismo trabajo. Expresa en forma numérica el tiempo que tarda cada uno en pintar la casa.
6. Un barco pesquero lleva en sus bodegas tres toneladas y media de sardinas. Expresa en forma numérica las toneladas de pescado del barco.
7. En el problema anterior, si son siete los pescadores y se reparten equitativamente el pescado, ¿cuántas toneladas le corresponden a cada uno?

3.

a) fracción decimal , b) número mixto , c) fracción propia , d) fracción impropia , e) número entero , f) fracción impropia , g) número mixto.

4.

Fracciones impropias expresadas como números mixtos:

$$\frac{65}{56} = 1\frac{9}{56} \quad , \quad \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

Números mixtos expresados como fracciones impropias:

$$3\frac{1}{3} = \frac{10}{3} \quad , \quad 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

5.

El primer pintor $3\frac{1}{2}$. El segundo pintor $4\frac{1}{4}$.

6.

$3\frac{1}{2}$ toneladas.

7.

$3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ toneladas. Como son siete los pescadores le corresponde $\frac{1}{2}$ tonelada de pescado a cada uno.

ACTIVIDADES PAG. 14

ACTIVIDADES

8. Representa sobre la recta los siguientes números racionales:

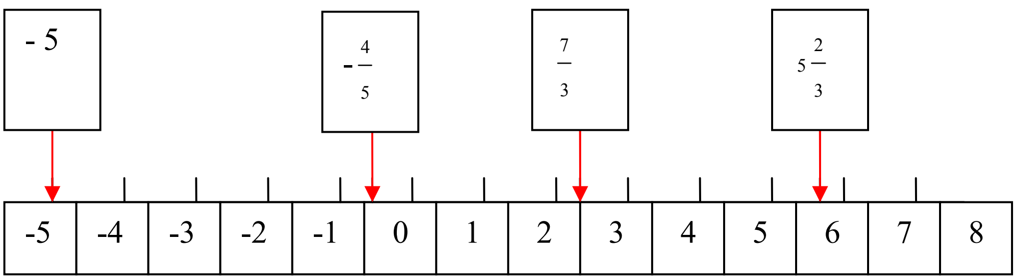
a) -5

b) $-\frac{4}{5}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $5\,\frac{2}{3}$

8.



ACTIVIDADES PAG. 15

ACTIVIDADES

9. De las siguientes fracciones, indica cuáles son equivalentes. Razona tu respuesta:

a) $\frac{5}{6}$ y $\frac{10}{6}$ b) $\frac{4}{7}$ y $\frac{12}{21}$ y c) $\frac{3}{25}$ y $\frac{15}{50}$ d) $\frac{2}{9}$ y $\frac{8}{36}$

10. Simplifica las siguientes fracciones utilizando los dos métodos:

a) $\frac{60}{120}$ b) $\frac{28}{49}$ c) $\frac{432}{2160}$ d) $\frac{84}{96}$ e) $\frac{30}{32}$

9.

a) $\frac{5}{6} \neq \frac{10}{6}$ porque $5 \cdot 6 \neq 6 \cdot 10$

b) $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ porque $4 \cdot 21 = 7 \cdot 12$

c) $\frac{3}{25} \neq \frac{15}{50}$ porque $3 \cdot 50 \neq 15 \cdot 25$

d) $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$ porque $2 \cdot 36 = 8 \cdot 9$

10.

a) $\frac{60}{120} = \frac{60:60}{120:60} = \frac{1}{2}$ { ya que MCD (60 , 120) = 60 }

b) $\frac{28}{49} = \frac{28:7}{49:7} = \frac{4}{7}$ { ya que MCD (28 , 49) = 7 }

c) $\frac{432}{2160} = \frac{432:432}{2160:432} = \frac{1}{5}$ { ya que MCD (432 , 2160) = 432 }

d) $\frac{84}{96} = \frac{84:12}{96:12} = \frac{7}{8}$ { ya que MCD (84 , 96) = 12 }

e) $\frac{30}{32} = \frac{30:2}{32:2} = \frac{15}{16}$ { ya que MCD (30 , 32) = 2 }

ACTIVIDADES PAG. 16

ACTIVIDADES

11. De los siguientes números racionales, indica cuál es su representante canónico:

a) $-\frac{6}{16}$ c) $\frac{212}{200}$ e) $-\frac{12}{60}$

b) $-\frac{20}{4}$ d) $\frac{1204}{446}$ f) $-\frac{5}{25}$

12. De las siguientes fracciones, indica cuáles pertenecen a la clase de equivalencia cuyo representante canónico es $\frac{2}{5}$:

a) $\frac{11}{12}$ c) $\frac{16}{40}$ e) $-\frac{22}{55}$

b) $\frac{10}{25}$ d) $-\frac{48}{45}$ f) $\frac{213}{417}$

11.

a) $-\frac{3}{8}$, b) -5 , c) $\frac{50}{53}$, d) $\frac{602}{223}$, e) $-\frac{1}{5}$, f) $-\frac{1}{5}$

12.

Son las siguientes: b) $\frac{10}{25}$, c) $\frac{16}{40}$

ACTIVIDADES PAG. 17

ACTIVIDADES

13. Calcula el denominador común de las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{6}, \frac{7}{8}$ y $\frac{5}{12}$ c) $\frac{1}{8}, \frac{3}{6}$ y $\frac{6}{24}$ e) $\frac{8}{10}, \frac{3}{5}$ y $\frac{7}{15}$

b) $\frac{3}{4}, \frac{2}{10}$ y $\frac{4}{14}$ d) $\frac{5}{12}, -\frac{6}{12}$ y $\frac{5}{6}$ f) $\frac{2}{3}, -\frac{12}{15}$ y $\frac{7}{12}$

14. Ordena las fracciones del ejercicio anterior de menor a mayor.

15. Ordena los siguientes números racionales de mayor a menor:

a) $4\frac{1}{3}, \frac{6}{4}$ y $\frac{12}{6}$ b) $5\frac{2}{3}, 3\frac{5}{6}$ y $7\frac{1}{9}$

13.

a) Denominador común 24

$$\frac{2}{6}=\frac{8}{24}, \frac{7}{8}=\frac{21}{24}, \frac{5}{12}=\frac{10}{24}$$

b) Denominador común 140

$$\frac{3}{4}=\frac{95}{140}, \frac{2}{10}=\frac{28}{140}, \frac{4}{14}=\frac{40}{140}$$

c) Denominador común 24

$$\frac{1}{8}=\frac{3}{24}, \frac{3}{6}=\frac{12}{24}, \frac{6}{24}$$

d) Denominador común 12

$$\frac{5}{12}, -\frac{6}{12}, \frac{5}{6}=\frac{10}{12}$$

e) Denominador común 30

$$\frac{8}{10}=\frac{24}{30}, \frac{3}{5}=\frac{18}{30}, \frac{7}{15}=\frac{14}{30}$$

f) Denominador común 60

$$\frac{2}{3}=\frac{40}{60}, -\frac{12}{15}=-\frac{48}{60}, \frac{7}{12}=\frac{35}{60}$$

14 .

a) $\frac{2}{6}=\frac{8}{24}<\frac{5}{12}=\frac{10}{24}<\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$

b) $\frac{2}{10}=\frac{28}{140}<\frac{4}{14}=\frac{40}{140}<\frac{3}{4}=\frac{95}{140}$

c) $\frac{1}{8}=\frac{3}{24}<\frac{6}{24}<\frac{3}{6}=\frac{12}{24}$

d) $-\frac{6}{12}<\frac{5}{12}<\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$

$$\text{e) } \frac{7}{15}=\frac{14}{30}<\frac{3}{5}=\frac{18}{30}<\frac{8}{10}=\frac{24}{30}$$

$$\text{f) } -\frac{12}{15}=-\frac{48}{60}<\frac{7}{12}=\frac{35}{60}<\frac{2}{3}=\frac{40}{60}$$

15.

a) Denominador común 12

$$\frac{6}{4}=\frac{18}{12}<\frac{12}{6}=\frac{24}{12}<4\frac{1}{3}=\frac{13}{3}=\frac{52}{12}$$

b) Denominador común 18

$$3\frac{5}{6}=\frac{23}{6}=\frac{69}{18}<5\frac{2}{3}=\frac{17}{3}=\frac{102}{18}<7\frac{1}{9}=\frac{64}{9}=\frac{128}{18}$$

ACTIVIDADES PAG. 18

ACTIVIDADES

16. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{2}{15}$ b) $7+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ c) $2-\frac{1}{5}+\frac{2}{7}$ d) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1$

17. Efectúa las siguientes operaciones entre fracciones, números mixtos y números enteros:

a) $1\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-2$ b) $2\frac{4}{5}-\frac{4}{5}+2$ c) $7\frac{1}{6}-\frac{5}{12}+\frac{1}{4}$

d) $\frac{7}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ e) $1\frac{7}{9}-3\frac{3}{4}-\frac{17}{36}$ f) $\frac{7}{10}+1\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$

g) $5\frac{1}{6}-4\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ h) $2\frac{1}{5}+5\frac{1}{5}+6\frac{1}{10}-\frac{3}{10}$

16.

$$\text{a) } \frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{2}{15}=\frac{10+12-2}{15}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$$

$$\text{b) } 7+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{56+6-4}{8}=\frac{58}{8}=\frac{29}{4}$$

$$\text{c) } 2-\frac{1}{5}+\frac{2}{7}=\frac{70-7+10}{35}=\frac{73}{35}$$

$$\text{d) } \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1=\frac{2+1+6}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

17.

$$\text{a) } 1\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-2=\frac{4}{3}+\frac{5}{6}-2=\frac{8+5-12}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\text{b) } 2\frac{4}{5}-\frac{4}{5}+2=\frac{14}{5}-\frac{4}{5}+2=\frac{10}{5}+2=4$$

$$\text{c) } 7\frac{1}{6}-\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{43}{6}-\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{86-5+3}{12}=\frac{84}{12}=7$$

$$\text{d) } \frac{7}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{7+4+3-2}{6}=\frac{12}{6}=2$$

e) $1\frac{7}{9}-3\frac{3}{4}-\frac{17}{36}=\frac{16}{9}-\frac{15}{4}-\frac{17}{36}=\frac{64-135-17}{36}=-\frac{88}{36}=-\frac{22}{9}$

f) $\frac{7}{10}+1\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{7}{10}+\frac{5}{4}+\frac{1}{20}=\frac{14+25+1}{20}=\frac{40}{20}=2$

g) $5\frac{1}{6}-4\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{31}{6}-\frac{13}{3}+\frac{1}{2}=\frac{31-26+3}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

h) $2\frac{1}{5}+5\frac{1}{5}+6\frac{1}{10}-\frac{3}{10}=\frac{11}{5}+\frac{26}{5}+\frac{61}{10}-\frac{3}{10}=\frac{22+52+61-3}{10}=\frac{132}{10}=\frac{66}{5}$

ACTIVIDADES PAG. 19

ACTIVIDADES

18. Efectúa las siguientes operaciones simplificando todo lo que puedas:

a) $\frac{2}{7}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{35}{18}$ c) $5\cdot\left(-\frac{12}{19}\right)\cdot\frac{38}{4}$

b) $7\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{14}{3}$ d) $\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{5}$

19. Realiza las siguientes divisiones de números racionales:

a) $\frac{16}{9}:\frac{8}{3}$ b) $\frac{4}{25}:\frac{3}{15}$ c) $-2:\frac{16}{17}$ d) $\frac{7}{5}:\left(-\frac{6}{7}\right)$

18.

a) $\frac{2}{7}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{35}{18}=\frac{\cancel{2}\cdot 8\cdot\cancel{35}}{\cancel{(7\cdot 5)}\cdot(\cancel{2}\cdot 9)}=\frac{8}{9}$

b) $7\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{14}{3}=\cancel{7}\cdot\frac{(2\cdot\cancel{3})}{\cancel{7}}\cdot\frac{14}{\cancel{3}}=2\cdot 14=28$

c) $5\cdot\left(-\frac{12}{19}\right)\cdot\frac{38}{4}=-\frac{5\cdot(3\cdot\cancel{4})(1\cancel{9}\cdot 2)}{1\cancel{9}\cdot\cancel{4}}=-5\cdot 3\cdot 2=-30$

d) $\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{5}=\frac{\cancel{2\cdot(2}\cdot 3)}{2\cdot\cancel{4}\cdot 5}=\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$

19.

a) $\frac{16}{9}:\frac{8}{3}=\frac{16\cdot 3}{9\cdot 8}=\frac{(2\cdot\cancel{8})\cdot\cancel{3}}{(3\cdot\cancel{3})\cdot\cancel{8}}=\frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{25}:\frac{3}{15}=\frac{4\cdot 15}{3\cdot 25}=\frac{4\cdot(\cancel{3}\cdot\cancel{5})}{\cancel{3}\cdot(5\cdot\cancel{5})}=\frac{4}{5}$

c) $-2:\frac{16}{17}=\frac{-2\cdot 17}{16}=-\frac{\cancel{2}\cdot 17}{\cancel{2}\cdot 8}=-\frac{17}{8}$

d) $\frac{7}{5}:\left(-\frac{6}{7}\right)=-\frac{7\cdot 7}{6\cdot 5}=-\frac{49}{30}$

ACTIVIDADES PAG. 20

ACTIVIDADES

20. Comprueba que se verifica la propiedad distributiva en las siguientes operaciones:

a) $-\frac{3}{11}\cdot\left(\frac{11}{9}+\frac{22}{9}\right)$ b) $\frac{8}{12}\cdot\left(\frac{36}{40}+\frac{24}{48}\right)$ c) $-\frac{5}{11}\cdot\left(\frac{6}{10}+\frac{7}{14}\right)$

21. Saca factor común en los ejercicios siguientes:

a) $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{11}+\frac{5}{7}\cdot\frac{16}{22}$

b) $\frac{8}{13}\cdot\frac{72}{16}+\frac{8}{13}\cdot\frac{16}{32}$

c) $\frac{2}{9}\cdot\frac{18}{6}+\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{6}$

22. Opera extrayendo primero factor común:

a) $\frac{4}{27}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{27}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{27}\cdot\frac{5}{6}$

b) $\frac{12}{43}\cdot\frac{5}{6}+\frac{12}{43}\cdot\frac{7}{12}+\frac{12}{43}\cdot\frac{9}{24}$

c) $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}$

20.

a) $-\frac{3}{11}\cdot\left(\frac{11}{9}+\frac{22}{9}\right)=-\frac{3}{11}\cdot\left(\frac{11+22}{9}\right)=-\frac{3}{11}\cdot\left(\frac{33}{9}\right)=-\frac{\cancel{3}\cdot(\cancel{11}\cdot\cancel{3})}{\cancel{11}\cdot\cancel{9}}=-1$

$-\frac{3}{11}\cdot\left(\frac{11}{9}+\frac{22}{9}\right)=-\frac{\cancel{3}}{\cancel{11}}\cdot\frac{\cancel{11}}{(3\cdot\cancel{3})}-\frac{\cancel{3}}{\cancel{11}}\cdot\frac{2\cdot\cancel{11}}{3\cdot\cancel{3}}=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{3}{3}=-1$

b) $\frac{8}{12}\cdot\left(\frac{36}{40}+\frac{24}{48}\right)=\frac{8}{12}\cdot\left(\frac{216+120}{240}\right)=\frac{8}{12}\cdot\frac{336}{240}=\frac{\cancel{8}\cdot(\cancel{12}\cdot 28)}{\cancel{12}\cdot(30\cdot\cancel{8})}=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$

$\frac{8}{12}\cdot\left(\frac{36}{40}+\frac{24}{48}\right)=\frac{8}{12}\cdot\frac{36}{40}+\frac{8}{12}\cdot\frac{24}{48}=\frac{\cancel{8}\cdot(3\cdot\cancel{12})}{\cancel{12}\cdot(5\cdot\cancel{8})}+\frac{\cancel{8}.(\cancel{2}\cdot\cancel{12})}{\cancel{12}\cdot(\cancel{8}\cdot\cancel{2}\cdot 3)}=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{9+5}{15}=\frac{14}{15}$

c) $-\frac{5}{11}\cdot\left(\frac{6}{10}+\frac{7}{14}\right)=-\frac{5}{11}\cdot\left(\frac{42+35}{70}\right)=-\frac{5}{11}\cdot\frac{77}{70}=-\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{11}\cdot\cancel{7}}{\cancel{11}\cdot\cancel{7}\cdot(2\cdot\cancel{5})}=-\frac{1}{2}$

$-\frac{5}{11}\cdot\left(\frac{6}{10}+\frac{7}{14}\right)=-\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{10}-\frac{5}{11}\cdot\frac{7}{14}=-\frac{\cancel{5}\cdot(\cancel{2}\cdot 3)}{11\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5}}-\frac{5\cdot\cancel{7}}{11\cdot(2\cdot\cancel{7})}=\frac{-3}{11}-\frac{5}{22}=\frac{-6-5}{22}=\frac{-11}{22}=-\frac{1}{2}$

21.

a) $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{11}+\frac{5}{7}\cdot\frac{16}{22}=\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{6}{11}+\frac{16}{22}\right)$

b) $\frac{8}{13}\cdot\frac{72}{16}+\frac{8}{13}\cdot\frac{16}{32}=\frac{8}{13}\cdot\left(\frac{72}{16}+\frac{16}{32}\right)$

c) $\frac{2}{9}\cdot\frac{18}{6}+\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{6}=\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{18}{6}+\frac{9}{6}\right)$

22.

a) $\frac{4}{27}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{27}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{27}\cdot\frac{5}{6}=\frac{4}{27}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)=\frac{4}{27}\cdot\frac{8+9+10}{12}=\frac{4}{\cancel{27}}\cdot\frac{\cancel{27}}{12}=\frac{1}{3}$

b) $\frac{12}{43}\cdot\frac{5}{6}+\frac{12}{43}\cdot\frac{7}{12}+\frac{12}{43}\cdot\frac{9}{24}=\frac{12}{43}\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{9}{24}\right)=\frac{12}{43}\cdot\frac{20+14+9}{24}=\frac{12}{\cancel{43}}\cdot\frac{\cancel{43}}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{3-1}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$

ACTIVIDADES PAG. 21

ACTIVIDADES

23. Comprueba la propiedad asociativa de la suma en el siguiente ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)$$

24. Comprueba la propiedad conmutativa de la suma en el siguiente ejemplo:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{6}$$

25. Verifica la propiedad asociativa del producto en el siguiente ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{10}{3}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}\right)$$

23.

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}=\frac{10+12}{15}+\frac{5}{6}=\frac{22}{15}+\frac{5}{6}=\frac{44+25}{30}=\frac{69}{30}=\frac{23}{10}$$

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)=\frac{2}{3}+\frac{24+25}{30}=\frac{2}{3}+\frac{49}{30}=\frac{20+49}{30}=\frac{69}{30}=\frac{23}{10}$$

24.

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{5}=\frac{5+18}{30}=\frac{23}{30} \quad , \quad \frac{3}{5}+\frac{1}{6}=\frac{18+5}{30}=\frac{23}{30}$$

25.

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{10}{3}=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}\cdot\frac{10}{3}=\frac{2\cdot(2\cdot\cancel{3})\cdot(\cancel{5}\cdot 2)}{3\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}}=\frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{6\cdot 10}{5\cdot 3}=\frac{2\cdot(2\cdot\cancel{3})\cdot(\cancel{5}\cdot 2)}{3\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}}=\frac{8}{3}$$

Desafío matemático

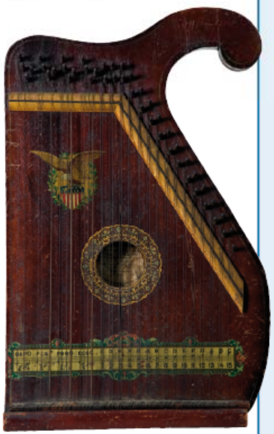
La música

La música tiene mucho que ver con las matemáticas. La escala musical consta de siete notas: *do, re, mi, fa, sol, la, si* y a cada escala la llamamos octava. El matemático griego Pitágoras se dio cuenta de la relación entre las matemáticas y la música, anotó la longitud de una cuerda y la nota que producía, por ejemplo re y observó que, si dividía esa cuerda a la mitad obtenía la misma nota, re, pero una octava superior. De la misma forma, si repetía el experimento con una cuerda de las mismas propiedades que la anterior, pero el doble de larga, obtenía un re pero una octava inferior. Si la cuerda era $\frac{2}{3}$ de la longitud inicial, se obtenía una quinta (la distancia de do a sol), pero si la longitud era $\frac{3}{4}$ de la cuerda inicial, el sonido que se obtenía era una cuarta (la distancia de do a fa).

Arpa.

Pitágoras, en sus investigaciones sobre la música, se dio cuenta de que la armonía se lograba con cuerdas cuya longitud eran fracciones de números enteros de la cuerda inicial. Dada una cuerda de longitud L, que produce un sonido concreto, por ejemplo do; la escala se distribuye de la siguiente forma: do: $2 \cdot L$, re: $\frac{16}{9} \cdot L$, mi: $\frac{8}{5} \cdot L$, fa: $\frac{3}{2} \cdot L$, sol: $\frac{4}{3} \cdot L$, la: $\frac{6}{5} \cdot L$, si: $\frac{16}{15} \cdot L$, do: L

1. Si la cuerda más pequeña (de 1'20 metros de longitud) pulsada libremente da un mi, ¿qué longitud tendrá la cuerda que dé un mi, una octava superior?
2. ¿Cuánto medirá la cuerda para que suene un sol?
3. Dibuja en tu cuaderno un arpa con 14 cuerdas. Empieza por la nota más aguda, siendo la medida de esta de 10 cm. Realiza la composición aproximando lo más posible la medida según la relación dada arriba.
4. La cítara es un instrumento musical antiguo cuya caja de resonancia tiene forma trapezoidal. Para construir nosotros una cítara, vamos a comprar en la tienda de música las cuerdas necesarias. ¿Cuánto medirá en total la longitud de las cuerdas necesarias para completar una octava, si la cuerda más corta mide 15 cm?
5. Busca en internet las palabras: *arpa, cítara, lira*. Realiza una descripción de dichos instrumentos, señalando semejanzas y diferencias entre ellos.
6. Educa tu oído escuchando la pieza *Danza sacra y danza profana* para arpa y cuerda de Claude Debussy.



Cítara.

El reparto de la pizza

Para repartir dos pizzas entre 5 amigos, le daríamos $\frac{2}{5}$ a cada uno. Veamos cómo resolverían el problema los egipcios: dividirían cada pizza en tres trozos, con los que se obtendrían 6 raciones; tras repartir un trozo a cada amigo, sobraría una parte y la volverían a dividir en 5 trozos, dando nuevamente un pedazo a cada amigo.

1. ¿Podrías expresar en forma de fracción las operaciones realizadas?
2. ¿Qué parte del total de pizza se llevaba cada uno?
3. ¿Crees que el reparto es justo?
4. Teniendo en cuenta que salvo $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, los egipcios solo utilizaban fracciones cuyo numerador es la unidad; ¿cómo crees que repartirían 3 pizzas entre 7 personas?

La música

1.
Con una cuerda con las mismas propiedades, pero la mitad de longitud, obtenemos una octava superior. En nuestro caso, obtendremos un mi una octava superior, si la cuerda tiene una longitud de 0'60 metros.

2.
La cuerda del mi, tiene una longitud de $\frac{8}{5}L$, siendo L la longitud de la cuerda del do. Se plantea la siguiente ecuación: $120 = \frac{8}{5}\ L \Rightarrow L = 075$ metros. Así que la cuerda del do mide 0'75 metros. La cuerda del sol es $\frac{4}{3}L = \frac{4}{3} \cdot 075 = 1$. Por lo tanto, la cuerda del sol mide 1 metro.

3.
Do = 10 cm, **Si** = $\frac{16}{15} \cdot 10 = 10667$ cm, **La** = $\frac{6}{5} \cdot 10 = 12$ cm , **Sol** = $\frac{4}{3} \cdot 10 = 1333$ cm , **Fa**=$\frac{3}{2} \cdot 10 = 15$ cm , **Mi** = $\frac{8}{5} \cdot 10 = 16$ cm , **Re** = $\frac{16}{9} \cdot 10 = 17'778$ cm.
La octava inferior se puede calcular, multiplicando por 2, las medidas de las cuerdas de la octava anterior, o bien, volviendo a aplicar las relaciones dadas anteriormente **Do** = 20 cm, **Si** = $\frac{16}{15} \cdot 20 = 2133$ cm, **La** = $\frac{6}{5} \cdot 20 = 24$ cm, **Sol** = $\frac{4}{3} \cdot 20 = 2666$ cm, **Fa** = $\frac{3}{2} \cdot 20 = 30$ cm, **Mi** = $\frac{8}{5} \cdot 20 = 32$ cm, **Re** = $\frac{16}{9} \cdot 20 = 35'55$ cm, **Do** = 40 cm

4.
La cuerda más corta corresponde al Do de la octava superior.
Si =$\frac{16}{15} \cdot L = \frac{16}{15} \cdot 15$ = 16 cm, **La** =$\frac{6}{5} \cdot 15 = 18$ cm, **Sol** =$\frac{4}{3} \cdot 15 = 20$ cm,
Fa = $\frac{3}{2} \cdot 15 = 225$ cm, **Mi** = $\frac{8}{5} \cdot 15 = 24$ cm, **Re** = $\frac{16}{9} \cdot 15 = 26'66$ cm, **Do** =30 cm
La suma de las cuerdas será: $15 + 16 + 18 + 20 + 225 + 24 + 266 = 1421cm$

5.
- **Arpa**: instrumento musical perteneciente a la familia de cuerda punteada o pulsada. Su forma se aproxima al triángulo, con cuerdas dispuestas verticalmente. Sus partes principales son: cabeza, columna, encordadura, codo, base de la columna, caja de resonancia y pedales.
- Se trata de un instrumento muy antiguo, conocido por los sumerios, asirios, egipcios, griegos, romanos y celtas. Por ello, según la zona geográfica encontramos distintos tipos de arpas. El arpa actual consta de 47 cuerdas y siete pedales que permiten modificar la altura de los sonidos.
- **Cítara**: instrumento musical perteneciente a la familia de cuerda punteada o pulsada. Se trata de un instrumento parecido a la lira, pero con la caja de resonancia de madera. En la cítara moderna, la caja de resonancia tiene forma trapezoidal y el número de cuerdas varía entre 20 y 30.

- **Lira:** instrumento musical perteneciente a la familia de cuerda punteada o pulsada. El uso de la lira está documentado ya en la Antigua Grecia, así como entre asirios y hebreos. Contenía entre 4 y 18 cuerdas y era de menor tamaño que la cítara. El término lira en la actualidad, es conocido para designar también el carrillón de teclado o glockenspiel portátil.

Semejanzas:

- Arpa, cítara y lira se tocan con las dos manos.
- Los tres instrumentos pertenecen a la familia de cuerda punteada o pulsada.
- Son instrumentos utilizados ya desde la antigüedad.
- Encontramos diferentes variantes según la época y zona geográfica.

Diferencias:

- El número de cuerdas varía. El arpa actual consta de 47 cuerdas, la cítara entre 20 y 30 cuerdas y la lira puede variar entre 4 y 18 cuerdas.
- Son instrumentos diferentes en su forma. El arpa se aproxima a una forma triangular, la cítara tiene forma trapezoidal y la lira predominantemente con forma de ábaco.
- En la orquesta actual es frecuente la aparición del arpa y no tanto de la cítara y la lira.

El reparto de la pizza

1. Cada pizza se divide en tres, con lo que tenemos $\frac{1}{3}$ de pizza de esta forma. Al dividir $\frac{1}{3}$ de pizza en 5 partes, la operación realizada es $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

2. Cada uno se llevaba $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{6}{15}$

3. El reparto sí es justo y coincide con la solución $\frac{2}{5}$ que damos nosotros actualmente.

4. Se trata de expresar la fracción $\frac{3}{7}$ como suma de fracciones cuyo numerador sea la unidad. En primer lugar divido las pizzas en cinco partes iguales. De esta manera obtengo 15 trozos repartiendo dos trozos a cada uno ($\frac{2}{5}$ de pizza a cada uno). Esta fracción era impensable para los egipcios. Pero repartir 2 entre 5 está resuelto anteriormente. Nos queda por repartir $\frac{1}{5}$ de pizza entre 7 personas. Simplemente fraccionamos en 7 partes el trozo. Como éste representa $\frac{1}{5}$ de pizza, cada nuevo trozo es $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{35}$ de pizza.

Así el reparto se hace de la siguiente forma:

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$$

Actividades finales

EJERCICIOS

Fracciones equivalentes

○ **26.** De las siguientes fracciones, indica cuáles son equivalentes y cuáles no:

a) $\frac{5}{6}$ y $\frac{15}{9}$ c) $\frac{4}{12}$ y $\frac{6}{18}$ e) $\frac{8}{18}$ y $\frac{40}{90}$

b) $\frac{3}{9}$ y $\frac{2}{6}$ d) $\frac{15}{5}$ y $\frac{9}{3}$ f) $\frac{15}{6}$ y $\frac{2}{5}$

◐ **27.** Expresa las siguientes fracciones como números mixtos:

a) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{25}{21}$ e) $\frac{17}{15}$

b) $\frac{21}{14}$ d) $\frac{16}{13}$ f) $\frac{40}{36}$

○ **28.** Escribe dos fracciones equivalentes a cada una de las dadas:

a) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{3}{12}$ e) $\frac{25}{21}$

b) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{15}{16}$ f) $\frac{12}{6}$

○ **29.** Completa las siguientes fracciones para que sean equivalentes:

a) $\frac{5}{?}=\frac{25}{10}$ d) $\frac{6}{14}=\frac{3}{?}$ g) $\frac{4}{5}=\frac{12}{?}$

b) $\frac{6}{12}=\frac{?}{8}$ e) $\frac{9}{3}=\frac{27}{?}$ h) $\frac{11}{?}=\frac{22}{10}$

c) $\frac{?}{6}=\frac{9}{2}$ f) $\frac{25}{15}=\frac{15}{?}$ i) $\frac{35}{?}=\frac{14}{6}$

○ **30.** Encuentra una fracción equivalente a $\frac{6}{7}$ cuyo denominador sea 35.

○ **31.** Simplifica las siguientes fracciones hasta convertirlas en irreducibles:

a) $\frac{16}{32}$ d) $\frac{90}{242}$ g) $\frac{240}{210}$ j) $\frac{35}{75}$

b) $\frac{14}{32}$ e) $\frac{44}{48}$ h) $\frac{36}{180}$ k) $\frac{64}{112}$

c) $\frac{16}{38}$ f) $\frac{480}{210}$ i) $\frac{62}{108}$ l) $\frac{425}{75}$

○ **32.** Encuentra dos fracciones equivalentes a $\frac{2}{7}$ que tengan como denominadores 35 y 49.

Comparación de fracciones

○ **33.** Reduce a común denominador y ordena las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{12}$ y $\frac{4}{15}$

b) $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{15}$ d) $\frac{25}{100}$ y $\frac{18}{32}$

○ **34.** Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

a) $\frac{1}{21}, \frac{5}{14}$ y $\frac{3}{28}$ e) $\frac{1}{14}, \frac{5}{4}$ y $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{5}$ y $\frac{3}{12}$ f) $\frac{3}{16}, \frac{5}{18}$ y $\frac{3}{14}$

c) $\frac{5}{2}, \frac{7}{5}$ y $\frac{3}{20}$ g) $\frac{9}{16}, \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ y $\frac{2}{7}$ h) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$

○ **35.** Escribe una fracción comprendida entre las siguientes:

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{7}$

b) $\frac{4}{6}$ y $\frac{2}{9}$ d) $\frac{3}{14}$ y $\frac{6}{45}$

Fracciones y números mixtos

◐ **36.** Realiza las siguientes operaciones y expresa las fracciones impropias que resulten como un número mixto:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ f) $\frac{5}{4}-\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$ g) $\frac{15}{6}-\frac{1}{3}$

c) $\frac{11}{2}-\frac{3}{8}$ h) $4+\frac{2}{17}$

d) $1+\frac{1}{2}$ i) $\frac{5}{3}-6+\frac{7}{6}$

e) $\frac{5}{6}+\frac{1}{12}$ j) $\frac{7}{9}-\frac{5}{4}+\frac{7}{12}$

◐ **37.** Opera y expresa las fracciones impropias que resulten en forma de número mixto:

a) $\frac{6}{7}+\frac{2}{14}-\frac{2}{21}$ d) $\frac{3}{17}+1-\frac{1}{17}$

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{18}+2$ e) $\frac{2}{5}+\frac{2}{15}-\frac{1}{3}$

c) $3-\frac{5}{6}$ f) $\frac{2}{9}+\frac{2}{18}+\frac{2}{27}$

26.

a) $\frac{5}{6}\ y\ \frac{15}{9}$ no son equivalentes ya que $5 \cdot 9 \neq 6 \cdot 15$

b) $\frac{3}{9}\ y\ \frac{2}{6}$ sí son equivalentes ya que $3{\cdot}6 = 9{\cdot}2$

c) $\frac{4}{12}\ y\ \frac{6}{18}$ sí son equivalentes ya que $4{\cdot}18 = 6{\cdot}12$

d) $\frac{15}{5}\ y\ \frac{9}{3}$ sí son equivalentes ya que $3{\cdot}15 = 9{\cdot}5$

e) $\frac{8}{18}\ y\ \frac{40}{90}$ sí son equivalentes ya que $8{\cdot}90 = 18{\cdot}40$

g) $\frac{15}{6}\ y\ \frac{2}{5}$ no son equivalentes ya que $5{\cdot}15 \neq 2{\cdot}6$

27.

a) $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

b) $\frac{21}{14} = 1\frac{7}{14} = 1\frac{1}{2}$

c) $\frac{25}{21} = 1\frac{4}{21}$

d) $\frac{16}{13} = 1\frac{3}{13}$

e) $\frac{17}{15} = 1\frac{2}{15}$

f) $\frac{40}{36} = 1\frac{4}{36} = 1\frac{1}{9}$

28.

a) $\frac{5}{6}$, $\frac{44}{48} = \frac{44:4}{48:4} = \frac{11}{12}\ \frac{10}{12}$, $\frac{15}{18}$

b) $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{15}$

c) $\frac{3}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$

d) $\frac{15}{16}$, $\frac{30}{32}$, $\frac{45}{48}$

e) $\frac{25}{21}$, $\frac{50}{42}$, $\frac{75}{63}$

f) $\frac{12}{6}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$

29 .

a) $5{\cdot}10 = 25{\cdot}? \Rightarrow ? = 2$

b) $6{\cdot}8 = 12{\cdot}? \Rightarrow ? = 4$

c) $9{\cdot}6 = 2{\cdot}? \Rightarrow ? = 27$

d) $14 \cdot 3 = 6 \cdot ? \Rightarrow ? = 7$
e) $3 \cdot 27 = 9 \cdot ? \Rightarrow ? = 9$
f) $15 \cdot 15 = 25 \cdot ? \Rightarrow ? = 9$
g) $5 \cdot 12 = 4 \cdot ? \Rightarrow ? = 15$
h) $11 \cdot 10 = 22 \cdot ? \Rightarrow ? = 5$
i) $35 \cdot 6 = 14 \cdot ? \Rightarrow ? = 15$

30.
$\frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{30}{35}$

31.
a) $\frac{16}{32} = \frac{16:16}{32:16} = \frac{1}{2}$
b) $\frac{14}{32} = \frac{14:2}{32:2} = \frac{7}{16}$
c) $\frac{16}{38} = \frac{16:2}{38:2} = \frac{8}{19}$
d) $\frac{90}{242} = \frac{90:2}{242:2} = \frac{45}{121}$
e) $\frac{44}{48} = \frac{44:4}{48:4} = \frac{11}{12}$
f) $\frac{480}{210} = \frac{480:30}{210:30} = \frac{16}{7}$
g) $\frac{240}{210} = \frac{240:30}{210:30} = \frac{8}{7}$
h) $\frac{36}{180} = \frac{36:36}{180:36} = \frac{1}{5}$
i) $\frac{62}{108} = \frac{62:2}{108:2} = \frac{31}{54}$
j) $\frac{35}{75} = \frac{35:5}{75:5} = \frac{7}{15}$
k) $\frac{64}{112} = \frac{64:16}{112:16} = \frac{4}{7}$
l) $\frac{425}{75} = \frac{425:25}{75:25} = \frac{17}{3}$

32.

$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{10}{35}$, $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{14}{49}$

33.
a) $\frac{1}{6} < \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{15}=\frac{4}{30}<\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{12}=\frac{5}{60}<\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$

d) $\frac{25}{100}=\frac{5}{20}=\frac{20}{80}<\frac{45}{80}=\frac{9}{16}=\frac{18}{32}$

34.

a) $\frac{1}{21}=\frac{4}{84}<\frac{9}{84}=\frac{3}{28}=\frac{9}{84}<\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$

b) $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}<\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<1=\frac{5}{5}$

c) $\frac{3}{20}<\frac{28}{20}=\frac{7}{5}=\frac{28}{20}<\frac{50}{20}=\frac{5}{2}$

d) $\frac{1}{4}=\frac{21}{84}<\frac{24}{84}=\frac{2}{7}=\frac{24}{84}<\frac{70}{84}=\frac{5}{6}$

e) $\frac{1}{14}=\frac{4}{56}<\frac{21}{56}=\frac{3}{8}=\frac{21}{56}<\frac{70}{56}=\frac{5}{4}$

f) $\frac{3}{16}=\frac{189}{1008}<\frac{216}{1008}=\frac{3}{14}=\frac{216}{1008}<\frac{280}{1008}=\frac{5}{18}$

g) $\frac{1}{2}=\frac{8}{16}<\frac{9}{16}<\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

h) $\frac{2}{3}=\frac{40}{60}<\frac{45}{60}=\frac{3}{4}=\frac{45}{60}<\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$

35.

a) $\frac{2}{3}<\frac{4}{3}<\frac{5}{3}$

b) $\frac{2}{9}<\frac{4}{9}<\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$

c) $\frac{3}{5}=\frac{21}{35}<\frac{22}{35}<\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$

d) $\frac{6}{45}=\frac{2}{15}=\frac{28}{210}<\frac{29}{210}<\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

36.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{10-6}{15}=\frac{4}{15}$

c) $\frac{11}{2}-\frac{3}{8}=\frac{44-3}{8}=\frac{41}{8}=1\frac{1}{8}$

d) $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

e) $\frac{5}{6}+\frac{1}{12}=\frac{10+1}{12}=\frac{11}{12}$

f) $\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{5-2}{4}=\frac{3}{4}$

g) $\frac{15}{6}-\frac{1}{3}=\frac{15-2}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$

h) $4+\frac{2}{17}=\frac{68+2}{17}=\frac{70}{17}=4\frac{2}{17}$

i) $\frac{5}{3}-6+\frac{7}{6}=\frac{10-36+7}{6}=-\frac{19}{6}=-3\frac{1}{6}$

j) $\frac{7}{9}-\frac{5}{4}+\frac{7}{12}=\frac{28-60+21}{36}=-\frac{11}{36}$

37.

a) $\frac{6}{7}+\frac{2}{14}-\frac{2}{21}=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}-\frac{2}{21}=1-\frac{2}{21}=\frac{21-2}{21}=\frac{19}{21}$

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{18}+2=\frac{15-1+36}{18}=\frac{50}{18}=2\frac{14}{18}=2\frac{7}{9}$

c) $3-\frac{5}{6}=\frac{18-5}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{17}+1-\frac{1}{17}=\frac{2}{17}+1=\frac{2+17}{17}=\frac{19}{17}=1\frac{2}{17}$

e) $\frac{2}{5}+\frac{2}{15}-\frac{1}{3}=\frac{6+2-5}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

f) $\frac{2}{9}+\frac{2}{18}+\frac{2}{27}=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\frac{3}{9}+\frac{2}{27}=\frac{1}{3}+\frac{2}{27}=\frac{9+2}{27}=\frac{11}{27}$

Operaciones con fracciones

38. Realiza las siguientes operaciones y, si es posible, simplifica el resultado:

a) $3\cdot\frac{2}{9}$ e) $\frac{3}{8}\cdot 16$ i) $\frac{25}{3}\cdot\frac{2}{5}$

b) $5\cdot\frac{5}{6}$ f) $\frac{16}{7}\cdot 14$ j) $\frac{6}{8}\cdot\frac{10}{12}$

c) $7\cdot\frac{2}{3}$ g) $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4}$ k) $\frac{7}{16}\cdot\frac{30}{21}$

d) $15\cdot\frac{4}{21}$ h) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{3}$ l) $\frac{16}{11}\cdot\frac{121}{12}$

39. Opera y simplifica el resultado:

a) $2\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{12}$ e) $\frac{2}{3}\cdot 30\cdot\frac{1}{15}$

b) $5\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{10}{15}$ f) $4\frac{1}{3}-\frac{6}{4}$

c) $4\cdot\frac{12}{16}\cdot\frac{32}{10}$ g) $8\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{2}$

d) $18\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{10}$ h) $7\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{19}$

40. Realiza las siguientes divisiones y, si es posible, simplifica el resultado:

a) $\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{15}$ e) $6\frac{4}{7}:\frac{23}{3}$

b) $5:\frac{1}{3}$ f) $5\frac{1}{5}:\frac{3}{10}$

c) $7:\frac{21}{2}$ g) $\frac{6}{5}:\frac{12}{10}$

d) $4\frac{1}{5}:\frac{3}{10}$ h) $\frac{16}{3}:9\frac{1}{8}$

41. Opera y simplifica:

a) $\frac{4}{7}:\frac{3}{28}$ e) $\frac{2}{9}:\frac{4}{6}$ i) $\frac{3}{11}:\frac{2}{6}$

b) $1:\frac{101}{100}$ f) $\frac{45}{48}:\frac{9}{8}$ j) $\frac{6}{18}:\frac{2}{5}$

c) $\frac{210}{56}:\frac{30}{4}$ g) $\frac{7}{6}:3$ k) $\frac{95}{12}:\frac{15}{14}$

d) $\frac{2}{5}:\frac{2}{7}$ h) $\frac{2}{15}:\frac{20}{25}$ l) $\frac{4}{19}:\frac{5}{38}$

Jerarquía de las operaciones

42. Realiza las siguientes operaciones combinadas. Recuerda la jerarquía de las operaciones:

a) $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{6}$ d) $\frac{3}{5}+\frac{2}{12}:\frac{5}{10}$

b) $\frac{17}{4}\cdot\frac{4}{3}-\frac{15}{6}-\frac{1}{3}$ e) $\frac{7}{2}+5:\frac{4}{2}$

c) $\dfrac{1-\frac{1}{7}}{\frac{1}{14}}$ f) $\frac{7}{4}-1:\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$

43. Opera y simplifica. Recuerda que la jerarquía de las operaciones es importante:

a) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{15}$

b) $\frac{2}{12}:1+5:\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:2+\left(3+\frac{1}{4}\right)$

d) $\left(5+\frac{1}{4}\right):\frac{3}{8}-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

44. Realiza las siguientes operaciones con paréntesis:

a) $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$ d) $\left(1+\frac{1}{20}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

b) $\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{36}\right)-\left(\frac{1}{12}+2\right)$ e) $\left(5\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$

c) $8+\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\right)$ f) $2-\left(\frac{45}{50}-\frac{60}{75}\right)$

45. Opera y simplifica. Ten en cuenta la jerarquía de las operaciones:

a) $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{10}\right):\frac{5}{20}$ c) $\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{9}\right):\left(\frac{22}{3}+1\right)$

b) $\frac{5}{7}+\frac{3}{6}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{7}}$ d) $\left(3+\frac{5}{6}\right)-\left(1-\frac{2}{12}\right)$

46. Opera:

a) $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$ b) $1-\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}}}\cdot 11$

47. Opera las siguientes fracciones:

a) $1-\dfrac{3-\dfrac{1}{4-\frac{1}{2}}}{\dfrac{3-\frac{1}{6}}{\frac{20}{7}}}$

b) $\dfrac{2\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5}\right):\left[\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}+5\right)\right]}{\left[1-2\left(1+\frac{1}{4}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{7}{3}\right)}$

38.

a) $3\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$

b) $5\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$

c) $7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

d) $15 \cdot \frac{4}{21} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$

e) $\frac{3}{8} \cdot 16 = 6$

f) $\frac{16}{7} \cdot 14 = 32$

g) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} = 1$

h) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{5}$

i) $\frac{25}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{3}$

j) $\frac{6}{8} \cdot \frac{10}{12} = \frac{5}{8}$

k) $\frac{7}{16} \cdot \frac{30}{21} = \frac{5}{8}$

l) $\frac{16}{11} \cdot \frac{121}{12} = \frac{44}{3}$

39.

a) $2 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{12} = 2$

b) $5 \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{10}{15} = \frac{5 \cdot (\cancel{7 \cdot 2}) \cdot \cancel{5}}{\cancel{14} \cdot (3 \cdot \cancel{5})} = \frac{5}{3}$

c) $4 \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{32}{10} = \frac{4 \cdot 12 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{16}}{\cancel{16}(\cancel{2} \cdot 5)} = \frac{48}{5}$

d) $18 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{10} = \frac{(2 \cdot \cancel{9}) \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2}}{\cancel{9} \cdot (\cancel{2} \cdot \cancel{5})} = 2$

e) $\frac{2}{3} \cdot 30 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2 \cdot (2 \cdot \cancel{15})}{3 \cdot \cancel{15}} = \frac{4}{3}$

f) $4\frac{1}{3} - \frac{6}{4} = \frac{13}{3} - \frac{6}{4} = \frac{52-18}{12} = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$

g) $8\frac{1}{5} \cdot \frac{25}{2} = \frac{41}{5} \cdot \frac{25}{2} = \frac{205}{2}$

h) $7\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{19} = \frac{38}{5} \cdot \frac{15}{19} = 6$

40.

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{12}{15} = \frac{2}{3}$

b) $5 : \frac{1}{3} = 15$

c) $7:\frac{21}{2}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

d) $4\frac{1}{5}:\frac{3}{10}=\frac{21}{5}:\frac{3}{10}=7\cdot 2=14$

e) $6\frac{4}{7}:\frac{23}{3}=\frac{46}{7}:\frac{23}{3}=\frac{46\cdot 3}{23\cdot 7}=\frac{(2\cdot 23)\cdot 3}{23\cdot 7}=\frac{6}{7}$

f) $5\frac{1}{5}:\frac{3}{10}=\frac{26}{5}:\frac{3}{10}=\frac{26\cdot 10}{5\cdot 3}=\frac{52}{3}$

g) $\frac{6}{5}:\frac{12}{10}=\frac{6\cdot 10}{12\cdot 5}=\frac{\cancel{(6\cdot 2)}\cdot \cancel{5}}{\cancel{12}\cdot \cancel{5}}=1$

h) $\frac{16}{3}:9\frac{1}{8}=\frac{16}{3}:\frac{73}{8}=\frac{16\cdot 8}{73\cdot 3}=\frac{128}{219}$

41.

a) $\frac{4}{7}:\frac{3}{28}=\frac{4\cdot 28}{7\cdot 3}=\frac{4\cdot(4\cdot\cancel{7})}{3\cdot\cancel{7}}=\frac{16}{3}$

b) $1:\frac{101}{100}=\frac{100}{101}$

c) $\frac{210}{56}:\frac{30}{4}=\frac{210\cdot 4}{30\cdot 56}=\frac{(\cancel{30}\cdot\cancel{7})\cdot 4}{\cancel{30}\cdot(\cancel{7}\cdot 8)}=\frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{5}:\frac{2}{7}=\frac{\cancel{2}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot 5}=\frac{7}{5}$

e) $\frac{2}{9}:\frac{4}{6}=\frac{2\cdot 6}{4\cdot 9}=\frac{2\cdot(2\cdot\cancel{3})}{4\cdot(3\cdot\cancel{3})}=\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 3}=\frac{1}{3}$

f) $\frac{45}{48}:\frac{9}{8}=\frac{45\cdot 8}{48\cdot 9}=\frac{(5\cdot\cancel{9})\cdot\cancel{8}}{(6\cdot\cancel{8})\cdot\cancel{9}}=\frac{5}{6}$

g) $\frac{7}{6}:3=\frac{7}{3\cdot 6}=\frac{7}{18}$

h) $\frac{2}{15}:\frac{20}{25}=\frac{2\cdot 25}{15\cdot 20}=\frac{\cancel{2}\cdot(\cancel{5}\cdot\cancel{5})}{(3\cdot\cancel{5})\cdot(\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{5})}=\frac{1}{6}$

i) $\frac{3}{11}:\frac{2}{6}=\frac{3\cdot 6}{2\cdot 11}=\frac{3\cdot(\cancel{2}\cdot 3)}{\cancel{2}\cdot 11}=\frac{9}{11}$

j) $\frac{6}{18}:\frac{2}{5}=\frac{6\cdot 5}{18\cdot 2}=\frac{30}{36}$

k) $\frac{95}{12}:\frac{15}{14}=\frac{95\cdot 14}{12\cdot 15}=\frac{(\cancel{5}\cdot 19)\cdot(\cancel{2}\cdot 7)}{(\cancel{2}\cdot 6)\cdot(\cancel{5}\cdot 3)}=\frac{133}{18}$

l) $\frac{4}{19}:\frac{5}{38}=\frac{4\cdot 38}{19\cdot 5}=\frac{4\cdot(2\cdot\cancel{19})}{\cancel{19}\cdot 5}=\frac{8}{5}$

42.

a) $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{6}=1+\frac{2}{3}\cdot 2=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$

b) $\frac{17}{4}\cdot\frac{4}{3}-\frac{15}{6}-\frac{1}{3}=\frac{17\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 3}-\frac{15}{6}-\frac{1}{3}=\frac{17}{3}-\frac{15}{6}-\frac{1}{3}=\frac{34-15-2}{6}=\frac{17}{6}$

c) $\dfrac{1-\dfrac{1}{7}}{\dfrac{1}{14}}=\dfrac{\dfrac{6}{7}}{\dfrac{1}{14}}=\dfrac{6\cdot 14}{7}=\dfrac{6\cdot(2\cdot\cancel{7})}{\cancel{7}}=12$

d) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{12}:\dfrac{5}{10}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{5}+1=\dfrac{8}{5}$

e) $\dfrac{7}{2}+5:\dfrac{4}{2}=\dfrac{7}{2}+5:2=\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

f) $\dfrac{7}{4}-1:\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}-\dfrac{6}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{2+1}{8}=\dfrac{3}{8}$

43.

a) $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{15}=\dfrac{30+6+3-2}{30}=\dfrac{37}{30}$

b) $\dfrac{2}{12}:1+5:\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}+15=\dfrac{1+90}{6}=\dfrac{91}{6}$

c) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}:2+\left(3+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{13}{4}=\dfrac{6-2+39}{12}=\dfrac{43}{12}$

d) $\left(5+\dfrac{1}{4}\right):\dfrac{3}{8}-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{21}{4}:\dfrac{3}{8}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{21\cdot 8}{4\cdot 3}-1=14-1=12$

44.

a) $\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5-3}{6}+\dfrac{4-3}{6}=\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

b) $\left(\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{36}\right)-\left(\dfrac{1}{12}+2\right)=\dfrac{2-1}{36}-\dfrac{1+24}{12}=\dfrac{1}{36}-\dfrac{25}{12}=\dfrac{1-75}{36}=-\dfrac{74}{36}=-\dfrac{37}{18}$

c) $8+\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{10}\right)=8+\dfrac{4-3}{10}=8+\dfrac{1}{10}=\dfrac{80+1}{10}=\dfrac{81}{10}$

d) $\left(1+\dfrac{1}{20}\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{21}{20}-\dfrac{5-3}{15}=\dfrac{21}{20}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{63-8}{60}=\dfrac{55}{60}=\dfrac{11}{12}$

e) $5\frac{1}{6}-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{6}-\frac{7}{6}=\frac{24}{6}=4$

f) $2-\left(\dfrac{45}{50}+\dfrac{60}{75}\right)=2-\dfrac{135+120}{2\cdot 3\cdot 25}=2-\dfrac{255}{2\cdot 3\cdot 25}=2-\dfrac{\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot 17}{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot 5}=2-\dfrac{17}{10}=\dfrac{20-17}{10}=\dfrac{3}{10}$

45.

a) $\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{10}\right):\dfrac{5}{20}=\dfrac{30+8}{80}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{38}{80}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{38\cdot 4}{80}=\dfrac{19\cdot\cancel{8}}{20\cdot\cancel{8}}=\dfrac{19}{20}$

b) $\dfrac{5}{7}+\dfrac{3}{6}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{7}}=\dfrac{5}{7}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\dfrac{6}{7}}=\dfrac{5}{7}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{6}=\dfrac{5\cdot 6+7\cdot 3-7\cdot 7}{7\cdot 6}=\dfrac{30+21-49}{42}=\dfrac{2}{42}=\dfrac{1}{21}$

c) $\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{9}\right):\left(\dfrac{22}{3}+1\right)=\dfrac{12-1}{9}:\dfrac{22+3}{3}=\dfrac{11}{9}:\dfrac{25}{3}=\dfrac{11\cdot 3}{9\cdot 25}=\dfrac{11}{75}$

d) $\left(3+\frac{5}{6}\right)-\left(1-\frac{2}{12}\right)=\frac{23}{6}-\frac{5}{6}=\frac{18}{6}=3$

46.

a) $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{4\cdot\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}}=2$

b) $1-\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}}}\cdot 11=1-\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\frac{6}{5}}}\cdot 11=1-\dfrac{2}{1+\frac{5}{6}}\cdot 11=1-\dfrac{2}{\frac{11}{6}}\cdot 11=1-\dfrac{12}{\cancel{11}}\cdot\cancel{11}=1-12=-11$

47.

a)

$$\dfrac{1-\dfrac{3-\dfrac{1}{4-\frac{1}{2}}}{3-\frac{1}{6}}}{\dfrac{20}{7}}=\dfrac{1-\dfrac{3-\dfrac{1}{\frac{7}{8}}}{\frac{17}{6}}}{\dfrac{20}{7}}=\dfrac{1-\dfrac{3-\frac{8}{7}}{\frac{17}{6}}}{\dfrac{20}{7}}=\dfrac{1-\dfrac{\frac{13}{7}}{\frac{17}{6}}}{\dfrac{20}{7}}=\dfrac{1-\frac{13\cdot 6}{17\cdot 7}}{\dfrac{20}{7}}=\dfrac{\frac{119-78}{17\cdot 7}}{\dfrac{20}{7}}=\dfrac{\frac{41}{17\cdot 7}}{\dfrac{20}{7}}=\dfrac{41\cdot\cancel{7}}{17\cdot\cancel{7}\cdot 20}=\dfrac{41}{340}$$

b)

$$\dfrac{2\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5}\right):\left[\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}+5\right)\right]}{\left[1-2\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{7}{3}\right)}=\dfrac{2\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\right):\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{13}{2}\right]}{\left[1-2\cdot\frac{5}{4}\right]\cdot\frac{10}{3}}=\dfrac{2\cdot\frac{10-5+3}{10}:\frac{13}{10}}{\left[1-\frac{5}{2}\right]\cdot\frac{10}{3}}=$$

$$\dfrac{\frac{8}{5}:\frac{13}{10}}{-\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{10}{\cancel{3}}}=\dfrac{\frac{8\cdot 10}{13\cdot 5}}{-5}=-\dfrac{8\cdot(2\cdot\cancel{5})}{13\cdot 5\cdot\cancel{5}}=-\dfrac{16}{65}$$

PROBLEMAS

○ **48.** En un instituto hay 630 estudiantes, de los cuales $\frac{1}{3}$ son chicos. ¿Cuántas alumnas hay en el instituto?

○ **49.** Juan se tiene que examinar de 12 temas de Matemáticas. Si ha estudiado 3 temas, ¿qué porción del total de temas le queda por estudiar?

○ **50.** De un depósito de agua con 1 200 L de capacidad se ha consumido la sexta parte. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?

○ **51.** A un avión, con capacidad para transportar 150 viajeros, han subido 50 personas. ¿Qué fracción representa el número de viajeros que han subido al avión sobre la capacidad de transporte del mismo?

◐ **52.** En una finca hay 1 800 árboles, de los cuales $\frac{1}{3}$ son robles y $\frac{1}{6}$ de los restantes son encinas. Si el resto de árboles son alcornoques, ¿cuántos alcornoques hay?

◐ **53.** Un señor posee 60 € para hacer la compra. Si gasta $\frac{1}{3}$ en el mostrador de carne y $\frac{1}{2}$ de lo que le queda en el de pescado, ¿cuánto le queda para comprar la fruta?

◐ **54.** Un padre quiere repartir 120 € entre sus cuatro hijos: Atanasio, Rafael, Isabel y José. Si le entrega $\frac{1}{2}$ del total a Atanasio, $\frac{1}{2}$ de lo que queda a Rafael y $\frac{2}{3}$ del resto a Isabel, ¿cuánto le queda a José?

◐ **55.** Luisa quiere gastar 120 € de la siguiente forma: $\frac{1}{3}$ en ropa, $\frac{1}{6}$ en libros y $\frac{1}{4}$ en comida. ¿Cuánto ha gastado en cada cosa? ¿Cuánto le sobra?

◐ **56.** Un señor quiere comprar 15 L de cerveza, pero en la tienda solo tienen latas de $\frac{1}{3}$ de litro. ¿Cuántas latas necesita comprar para obtener los 15 L de cerveza?

◐ **57.** En un partido de baloncesto Carmen marca $\frac{1}{6}$ de los puntos, Ángela $\frac{2}{3}$ y el resto de jugadores los 5 puntos restantes. ¿Cuántos puntos hicieron Carmen y Ángela? ¿Y el equipo completo?

◐ **58.** Una barrica tiene 300 L de vino. Si extraemos primero $\frac{1}{3}$ de su capacidad, luego $\frac{1}{2}$ del resto y finalmente sacamos 25 L, ¿cuántos litros quedan?

○ **59.** En una granja hay en total 36 animales, de los cuales $\frac{1}{2}$ son ovejas, $\frac{1}{3}$ son vacas y $\frac{1}{6}$ son cerdos. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

○ **60.** Una bandeja de 24 pasteles está constituida así: $\frac{1}{6}$ de los mismos son de crema, $\frac{1}{3}$ de chocolate y el resto son de nata. ¿Cuántos pasteles hay de cada clase?

○ **61.** Un niño tiene 12 juguetes, $\frac{1}{2}$ de los cuales son coches y $\frac{1}{3}$ son muñecos. Si deja el resto de sus juguetes a sus amigos, ¿cuántos juguetes prestó?, ¿y cuántos tiene de cada clase?

◐ **62.** En un tren $\frac{1}{3}$ de los viajeros son jóvenes, $\frac{1}{4}$ de mediana edad y el resto son personas mayores. ¿Cuántas personas mayores viajan en el tren si en total son 60 viajeros?

● **63.** Calcula un número tal que su décima parte más $\frac{1}{3}$ del mismo sumen 91.

● **64.** Un obrero emplea los $\frac{2}{3}$ de un saco de cemento en una obra. Después usa los $\frac{2}{9}$ del resto en otra obra. Si al final le sobran 14 kg, ¿cuántos kilos pesaba inicialmente el saco?

48.

Chicos: $630 \cdot \frac{1}{3} = 210$

Alumnas: $630 \cdot \frac{2}{3} = 420$

49.

Ha estudiado $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ del temario. Le quedan por estudiar $\frac{3}{4}$ del temario.

50.

Quedan los $\frac{5}{6}$ del depósito, es decir, $\frac{5}{6} \cdot 1200 = 1000$ litros.

51.

$\frac{50}{150} = \frac{1}{3}$ del total.

52.

De los 1800 árboles, hay $\frac{1}{3} \cdot 1800 = 600$ robles.

Luego quedan 1800 – 600 = 1200 árboles.

De éstos 1200 árboles $\frac{1}{6}$ son encinas, así que hay $\frac{1}{6} \cdot 1200 = 200$ encinas.

Como el resto de árboles son alcornoques, quedan 1200 – 200 =1000 alcornoques.

53.

Gasta en el mostrador de carne $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$ €. Así que le quedan 60-10 = 50 €.

Gasta $\frac{1}{2} \cdot 50 = 25$ € en pescado.

Por lo tanto le quedan 50 – 25 = 25 € para comprar la fruta.

54.

Le entrega a Atanasio : $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$ € , así que quedan 60 € por repartir.

Entrega $\frac{1}{2} \cdot 60 = 30$ € a Rafael , con lo que quedan 30 € por repartir.

Isabel recibe $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$ € , con lo que a José le quedan 10 €.

55.

En ropa gasta $\frac{1}{3} \cdot 120 = 40$ €, en libros $\frac{1}{6} \cdot 120 = 20$ € y en comida gasta $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$ €.

En total ha gastado: 40 + 20 + 30 = 90 € , así que le sobra 120 – 90 = 30 €

56.

$15:\frac{1}{3}=45$ latas

57 .

Entre Carmen y Ángela marcan $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$ de la puntuación. Así que $\frac{1}{6}$ de la puntuación son 5 puntos, con lo que en total se marcaron 30 puntos. Por lo tanto Carmen marcó $\frac{1}{6}\cdot 30=5$ puntos y Ángela marcó $\frac{2}{3}\cdot 30=20$ puntos.

58.

La primera vez extraemos $\frac{1}{3}\cdot 300=100$ litros. Así que quedan 200 litros. En la segunda vez extraemos $\frac{1}{2}\cdot 200=100$ litros, quedando otros 100 litros en la barrica. Finalmente sacamos 25 litros, con lo que quedan 100 – 25 = 75 litros en la barrica.

59.

Ovejas: $\frac{1}{2}\cdot 36=18$, vacas : $\frac{1}{3}\cdot 36=12$, cerdos : $\frac{1}{6}\cdot 36=6$

60.

Crema: $\frac{1}{6}\cdot 24=4$ pasteles

Chocolate: $\frac{1}{3}\cdot 24=8$ pasteles

Nata: $\frac{1}{6}\cdot 24=4$ pasteles

61.

Coches: $\frac{1}{2}\cdot 12=6$, muñecos : $\frac{1}{3}\cdot 12=4$. Prestó 2 juguetes.

62.

Jóvenes : $\frac{1}{3}\cdot 60=20$, mediana edad : $\frac{1}{4}\cdot 60=15$,

Personas mayores: 25

63.

$$\frac{1}{10}\cdot N+\frac{1}{3}\cdot N=91\Rightarrow\frac{13}{30}N=91\Rightarrow\frac{1}{30}N=7\Rightarrow N=210$$

64.

En total utiliza: $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{27}=\frac{18+2}{27}=\frac{20}{27}$

Le sobran $\frac{7}{27}Saco = 14\ kg \Rightarrow$ el saco pesa: 54 kg

65. Para recorrer los $\frac{2}{5}$ de 500 km, tardamos 2 h y media. ¿Cuál ha sido la velocidad media a la hora?

66. Un camión cisterna contiene $\frac{3}{4}$ de su capacidad. Tras un accidente pierde $\frac{1}{3}$ de su contenido. Posteriormente, en un depósito recupera $\frac{2}{5}$ de la capacidad de la cisterna. Tras vaciar los $\frac{5}{6}$ de lo que le queda en un gasolinera le restan 120 L. ¿Cuántos litros de gasóleo tenía el camión al principio?

67. Un señor compra un coche y le rebajan $\frac{1}{5}$ de su valor. ¿Cuál era el precio inicial del coche si, finalmente, el señor pagó 12 000 €?

68. Tres piratas se reparten un botín. Al primero le toca la quinta parte menos dos monedas, al segundo la tercera parte de las monedas menos cuatro. Finalmente, el último pirata recibe 20 monedas. ¿Cuántas monedas reciben los dos primeros piratas?

69. La obra de un pintor se compone de 3 200 cuadros, de los cuales $\frac{1}{10}$ está en poder de su familia, $\frac{2}{3}$ del resto en el museo de la ciudad y el resto ha sido vendido a particulares. Calcula el número de cuadros que tiene su familia, los que hay en el museo de la ciudad y los que han sido vendidos a particulares.

70. Un camión ha recorrido 620 km, lo que supone $\frac{2}{3}$ de su trayecto. ¿Cuántos kilómetros le faltan por recorrer?

65.

$\frac{2}{5}$ de 500 km los realiza en $2\frac{1}{2}$ horas, con lo que en $\frac{5}{2}$ horas realiza 200 km.

En $\frac{1}{2}$ hora realiza $\frac{200}{5} = 40$ km. En 1 hora realiza 80 km.

La velocidad media ha sido 80 km/h

66.

En el accidente pierde $\frac{1}{3}$ de su contenido, con lo que le queda $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ de la capacidad de la cisterna.

Recupera $\frac{2}{5}$ del total de la capacidad de la cisterna, con lo que tiene: $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$ de la capacidad de la cisterna.

Vacía los $\frac{5}{6}$ de lo que tiene: $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10}$ Total $= \frac{3}{4}$ Total, con lo que le queda

¼ del Total = 120 litros $\Rightarrow$ la cisterna tiene una capacidad de 480 litros.

Al principio el camión contenía los $\frac{3}{4}$ de su capacidad, esto es

$\frac{3}{4} \cdot 480 = 360$ litros

67.

Si le rebajan $\frac{1}{5}$, el señor pagará $\frac{4}{5}$ de su precio total.

$\frac{4}{5}$ Total =12000 $\Rightarrow$ El precio inicial del coche era: 15000 €

68.
Si T es el total de monedas:

El primero recibe	$\frac{T}{5}-2$ monedas
El segundo recibe	$\frac{T}{3}-4$
El tercero recibe	20 monedas

$\frac{T}{5}-2+\frac{T}{3}-4+20=T \Rightarrow \frac{8}{15}T=T-14 \Rightarrow \frac{7}{15}T=14 \Rightarrow T=\frac{14\cdot 15}{7} \Rightarrow$T = 30

El primero recibe 4 monedas y el segundo 6 monedas.

69.
Su familia tiene $\frac{1}{10}\cdot 3200=320$ cuadros

En el museo de la ciudad hay $\frac{2}{3}$ del resto, es decir $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}\cdot 3200=1920$ cuadros.

A particulares se ha vendido: 3200 – (320 + 1920) = 3200 – 2240 = 960 cuadros

70.
Si $\frac{2}{3}$ del total son 620 km, entonces $\frac{1}{3}$ del total son 310 km que son los km que le faltan por recorrer.

AUTOEVALUACIÓN PAG. 27

AUTOEVALUACIÓN

1. Expresa las fracciones siguientes como números mixtos:

a) $\frac{12}{7}$ b) $\frac{15}{9}$ c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{120}{100}$

2. De las siguientes fracciones, indica cuál es la mayor:

a) $\frac{2}{5}, \frac{6}{7}$ y $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$

3. Saca factor común en las siguientes expresiones:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{9}+\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{9}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{18}$

4. Expresa como fracción impropia los siguientes números mixtos:

a) $2\frac{3}{4}$ b) $7\frac{1}{3}$ c) $5\frac{4}{5}$ d) $12\frac{6}{7}$

5. Simplifica las siguientes expresiones y, si es posible, exprésalas como números mixtos:

a) $\frac{7}{14}$ b) $\frac{212}{46}$ c) $\frac{48}{210}$ d) $\frac{54}{45}$ e) $\frac{39}{65}$

6. Indica de qué tipo son las fracciones que aparecen en la pregunta 1.

7. Opera y simplifica:

a) $\frac{1}{2}-2+\frac{5}{6}$

b) $\frac{10}{13}+3-\frac{14}{39}$

8. Opera y simplifica:

a) $\frac{6}{5}:\frac{12}{25}$

b) $4+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{19}{5}\cdot\frac{1}{3}$

9. En una piscifactoría la mitad de las truchas son alevines y $\frac{1}{3}$ del resto está reservado para la cría. ¿Cuántas truchas se pueden vender si hay 1 200 en total?

10. Un hortelano planta la tercera parte de su finca de tomates, la séptima parte de lechugas y el resto de maíz. Si la finca es de 420 ha, calcula la cantidad de hectáreas que dedicó a cada producto.

Números racionales 27

1.

a) $\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$, b) $\frac{15}{9}=1\frac{2}{3}$, c) $\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$, d) $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, e) $\frac{120}{100}=1\frac{1}{5}$

2.

a) $\frac{1}{4}=\frac{35}{140}<\frac{56}{140}=\frac{2}{5}<\frac{120}{140}=\frac{6}{7}$

b) $-\frac{2}{3}=-\frac{4}{6}<\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{4}{6}<\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

3.

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\right)$

b) $\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{9}+\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{9}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{18}=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{10}{9}+\frac{15}{9}+\frac{4}{18}\right)$

4.

a) $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, b) $7\frac{1}{3}=\frac{22}{3}$, c) $5\frac{4}{5}=\frac{29}{5}$, d) $12\frac{6}{7}=\frac{90}{7}$

5.

a) $\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

b) $\frac{212}{46}=4\frac{28}{46}=4\frac{14}{23}$

c) $\frac{48}{210}=\frac{8}{35}$

d) $\frac{54}{45}=1\frac{9}{54}=1\frac{1}{6}$

e) $\frac{39}{65}=\frac{3}{5}$

6. Todas son fracciones impropias.

7.

a) $\frac{1}{2}-2+\frac{5}{6}=\frac{6-24+10}{12}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$

b) $\frac{10}{13}+3-\frac{14}{39}=\frac{30+117-14}{39}=\frac{133}{39}$

8.

a) $\frac{6}{5}:\frac{12}{25}=\frac{6\cdot 25}{5\cdot 12}=\frac{5}{2}$

b) $4+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{19}{5}\cdot\frac{1}{3}=4+\frac{4}{15}-\frac{19}{15}=4+\left(\frac{-15}{15}\right)=4-1=3$

9.

Alevines : $\frac{1}{2}\cdot 1200=600$

El resto son 1200 – 600 = 600 truchas.

De éstas $\frac{1}{3}\cdot 600=200$ son para la cría.

Los alevines no se pueden vender y las que se reservan para la cría tampoco.
Están en venta: 1200 – 600- 200 = 400 truchas

10.

Tomates: $\frac{1}{3}\cdot 420=140$ hectáreas

Lechugas: $\frac{1}{7}\cdot 420=60$ hectáreas

Al maíz dedicó 420 – 140 – 60 = 220 hectáreas

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 29

Olimpiada matemática

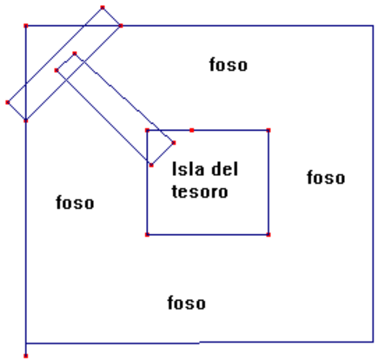
1. Queremos extraer exactamente 3 L de agua de una fuente. Para ello contamos solamente con 2 botellas. Una es de 9 L, la otra es de 5 L. ¿Cómo lo harías?

2. Queremos coger un tesoro que se encuentra en una isla rodeada por un foso lleno de cocodrilos. El ancho del foso es el mismo en todo su perímetro. Como ayuda tenemos dos maderos cuyo largo es exactamente el ancho del foso. ¿Podremos llegar al tesoro?

1. Sea botella *A* la botella de 9 L y sea *B* la botella de 5 L.

Paso 1: Llenamos la botella *A*. Vertemos su contenido en botella *B*.
Paso 2: Vaciamos la botella *B*.
Paso 3: Traspasamos los cuatro litros de *A* a *B*.
Paso 4: Llenamos la botella *A*.
Paso 5: Llenamos la botella *B* con lo que hay en botella *A*.
Paso 6: Vaciamos *B*.
Paso 7: Llenamos *B* con *A*.

2. Cruzados en una esquina. Ver dibujo.



UNIDAD 2. NÚMEROS DECIMALES Y POTENCIAS

ACTIVIDADES PAG. 32

ACTIVIDADES

1. Expresa en forma decimal las siguientes fracciones e indica con qué tipo de número decimal se corresponden:

a) $\frac{5}{100}$ b) $\frac{14}{24}$ c) $\frac{34}{10}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{9}$ f) $\frac{2}{11}$ g) $\frac{2}{15}$

2. Clasifica los siguientes números decimales e indica su parte entera y su parte decimal:

a) 0'12323... b) 2'25 c) 5'34666... d) 12'1212... e) 8'09898...

1.

a) $\frac{5}{100} = 0'05$ decimal exacto

b) $\frac{14}{24} = 0'58\widehat{3}$ decimal periódico mixto

c) $\frac{34}{10} = 3'4$ decimal exacto

d) $\frac{3}{4} = 0'75$ decimal exacto

e) $\frac{2}{9} = 0'\widehat{2}$ decimal periódico puro

f) $\frac{2}{11} = 0'18$ decimal periódico puro

g) $\frac{2}{15} = 0'1\widehat{3}$

2.

a) 0'12323… decimal periódico mixto
parte entera : 0, parte decimal : 1232323…

b) 2'25 decimal exacto
parte entera : 0 , parte decimal: 25

c) 5'34666… decimal periódico mixto
parte entera: 5 , parte decimal : 34666…

d) 12'1212… decimal periódico puro
parte entera : 12 , parte decimal : 1212…

e) 8'09898… decimal periódico mixto
parte entera : 8 , parte decimal 09898…

ACTIVIDADES PAG. 33

ACTIVIDADES

3. Calcula La fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:
   a) 0'18 b) 0'25 c) 0'12 d) 0'4 e) 9'6
4. Calcula la fracción generatriz de los siguientes decimales periódicos puros:
   a) 0'1818... b) 0'444... c) 0'4545... d) 0'888... e) 0'666...
5. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos:
   a) 0'09333... b) 0'577272... c) 2'21818... d) 0'28181...

3.

a) $0'18 = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$

b) $0'25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

c) $0'12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

d) $0'4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

e) $9'6 = \frac{96}{100} = \frac{43}{50}$

4.

a)

$N = 0'1818...$

$$\begin{array}{r} 100N = 18'18... \\ -\quad N = -0'18... \\ \hline 99N \quad = 18 \end{array}$$

$$N = \frac{18}{99} \Rightarrow N = \frac{2}{11}$$

b)

N = 0’444…

$$\begin{array}{r} 10N = \ 4'44... \\ -N \ = -0'44... \\ \hline 9N \quad = \ 4 \end{array}$$

$$N = \frac{4}{9}$$

c)

N = 0’4545…

$$\begin{array}{r} 100N = 45'45... \\ -\quad N = -0'45... \\ \hline 99N \quad = 45 \end{array}$$

$$N = \frac{45}{99} \Rightarrow N = \frac{5}{11}$$

d)

N = 0’888…

$$\begin{array}{l} 10N = \ \ 8'88... \\ -N \ \ = -0'88... \\ \hline 9N \ \ \ = \ 8 \end{array}$$

$$N = \frac{8}{9}$$

e)

N = 0’666…

$$\begin{array}{l} 10N = \ \ 6'66... \\ -N \ \ = -0'66... \\ \hline 9N \ \ \ = \ 6 \end{array}$$

$$N = \frac{6}{9} \Rightarrow N = \frac{2}{3}$$

5.

a)

N = 0’09333…

$$\begin{array}{l} 1000N = 93'33... \\ -100N = -9'33... \\ \hline 900N = 84 \end{array}$$

$$N = \frac{84}{900} \Rightarrow N = \frac{7}{75}$$

b)

N = 0’577272…

$$\begin{array}{l} 10000N = 5772'72... \\ \ \ -100N = \ -57'72... \\ \hline 9900\,N = \ 5715 \end{array}$$

$$N = \frac{5715}{9900} \Rightarrow N = \frac{127}{220}$$

c)

N = 2’21818…

$$\begin{array}{l} 1000N = 2218'18... \\ \ \ -10N = \ -22'18... \\ \hline 990\,N \ = \ 2196 \end{array}$$

$$N = \frac{2196}{990} \Rightarrow N = \frac{122}{55}$$

d)

N = 0’28181…

$$\begin{array}{l} 1000N = 281'81... \\ \ \ -10N = \ -2'81... \\ \hline 990\,N \ = \ 279 \end{array}$$

$$N = \frac{279}{990} \Rightarrow N = \frac{31}{110}$$

ACTIVIDADES PAG. 34

ACTIVIDADES

6. Calcula las siguientes potencias:

a) 3^2 d) 8^2 g) 10^2
b) 54^0 e) 4^2 h) 10^7
c) 98^1 f) 6^3 i) 5^4

7. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma de potencia:

a) $2^3 \cdot 2^7$ b) $32^5 : 16^4$ c) $5^7 : 5^2$ d) $(9 \cdot 2)^2$ e) $(16 : 4)^3$

8. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $(9^3 : 3^5)^2$ b) $(16^3 : 4^3)^4$ c) $(81^2 \cdot 27^3)^3$ d) $(2^0 \cdot 5^1)^2$ e) $(15^2 \cdot 45)^2$

6.

a) $3^2 = 9$
b) $54^0 = 1$
c) $98^1 = 98$
d) $8^2 = 64$
e) $4^2 = 16$
f) $6^3 = 216$
g) $10^2 = 100$
h) $10^7 = 10000000$
i) $5^4 = 625$

7.

a) $2^3 \cdot 2^7 = 2^{10}$

b) $32^5 : 16^4 = \left(2^5\right)^5 : \left(2^4\right)^4 = 2^{25} : 2^{16} = 2^9$

c) $5^7 : 5^2 = 5^5$

d) $(9 \cdot 2)^2 = 9^2 \cdot 2^2 = \left(3^2\right)^2 \cdot \left(2^2\right)^2 = 3^4 \cdot 2^4$

e) $(16 : 4)^3 = 4^3 = \left(2^2\right)^3 = 2^6$

8.

a) $\left(9^3 : 3^5\right)^2 = \left[\left(3^2\right)^3 : 3^5\right]^2 = \left(3^6 : 3^5\right)^2 = 3^2$

b) $\left(16^3 : 4^3\right)^4 = \left[\left(4^2\right)^3 : 4^3\right]^4 = \left(4^6 : 4^3\right)^4 = \left(4^3\right)^4 = 4^{12} = \left(2^2\right)^{12} = 2^{24}$

c) $\left(81^2 \cdot 27^3\right)^3 = \left[\left(3^4\right)^2 \cdot \left(3^3\right)^3\right]^3 = \left(3^8 \cdot 3^9\right)^3 = \left(3^{17}\right)^3 = 3^{51}$

d) $\left(2^0 \cdot 5^1\right)^2 = \left(1 \cdot 5^2\right) = 5^2$

e) $\left(15^2 \cdot 45\right)^2 = \left[(3 \cdot 5)^2 \cdot 3^2 \cdot 5\right]^2 = \left(3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 5\right)^2 = \left(3^4 \cdot 5^3\right)^2 = 3^8 \cdot 5^6$

ACTIVIDADES PAG. 35

ACTIVIDADES

9. Calcula las siguientes potencias:

a) 4^{-2} c) 5^{-2} e) $(2a^2)^4$ g) $(-4)^{-2}$

b) 2^{-5} d) $(-8)^{-1}$ f) $(-4)^2$ h) -4^2

10. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{2^3\cdot3^{-1}\cdot4^6}{8^2\cdot6^4}$ b) $\frac{16^1\cdot15\cdot6^2}{5\cdot9}$ c) $\frac{8^3\cdot8^{-7}\cdot49}{4^2}$ d) $\frac{30^2\cdot15^{-2}}{2^3}$

11. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\left[\frac{3^2\cdot(-6)}{9}\right]^{-2}$ b) $\left[6+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}\right)^2\right]:3^6$ c) $\frac{a^{-2}\cdot b^5}{a^2\cdot b^2\cdot a^{-1}}$

9.

a) $4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$

b) $2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

c) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

d) $(-8)^{-1}=\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8}$

e) $(2a^2)^4=2^4\cdot(a^2)^4=2^4\cdot a^8$

f) $(-4)^2=4^2=16$

g) $(-4)^{-2}=\frac{1}{(-4)^2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$

h) $-4^2=-16$

10.

a) $\frac{2^3\cdot3^{-1}\cdot4^6}{8^2\cdot6^4}=\frac{2^3\cdot(2^2)^6}{(2^3)^2\cdot(2\cdot3)^4\cdot3}=\frac{2^3\cdot2^{12}}{2^6\cdot2^4\cdot3^4\cdot3}=\frac{2^{15}}{2^{10}\cdot3^5}=\frac{2^5}{3^5}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$

b) $\frac{16^{-1}\cdot15\cdot6^2}{5\cdot9}=\frac{(3\cdot5)\cdot(2\cdot3)^2}{16\cdot5\cdot9}=\frac{3\cdot\cancel{5}\cdot2^2\cdot\cancel{3^2}}{2^4\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3^2}}=\frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}$

c) $\frac{8^3\cdot8^{-7}\cdot49}{4^2}=\frac{8^{-4}\cdot49}{4^2}=\frac{49}{8^4\cdot4^2}=\frac{49}{(2^3)^4\cdot(2^2)^2}=\frac{49}{2^{16}}$

d) $\frac{30^2\cdot15^{-2}}{2^3}=\frac{30^2}{15^2\cdot2^3}=\frac{(2\cdot15)^2}{15^2\cdot2^3}=\frac{2^2\cdot\cancel{15^2}}{\cancel{15^2}\cdot2^3}=\frac{1}{2}$

11.

a) $\left[\frac{3^2\cdot(-6)}{9}\right]^{-2}=\left[\frac{\cancel{3^2}\cdot(-6)}{\cancel{9}}\right]^{-2}=(-6)^{-2}=\frac{1}{(-6)^2}=\frac{1}{36}$

b)

$$\left[6+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}\right)^2\right]:3^6=\left[6+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{3}{2}}}\right)^2\right]:3^6=\left[6+\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)^2\right]:3^6=$$

$$\left[6+\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^2\right]:3^6=\left[6+(3)^2\right]:3^6=(6+9):3^6=\frac{15}{3^6}=\frac{\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot 3^5}=\frac{5}{3^5}$$

c) $\dfrac{a^{-2}\cdot b^5}{a^2\cdot b^2\cdot a^{-1}}=\dfrac{b^5}{a^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot a^{-1}}=\dfrac{b^3}{a^3}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

ACTIVIDADES PAG. 36

ACTIVIDADES

12. Expresa como potencia de 10 los siguientes números:

a) 10 000 b) 0'00000001 c) 0'00001 d) 1 000 000 000 000 000

13. Realiza las siguientes operaciones en notación científica:

a) $23'45 \cdot 10^5 + 57'98 \cdot 10^5$ b) $1'6 \cdot 10^6 \cdot 24'1 \cdot 10^2$

12.

a) 10 000 = 10^4 , b) 0'000 000 01 = 10^{-8}

c) 0'000 01 = 10^{-5} , d) 1 000 000 000 000 000 = 10^{15}

13.

a) $23'45\cdot 10^5+57'98\cdot 10^5=(23'45+57'98)\cdot 10^5=81'43\cdot 10^5=8'143\cdot 10^6$

b) $1'6\cdot 10^6\cdot 24'1\cdot 10^2=38'56\cdot 10^8=3'856\cdot 10^9$

ACTIVIDADES PAG. 37

ACTIVIDADES

14. Opera y simplifica:

a) $(1+0'\overset{\frown}{6}+0'8\overset{\frown}{3})^{-1}\cdot(1-0'1\overset{\frown}{6})$ b) $(2+0'\overset{\frown}{6})\cdot\dfrac{10}{13}-(3-0'\overset{\frown}{3})$

15. Opera respetando la jerarquía de las operaciones:

a) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{5^2}{15}:\dfrac{10}{3}$ c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}+\dfrac{(2\cdot 3)^2}{2}:\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

b) $2+2^2:\dfrac{1}{1-\frac{2}{2^2}}$ d) $3^2:\left(1+\dfrac{1}{1-2:\frac{1}{6}}\right)+\dfrac{1}{11}$

14.

a) $\left(1+0'\overset{\frown}{6}+0'8\overset{\frown}{3}\right)^{-1}\cdot\left(1-0'1\overset{\frown}{6}\right)$

N = 0’666…

$$\begin{array}{l} 10N = \ \ 6'66... \\ \underline{-N = -0'66...} \\ 9N = \ 6 \end{array} \Rightarrow N = \frac{6}{9} \Rightarrow N = \frac{2}{3}$$

N = 0'8333...

$$\begin{array}{l} 100N \ = \ 83'33... \\ \underline{-10N = -8'33...} \\ 90N = 75 \end{array} \Rightarrow N = \frac{75}{90} \Rightarrow N = \frac{5}{6}$$

N = 0'1666...

$$\begin{array}{l} 100N \ = \ 16'66... \\ \underline{-10N = -1'66...} \\ 90N = 15 \end{array} \Rightarrow N = \frac{15}{90} \Rightarrow N = \frac{1}{6}$$

$$\left(1 + 0'\widehat{6} + 0'8\widehat{3}\right)^{-1} \cdot \left(1 - 0'1\widehat{6}\right) = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{6+4+5}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{6} =$$

$$= \left(\frac{15}{6}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{6} = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

b) $\left(2 + 0'\widehat{6}\right)\frac{10}{13} - \left(3 - 0'\widehat{3}\right)$

N = 0’666…

$$\begin{array}{l} 10N = \ \ 6'66... \\ \underline{-N = -0'66...} \\ 9N = \ 6 \end{array} \Rightarrow N = \frac{6}{9} \Rightarrow N = \frac{2}{3}$$

N = 0’333…

$$\begin{array}{l} 10N = \ \ 3'33... \\ \underline{-N = -0'33...} \\ 9N = \ 3 \end{array} \Rightarrow N = \frac{3}{9} \Rightarrow N = \frac{1}{3}$$

$$\left(2 + 0'\widehat{6}\right)\frac{10}{13} - \left(3 - 0'\widehat{3}\right) = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{10}{13} - \left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{10}{13} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{10}{13} - 1\right) = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{-3}{13}\right) = -\frac{8}{13}$$

15.

a) $\frac{1}{5} - \frac{5^2}{15} : \frac{10}{3} = \frac{1}{5} - \frac{\cancel{5} \cdot 5}{\cancel{5} \cdot 3} : \frac{10}{3} = \frac{1}{5} - \frac{5}{3} : \frac{10}{3} = \frac{1}{5} - \frac{5 \cdot \cancel{3}}{10 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2-5}{10} = -\frac{3}{10}$

b) $2 + 2^2 : \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{2^2}} = 2 + 2^2 : \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 + 2^2 : \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2 + 2^2 : 2 = 2 + 2 = 4$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \frac{(2 \cdot 3)^2}{2} : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{2} : \frac{1}{3^2} = \frac{3}{2} + 2 \cdot 3^2 : \frac{1}{3^2} = \frac{3}{2} + 2 \cdot 3^4 = \frac{327}{2}$

d)

$$3^2:\left(1+\frac{1}{1-2:\frac{1}{6}}\right)+\frac{1}{11}=9:\left(1+\frac{1}{1-12}\right)+\frac{1}{11}=9:\left(1-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{11}=$$

$$9:\left(\frac{10}{11}\right)+\frac{1}{11}=\frac{99}{10}+\frac{1}{11}=\frac{1099}{110}$$

ACTIVIDADES PAG. 38

ACTIVIDADES

16. Indica cuáles de los siguientes números son irracionales:

a) 0'123123123... b) 2'3303003000... c) $1+3\sqrt{6}$ d) $\sqrt{36}$

17. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{0'16}$ e) $\sqrt[5]{-32}$

b) $\sqrt{-25}$ d) $\sqrt[5]{32}$ f) $\sqrt{0'0025}$

16.

a) 0'123123123… número racional.

b) 2'3303003000… número irracional

c) $1+3\sqrt{6}$ número irracional

d) $\sqrt{36}$ … número racional

17.

a) $\sqrt{25}=5$

b) $\sqrt{-25}$ no tiene raíz en $\mathbb{R}$

c) $\sqrt{0'16}=\sqrt{16\cdot 10^{-2}}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{10^{-2}}=4\cdot 10^{-1}=0'4$

d) $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

e) $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$

f) $\sqrt{0'0025}=\sqrt{25\cdot 10^{-4}}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{10^{-4}}=5\cdot 10^{-2}=0'05$

ACTIVIDADES PAG. 39

ACTIVIDADES

18. Escribe como potencias las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3a}$ b) $\sqrt[3]{b^4}$ c) $\sqrt[5]{a^2b}$ d) $\sqrt[6]{\frac{a+1}{3}}$ e) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$

19. Expresa en forma de raíz las siguientes potencias:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $(3a+5)^{\frac{3}{4}}$ c) $8^{-\frac{1}{3}}$ d) $-8^{\frac{1}{3}}$ e) $(-8)^{\frac{1}{3}}$ f) $(-8)^{-\frac{1}{3}}$

20. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\left(\sqrt{100}\right)^2$ b) $\sqrt{15^4}$ c) $\sqrt[3]{(a+1)^6}$ d) $\sqrt[5]{32a^{10}}$

18.

a) $\sqrt{3a}=(3a)^{1/2}$

b) $\sqrt[3]{b^4}=(b)^{4/3}$

c) $\sqrt[5]{a^2b}=(a^2b)^{1/5}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{a+1}{3}}=\left(\dfrac{a+1}{3}\right)^{1/6}$

e) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt{a\cdot a^{1/3}}=\sqrt{a^{4/3}}=\left(a^{4/3}\right)^{1/2}=a^{4/6}=a^{2/3}$

19.

a) $4^{1/2}=\sqrt{4}$

b) $(3a+5)^{3/4}=\sqrt[4]{(3a+5)^3}$

c) $8^{-1/3}=\dfrac{1}{8^{1/3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2}$

d) $-8^{1/3}=-\sqrt[3]{8}=-2$

e) $(-8)^{1/3}=\sqrt[3]{-8}=-2$

f) $(-8)^{-1/3}=\dfrac{1}{(-8)^{1/3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{-8}}=-\dfrac{1}{2}$

20.

a) $\left(\sqrt{100}\right)^2=\left(100^{1/2}\right)^2=100$

b) $\sqrt{15^4}=\left(15^4\right)^{1/2}=15^{4/2}=15^2=225$

c) $\sqrt[3]{(a+1)^6}=\left((a+1)^6\right)^{1/3}=(a+1)^{6/3}=(a+1)^2$

d) $\sqrt[5]{32a^{10}}=\left(2^5\cdot a^{10}\right)^{1/5}=\left(2^5\right)^{1/5}\cdot\left(a^{10}\right)^{1/5}=2a^2$

ACTIVIDADES PAG. 40

ACTIVIDADES

21. Redondea los siguientes números con sólo cinco cifras significativas:

a) 0'98733 b) 0'00987 c) 7'989223 d) 7'989286

22. Calcula el error absoluto y el error relativo que se comete al aproximar $\frac{1}{3}$ como 0'33.

23. Aproxima $\sqrt{3}$ con un error menor que una centésima.

21.

a) 0'98733, b) 0'00987 tiene 3.

c) 7'989223=7'9892, d) 7'989286=7'9893

22.

$$E_a = \left|\frac{1}{3} - 0'33\right| = \left|\frac{1}{3} - \frac{33}{100}\right| = \left|\frac{100-99}{300}\right| = \left|\frac{1}{300}\right| = \frac{1}{300}$$

$$e = \frac{E_a}{|N|} = \frac{\frac{1}{300}}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0'01$$

23.

$$\sqrt{3} = 1'73205080756887729352744634150\ldots \cong 1'73$$

Veamos que con esta aproximación se comete un error menor que una centésima.

$$E_a = \left|\sqrt{3} - 1'73\right| = \left|\sqrt{3} - \frac{173}{100}\right| = \left|\frac{100\sqrt{3} - 173}{100}\right| \simeq \left|\frac{173'2 - 173}{100}\right| = \left|\frac{0'2}{100}\right| = 0'002$$

$$e = \frac{E_a}{|N|} = \frac{0'002}{\left|\sqrt{3}\right|} = 0.001154700538 < 0'01$$

ACTIVIDADES PAG. 41

ACTIVIDADES

24. Extrae fuera de la raíz todos los factores que puedas:

a) $\sqrt{2^{13}a^{15}b^{16}}$ b) $\sqrt[3]{2^4a^{13}}$ c) $\sqrt{32}$ d) $\sqrt[4]{2^5a^{15}}$ e) $\sqrt{\frac{3^{12}}{a^{15}}}$

25. Introduce dentro de la raíz los factores que están fuera:

a) $2a\sqrt{\frac{b}{a^3}}$ b) $4a^2\sqrt[3]{\frac{b}{8a^3}}$ c) $3a\sqrt[3]{3a^2}$ d) $a\sqrt{\frac{2}{a^5}}$ e) $\frac{2a}{3}\sqrt[5]{\frac{81}{16a^4}}$

24.

a) $\sqrt{2^{13}a^{15}b^{16}} = \sqrt{2^{10}2^3a^{14}ab^{16}} = 2^5a^7b^8\sqrt{2^3a}$

b) $\sqrt[3]{2^4a^{13}} = 2\sqrt[3]{2a^{12}a} = 2a^4\sqrt[3]{2a}$

c) $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2$

d) $\sqrt[4]{2^5a^{15}} = \sqrt[4]{2^4 2a^{12}a^3} = 2a^3\sqrt[4]{2a^3}$

e) $\sqrt{\frac{3^{12}}{a^{15}}} = \frac{3^6}{a^7}\sqrt{\frac{1}{a}}$

25.

a) $2a\sqrt{\frac{b}{a^3}} = \sqrt{\frac{2^2a^2b}{a^3}} = \sqrt{\frac{4b}{a}}$

b) $4a^2\sqrt[3]{\frac{b}{8a^3}} = \sqrt[3]{\frac{4^3a^6b}{8a^3}} = \sqrt[3]{\frac{2^6a^6b}{2^3a^3}} = \sqrt[3]{2^3a^3b}$

c) $3a\sqrt[3]{3a^2} = \sqrt[3]{3^3a^33a^2} = \sqrt[3]{3^4a^5}$

d) $a\sqrt{\frac{2}{a^5}} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^5}} = \sqrt{\frac{2}{a^3}}$

e) $\frac{2a}{3}\sqrt[5]{\frac{81}{16a^4}}=\sqrt[5]{\frac{2^5a^5}{3^5}\cdot\frac{3^4}{2^4a^4}}=\sqrt[5]{\frac{2a}{3}}$

DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 44

Desafío matemático

Las matemáticas y las ciencias del mar

Las matemáticas tienen una enorme aplicación en las ciencias del mar. Las investigaciones necesitan presentarse numéricamente para lograr una comprobación experimental. Esto nos permitirá sacar conclusiones muy útiles con aplicaciones directas en la rentabilidad de un banco de pesca y otras cuestiones. Su aplicación es muy diversa: estudio de las corrientes de los océanos, comportamiento de las mareas, etc. Dentro de los estudios de la productividad marina, nos interesa conocer el crecimiento, reproducción y mortalidad para conocer la dinámica de las poblaciones. Por ejemplo, queremos conocer el estudio de la anchoveta, pez semejante a la sardina, base para la elaboración de la harina de pescado en todo el mundo.

1. Si en la costa de Perú capturamos 12 millones de toneladas en un año, y en el banco sahariano capturamos 10 millones de toneladas, ¿cuántas toneladas expresadas en forma de potencia se capturan en ambos bancos?
2. Suponiendo que para fabricar un kilo de harina, necesitamos 10 kilos de anchoveta, ¿cuántos kilos de harina de pescado se fabrican cada año?
3. Si de cada kilo de harina de pescado ganamos 90 céntimos de euro, ¿cuántos euros ganaremos si capturamos 7 millones de toneladas de anchoveta al año?
4. Con ayuda de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación realiza un trabajo sobre la importancia de la pesca en la alimentación humana.
5. ¿Podrías argumentar si el hombre podría alimentarse sustituyendo la carne por el pescado?

Distancia solar

La distancia de la Tierra al Sol es de 149 600 000 000 m y la distancia de Saturno al Sol es de 1 430 000 000 000 m.

1. ¿Quién se encuentra más cerca del Sol?
2. ¿Qué distancia existe entre ambos planetas?
3. ¿Qué planetas forman el Sistema Solar?
4. Haz un dibujo representativo del Sistema Solar
5. La velocidad de la Luz es de 300 000 km/s. ¿Cuántos kilómetros recorre la Luz en un año?
6. Si lanzáramos un satélite al Sol, desde la Tierra , ¿cuánto tiempo tardaría en llegar?
7. ¿Crees que el satélite del apartado anterior llegaría al Sol? Razona tu respuesta

42 UNIDAD 2

Las matemáticas y las ciencias del mar

1. Perú: $12.000.000 = 12 \cdot 10^6 = 1'2 \cdot 10^7$ toneladas de anchoveta
   Banco sahariano: $10.000.000 = 10^7$ toneladas de anchoveta
2. Suponemos que se capturan $12 \cdot 10^7 + 10^7 = 22 \cdot 10^7$ de toneladas de anchoveta al año. En estas condiciones, si por cada 10 kg de anchoveta se fabrica 1 kg de harina de pescado, por $22 \cdot 10^7$ toneladas de anchoveta, se fabrican $22 \cdot 10^6$ toneladas de harina de pescado $= 22 \cdot 10^9$ kg de harina de pescado.
3. Por cada kg de harina ganamos 0'9 €, si capturamos :
   a. 7 millones de toneladas de anchoveta $= 7 \cdot 10^9$ kg anchoveta $= 7 \cdot 10^8$ kg de harina de pescado
   b. Obtenemos:
      $09 \cdot 7 \cdot 10^8 = 63 \cdot 10^7 = 630.000.000$ €
4. Realiza un trabajo sobre la importancia de la pesca en la alimentación humana.
5. Las proteínas del pescado son equivalentes a las de la carne, por lo que el hombre podría sustituir la carne por el pescado en su alimentación.

Distancia solar

Distancia de la Tierra al Sol = $d(T, Sol) = 149.600.000 = 1´496 \cdot 10^8$ km
Distancia de la Tierra a Saturno = $d(S_T, Sol) = 1430.000.000 = 14'3 \cdot 10^8$ km

1. La Tierra se encuentra más cerca del Sol.
2. $143 \cdot 10^8 - 1496 \cdot 10^8 = 1.2804 \cdot 10^9$ km
3. Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno (a Plutón en la actualidad no se le cataloga como planeta).
4. Realiza un dibujo sobre el Sistema Solar.
5. En 1 segundo recorre $300.000 = 3 \cdot 10^5$ km
   En 1 minuto recorre $3 \cdot 10^5 \cdot 60 = 18 \cdot 10^6$ km
   En 1 hora recorre $18 \cdot 10^6 \cdot 60 = 108 \cdot 10^7$ km
   En 1 día recorre $108 \cdot 10^7 \cdot 24 = 2592 \cdot 10^7$ km
   En 1 mes recorre $2592 \cdot 10^7 \cdot 30 = 7776 \cdot 10^8$ km
   En 1 año recorre $7776 \cdot 10^8 \cdot 12 = 93.312 \cdot 10^8$ km
6. Tardaría en llegar: $\frac{1496 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 49867$ segundos = 831 minutos.
7. Nunca llegaría porque el Sol le quemaría mucho antes de llegar.

ACTIVIDADES FINALES PAG. 44

EJERCICIOS

Números decimales y fracciones

26. Expresa en forma de número decimal las siguientes fracciones e indica qué tipo de decimal son:

a) $\frac{6}{15}$ d) $\frac{2}{15}$ g) $\frac{23}{25}$

b) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{3}{11}$ h) $\frac{7}{11}$

c) $\frac{1}{11}$ f) $\frac{8}{15}$ i) $\frac{7}{9}$

27. Clasifica los siguientes números decimales e indica cuáles son racionales y cuáles son números reales:

a) 1'111... c) 4'11010...

b) 1'01212... d) 1'1010010001...

28. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a) 0'15 c) 0'6 e) 2'242424...

b) 0'41666... d) 4'9999... f) 1'25

29. Simplifica la siguiente expresión transformando previamente los números decimales en números racionales:

$$\frac{5+0'1\widehat{6}+0'\widehat{6}}{1+\frac{1}{6}}$$

30. Calcula los valores de x menores de 10 para que la expresión $\frac{56}{12+x}$ sea un número entero.

Notación científica

31. Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 0'00004599 c) 7 896 540 000 000 000

b) 98 130 000 000 000 d) 0'0000000000000012

32. Expresa en notación científica las siguientes expresiones:

a) $345 \cdot 10^3$ d) $98\,484 \cdot 10^{-9}$

b) $98\,747 \cdot 10^5$ e) $0'009 \cdot 10^{-2}$

c) $0'000367 \cdot 10^8$ f) $0'027 \cdot 10^3$

33. Realiza las siguientes operaciones en notación científica:

a) $73'85 \cdot 10^6 + 34'12 \cdot 10^5$ c) $(222'4 \cdot 10^{-3}) : (12 \cdot 10^{-8})$

b) $(34'4 \cdot 10^9) : (17'2 \cdot 10^{-2})$ d) $(4'76 \cdot 10^8) : (32'5 \cdot 10^3)$

34. Opera las siguientes expresiones y escribe el resultado en notación científica:

a) $\frac{(36'5 \cdot 10^4 - 3'5 \cdot 10^4) \cdot 2'89 \cdot 10^{12}}{25'2 \cdot 10^3}$

b) $\frac{(4'67 \cdot 10^7 + 123'4 \cdot 10^7) \cdot 3'42 \cdot 10^{12}}{2'2 \cdot 10^9}$

35. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora, utilizando la notación científica:

a) 432000000000000 : 54000000

b) 10750000000 : 8600000000000

Potencias

36. Opera las siguientes potencias:

a) $2^3 2^2 2^7$ c) $(2^3)^2$

b) $2^9 : 2^0$ d) $2^2 3^4 5^2 4^3 6^2$

37. Opera las siguientes potencias:

a) $\left\{\left[(-3)^3\right]^2\right\}^{\frac{1}{3}}$ c) $\left[\frac{(-3)^3 4^2}{2^3 3^3}\right]^2$

b) $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^7 : \left(\frac{3}{2}\right)^5\right\}^2$ d) $\frac{14^2 \cdot 3^5}{9^2 \cdot 7^3}$

38. Opera las siguientes potencias:

a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^2$ b) $\left[\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{2^3 \cdot 81}{3^2 \cdot 8}\right]$

Potencias y fracciones

39. Opera y simplifica:

a) $\frac{11}{7} \cdot \frac{1+0'\widehat{3}-0'5}{0'25+\frac{1}{7}}$ c) $1+\frac{1}{1-0'\widehat{3}}$

b) $\left(\frac{1+0'1\widehat{6}}{1-0'\widehat{3}}\right)^{-2}$ d) $\frac{1}{1-\frac{1}{1+0'2}}$

40. Realiza las siguientes operaciones:

a) $15 : 3 + 2 \cdot (3+5)$ c) $1 + 5^2 : 5 + (7 - 2 \cdot 3^2)$

b) $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1-0'\widehat{5}}}\right) \cdot \frac{13}{3^3}$ d) $\frac{40^3 \cdot 20^{-1}}{50^3}$

41. Opera y simplifica:

a) $\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}$ c) $\frac{-10a^3bc^2}{2ab^2}$

b) $\frac{15a^7b^{12}}{12a^2b^{10}}$ d) $\frac{28a^7}{12ab^{-6}}$

26.

a) $\frac{6}{15} = 0'4$ decimal exacto

b) $\frac{1}{9} = 0'\widehat{1}$ decimal periódico puro c) $\frac{1}{11} = 0'0909...$ decimal periódico puro

d) $\frac{2}{15} = 0'1333...$ decimal periódico mixto

e) $\frac{3}{11} = 0'272727...$ decimal periódico puro

f) $\frac{8}{15} = 0'5333...$ decimal periódico mixto

g) $\frac{23}{25} = 0'92$ decimal exacto

h) $\frac{7}{11} = 0'636363...$ decimal periódico puro

i) $\frac{7}{9} = 0'777...$ decimal periódico puro

27.

a) 1’111… decimal periódico puro , número racional.
b) 1’01212… decimal periódico mixto , número racional
c) 4’11010… decimal periódico mixto , número racional
d) 1’1010010001… número irracional

28.

a) $0'15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

b) N = 0’41666…

$$\begin{array}{l} 1000N = 416'666... \\ -100N = -41'666... \\ \hline 900N = 375 \end{array}$$

$$N = \frac{375}{900} \Rightarrow N = \frac{5}{12}$$

c) $0'6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

d) N = 4’999…

$$\begin{array}{l} 10N = 49'99... \\ -N = -4'99... \\ \hline 9N = 45 \end{array}$$

$$N = \frac{45}{9} \Rightarrow N = 5$$

e) N = 2’242424…

$$\begin{array}{l} 100N = 224'2424... \\ -N = -2'2424... \\ \hline 99N = 222 \end{array}$$

$$N = \frac{222}{99} \Rightarrow N = \frac{74}{33}$$

f) N = $1'25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$

29.

N = 0’666…

$$\begin{array}{rl} 10N = & 6'66... \\ -N = & -0'66... \\ \hline 9N = & 6 \end{array} \Rightarrow N = \frac{6}{9} \Rightarrow N = \frac{2}{3}$$

N = 0’1666…

$$\begin{array}{rl} 100N = & 16'66... \\ -10N = & -1'66... \\ \hline 90N = & 15 \end{array} \Rightarrow N = \frac{15}{90} \Rightarrow N = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5+0'1\widehat{6}+0'\widehat{6}}{1+\frac{1}{6}} = \frac{5+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{90+3+12}{18}}{\frac{7}{6}} = \frac{\frac{105}{18}}{\frac{7}{6}} = \frac{6\cdot 105}{18\cdot 7} = \frac{\cancel{6\cdot 3}\cdot\cancel{7}\cdot 5}{\cancel{18}\cdot\cancel{7}} = 5$$

30.

El valor para el que la expresión $\frac{56}{12+x}$ es un número entero es $x = 2$.

En este caso tenemos que $\frac{56}{12+x} = \frac{56}{14} = 4$

31.

a) 0’00004599 = 4’599 · 10^{-5}

b) 98 130 000 000 000 = 9’813 · 10^{13}

c) 7 896 540 000 000 000 = 7’89654 · 10^{15}

d) 0’ 000 000 000 000 001 2 = 1’2 · 10^{-15}

32.

a) 345 · $10^3 = 3'45 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 3'45 \cdot 10^5$

b) 98747 · $10^5 = 9'8747 \cdot 10^4 \cdot 10^5 = 9'8747 \cdot 10^9$

c) 0’000367 · $10^8 = 3'67 \cdot 10^{-4} \cdot 10^8 = 3'67 \cdot 10^4$

d) 98484 · 10^{-9} = 9’8484 · $10^4 \cdot 10^{-9}$ = 9’8484 · 10^{-5}

e) $0'009 \cdot 10^{-2} = 0'9 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 0'9 \cdot 10^{-4}$

f) $0'027 \cdot 10^3 = 2'7 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 = 2'7 \cdot 10^1$

33.

a) $73'85\cdot 10^6 + 34'12\cdot 10^5 = 738'5\cdot 10^5 + 34'12\cdot 10^5 = 772'62\cdot 10^5$

b) $\left(34'4\cdot 10^9\right):\left(17'2\cdot 10^{-2}\right) = \frac{34'4}{17'2}\cdot 10^9\cdot 10^2 = 2\cdot 10^{11}$

c) $(222'4 \cdot 10^{-3}):(12 \cdot 10^{-8}) = \frac{222.4}{12} \cdot 10^{-3} \cdot 10^8 = 18'5 \cdot 10^5 = 1'85 \cdot 10^6$

d) $\left(4'76\cdot 10^8\right):\left(32'5\cdot 10^3\right) = \frac{476\cdot 10^{-2}\cdot 10^8}{325\cdot 10^{-1}\cdot 10^3} = \frac{476\cdot 10^6}{325\cdot 10^{-2}} = \frac{476}{325}\cdot 10^6\cdot 10^2 = \frac{476}{325}\cdot 10^8 = 1'46\cdot 10^8$

34.

a)

$$\frac{\left(36'5\cdot 10^{4}-3'5\cdot 10^{4}\right)\cdot 2'89\cdot 10^{12}}{25'2\cdot 10^{3}}=\frac{33\cdot 10^{4}\cdot 289\cdot 10^{-2}\cdot 10^{12}}{252\cdot 10^{-1}\cdot 10^{3}}=\frac{33\cdot 289\cdot 10^{14}}{252\cdot 10^{2}}=$$

$$=\frac{3179}{84}\cdot 10^{12}=3'78\cdot 10^{11}$$

b)

$$\frac{\left(4'67\cdot 10^{7}+123'4\cdot 10^{7}\right)\cdot 3'42\cdot 10^{12}}{2'2\cdot 10^{9}}=\frac{128'07\cdot 10^{7}\cdot 3'42\cdot 10^{12}}{22\cdot 10^{-1}\cdot 10^{9}}=\frac{437'9994\cdot 10^{19}}{22\cdot 10^{8}}=$$

$$=\frac{4379994\cdot 10^{-4}\cdot 10^{19}\cdot 10^{-8}}{22}=\frac{4379994}{22}\cdot 10^{7}=\frac{2189997}{11}\cdot 10^{7}=1'99\cdot 10^{12}\cdot 10^{7}=1'99\cdot 10^{19}$$

35.

a) $432\,000\,000\,000\,000:54\,000\,000=432\cdot 10^{12}:54\cdot 10^{6}=8\cdot 10^{6}$

b) $10\,750\ \,000\,000:8\,600\,000\,000\,000=\dfrac{10750\cdot 10^{6}}{8600\cdot 10^{9}}=1'25\cdot 10^{-3}$

36.

a) $2^{3}\cdot 2^{2}\cdot 2^{7}=2^{12}$

b) $2^{9}:2^{0}=2^{9}:1=2^{9}$

c) $\left(2^{3}\right)^{2}=2^{6}$

d) $2^{2}\cdot 3^{4}\cdot 5^{2}\cdot 4^{3}\cdot 6^{2}=2^{2}\cdot 3^{4}\cdot 5^{2}\cdot\left(2^{2}\right)^{3}\cdot(2\cdot 3)^{2}=2^{2}\cdot 3^{4}\cdot 5^{2}\cdot 2^{6}\cdot 2^{2}\cdot 3^{2}=2^{10}\cdot 3^{6}\cdot 5^{2}$

37.

a) $\left\{\left[(-3)^{3}\right]^{2}\right\}^{1/3}=(-3)^{2}=9$

b) $\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{7}:\left(\dfrac{3}{2}\right)^{5}\right\}^{2}=\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2}\right\}^{2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4}$

c) $\left[\dfrac{(-3)^{3}\cdot 4^{2}}{2^{3}\cdot 3^{3}}\right]^{2}=\left[\dfrac{(-1)^{3}\cdot\cancel{3^{3}}\cdot\left(2^{2}\right)^{2}}{2^{3}\cdot\cancel{3^{3}}}\right]^{2}=\left[\dfrac{-2^{4}}{2^{3}}\right]^{2}=(-2)^{2}=4$

d) $\dfrac{14^{2}\cdot 3^{5}}{9^{2}\cdot 7^{3}}=\dfrac{(2\cdot 7)^{2}\cdot 3^{5}}{\left(3^{2}\right)^{2}\cdot 7^{3}}=\dfrac{2^{2}\cdot 7^{2}\cdot 3^{5}}{3^{4}\cdot 7^{3}}=\dfrac{2^{2}\cdot 3}{7}=\dfrac{12}{7}$

38.

a) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}=\dfrac{\cancel{2^{2}}}{\cancel{2^{2}}\cdot 3^{2}}=\dfrac{1}{3^{2}}=\dfrac{1}{9}$

b) $\left[\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2}\dfrac{2^{3}\cdot 81}{3^{2}\cdot 8}\right]=\dfrac{2^{3}\cdot 3^{4}}{(2\cdot 3)^{2}\cdot 3^{2}\cdot 8}=\dfrac{\cancel{2^{3}}\cdot\cancel{3^{4}}}{2^{2}\cdot\cancel{3^{2}\cdot 3^{2}}\cdot\cancel{2^{3}}}=\dfrac{1}{2^{2}}=\dfrac{1}{4}$

39.

a) N = 0‘333 …

$$\begin{array}{r} 10N = \ \ 3'33... \\ -N = -0'33... \\ \hline 9N = \ 3 \end{array} \Rightarrow N = \frac{3}{9} \Rightarrow N = \frac{1}{3}$$

$$0'5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad , \qquad 0'25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{11}{7} \cdot \frac{1+0'\widehat{3}-0'5}{0'25+\frac{1}{7}} = \frac{11}{7} \cdot \frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{7}} = \frac{11}{7} \cdot \frac{\frac{6+2-3}{6}}{\frac{7+4}{28}} = \frac{11}{7} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{\frac{11}{28}} = \frac{\cancel{11}}{7} \cdot \frac{5 \cdot 28}{\cancel{11} \cdot 6} = \frac{10}{3}$$

b) N = 0’1666…

$$\begin{array}{r} 100N = \ \ 16'66... \\ -10N = - \ 1'66... \\ \hline 90N = \ 15 \end{array} \Rightarrow N = \frac{15}{90} \Rightarrow N = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1+0'1\widehat{6}}{1-0'\widehat{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 6}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{7}\right)^{2} = \frac{16}{49}$$

c) $1+\frac{1}{1-0'\widehat{3}} = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{\frac{2}{3}} = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

d)

$$N = 0'2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+0'2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{5}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{6}{5}}} = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

40.

a) $15:3+2 \cdot (3+5) = 5+2 \cdot 8 = 5+16 = 21$

b)

$$\begin{array}{r} 10N = \ \ 5'55... \\ -N = - \ 0'55... \\ \hline 9N = 5 \end{array} \Rightarrow N = \frac{5}{9}$$

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1-0'\widehat{5}}}\right)\cdot\frac{13}{3^3}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{5}{9}}}\right)\cdot\frac{13}{3^3}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{9}}}\right)\cdot\frac{13}{3^3}=\left(\frac{1}{1+\frac{9}{4}}\right)\cdot\frac{13}{3^3}=\frac{1}{\frac{13}{4}}\cdot\frac{13}{3^3}=\frac{4}{\cancel{13}}\cdot\frac{\cancel{13}}{3^3}=\frac{4}{27}$$

c) $1+5^2:5+\left(7-2\cdot3^2\right)=1+5+\left(7-18\right)=6-11=-5$

d) $\dfrac{40^3\cdot20^{-1}}{50^3}=\dfrac{40^3}{20\cdot50^3}=\dfrac{\cancel{40}\cdot40^2}{\cancel{20\cdot2}\cdot25\cdot50^2}=\dfrac{4^2\cdot\cancel{10^2}}{5^2\cdot5^2\cdot\cancel{10^2}}=\dfrac{2^4}{5^4}=\dfrac{16}{625}$

41.

a) $\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\frac{3^3}{2^2\cdot2^3}}{\frac{3^2}{2^4}}=\dfrac{3^3\cdot2^4}{2^5\cdot3^2}=\dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{15a^7b^{12}}{12a^2b^{10}}=\dfrac{5a^5b^2}{4}$

c) $\dfrac{-10a^3bc^2}{2ab^2}=-\dfrac{5a^2c^2}{b}$

d) $\dfrac{28a^7}{12ab^{-6}}=\dfrac{7a^6b^6}{3}$

42. Simplifica las siguientes potencias:

a) $\dfrac{2+2^3}{3+3\cdot 2^2}$ c) $\dfrac{a^3x-ax^3}{ab^2x-a^2bx^2}$

b) $\dfrac{5+a^2}{10+2a^2}$ d) $\dfrac{16ab^2c^4-12a^2bc^3}{8a^2c-4ab^2c^2}$

43. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3\cdot\left(\frac{10}{4}\right)^2}{\left(\frac{20}{15}\right)^3}\cdot\dfrac{125}{9}$ c) $\left(1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{9}}\right)^{-2}$

b) $\dfrac{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{-1}\cdot\frac{9}{16}}{\frac{8}{6}\cdot\left(\frac{2}{12}\right)^2}$ d) $\left(1-\dfrac{7}{1-7^{-1}}\right)\cdot 6^2$

44. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{1+2\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-1}}$

b) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}}{\frac{4}{10}\left(\frac{6}{25}\right)^{-1}}$

45. Opera y simplifica:

a) $\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{1-0'25}\right)^{-2}}$ c) $\dfrac{a^7b^2c^5}{(a^2)^2b(c^2)^3}$

b) $\sqrt{\dfrac{2^2\cdot 9^3\cdot 12}{4^3\cdot 81\cdot 2}}$ d) $\dfrac{(a^2\cdot b)^3c^{-1}}{a^5\cdot b^2\cdot c^2}$

Radicales

46. Calcula las siguientes raíces por el método más sencillo posible:

a) $\sqrt[3]{8\cdot 64\cdot 125}$ c) $\sqrt{36\cdot 25\cdot 100}$

b) $\sqrt[4]{16\cdot 81\cdot 625}$ d) $\sqrt{36:0'01}$

47. Efectúa las siguientes raíces de la forma más sencilla posible:

a) $\left(\sqrt{2ab}\right)^3$ c) $\sqrt[3]{2a^2}\cdot\sqrt[3]{2a^3}\cdot\sqrt[3]{2a^4}$

b) $\sqrt[4]{(a+2b)^{12}}$ d) $\sqrt[3]{a\cdot b^2}:\sqrt[3]{a^2\cdot b}$

48. Extrae los factores que puedas de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{16a^2b^3}$ c) $\sqrt{a^8b^2}$

b) $\sqrt[3]{32a^6b^5c^7d}$ d) $\sqrt[3]{-27a^3b^6c^9}$

49. Extrae todos los factores que puedas:

a) $\sqrt{2a^2b^4}$ c) $\sqrt[3]{81a^9b^3}$

b) $\sqrt[3]{a^{10}}$ d) $\sqrt[4]{256a^{12}b^{13}c^{20}}$

50. Simplifica las siguientes raíces, extrayendo todos los factores posibles:

a) $\sqrt[5]{-32a^{10}b^{11}c^{12}}$ b) $\sqrt[6]{128a^7b^{12}c^{15}}$

51. Realiza los siguientes productos de raíces:

a) $\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{2ab^2}$ c) $\sqrt[5]{2ab^2}\cdot\sqrt[5]{4a^2b}\cdot\sqrt[5]{4a^7b^2}$

b) $\sqrt{7a}\cdot\sqrt{7ab^4}$ d) $\sqrt[5]{2a^6}\cdot\sqrt[5]{3a^7}\cdot\sqrt[5]{ab^2}$

52. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[4]{3a^2bc^3}\cdot\sqrt[4]{9ab^2c}\cdot\sqrt[4]{3ab}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{12}b^{15}c^{18}}}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{43}\cdot b^{55}\cdot c^{30}}}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a^{90}b^{48}}}}$

53. Opera y simplifica:

a) $\sqrt{5a^2+\sqrt{16a^4}}$ c) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}}$

b) $\sqrt{36\sqrt{100\sqrt{169}}}$ d) $\sqrt{10z^4+\sqrt{36z^8}}$

54. Opera y simplifica las siguientes raíces:

a) $\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}}}$ c) $\sqrt{22a^4+\sqrt{9a^8}}$

b) $\sqrt{5+\sqrt{12+\sqrt{16}}}$ d) $\sqrt{13z^2+\sqrt[3]{27z^6}}$

55. Simplifica las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{a^6b^7}{c^9d^{10}}}$ c) $\sqrt[6]{(a-b)^3}$

b) $\sqrt[5]{(a^2+b^2)^{10}}$ d) $\left(\sqrt[3]{(a-b)}\right)^4$

56. Opera de la forma más sencilla que puedas:

a) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt{\sqrt{16}}$

b) $\sqrt{a^2:0'01}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

57. Realiza las siguientes potencias de raíces:

a) $\left(3a\sqrt[3]{2a}\right)^4$ c) $\left(2\sqrt[8]{4^2b^{16}c^{17}}\right)^6$

b) $\left(\sqrt[3]{2^3b^2}\right)^4$ d) $\sqrt[3]{\left(2^4a^9b^8\right)^{12}}$

58. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$ c) $\sqrt{1'21}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}}$ d) $\sqrt[6]{0'000001}$

42.

a) $\dfrac{2+2^3}{3+3\cdot 2^2}=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{5+a^2}{10+2a^2}=\dfrac{\cancel{\left(5+a^2\right)}}{2\cdot\cancel{\left(5+a^2\right)}}=\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{a^3x-ax^3}{ab^2x-a^2bx^2}=\dfrac{\cancel{a}\cancel{x}\left(a^2-x^2\right)}{\cancel{a}b\cancel{x}\left(b-ax\right)}=\dfrac{a^2-x^2}{b\left(b-ax\right)}$

d) $\dfrac{16ab^2c^4-12a^2bc^3}{8a^2c-4ab^2c^2}=\dfrac{\cancel{4a}bc^3\left(4bc-3a\right)}{\cancel{4ac}\left(2a-b^2c\right)}=\dfrac{bc^2\left(4bc-3a\right)}{2a-b^2c}$

43.

a) $$\frac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3\cdot\left(\frac{10}{4}\right)^2}{\left(\frac{20}{15}\right)^3}\cdot\frac{125}{9}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\cdot\frac{125}{9}=\frac{\frac{2^6\cdot 5^2}{5^6\cdot 2^2}}{\frac{2^6}{3^3}}\cdot\frac{5^3}{3^2}=$$

$$=\frac{2^6\cdot 5^2\cdot 3^3}{5^6\cdot 2^2\cdot 2^6}\cdot\frac{5^3}{3^2}=\frac{2^6\cdot 5^5\cdot 3^3}{5^6\cdot 2^8\cdot 3^2}=\frac{3}{5\cdot 2^2}=\frac{3}{20}$$

b) $$\frac{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{-1}\cdot\frac{9}{16}}{\frac{8}{6}\cdot\left(\frac{2}{12}\right)^2}=\frac{\frac{3^2}{2^4}}{\frac{2^3}{2\cdot 3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)^2}=\frac{\frac{3^2}{2^4}}{\frac{2^3\cdot 3^3}{2\cdot 3\cdot 2^6\cdot 2^2\cdot 3^2}}=\frac{3^2\cdot 2\cdot 3\cdot 2^6\cdot 2^2\cdot 3^2}{2^4\cdot 2^3\cdot 3^3}=\frac{2^9\cdot 3^5}{2^7\cdot 3^3}=2^2\cdot 3^2$$

c) $$\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right)^{-2}=\left(1-\frac{1}{\frac{8}{9}}\right)^{-2}=\left(1-\frac{9}{8}\right)^{-2}=\left(\frac{-1}{8}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=64$$

d) $$\left(1-\frac{7}{1-7^{-1}}\right)\cdot 6^2=\left(1-\frac{7}{1-\frac{1}{7}}\right)\cdot 6^2=\left(1-\frac{7}{\frac{6}{7}}\right)\cdot 6^2=\left(1-\frac{47}{6}\right)\cdot 6^2=-\frac{41}{6}\cdot 6^2=-\frac{41}{6}$$

44.

a) $$\sqrt{1+2\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-1}}=\sqrt{1+2\cdot\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{-1}}=\sqrt{1+2\cdot\frac{3^3}{2^3}}=\sqrt{1+\frac{3^3}{2^2}}=\sqrt{\frac{31}{4}}$$

b) $$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}}{\frac{4}{10}\cdot\left(\frac{6}{25}\right)^{-1}}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}{\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{6}{25}\right)^{-1}}=\frac{\frac{6}{25}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{6\cdot\cancel{25}}{4\cdot\cancel{25}}=\frac{3}{2}$$

45.

a)

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{1-0'25}\right)^{-2}}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)^{-2}}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)^{-2}}=\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}}=$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}=\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

b) $\sqrt[3]{\frac{2^2\cdot 9^3\cdot 12}{4^3\cdot 81\cdot 2}}=\frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{2^2\cdot 2^2\cdot 3}{3^4\cdot 2}}=\frac{9\cdot 2}{4\cdot 3}\sqrt[3]{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 2}}=\frac{3}{2}$

c) $\frac{a^7b^2c^5}{\left(a^2\right)^2 b\left(c^2\right)^3}=\frac{a^7b^2c^5}{a^4bc^6}=\frac{a^3b}{c}$

d) $\frac{\left(a^2b\right)^3 c^{-1}}{a^5b^2c^2}=\frac{a^6b^3}{a^5b^2c^2c}=\frac{ab}{c^3}$

46.

a) $\sqrt[3]{8\cdot 64\cdot 125}=\sqrt[3]{2^3\cdot 4^3\cdot 5^3}=2\cdot 4\cdot 5=40$

b) $\sqrt[4]{16\cdot 81\cdot 625}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3^4\cdot 5^4}=2\cdot 3\cdot 5=30$

c) $\sqrt{36\cdot 25\cdot 100}=6\cdot 5\cdot 10=300$

d) $\sqrt{36:0'01}=\sqrt{6^2:10^{-2}}=6:10^{-1}=60$

47.

a) $\left(\sqrt{2ab}\right)^3=\sqrt{\left(2ab\right)^3}=2ab\sqrt{2ab}$

b) $\sqrt[4]{\left(a+2b\right)^{12}}=\left(a+2b\right)^3$

c) $\sqrt[3]{2a^2}\cdot\sqrt[3]{2a^3}\cdot\sqrt[3]{2a^4}=\sqrt[3]{2a^2\cdot 2a^3\cdot 2a^4}=\sqrt[3]{2^3a^9}=2a^3$

d) $\sqrt[3]{ab^2}:\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{a^2b}}=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

48.

a) $\sqrt{16a^2b^3}=4ab\sqrt{b}$

b) $\sqrt[3]{32a^6b^5c^7d}=\sqrt[3]{2^5a^6b^5c^7d}=2a^2bc^2\sqrt[3]{2^2b^2cd}$

c) $\sqrt{a^8b^2}=a^4b$

d) $\sqrt[3]{-27a^3b^6c^9}=-3ab^2c^3$

49.

a) $\sqrt{2a^2b^4}=ab^2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{a^{10}}=\sqrt[3]{a^9a}=a^3\sqrt[3]{a}$

c) $\sqrt[3]{81a^9b^3} = \sqrt[3]{3^4a^9b^3} = 3a^3b\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[4]{256a^{12}b^{18}c^{20}} = \sqrt[4]{2^8a^{12}b^{18}c^{20}} = 2^2a^3b^4c^5\sqrt[4]{b^2} = 4a^3b^4c^5\sqrt{b}$

50.

a) $\sqrt[5]{-32a^{10}b^{11}c^{12}} = \sqrt[5]{(-2)^5a^{10}b^{11}c^{12}} = -2a^2b^2c^2\sqrt[5]{bc^2}$

b) $\sqrt[6]{128a^7b^{12}c^{15}} = \sqrt[5]{2^7a^7b^{12}c^{15}} = 2ab^2c^3\sqrt[5]{2^2a^2b^2}$

51.

a) $\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{2ab^2} = \sqrt[3]{4a^2b2ab^2} = \sqrt[3]{8a^3b^3} = 2ab$

b) $\sqrt{7a}\cdot\sqrt{7ab^4} = \sqrt{7a7ab^4} = 7ab^2$

c) $\sqrt[5]{2ab^2}\cdot\sqrt[5]{4a^2b}\cdot\sqrt[5]{4a^7b^2} = \sqrt[5]{2ab^2\,4a^2b4a^7b^2} = \sqrt[5]{2^5a^{10}b^5} = 2a^2b$

d) $\sqrt[5]{2a^6}\cdot\sqrt[5]{3a^7}\cdot\sqrt[5]{ab^2} = \sqrt[5]{2a^6\,3a^7ab^2} = \sqrt[5]{6a^{14}b^2} = a^2\sqrt[5]{6a^4b^2}$

52.

a) $\sqrt[4]{3a^2bc^3}\cdot\sqrt[4]{9ab^2c}\cdot\sqrt[4]{3ab} = \sqrt[4]{3^4a^4b^4c^4} = 3abc$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{43}b^{55}c^{30}}}} = \sqrt[30]{a^{30}a^{13}b^{30}b^{25}ac^{30}} = abc\sqrt[30]{a^{13}b^{25}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{12}b^{15}c^{18}}} = \sqrt[12]{a^{12}b^{15}c^{18}} = \sqrt[12]{a^{12}b^{12}b^3c^{12}c^6} = abc\sqrt[12]{b^3c^6} = abc\sqrt[4]{bc^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a^{90}b^{48}}}} = \sqrt[24]{a^{72}a^{18}b^{48}} = a^3b^2\sqrt[24]{a^{18}} = a^3b^2\sqrt[4]{a^3}$

53.

a) $\sqrt{5a^2+\sqrt{16a^4}} = \sqrt{5a^2+4a^2} = \sqrt{9a^2} = 3a$

b) $\sqrt{36\sqrt{100\sqrt{169}}} = \sqrt{\sqrt{36^2 100\sqrt{169}}} = \sqrt[4]{6^4 10^2\cdot 13} = 6\sqrt[4]{10^2\cdot 13} = 6\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{13}$

c) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}} = \sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}} = \sqrt{25\sqrt{81\cdot 16}} = \sqrt{25\cdot 9\cdot 4} = 5\cdot 3\cdot 2 = 30$

d) $\sqrt{10z^4+36\sqrt{z^8}} = \sqrt{10z^4+36z^4} = \sqrt{46z^4} = \sqrt{46}z^2$

54.

a)

$$\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}}} = \sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{13+3}}} = \sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{16}}} =$$

$$= \sqrt{22+\sqrt{5+4}} = \sqrt{22+\sqrt{9}} = \sqrt{22+3} = \sqrt{25} = 5$$

b) $\sqrt{5+\sqrt{12+\sqrt{16}}} = \sqrt{5+\sqrt{12+4}} = \sqrt{5+\sqrt{16}} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt{22a^4+\sqrt{9a^8}} = \sqrt{22a^4+3a^4} = \sqrt{25a^4} = 5a^2$

d) $\sqrt{13z^2+\sqrt[3]{27z^6}} = \sqrt{13z^2+3z^2} = \sqrt{16z^2} = 4z$

55.

a) $\sqrt[3]{\frac{a^6 b^7}{c^9 d^{10}}} = \frac{a^2 b^2}{c^3 d^3}\sqrt[3]{\frac{b}{d}}$

b) $\sqrt[5]{\left(a^2 + b^2\right)^{10}} = \left(a^2 + b^2\right)^2$

c) $\sqrt[6]{(a-b)^3} = \sqrt{a-b}$

d) $\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{a-b}\right)^4 = \sqrt[3]{(a-b)^4} = (a-b)\sqrt[3]{a-b}$

56.

a) $\sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$

b) $\sqrt{a^2 : 0'01} = \sqrt{\frac{a^2}{10^2}} = \frac{a}{10}$

c) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

57.

a) $\left(3a\sqrt[3]{2a}\right)^4 = 3^4 a^4 \sqrt[3]{(2a)^4} = 81a^4 \cdot 2a\sqrt[3]{2a} = 162a^5 \sqrt[3]{2a}$

b) $\left(\sqrt[3]{2^3 \cdot b^2}\right)^4 = \left(2 \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^4 = 2^4 \cdot b^{\frac{8}{3}} = 16 \cdot b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2}$

c)

$$\left(2\sqrt[8]{4^2 b^{16} c^{17}}\right)^6 = 2^6 \sqrt[8]{4^{12} b^{96} c^{102}} = 2^6 \sqrt[8]{4^8 4^4 \left(b^8\right)^{12} \left(c^8\right)^{12} c^6} = 2^6 \cdot 4b^{12} c^{12} \sqrt[8]{4^4 c^6} =$$
$$= 2^8 b^{12} c^{12} \sqrt[8]{4^4} \cdot \sqrt[8]{c^6} = 2^8 b^{12} c^{12} \sqrt[8]{4^4} \cdot \sqrt[8]{c^6} = 2^8 b^{12} c^{12} \sqrt{4} \cdot \sqrt[4]{c^3} == 2^9 b^{12} c^{12} \cdot \sqrt[4]{c^3}$$

d) $\sqrt[3]{\left(2^4 a^9 b^8\right)^{12}} = \left(2^4 a^9 b^8\right)^4$

58.

a) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{4^3}} = \frac{3}{4}$

b) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \sqrt[4]{\frac{2^4}{5^4}} = \frac{2}{5}$

c) $\sqrt{1'21} = \sqrt{121 \cdot 10^{-2}} = 11 \cdot 10^{-1} = 1'1$

d) $\sqrt[6]{0'000001} = \sqrt[6]{10^{-6}} = 10^{-1} = 0'1$

59. Realiza las siguientes divisiones:

a) $\sqrt[4]{256 : 0'04}$ c) $\sqrt{a^2 : 0'01}$

b) $\sqrt[12]{a^{12} : a^4}$ d) $2\sqrt{48} : \sqrt{12}$

60. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[4]{12ab^5c^3} : \sqrt[4]{2ab^3c}$ c) $\sqrt{2^4 \cdot 5^4 \cdot 10^{-4} \cdot 3^4}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{6}$ d) $\sqrt[6]{64a^6b^{12}}$

61. Opera y simplifica:

a) $\sqrt[4]{(a+2b)^{12}}$ c) $\sqrt[4]{(a-2b)^8}$

b) $\left(\sqrt[3]{4a^2b}\right)^9$ d) $\sqrt[5]{2^{15}a^{12}b^{16}}$

62. Opera y simplifica:

a) $\sqrt[3]{2a^2}\,\sqrt[3]{2a^3}\,\sqrt[3]{2a^4}$ c) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$

b) $\sqrt{2a}\sqrt{3a^3b}\sqrt{6bc^2}$ d) $\sqrt[7]{2^{21}a^{14}b^{28}}$

63. Simplifica la siguiente raíz:

$$\sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{4+\sqrt{25}}}}$$

64. Simplifica las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3^6}$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{32}a^{16}}}}$

b) $\sqrt{a^2 : 0'01}$ d) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{16}a^{20}b^{18}}}$

65. Opera las siguientes raíces y simplifica:

a) $\sqrt[4]{81a^5b^6 - 162a^4b^5}$

b) $\sqrt{16a^2b^3 - 32a^3b^2}$

c) $\sqrt[5]{64a^8b^7c^2 - 128a^9b^{10}c}$

66. Introduce dentro del signo radical y simplifica, siempre que sea posible:

a) $3a^2b\sqrt{4ab}$ c) ab

b) $2a^3\sqrt[5]{5a^2b}$ d) $4\sqrt[3]{\frac{5}{32}}$

67. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2c}}{\sqrt[4]{abc^2}}$ c) $\dfrac{-2\cdot\sqrt[3]{-27a^9b^{14}}}{\sqrt[3]{-a^6b^{15}}}$

b) $\dfrac{\sqrt[n]{2^{20}a^{18}b^3}}{\sqrt[n]{2^{18}a^{15}b^5}}$ d) $\dfrac{\sqrt[5]{3^{24}a^{12}}}{\sqrt[5]{6^4a^{17}}}$

68. Realiza el siguiente cociente de raíces:

$$\frac{\sqrt[6]{7a^5b^2}}{\sqrt[6]{14a^2b^3}}$$

69. Expresa las siguientes raíces como potencias:

a) $\sqrt{5a^3}$ c) $\sqrt[5]{a^2b}$ e) $\sqrt[6]{a^4\sqrt[3]{a^2}}$

b) $\sqrt[4]{a^3}$ d) $\sqrt{\dfrac{2a+3}{2a-3}}$ f) $\dfrac{3a\sqrt[3]{2b}}{5\sqrt[4]{2a}}$

70. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\frac{1}{2}$

b) $\dfrac{(-3)^6 : (-3)^6}{2a^{-2}}$

c) $\dfrac{\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2\right]^3\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-6}}{8^{-2}}$

71. Introduce dentro del signo radical y simplifica lo que puedas:

$$\frac{2b}{3a}\cdot\sqrt[5]{\frac{3^7a^2}{12^3b^4}}$$

Aproximación y redondeo de números decimales

72. Redondea los siguientes números con tres cifras significativas:

a) 9'2148 c) 0'9329999

b) 0'0827 d) 2'39222

73. Escribe $\frac{1}{3}$ en forma decimal y con el menor número de cifras para que el error sea inferior a una milésima.

74. Si aproximamos el número π como 3'14, calcula el error absoluto y el error relativo cometido.

Potencias de exponente racional

75. Calcula las siguientes potencias de exponente racional:

a) $a^{\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{10}{3}}$ c) $a^{\frac{11}{3}} : a^{\frac{3}{4}}$

b) $a^{-\frac{5}{6}}\cdot a^{\frac{17}{6}}$ d) $\left(4a^2b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{6}}$

76. Escribe en forma de raíz las siguientes potencias:

a) $4^{\frac{1}{5}}$ c) $7^{-\frac{3}{14}}$ e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$

b) $(a-9)^{\frac{4}{5}}$ d) $2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{2}}$ f) $\dfrac{5+2^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}+2}$

59.

a) $\sqrt[4]{256:0'04} = \sqrt[4]{\dfrac{2^8}{2^2\cdot 10^{-2}}} = 2^2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{10^2}{2^2}} = 4\sqrt[4]{\dfrac{2^2\cdot 5^2}{2^2}} = 4\sqrt[4]{5^2} = 4\sqrt{5}$

b) $\sqrt[12]{a^{12}:a^4} = \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{a^2:0'01} = \sqrt{a^2:10^{-2}} = a:10^{-1} = 10a$

d) $2\sqrt{48}:\sqrt{12} = 2\sqrt{48:12} = 2\sqrt{4} = 2\cdot 2 = 4$

60.

a) $\sqrt[4]{12ab^5c^3} : \sqrt[4]{2ab^3c} = \sqrt[4]{12ab^5c^3 : 2ab^3c} = \sqrt[4]{6b^2c^2} = \sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[4]{b^2c^2} = \sqrt[4]{6}\cdot\sqrt{bc}$

b) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$

c) $\sqrt{2^4\cdot 5^4\cdot 10^{-4}\cdot 3^4} = 2^2\cdot 5^2\cdot 10^{-2}\cdot 3^2 = 10^2\cdot 10^{-2}\cdot 3^2 = 3^2 = 9$

d) $\sqrt[6]{64a^6b^{12}} = \sqrt[6]{64a^6b^{12}} = \sqrt[6]{2^6\, a^6b^{12}} = 2ab^2$

61.

a) $\sqrt[4]{(a+2b)^{12}} = (a+2b)^3$

b) $\left(\sqrt[3]{4a^2b}\right)^9 = \left(4a^2b\right)^3 = 4^3\, a^6b^3$

c) $\sqrt[4]{(a-2b)^8} = (a-2b)^2$

d) $\sqrt[5]{2^{15}\, a^{12}b^{16}} = 2^3\, a^2b^3\sqrt[5]{a^2b}$

62.

a) $\sqrt[3]{2a^2}\sqrt[3]{2a^3}\sqrt[3]{2a^4} = \sqrt[3]{2^3\, a^9} = 2a^3$

b) $\sqrt{2a}\sqrt{3a^3b}\sqrt{6bc^2} = \sqrt{36a^4b^2c^2} = 6a^2bc$

c) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3a}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$

d) $\sqrt[7]{2^{21}\, a^{14}b^{28}} = 2^3\, a^2b^4$

63.

$$\sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{4+\sqrt{25}}}} = \sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{4+5}}} = \sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{9}}} =$$

$$\sqrt{13+\sqrt{6+3}} = \sqrt{13+\sqrt{9}} = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$$

64.

a) $\sqrt{3^6} = 3^3$

b) $\sqrt{a^2 : 0'01} = \sqrt{a^2 : 10^{-2}} = a : 10^{-1} = 10a$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{32}\, a^{16}}}} = \sqrt[8]{2^{32}\, a^{16}} = 2^4\, a^2 = 16a^2$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{16}\, a^{20}b^{18}}} = \sqrt[15]{2^{16}\, a^{20}b^{18}} = 2ab\sqrt[15]{2a^5b^3}$

65.

a) $\sqrt[4]{81a^5b^6 - 162a^4b^5} = \sqrt[4]{81a^4b^5\left(ab-2\right)} = 3ab\sqrt[4]{b(ab-2)} = 3ab\sqrt[4]{ab^2-2}$

b) $\sqrt{16a^2b^3 - 32a^3b^2} = \sqrt{16a^2b^2(b-2a)} = 4ab\sqrt{b-2a}$

c)

$$\sqrt[5]{64a^8b^7c^2-128a^9b^{10}c}=\sqrt[5]{64a^8b^7c\left(c-2ab^3\right)}=\sqrt[5]{2^6a^8b^7c\left(c-2ab^3\right)}=$$
$$=2ab\sqrt[5]{2a^3b^2c\left(c-2ab^3\right)}$$

66.

a) $3a^2b\sqrt{4ab}=\sqrt{3^2a^4b^2 4ab}=\sqrt{36a^5b^3}$

b) $2a^3\sqrt[5]{5a^2b}=\sqrt[5]{2^5a^{15}5a^2b}=\sqrt[5]{5\cdot2^5a^{17}b}=\sqrt[5]{160a^{17}b}$

c) $ab\sqrt{\dfrac{2c}{a^5b^4}}=\sqrt{\dfrac{2ca^2b^2}{a^5b^4}}=\sqrt{\dfrac{2c}{a^3b^2}}$

d)

$$4\sqrt[3]{\frac{5}{32}}=\sqrt[3]{4^3\cdot\frac{5}{32}}=\sqrt[3]{\frac{2^6\cdot5}{2^5}}=\sqrt[3]{10}$$

67 .

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^2c}}{\sqrt[4]{abc^2}}=\sqrt[4]{\dfrac{a^3b^2c}{abc^2}}=\sqrt[4]{\dfrac{a^2b}{c}}$

b) $\dfrac{\sqrt[n]{2^{20}a^{18}b^3}}{\sqrt[n]{2^{18}a^{15}b^5}}=\sqrt[n]{\dfrac{2^{20}a^{18}b^3}{2^{18}a^{15}b^5}}=\sqrt[n]{\dfrac{2^2a^3}{b^2}}$

c) $\dfrac{-2\sqrt[3]{-27a^9b^{14}}}{\sqrt[3]{-a^6b^{15}}}=-2\sqrt[3]{\dfrac{-27a^9b^{14}}{-a^6b^{15}}}=-2\sqrt[3]{\dfrac{(-3)^3a^3}{-b}}=-2\cdot(-3)a\sqrt[3]{\dfrac{-1}{b}}=-6a\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}}$

d) $\dfrac{\sqrt[5]{3^{24}a^{12}}}{\sqrt[5]{6^4a^{17}}}=\sqrt[5]{\dfrac{3^{24}a^{12}}{2^4 3^4a^{17}}}=\sqrt[5]{\dfrac{3^{20}}{2^4a^5}}=\dfrac{3^4}{a}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2^4}}$

68.

$$\frac{\sqrt[6]{7a^5b^2}}{\sqrt[6]{14a^2b^3}}=\sqrt[6]{\frac{7a^5b^2}{14a^2b^3}}=\sqrt[6]{\frac{a^3}{2b}}$$

69.

a) $\sqrt{5a^3}=\left(5a^3\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}$

c) $\sqrt[5]{a^2b}=\left(a^2b\right)^{\frac{1}{5}}$

d) $\sqrt{\dfrac{2a+3}{2a-3}}=\left(\dfrac{2a+3}{2a-3}\right)^{\frac{1}{2}}$

e) $\sqrt[6]{a^4\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^{12}a^2}}=\sqrt[18]{a^{14}}=a^{\frac{14}{18}}=a^{\frac{7}{9}}$

f) $\dfrac{3a\sqrt[3]{2b}}{5\sqrt[4]{2a}}=\dfrac{\sqrt[3]{3^3a^3 2b}}{\sqrt[4]{5^4 2a}}=\sqrt[12]{\dfrac{3^{12}a^{12}2^4b^4}{5^{12}2^3a^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{3^{12}a^9 2b^4}{5^{12}}}=\left(\dfrac{3^{12}a^9 2b^4}{5^{12}}\right)^{\frac{1}{12}}$

70.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$

b) $\frac{(-3)^6:(-3)^6}{2a^{-2}}=\frac{a^2}{2}$

c) $\frac{\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2\right]^3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-6}}{8^{-2}}=\left[\left(\frac{1}{2^3}\right)^2\right]^3\left(\frac{1}{2}\right)^{-12}8^2=\frac{1}{2^{18}}\cdot 2^{12}\cdot 2^6=1$

71.

$$\frac{2b}{3a}\sqrt[5]{\frac{3^7a^2}{12^3b^4}}=\sqrt[5]{\frac{2^5b^53^7a^2}{3^5a^53^34^3b^4}}=\sqrt[5]{\frac{2^5b^53^7a^2}{3^8a^52^6b^4}}=\sqrt[5]{\frac{b}{3a^32}}$$

72.

a) $9'2148\cong 9'21$
b) $0'0827\cong 0'0826$
c) $0'9329999\cong 0'933$
d) $2'39222\cong 2'39$

73.

$$\frac{1}{3}=0'\widehat{3}=0'33333333......$$

Si tomamos como aproximación $n=0'333$, el error absoluto cometido es

$$E_a=\left|\frac{1}{3}-0'333\right|=\left|\frac{1}{3}-\frac{333}{1000}\right|=\left|\frac{1}{3000}\right|=0'00\widehat{3}$$

Entonces, el error relativo cometido es de una milésima:

$$e=\frac{|E_a|}{\left|\frac{1}{3}\right|}=\frac{\left|\frac{1}{3000}\right|}{\left|\frac{1}{3}\right|}=\left|\frac{1}{1000}\right|=0'001$$

Si consideramos n = 0’3333 el error cometido será de 0’0001, con lo que será estrictamente menor que una milésima.

74.

$$\pi=3'141592653589...$$

Consideremos 3’14 como una aproximación de π
Con esta aproximación se comete un error absoluto:

$$E_a=|\pi-3'14|=|3'141592653589...-3'14|=|0'001592653589...|\simeq|0'001592|=0'001592$$

y un error relativo :

$$e=\frac{E_a}{|N|}=\frac{0'001592}{|\pi|}=0.0005<0'001$$

75 .

a) $a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{10}{3}} = a^{\frac{56}{15}}$

b) $a^{-\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{17}{6}} = a^{2}$

c) $a^{\frac{11}{3}} : a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{35}{12}}$

d) $\left(4a^2 b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{6}} = \left(2^2\right)^{\frac{9}{6}} \left(a^2\right)^{\frac{9}{6}} \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{6}} = 2^3 a^3 b^{\frac{1}{2}}$

76.

a) $4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}$

b) $(a-9b)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(a-9b)^4}$

c) $7^{-\frac{3}{14}} = \dfrac{1}{7^{\frac{3}{14}}} = \dfrac{1}{\sqrt[14]{7^3}}$

d) $2a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{5}{2}} = 2\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt{b^5} = \sqrt[6]{2^6 a^4 b^{15}}$

e) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2^4}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^4}}$

f) $\dfrac{5+2^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}+2} = \dfrac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{\left(5+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)} = 5\sqrt{5} - 10 + \sqrt{10} - 2\sqrt{2}$

PROBLEMAS

○**77.** Un número es tal que si sumamos 1 unidad a su propio cubo obtenemos 9. ¿De qué número se trata?

◐**78.** Si resto 1 unidad a la raíz sexta de un número, obtengo 1. ¿De qué número se trata?

●**79.** Simplifica la expresión $\dfrac{10 \cdot a^3 \cdot b}{a^2 \cdot b^3}$ y, dando el valor 2 a la variable a, indica para qué valores de b comprendidos entre 1 y 5 la expresión resultante es entera o es decimal. En este último caso matiza de qué tipo de expresión decimal se trata.

◐**80.** Calcula la altura de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 4 cm y cuyos lados iguales miden 3 cm. Expresa el resultado con un error menor que una centésima.

○**81.** Si el radio de la Luna es $1'75 \cdot 10^6$ m y el de la Tierra es $6'38 \cdot 10^6$, ¿cuánto mediría un planeta cuyo radio fuera el de la Luna y el de la Tierra juntos?

●**82.** Una señora de 57'2 kg se pesa en la farmacia y obtiene 58 kg. Por otro lado, su hija, que pesa 35'2 kg, se va a otra farmacia a pesarse y obtiene un peso de 36 kg. ¿Cuál de las dos medidas es más precisa?

77.

Sea x el número buscado.

$$1 + x^3 = 9 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = 2$$

78.

Sea x el número buscado.

$$\sqrt[6]{x}-1=1 \Rightarrow \sqrt[6]{x}=2 \Rightarrow x=2^6 \Rightarrow x=64$$

79.

$$\frac{10a^3b}{a^2b^3}=\frac{10a}{b^2}$$

Si $a=2 \Rightarrow \frac{10a^3b}{a^2b^3}=\frac{10a}{b^2}=\frac{20}{b^2}$

Si $b=1 \Rightarrow \frac{20}{b^2}=20$

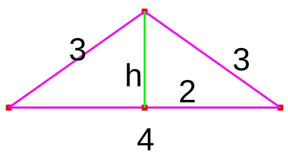
Si $b=2 \Rightarrow \frac{20}{b^2}=\frac{20}{4}=5$

Si $b=3 \Rightarrow \frac{20}{b^2}=\frac{20}{9}=2'222...=2'\widehat{2}$ decimal periódico puro

Si $b=4 \Rightarrow \frac{20}{b^2}=\frac{20}{16}=1'25$ decimal exacto

Si $b=5 \Rightarrow \frac{20}{b^2}=\frac{20}{25}=0'8$ decimal exacto

80. Sea h la altura buscada.



$$3^2=h^2+2^2 \Rightarrow h=\sqrt{5} \Rightarrow h \cong 2'23$$

81.

$$1'75 \cdot 10^6+6'38 \cdot 10^6=(1'75+6'38) \cdot 10^6=8'13 \cdot 10^6 \text{ metros}$$

82.

En el caso de la señora tenemos que el error absoluto es: $E_a=|57'2-58|=0'8$

En el caso de la hija el error absoluto es: $E_a=|35'2-36|=0'8$.

En ambos casos el error absoluto es el mismo: 0’8 kg = 800 grs.
Será el error relativo el que nos dé la medida más precisa.

En el caso de la señora: $e=\frac{0'8}{57'2}=0{,}01398601$

En el caso de la hija: $e=\frac{0'8}{35'2}=0{,}02272727$

$$0{,}01398601 < 0{,}02272727$$

Se ve claramente que la balanza en la que se pesó la señora era más precisa que la balanza en la que se pesó la hija.

AUTOEVALUACIÓN PAG. 47

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula la fracción generatriz de los siguientes decimales:

   a) 0'27272... b) 4'14 c) 0'3636...

2. Indica de los siguientes números decimales cuáles son irracionales y cuáles no:

   a) 8'1203004000500006... c) 0'2311311131111...
   b) 7'898989... d) 4'7654232323...

3. Realiza las siguientes operaciones:

   a) $1+0'\widehat{6}-0'1\widehat{6}$ b) $\frac{5}{7}+\frac{3}{14}\cdot 3'\widehat{1}-0'\widehat{6}\cdot\frac{4}{7}$

   c) $0'6^{-1}+\dfrac{9}{5-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{0'125}}}$

4. Opera las siguientes potencias y simplifica:

   a) $(2a^3b^2)^5$ c) 4^{-2} e) $\left(4a^4b^{\frac{1}{3}}\right)^2$

   b) -4^{-2} d) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{4}{5}}$ f) $(4^{-1})^{-\frac{1}{2}}$

5. Introduce dentro del signo radical los siguientes factores:

   a) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{8}{27}b}$ c) $\frac{3a^3b^5}{7cd^4}\sqrt[3]{\frac{7^5c^6d^{13}}{3^4a^4b^{12}}}$

   b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\sqrt[5]{\frac{a}{32}}$ d) $\frac{3c^2d}{a^2b7^2}\sqrt[5]{\frac{a^3b^47^2}{3^4c^2d^{-1}}}$

6. Extrae del signo radical todos los factores que puedas:

   a) $\sqrt{\frac{2^5a^4b^7}{c^9}}$ c) $\sqrt{4^3(a^5)^3}$

   b) $\sqrt{5^6ab^7}$ d) $\sqrt[6]{(8a^4)^3b^9}$

7. Opera y simplifica las siguientes raíces:

   a) $\sqrt[4]{ab^3c}\cdot\sqrt[4]{a^2b^3c^3}\cdot\sqrt[4]{a^2b^2c^2}$ c) $\left(\sqrt[3]{6a^6b^{13}}\right)^9$

   b) $\frac{\sqrt[5]{4^6a^{12}}}{\sqrt[5]{2^3a^4}}$ d) $\sqrt{\sqrt[7]{23^{15}a^{16}b^{15}}}$

8. Opera y simplifica las siguientes raíces:

   a) $\sqrt{5+\sqrt{21-\sqrt{22+\sqrt{9}}}}$ c) $\sqrt{16:0'00000001}$

   b) $\sqrt{ab\sqrt[3]{a^2b^3\sqrt[5]{a^6b^{30}}}}$ d) $\sqrt{16:0'0001}$

9. Realiza las siguientes potencias de exponente racional:

   a) $a^{-\frac{5}{6}}\cdot a^{\frac{12}{10}}$ c) $\frac{(16a^2)^{-\frac{3}{2}}}{(8a^3)^{-\frac{2}{3}}}$

   b) $4^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{4}}$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{6}{5}}$

10. ¿Qué número de los siguientes es «más grande»?

   a) 33^3 b) 3^{33} c) 3^{3^3} d) $33\cdot 3$ e) 333

Números decimales y potencias 47

1.

a) $N = 0'2727...$

$$\begin{array}{rl} 100N &= 27'27... \\ -\quad N &= -0'27... \\ \hline 99N &= 27 \end{array}$$

$$N=\frac{27}{99}\Rightarrow N=\frac{3}{11}$$

b) $N = 4'14 = \frac{414}{100} = \frac{207}{50}$

c) $N = 0'3636...$

$$\begin{array}{rl} 100N &= 36'36... \\ -\quad N &= -0'36... \\ \hline 99N &= 36 \end{array}$$

$$N=\frac{36}{99}\Rightarrow N=\frac{4}{11}$$

2.

a) 8'1203004000500006… irracional
b) 7'898989… decimal periódico puro
c) 0'2311311131111… irracional
d) 4'7654232323… decimal periódico mixto

3.

a) N = 0’666…

$$\begin{array}{l} 10N = \ \ 6'66... \\ -N \ = -0'66... \\ \hline 9N \ \ = \ 6 \end{array}$$

$$N = \frac{6}{9} \Rightarrow N = \frac{2}{3}$$

N = 0’1666…

$$\begin{array}{l} 100N \ = \ 16'66... \\ -10N \ = -1'66... \\ \hline 90N \ = \ 15 \end{array}$$

$$N = \frac{15}{90} \Rightarrow N = \frac{1}{6}$$

$$1 + 0'\widehat{6} - 0'1\widehat{6} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{6+4-1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

b)

$$N = 3'111...$$

$$\begin{array}{l} 10N = 31'111... \\ -N = -3'111 \\ \hline 9N = 28 \end{array} \Rightarrow N = \frac{28}{9}$$

$$\frac{5}{7} + \frac{3}{14} \cdot 3'\widehat{1} - 0'\widehat{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{7} + \frac{3}{14} \cdot 3'\widehat{1} - 0'\widehat{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{7} + \frac{3}{14} \cdot \frac{28}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} =$$

$$\frac{5}{7} + \frac{2}{3} - \frac{8}{21} = \frac{15+14-8}{21} = \frac{21}{21} = 1$$

c)

$$0'6^{-1} + \frac{9}{5 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{0'125}}} = \frac{1}{0'6} + \frac{9}{5 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\frac{1}{8}}}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} + \frac{9}{5 - \dfrac{1}{1-8}} =$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{9}{5 - \dfrac{1}{(-7)}} = \frac{5}{3} + \frac{9}{\frac{36}{7}} = \frac{5}{3} + \frac{7}{4} = \frac{41}{12}$$

4.

a) $\left(2a^3b^2\right)^5 = 2^5 a^{15} b^{10}$

b) $-4^{-2} = -\dfrac{1}{4^2} = -\dfrac{1}{16}$

c) $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

d) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{4}{5}} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{\frac{13}{10}}$

e) $\left(4a^4b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4^2a^8b^{\frac{2}{3}}$

f) $\left(4^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\left(4^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} =2$

5.

a) $\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{\dfrac{8}{27}b} = \sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^4}\dfrac{8}{27}b} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}b}$

b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\sqrt[5]{\dfrac{a}{32}} = \dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt[5]{\dfrac{a}{32}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2^2}}\sqrt[5]{\dfrac{a}{32}} = 2^2\sqrt[5]{\dfrac{a}{32}} = \sqrt[5]{2^{10}\dfrac{a}{2^5}} = \sqrt[5]{2^5a}$

c) $\dfrac{3a^3b^5}{7cd^4}\sqrt[3]{\dfrac{7^5c^6d^{13}}{3^4a^4b^{12}}} = \sqrt[3]{\dfrac{3^3a^9b^{15}7^5c^6d^{13}}{7^3c^3d^{12}3^4a^4b^{12}}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^5b^37^2c^3d}{3}}$

d) $\dfrac{3c^2d}{a^2b7^2}\sqrt[5]{\dfrac{a^3b^47^2}{3^4c^2d^{-1}}} = \sqrt[5]{\dfrac{3^5c^{10}d^5a^3b^47^2d}{a^{10}b^57^{10}3^4c^2}} = \sqrt[5]{\dfrac{3c^8d^6}{7^8a^7b}}$

6.

a) $\sqrt{\dfrac{2^5a^4b^7}{c^9}} = \sqrt{\dfrac{2^4\cdot 2a^4b^6\cdot b}{c^8\cdot c}} = \dfrac{2^2a^2b^3}{c^4}\sqrt{\dfrac{2b}{c}}$

b) $\sqrt{5^6ab^7} = \sqrt{5^6\cdot ab^6\cdot b} = 5^3b^3\sqrt{ab}$

c) $\sqrt{4^3\left(a^5\right)^3} = \sqrt{4^3a^{15}} = \sqrt{2^6a^{14}a} = 2^3a^7\sqrt{a}$

d) $\sqrt[6]{\left(8a^4\right)^3b^9} = \sqrt[6]{2^9\cdot a^{12}\cdot b^9} = \sqrt[6]{2^6\cdot 2^3\cdot a^{12}\cdot b^6\cdot b^3} = 2a^2b\sqrt[6]{2^3b^3} = 2a^2b\sqrt{2b}$

7.

a) $\sqrt[4]{ab^3c}\cdot\sqrt[4]{a^2b^3c^3}\cdot\sqrt[4]{a^2b^2c^2} = \sqrt[4]{ab^3ca^2b^3c^3a^2b^2c^2} = \sqrt[4]{a^5b^8c^6} = ab^2c\sqrt[4]{a\cdot c^2}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{4^6a^{12}}}{\sqrt[5]{2^3a^4}} = \sqrt[5]{\dfrac{2^{12}a^{12}}{2^3a^4}} = \sqrt[5]{2^9a^8} = 2a\sqrt[5]{2^4a^3}$

c) $\left(\sqrt[3]{6a^6b^{13}}\right)^9 = \left(6a^6b^{13}\right)^3 = 6^3a^{18}b^{39}$

d) $\sqrt{\sqrt[7]{23^{15}a^{16}b^{15}}} = \sqrt[14]{23^{15}a^{16}b^{15}} = 23ab\sqrt[14]{23a^2b}$

8.

a)

$$\sqrt{5+\sqrt{21-\sqrt{22+\sqrt{9}}}} = \sqrt{5+\sqrt{21-\sqrt{22+3}}} = \sqrt{5+\sqrt{21-\sqrt{25}}} =$$

$$\sqrt{5+\sqrt{21-5}} = \sqrt{5+\sqrt{16}} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

b)

$$\sqrt{ab\sqrt[3]{a^2b^3\sqrt[5]{a^6b^{30}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3b^3a^2b^3\sqrt[5]{a^6b^{30}}}} = \sqrt[6]{a^5b^6\sqrt[5]{a^6b^{30}}} =$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^{25}b^{30}a^6b^{30}}} = \sqrt[30]{a^{31}b^{60}} = ab^2\sqrt[30]{a}$$

c) $\sqrt{16:0'00000001} = \sqrt{4^2:10^{-8}} = 4:10^{-4} = 40000$

d) $\sqrt{16:0'0001} = \sqrt{4^2:10^{-4}} = 4:10^{-2} = 400$

9.

a) $a^{-\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{12}{10}} = a^{-\frac{5}{6}+\frac{12}{10}} = a^{\frac{-25+36}{30}} = a^{\frac{11}{30}}$

b) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{17}{12}} = 2\sqrt[12]{2^5} = 2\sqrt[12]{32}$

c) $\dfrac{\left(16a^2\right)^{-\frac{3}{2}}}{\left(8a^3\right)^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{\left(8a^3\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(16a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(a^3\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(2^4\right)^{\frac{3}{2}}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2^2a^2}{2^6a^3} = \dfrac{1}{2^4a} = \dfrac{1}{16a}$

d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{6}{5}} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{5}{5}} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1} = \dfrac{1}{5}$

10.

a) $33^3 = 35937$

b) $3^{33} = 5559060566555523$

c) $3^{3^3} = 7625597484987$

d) $33 \cdot 3 = 99$

e) 333

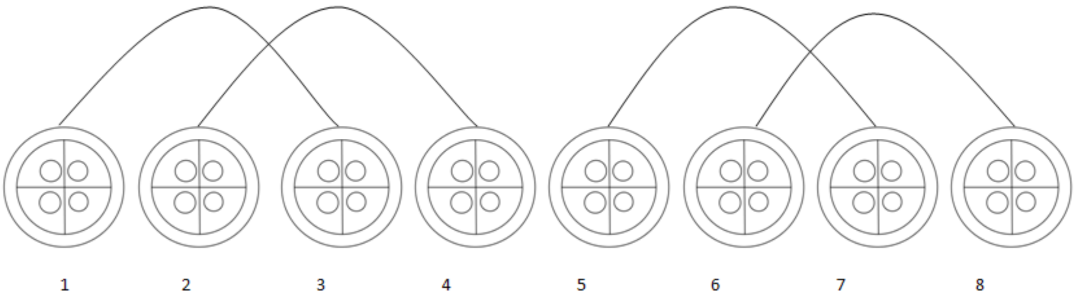
Se puede ver que el número más grande es 3^{33}

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 49

Olimpiada matemática

1. Colocamos 8 botones en línea recta, uno a continuación de otro. Indica cómo desplazar exactamente 4 de ellos haciéndoles saltar por encima de otros, para ponerlos sobre un tercero, de manera que queden 4 pilas de 2 botones.
2. Expresa los diez primeros números naturales como potencias de 2 o combinaciones de potencias de 2.

1.



Desplazar el botón 1 sobre el 3, el 2 sobre el 4, el 8 sobre el 6 y el 7 sobre el 5

2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^0	2^1	$2^0 + 2^1$	2^2	2^2+2^0	2^2+2^1	$2^2+2^1+2^0$	2^3	2^3+2^0	2^3+2^1

ACTIVIDADES PAG. 52

ACTIVIDADES

1. Una cafetería tiene una previsión de gasto diario de 20 L de leche, 8 kg de churros, 6 kg de tostadas y 12 kg de café para servir aproximadamente 120 desayunos diarios. Como se acercan las fiestas, su dueño espera servir 200 desayunos diarios. ¿Qué gasto tendrá cada día de cada uno de los artículos señalados?

2. Cinco montañeros necesitan 35 kg de carne en conserva para su próxima expedición. A última hora, se apuntan otros 2 amigos. ¿Cuánta carne necesitan llevar ahora?

1.

Leche	Churros	Tostadas	Café	Desayunos
20 litros	8 kg	6 kg	12 kg	120
M	Z	Y	x	200

$$120\text{ k}=200 \Rightarrow \text{k}=\frac{200}{120} \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

Café: $12.\frac{5}{3}=20$ kg.

Tostadas: $6.\frac{5}{3}=10$ kg

Churros: $8.\frac{5}{3}=\frac{40}{3}=13'3$ kg.

Leche: $20.\frac{5}{3}=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}=33$ litros y 33 cl

2.

5 montañeros — 35 kg

7 montañeros — x kg.

$$\frac{35}{x}=\frac{5}{7} \Rightarrow 49$$

Solución: 49 kg de carne

ACTIVIDADES PAG. 53

ACTIVIDADES

3. Si 12 kg de patatas cuestan 8 €, ¿cuánto costarán 14 kg de patatas? Resuelve el problema por reducción a la unidad.

4. Un pintor tarda 16 h en pintar 2 casas, ¿cuánto tardará en pintar 5 casas? ¿Y en pintar una casa? Y si tuviera que pintar 7 casas, ¿cuánto tardaría?

3.

12 kg ____________ 8 €

1 kg ____________ $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ € $=$ 66 cts de €

14 kg ____________ $14\frac{2}{3}=\frac{28}{3}=9{,}3€=9.\frac{1}{3}€$ $=$ 9€ 33 cts

4.

Resuelve el problema por reducción a la unidad

2 casas ____________ 16 h.
1 casa ____________ 8 h.
5 casas ____________ 40 h
7 casas ____________ 56 h.

ACTIVIDADES PAG. 54

ACTIVIDADES

5. Un contratista necesita hacer una obra en 15 días y cuenta con 40 obreros. Posteriormente le aumentan el plazo de entrega de la obra a 20 días. ¿Cuántos obreros necesitará ahora para terminar la obra en el tiempo estipulado?
6. Deseamos empapelar la sala de estar de casa. Los trabajadores afirman necesitar 12 rollos de 1 m de ancho, pero a nosotros nos gusta un papel de elefantes y jirafas que tiene 75 cm de ancho. ¿Cuántos de estos rollos necesitaremos para empapelar la sala?
7. Un barco que realiza una ruta de cabotaje tarda 2 días en llegar a su destino a una velocidad de 20 nudos. ¿Cuánto tardará en hacer el viaje de vuelta si aumenta la velocidad a 30 nudos?

5.

15 días ______I________40 obreros
20 días _______________ x obreros

$$\frac{40}{x}=\frac{20}{15}\Rightarrow x=40.\frac{15}{20}=30$$

Solución : 30 obreros

6.

12 rollos ___I______1 m.
x rollos _________ $\frac{3}{4}$ m. $\qquad 75\ cm=\frac{3}{4}\ m$

$$\frac{12}{x}=\frac{3/4}{1}\Rightarrow\frac{12}{x}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=12.\frac{4}{3}\Rightarrow x=16\ rollos$$

7.

20 nudos____I____2 días
30 nudos_________x días

$$\frac{2}{x}=\frac{30}{20}\Rightarrow 3x=4\Rightarrow x=1\frac{1}{3}\,días$$

Solución: 1 día y 8 horas

ACTIVIDADES PAG. 55

ACTIVIDADES

8. Para hacer la estructura de un adosado 15 albañiles han trabajado 7 h diarias durante 10 días. ¿Cuántos albañiles se necesitan para hacer la misma estructura en 21 días trabajando 5 h al día?

9. Entre 3 pintores pintan 4 apartamentos en 12 días. ¿Cuántos pintores son necesarios para pintar 6 apartamentos en 54 días?

10. Un empresario pagará 2200 € a 11 obreros por hacer un trabajo en 20 días. ¿Cuánto tendrá que pagar a 10 obreros por hacer otro trabajo en 15 días, suponiendo que cobran a la hora lo mismo que los otros obreros?

8.

albañiles h/día días

15___I_____ 7 __I___10

x _________5 _____ 21

$$\frac{15}{x}=\frac{5}{7}=\frac{21}{10}\Rightarrow x=10$$

$$Solución: 10\ albañiles$$

9.

pintores apartamentos días

3___D_____ 4 ____I____12

x__________6 _________54

$$\frac{3}{x}=\frac{4}{6}=\frac{54}{12}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 6\cdot 12}{4\cdot 54}\Longrightarrow x=1 \text{ pintor}$$

10.

euros obreros días

2200__D___11__D____20

x________10________15

$$\frac{2200}{x}=\frac{11}{10}=\frac{20}{15}\Rightarrow x=1500$$

Solución : 1500 €

ACTIVIDADES

11. Cuatro amigos montan un negocio. El primero invierte 12 000 €, el segundo 15 000 €, el tercero 20 000 € y el cuarto 30 000 €. Si al cabo de un año obtienen un beneficio de 385 000 €, ¿cuánto recibirá cada uno de ellos?

12. Reparte 370 en partes directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$.

13. Un padre al morir deja a sus 2 hijos una herencia de 21 000 €. Lo reparte de forma que por cada 3 € que se lleva el mayor al menor le corresponden 4. ¿Cuánto recibe cada uno?

14. Un empresario decide, por Navidad, repartir entre sus 5 empleados un aguinaldo de 4 000 € en función de los años que llevan trabajando en la empresa. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno sabiendo que llevan 1, 2, 3, 4 y 6 años de trabajo en la misma?

15. Una abuela en su próximo cumpleaños va a repartir 98 € entre sus 3 nietos y quiere hacerlo de forma proporcional a sus edades. Si sabemos que el mayor de los nietos tiene el doble de edad que el mediano y que la edad de este es a su vez doble que la del menor, ¿cuánto dinero le toca a cada uno?

11.

	inversión	beneficio
1º	12.000 €	x
2º	15.000 €	y
3º	20.000 €	z
4º	30.000 €	t
Total	77.000 €	385.000 €

77.000 k= 385.000

$$k=\frac{385000}{77000}=5$$

x =12000 · 5= 60.000 €

y=15000 · 5= 75.000 €

z = 20000 · 5= 100.000 €

t = 30000 · 5=150.000 €

12.

$$\frac{2}{3}k+\frac{3}{4}k+\frac{5}{7}k=5370$$

$$\frac{56k+63k+60k}{84}=5370$$

$$\frac{179k}{84}=5370$$

$$k=5370.\frac{84}{179} \quad \Rightarrow \quad k=2520$$

$$\frac{2}{3}k=\frac{2}{3}.2520=1680$$

$$\frac{3}{4}k=\frac{3}{4}.2520=1890$$

$$\frac{5}{7}k=\frac{5}{7}.2520=1800$$

13.

mayor	3 €	x
menor	4 €	y
total	7 €	21000

Mayor : $\frac{4}{7}\cdot 21000=12000$ € , Menor : $\frac{3}{7}\cdot 21000=9000$

14.

Años trabajados	Total
1	x
2	y
3	z
4	m
6	t
16	4000 €

16 k = 4000

$$k = \frac{4000}{16} = 250$$

k = 250

x = 250 €

y = 2 · 250 = 500 €

z = 3 · 250 = 750 €

m = 4 · 250 = 1000 €

t = 6 · 250 = 1500 €

15.

Mayor	4 x	56 €
mediano	2 x	28 €
Menor	x	14 €
Total	7 x	98 €

7 x = 98

$$x = \frac{98}{7} = 14$$

ACTIVIDADES PAG. 57

ACTIVIDADES

16. En un colegio el profesor va a repartir caramelos en razón inversamente proporcional a las faltas de asistencia a clase. Si el profesor repartió entre Fátima, Olga y Marta 38 caramelos, ¿cuántos caramelos les dio a cada una si Fátima faltó 1 día, Olga faltó 3 días y Marta faltó 4 días a clase?

17. Un padre deja a sus 2 hijos una herencia de 76 000 €. En su testamento dice que se repartan el dinero en función inversamente proporcional a la edad que tienen. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno si el mayor tiene 40 años y el menor tiene 4 años menos?

18. Reparte 220 € en partes inversamente proporcionales a 3, 6 y 9.

16.

	Caramelos	Faltas
Fátima	k	1
Olga	$\frac{k}{3}$	3
Marta	$\frac{k}{4}$	4
TOTAL	38	8

Sea k la constante de proporcionalidad

$$k + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 38 \Rightarrow 19\,k = 38 \cdot 12 \Rightarrow k = 24$$

solución: Fátima : 24 caramelos , Olga 8 caramelos y Marta 6 caramelos .

17.

	AÑOS	EUROS
1er. Hijo	40	$\frac{k}{40}$
2º Hijo	36	$\frac{k}{36}$
		76000

$$\frac{k}{40} + \frac{k}{36} = 76000 \Rightarrow k = 1440000 \Rightarrow \text{Primer hijo } 36000\text{ € , segundo hijo } 40000\text{ €}$$

18.

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{6} + \frac{k}{9} = 220 \Rightarrow \text{k} = 360$$

$$\frac{k}{3} = 120,\ \frac{k}{6} = 60,\ \frac{k}{9} = 40$$

ACTIVIDADES PAG. 58

ACTIVIDADES

19. Una plancha cuesta 92 € pero después de la rebaja la adquiero por 69 €. ¿Cuánto le han rebajado? ¿Qué tanto por ciento supone la rebaja?

20. Expresa en tanto por uno y tanto por mil los siguientes porcentajes:

a) 6% b) 23% c) 56% d) 0'34% e) 120%

21. Los siguientes tanto por uno, exprésalos en tantos por ciento y tantos por mil:

a) 0'98 b) 7'9 c) 0'04 d) 0'0000036 e) 0'007

22. Un obrero recibe un salario semanal de 250 €. Si se lo suben un 5%, ¿cuánto cobrará desde ese momento?

19. Me han rebajado 23 € lo que representa un porcentaje: $\frac{23}{92}.100 = 25\%$

20.

Tanto por ciento	Tanto por uno	Tanto por mil
6%	0,06	60
23%	0,23	230
56%	0,56	560
0,34%	0,0034	3,4
120%	1,2	1200

21.

Tanto por uno	Tanto por ciento	Tanto por mil
0,98	98	980
7,9	790	7900
0,04	4	40
0,0000036	0,00036	0,0036
0,007	0,7	7

22. 250 . 1,05 = 262,5 €

ACTIVIDADES PAG. 59

ACTIVIDADES

23. Deduce una fórmula equivalente a la general del cálculo del interés simple con el tiempo expresado en meses, y otra con el tiempo expresado en días.

24. Si ingresamos 1550 € al 4%, ¿qué interés simple recibiremos transcurridos 3 años? ¿Y al cabo de 6 meses? ¿Y al cabo de 20 días?

25. Rafael quiere comprarse un coche. Para ello pide un préstamo al banco de 9000 €. El banco le aplica un interés del 8% durante los 5 años del préstamo. ¿Cuánto tiene que pagar Rafael al banco en intereses?

23.

a) Si 100 € producen en un año un beneficio de r €, entonces:

- 1 € produce en un año un beneficio de $\frac{r}{100}$ €
- 1 € produce en un mes un beneficio de $\frac{r}{1200}$ €

- c € producen en un mes un beneficio de $\frac{c.r}{1200}$€
- c € producen en t meses un beneficio de $\frac{c.r.t}{1200}$€

b)

- c € producen en un día un beneficio de $\frac{c.r}{36000}$€
- c € producen en t días un beneficio de $\frac{c.r.t}{36000}$€

24.

Al cabo de 3 años : $\frac{c.r.t}{100} = \frac{1550.4.3}{100} = 186$ €

Al cabo de 6 meses: $\frac{c.r.t}{1200} = \frac{1550.4.6}{1200} = 31$ €

Al cabo de 20 días : $\frac{c.r.t}{3600} = \frac{1550.4.20}{3600} = 3$ € y 44 céntimos

25.

$i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100} = \frac{9000.8.5}{100} = 3600$ €

DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 60

Desafío matemático

Los buitres luchan contra la contaminación

En España existen 25 500 parejas de buitres leonados. El tamaño de la población de buitre leonado por comunidad autónoma viene dado por la siguiente tabla:

COMUNIDAD	N.º COLONIAS	N.º PAREJAS AISLADAS	N.º MÍNIMO DE PAREJAS	N.º MÁXIMO DE PAREJAS
CASTILLA Y LEÓN	305	30	5 965	6 062
ARAGÓN	281	25	5 174	5 174
ANDALUCÍA	202	28	2 978	3 037
NAVARRA	80	4	2 783	2 783
CASTILLA-LA MANCHA	150	21	2 410	2 501
EXTREMADURA	148	37	1 560	1 943
CATALUÑA	124	35	939	1 115
PAÍS VASCO	59	10	805	805
LA RIOJA	81	7	639	707
CANTABRIA	45	7	443	467
MADRID	20	4	454	461
COMUNIDAD VALENCIANA	36	10	253	255
ASTURIAS	26	7	151	176
MURCIA	3	0	55	55

Como todos sabemos, el buitre es un ave carroñera. Actualmente en España consumen 380 000 toneladas anuales de carroña. Esto incide en la lucha contra la contaminación, porque así se evita la incineración de gran cantidad de residuos que supondría la emisión de 193 000 toneladas de CO_2 a la atmósfera. El ahorro en gasóleo equivale al consumo de 9 000 hogares españoles durante un año.

1. Busca en Internet el significado de carroña e incineración.
2. Investiga por qué la emisión de de CO_2 a la atmósfera es perjudicial para el medio ambiente.
3. Calcula el número de hogares que ahorran en su consumo de gasóleo, por comunidad autónoma, en función del número máximo de buitres que hay en la comunidad.
4. Indica la cantidad de carroña que consumen los buitres en Andalucía.
5. Calcula el porcentaje de carroña que consume el buitre leonado en Navarra, con respecto al total de España.
6. Si el consumo de gasóleo en una casa unifamiliar es de 3 500 litros/año, ¿cuántos litros de gasóleo ahorran los buitres leonados al cabo de un año en España?
7. Indica las comunidades que mayor y menor número de buitres tienen y calcula el porcentaje que representan con respecto al total.
8. Suponiendo que el gasóleo de calefacción cuesta 0'5 euros/litro, calcula la cantidad de euros que se ahorra el Estado, gracias a los buitres.

60 UNIDAD 3

1. **Carroña**: carne putrefacta de animales muertos.
   Incineración: quemar un objeto hasta reducirlo a cenizas.

2. La temperatura media de la Tierra es de 15ºC. El CO_2es un gas que provoca el efecto invernadero, sin él la temperatura media de la Tierra sería de -18ºC. Sin embargo, un aumento de CO_2 elevaría la temperatura de la superficie terrestre, trayendo consigo el calentamiento global, que lleva asociado los problemas del cambio climático.

3.

Comunidad	Nº máximo de parejas	Equivalente al consumo gasóleo del siguiente número de hogares al año
Castilla y León	6062	2136
Aragón	5174	1823
Andalucía	3037	1070
Navarra	2783	981
Castilla-La Mancha	2501	881
Extremadura	1943	685
Cataluña	1115	393
País Vasco	805	284
La Rioja	707	249
Cantabria	467	165
Madrid	461	162
Comunidad Valenciana	255	90
Asturias	176	62
Murcia	55	19
Total	25541	9000

4. Los buitres de Andalucía representan el $\frac{3037}{25541} \cong 11'89\%$ del total de España. Así que consumirán el 11´89 % de las 380 000 toneladas anuales de carroña, es decir:

$$\frac{3037}{25541} \cdot 380000 = 45184'6$$

Por tanto, en torno a las 45184´6 toneladas de carroña al año.

5. Navarra: $\frac{2783}{25541} \cong 0'1089 \Rightarrow 10'89\%$

6.
1 hogar = 3500 litros/año
El ahorro en gasóleo equivale al consumo de 9000 hogares.
3500 · 9000 = 31 500 000 litros

7.

		Porcentaje
Comunidad con mayor nº buitres	Castilla y León	$\frac{6060}{25541} \cong 23'73\%$
Comunidad con menor nº buitres	Murcia	$\frac{55}{25541} \cong 0'21\%$

8. 31500000·0’5=15 750 000 €/año

EJERCICIOS

Razones y proporciones

○ **26.** Indica el valor de la incógnita en las siguientes proporciones:

a) $\frac{3}{x} = \frac{9}{15}$ c) $\frac{x}{5} = \frac{14}{35}$

b) $\frac{4}{7} = \frac{12}{x}$ d) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{x}$

○ **27.** Calcula la media proporcional existente entre los siguientes números:

a) 9 y 4 b) 16 y 4 c) 27 y 3 d) 20 y 5

○ **28.** Indica si las siguientes razones de proporcionalidad son correctas:

a) $\frac{5}{6} = \frac{7}{8}$ c) $\frac{126}{14} = \frac{36}{4}$

b) $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$ d) $\frac{2}{25} = \frac{3}{37}$

○ **29.** Mezclamos 4 L de leche con 9 L de chocolate. ¿Qué razón existe entre la leche y el chocolate?

◐ **30.** Calcula los valores de las incógnitas x, y y z de la siguiente expresión:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$$

sabiendo que $x + y + z = 48$.

Tanto por ciento. Porcentaje

● **31.** Una importante empresa eléctrica obtuvo en el año 2004 un aumento en el beneficio neto del 14'2% con respecto al beneficio del año anterior, lo cual supuso 1 210'7 millones de euros. ¿A cuánto asciende el total del beneficio del año 2003? ¿Y el del año 2004?

○ **32.** Tras una sequía de 2 años, las reservas de un pantano se reducen en un 60%. Si actualmente posee 820 hL, ¿cuántos hectolitros tenía almacenados antes de la sequía?

◐ **33.** Calcula el 30% de $\frac{1}{3}$ más el 50% de $\frac{1}{5}$.

● **34.** Si sabemos que el 20% de un número es 50, calcula el 30% de dicho número.

○ **35.** Un ganadero tiene en el granero comida para 12 ovejas durante 20 días. Si compra 3 ovejas más, ¿durante cuánto tiempo podrá alimentarlas con la comida que tiene en el granero?

○ **36.** Expresa los siguientes porcentajes como números decimales:

a) 25% b) 4% c) 85% d) 7%

○ **37.** Expresa como porcentajes los siguientes números decimales:

a) 0'09 b) 0'87 c) 1'62 d) 0'37

○ **38.** Calcula el 2% del 6% de 12 000 €.

○ **39.** Calcula el 8% de 12 000 €.

○ **40.** Calcula el 12% de 12 000 €.

○ **41.** Calcula el 0'12% de 12 000 €.

○ **42.** Expresa en tanto por uno y en tanto por mil los siguientes porcentajes:

a) 23% b) 15% c) 2% d) 0'46%

○ **43.** Expresa los siguientes tantos por uno en tantos por ciento y tantos por mil:

a) 0'34 b) 5'87 c) 0'009 d) 0'00965

○ **44.** Una raqueta de tenis cuesta 70 €. Como en la tienda están en una campaña promocional, la rebajan un 6%. ¿Cuánto rebajan el precio de la raqueta? ¿Cuál es su importe final?

◐ **45.** Alberto quiere comprar un coche deportivo que cuesta 24 000 €. A la hora de pagar le incluyen el IVA del coche, con lo que finalmente abona 27 840 €. ¿Qué porcentaje pagó de IVA?

◐ **46.** Un camisero vende una camisa por 60 €. Como se da cuenta de que en unos grandes almacenes la venden más barata, la rebaja un 20%. ¿A qué precio la vende después de la rebaja?

Al cabo de unos días observa que el de la tienda de al lado vende la misma camisa más cara que él, con lo que ahora decide subirle el precio un 20%. ¿Cuánto costará ahora la camisa?

◐ **47.** Un robot de cocina costaba 590 € el año pasado. A lo largo del año ha subido un 5% y después ha bajado un 8%. ¿Cuánto cuesta actualmente el robot?

○ **48.** Compro una lámpara rebajada un 15% y pago por ella 340 €. ¿Cuál era el precio de la lámpara antes de la rebaja?

62 UNIDAD 3

26.

a) $\frac{3}{x} = \frac{9}{15} \Rightarrow x = \frac{3.15}{9} = 5$

b) $\frac{4}{7} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12.7}{4} = 21$

c) $\frac{x}{5} = \frac{14}{35} \Rightarrow x = \frac{14.5}{35} = 2$

d) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{x} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 3}{2} \Rightarrow x = 6$

27.

a) $\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

b) $\frac{16}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$

c) $\frac{27}{x} = \frac{x}{3} \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$

d) $\frac{20}{x} = \frac{x}{5} \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow$ x= 10

28.

a) $\frac{5}{6} \neq \frac{7}{8}$ ya que $8.5 \neq 7.6$

b) $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$ ya que 4.14 = 7.8 = 56

c) $\frac{126}{14} = \frac{36}{4}$ ya que 126.4 =14.36 = 504

d) $\frac{2}{25} \neq \frac{3}{37}$ ya que $2 .37 \neq 3 .25$

29. $\frac{4}{9}$

30.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{2+6+8} = \frac{48}{16} = 3$$

$$\frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{y}{6} = 3 \Rightarrow y = 18$$

$$\frac{z}{8} = 3 \Rightarrow z = 24$$

31.

Sea B_3 = Beneficio año 2003

B_4 = Beneficio año 2004

El 14,2 % del beneficio 2003 = 1.210$_1$700.000 €

14,2 % B_3 = 1.210$_1$700.000

$$0{,}142 \cdot B_3 = 1.210_1 700.000$$

$$B_3 = \frac{1.210_1 700.000}{0.142}$$

$$B_3 = 8.526_1 056.338$$

$$B_4 = B_3 + 0{,}142\ B_3 \Rightarrow B_4 = 1{,}142 B_3$$

$$B_4 = 1{,}142 \cdot 8.526_1 056.338$$

$$B_4 = 9.736_1 756.338\ €$$

32.

Hoy____________820 hl
Ayer____________ x

Si pierde un 60%, le queda un 40% del total.
Sea x es el total que tenía antes de la sequía.

$$40\%\ x = 820$$

$$0{,}4\ x = 820 \Rightarrow x = \frac{820}{0{,}4} = 2050 hl$$

33. 30% de $\frac{1}{3} + 50\%\ \frac{1}{5} = \frac{30}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{50}{100} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

34. 20% de $x = 50 \Rightarrow 0'2 \cdot x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{0'2} \Rightarrow x = 250$

$30\ \%\ de\ x = 0'3 \cdot 250 = 75$

35. Ovejas _________días
12____________20
15____________ x

$$\frac{20}{x} = \frac{15}{12} \Rightarrow x = 16$$

Solución: 16 días

36.

a) $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b) $4\ \% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

c) $85\% = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$

d) $7\% = \frac{7}{100}$

37.

a) $0{,}09 = \dfrac{9}{100} = 9\%$

b) $0{,}87 = \dfrac{87}{100} = 87\%$

c) $1{,}62 = \dfrac{162}{100} = 162\%$

d) $0{,}37 = \dfrac{37}{100} = 37\%$

38.

$0{,}02 \cdot 0{,}06.\ 1200 = 14{,}4$

39. $0{,}08 \cdot 12000 = 960$

40. $0{,}12 \cdot 12000 = 1440$

41. $\dfrac{0{,}12}{100} \cdot 12000 = 14{,}4$

42.

Porcentaje	Tanto por uno	Tanto por ciento
23%	0,23	230
15%	0,15	150
2%	0,02	20
0,46%	0,0046	4,6

43.

Porcentaje	Tanto por uno	Tanto por ciento
0,34	34	340
5,87	587	5870
0,009	0,9	9
0,00965	0,965	9,65

44.

Rebajan $6\%\ de\ 70 = 0'06 \cdot 70 = 4'2 euros$

Importe final = 70 – 4’2 = 65’8 euros

45.

24000 + IVA = 27840

IVA = 3840. Sea el IVA el x % del precio

x . 24000 = 3840

$x = 0'16 \Rightarrow$ IVA = 16%

46.

La vende al 80% de su valor

0,8 · 60 = 48 €

Después de la rebaja se vende a 48 €

Si a continuación la sube un 20% $\Rightarrow$ la camisa costará 48 · 1,2= 57,6 €

47.

Después de subir un 5% cuesta $1{,}05 \cdot 590 = 619{,}5$ €
Posteriormente baja un 8 % con lo que cuesta $0{,}92 \cdot 619{,}5 = 569{,}94$ €

48.

Si me rebajan el 15%, pago por ello el 85% de su valor.
Sea x el precio real de la lámpara $0{,}85 \cdot x = 340$
$x = 400$
Solución: precio real de la lámpara: 400 €.

○**49.** Un trabajador recibe un salario de 60 € diarios. Si le suben un 7%, ¿cuánto cobrará por cada día de trabajo?

○**50.** En un instituto de Huesca participan en la semana blanca el 60% de los alumnos. Si el centro tiene 620 alumnos, ¿cuántos chicos y chicas participan?

○**51.** José tenía una paga semanal que su padre ha aumentado un 4% el año pasado y un 5% este año. Actualmente su padre le asigna semanalmente 5'46 €. ¿Cuánto cobraba hace 2 años?

Proporcionalidad simple. Regla de tres simple

◐**52.** En un centro escolar que tiene 450 alumnos se venden todos los recreos 150 bocadillos y 60 refrescos. ¿Cuántos bocadillos y cuántos refrescos se venderán en otro centro escolar con 300 alumnos más?

○**53.** En una carrera de motos por el desierto los 4 motoristas de un equipo necesitan beber 80 L diarios de agua. Si participan 12 equipos de 4 miembros cada uno, ¿cuántos litros diarios de agua debe llevar la organización para poder satisfacer la necesidad de agua de los corredores?

○**54.** Una cofradía de pescadores tiene asociados 26 pesqueros. Si los barcos de dicha cofradía ingresan en la lonja una media de 52 t de pescado a la semana, ¿cuántas toneladas de pescado llevaría a la lonja dicha cofradía a la semana si admitieran a 4 pesqueros más?

○**55.** Un circo almacena en su despensa comida para 8 elefantes durante 22 días. Si adquieren 3 elefantes más, ¿durante cuántos días podrán alimentar a los elefantes?

◐**56.** Un tren de alta velocidad recorre 500 km en 2 h y media. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 700 km?

○**57.** Un peregrino quiere recorrer a pie el Camino de Santiago. Si en los 6 primeros días, caminando 8 h diarias, ha recorrido 150 km, ¿cuántos días tardará en recorrer los 650 km que le faltan suponiendo que camina 8 h diarias?

○**58.** Una modista, trabajando 6 h diarias, tarda 5 días en realizar 24 disfraces de carnaval. Si le encargan 8 disfraces más, ¿cuántas horas diarias tendrá que trabajar para cumplir todos los encargos?

○**59.** Un jornalero recoge 280 kg de manzanas en 5 h. ¿Cuántos kilos de manzanas recogerá en 6 h?

○**60.** Un autobús tarda 3 h y media en realizar un trayecto yendo a una velocidad media de 90 km/h. Si fuese a 100 km/h, ¿cuánto tiempo tardaría en realizar el mismo trayecto?

○**61.** Para pintar un edificio necesitamos el trabajo de 6 pintores durante 15 días. Si contratamos 10 pintores, ¿cuántos días tardarán en pintar el edificio?

○**62.** Un ganadero tiene para alimentar a 40 vacas durante 25 días. Debido a una fuerte nevada, tiene que dar cobijo a 10 vacas más que recogió en el monte. ¿Cuántos días podrá alimentar a todas las vacas en esas condiciones?

○**63.** Para construir 2 castillos de arena 5 chicos tardan 8 h. ¿Cuánto tardarán 4 chicos en construir 3 castillos?

Reducción a la unidad

○**64.** Una compañía de telefonía móvil, con el fin de captar clientes, ofrece cobrarles siempre que hablen con otro número de la misma compañía 5 cts. por minuto. Si una mujer y su marido contratan 2 teléfonos con dicha compañía, ¿cuánto pagarán al cabo de una hora de conversación telefónica si el establecimiento de llamada cuesta 12 cts.?

○**65.** Tres kg de naranjas cuestan 3'60 €. ¿Cuánto costarán 7 kg? Resuélvelo por reducción a la unidad.

○**66.** Un coche consume 6 L de gasóleo cada 100 km. ¿Cuánto gasóleo consumirá al cabo de 415 km? Resuélvelo por reducción a la unidad.

○**67.** Para pintar una sala de 25 m² necesitamos 10 kg de pintura. ¿Cuántos kilos necesitaremos para pintar dos habitaciones que suman 32 m²? Resuélvelo por reducción a la unidad.

○**68.** Si pago 2'20 € por $\frac{1}{4}$ de kilo de café molido, ¿cuánto pagaré por 13 kg?

49. $60 \cdot 1{,}07 = 64{,}2$ €

50. $0{,}6 \cdot 620 = 372$ alumnos

51.
Sea x la paga que José recibía hace 2 años
Después de la 1 ª subida cobra $1{,}04\,x$
Después de la 2ª subida cobra: $1{,}04\,x + 0{,}05 \cdot 1{,}04\,x = 1{,}05 \cdot 1{,}04\,x = 1{,}092\,x$

$1{,}092\,x = 5{,}46$

$x = 5$

Solución: hace 2 años José cobraba 5 €.

52.

alumnos	D	bocadillos	D	refrescos
450		150		60
750		x		y

$$\frac{450}{750} = \frac{150}{x} \Rightarrow x = 250$$

$$\frac{450}{750} = \frac{60}{y} \Rightarrow y = 100$$

Solución: 250 bocadillos y 100 refrescos

53.

Motoristas	Litros / día
4	80
48	x

Sea k la constante de proporcionalidad,

$$4k = 48 \Rightarrow k = 12$$

$$x = 80\,k \Rightarrow x = 960$$

Solución : 960 litros diarios

54.

Pesqueros	Toneladas / semana
26	52
30	x

$$\frac{26}{30} = \frac{52}{x} \Rightarrow x = 60$$

Solución : 60 toneladas / semana

55.

8 elefantes ________22 días
11 elefantes________ x días

$$\frac{22}{x}=\frac{11}{8}\Rightarrow x=\frac{22.8}{11}\Rightarrow x=16\ días$$

Solución : 16 días

56. 500km____$2\frac{1}{2}$ hora =2,5 h

100 km ___0,5 hora $=\frac{1}{2}$ h

700 km____3,5h =3 $\frac{1}{2}$ h

Solución : 3 horas y media

57.

Días_____horas /día _______Km
6________8_____________ 150
x________8______________650

$$\frac{6}{x}=\frac{150}{650}\Rightarrow x=26$$

Solución: 26 días

58.

Horas día________disfraces
6____________24
x____________32

$$\frac{6}{x}=\frac{24}{32}\Rightarrow x=8$$

Solución: 8 horas diarias

59.

Horas _________kg
5___________280
6___________ x

$$\frac{5}{6}=\frac{280}{x}\Rightarrow x=336$$

Solución : 336 kilos .

60.

Horas ________km/ h
3,5__________90
x __________100

$$\frac{3{,}5}{x}=\frac{100}{90}\Rightarrow x=\frac{3'5\cdot 90}{100}=\frac{63}{20}=3\frac{3}{20}$$

$x = 3{,}15$ h

Solución: 3 horas y 9 minutos

61.

Pintores _________días
6______________15
10______________x

$$\frac{15}{x}=\frac{10}{6}\Rightarrow \boxed{x=9}$$

Solución: 9 días

62.

Vacas ________días
40__________25
50__________ x

$$\frac{25}{x}=\frac{50}{40}\quad\Rightarrow\quad x=20$$

Solución: 20 días

63.

Castillos	Chic@s	Horas
2	5	8
3	4	x

$$\frac{8}{x}=\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\Rightarrow x=15$$

Solución: 15 horas

64.

En una hora pagan: 60 · 0.05 = 3 €
Como el establecimiento de llamada es de 12 cts., en total pagarán 3,12 €

65.

3 kg_____3,6 €
1 kg_____1,2 €
7 kg_____8,4 €

66. 100 km______6 litros

1 km______ $\frac{6}{100}=\frac{3}{50}\mathit{litros}$

415 km______ $\frac{3}{50}\cdot 415=24{,}9\mathit{litros}$

67.

$$25\ m^2 \underline{\qquad\qquad} 10\text{ kg}$$

$$1\ m^2 \underline{\qquad\qquad} \frac{10}{25}=\frac{2}{5}kg$$

$$32\ m^2 \underline{\qquad\qquad} 32\cdot\frac{2}{5}=12{,}8kg$$

68.

$$\frac{1}{4}kg=2{,}20€$$

1 kg = 8,8 €

13 kg =114,4 €

PROBLEMAS

○**69.** Cuando llevo a reparar mi coche al taller me cobran 24 €/h por la mano de obra. Si el arreglo del coche llevó 2 horas y media, ¿a cuánto ascenderá la factura por la mano de obra?

○**70.** Si por 5 L de vino pago 15 € en bodega, ¿cuánto pagaré por 12 L del mismo vino en la misma bodega?

◐**71.** Un mayorista va a comprar 20 000 kg de tomate por 1 500 €. En el momento de la compra le ofrecen 10 000 kg más añadiendo 300 €. Si acepta esta última oferta, ¿a qué precio le sale el kilo? Y si no acepta la última oferta, ¿cuánto pagaría por el kilo de tomate?

◐**72.** La semana pasada compré 12 kg de naranjas con 24 €. Cuando hoy me dirijo al mercado, observo que las naranjas han subido 40 cts./kg. ¿Cuántas naranjas podré comprar hoy con 24 €?

●**73.** La prueba transpirenaica consiste en cruzar el Pirineo desde la costa mediterránea a la costa cantábrica en trineo tirado por perros. Un participante lleva 170 kg de peso en el trineo, más los 70 kg que él pesa. Si los perros que tiran del trineo son 12, ¿cuántos kg arrastra cada perro al comienzo de la prueba?
Si los perros consumen diariamente 30 kg en comida, y 3 perros son retirados por lesionarse, al cabo de 2 días, ¿cuántos kilos arrastrará cada perro?

●**74.** Un hombre realiza $\frac{3}{7}$ de un trabajo y su hijo $\frac{1}{4}$ de dicho trabajo. Si el padre acaba lo que le queda en 3 h, ¿cuánto habría tardado en hacerlo si no hubiera tenido la ayuda del hijo?

◐**75.** Seis trabajadores, para construir 3 casas, han necesitado 10 días. Si tuviesen que hacer 2 casas en 8 días, ¿cuántos trabajadores se necesitarían?

●**76.** Para realizar un granizado de café para 4 personas necesito 6 cucharadas de café en polvo, 10 cucharadas de azúcar y medio litro de agua. ¿Qué cantidad de estos mismos ingredientes es necesaria para preparar un granizado para 6 personas?

◐**77.** Para realizar una alfombra artesanal de 24 m de largo por 3 de ancho, trabajan en la Real Fábrica de Tapices 24 artesanos durante 40 días 8 h al día. Si trabajaran 12 artesanos durante 10 h diarias, ¿cuánto tiempo tardarán en hacer una alfombra de las mismas medidas?

●**78.** Para realizar un pudin para 4 personas necesito 150 g de miga de pan, 200 g de leche condensada, 250 cL de leche, 3 huevos y 100 g de frutas confitadas. Calcula los ingredientes que se necesitarían para realizar el mismo pudin para 6 personas.

◐**79.** En 9 días, 25 obreros han embaldosado una acera de 4 m de ancho y 300 m de largo. ¿Cuántos días necesitarán 15 obreros para embaldosar una acera de 6 m de ancho y 240 m de largo?

◐**80.** En una empresa 12 trabajadores realizan 240 piezas trabajando 8 h diarias durante una semana. Debido a la falta de pedidos llegan al acuerdo con la empresa de trabajar 6 h diarias mientras dure esa situación. Si las condiciones anteriores duran 2 semanas, ¿cuántas piezas se produjeron en dichas condiciones?

○**81.** Una familia compuesta por 4 miembros consume 540 kilowatios de electricidad al año. ¿Cuánto consumirá una familia de 6 miembros al cabo de 18 meses?

○**82.** a) Divide 4 500 € en partes directamente proporcionales a 4, 6 y 8.

b) Divide 8 602 € en partes inversamente proporcionales a 2, 4 y 6.

○**83.** Reparte 6 200 en partes:

a) directamente proporcionales a 4, 6 y 10.

b) inversamente proporcionales a 4, 6 y 10.

○**84.** Necesito 15 garrafas de 5 L para envasar una cierta cantidad de aceite. Si deseo guardar la misma cantidad de aceite en botellas de $\frac{3}{4}$ de litro, ¿cuántas botellas necesitaré?

○**85.** Un familia se dirige a la playa a pasar sus vacaciones. Si el conductor lleva el vehículo a una velocidad media de 120 km/h tardan en llegar 4'5 h. ¿Cuánto tardarían en llegar si fuesen a una velocidad media de 90 km/h?

69. 2,5 · 24 =60 €

70. 5litros _____15 €
1 litro _____ 3 €
12 litros_____36€

71.

20 000 kg______1500 €

* Si acepta oferta 30 000Kg por 1800 € $\Rightarrow$

el kilo le sale a $\dfrac{1800}{30000} = 0{,}06€ \Rightarrow 6cts/kilo$

* Si no acepta la oferta $\Rightarrow$ el kilo le sale a $\dfrac{1500}{20000} = 0{,}075€ \Rightarrow 7{,}5céntimos/kg$

72.

12 kg____24 € $\Rightarrow$ El kg sale a 2€

Si el kilo sube 40 céntimos $\Rightarrow$ el kg. de naranjas cuesta 2,4

Con 24 € podré comprar : $\dfrac{24}{2{,}4} = 10kg$

Solución : 10 kg

73.

Los 12 perros arrastran 240 kg $\Rightarrow$ 1 perro arrastra $\dfrac{240}{12} = 20kg$

Cada perro arrastra 20 Kg al comienzo de la carrera
Si se lesionan 3 perros, quedan 9 perros .
Si consumen 30 Kg/ día $\Rightarrow$ al cabo de 2 días han consumido 60 kg de comida .
Así que , al cabo de 2 días quedan 110 kg de carga .
Entonces los 9 perros arrastran 110 kg más 70kg del conductor = 180 kg.
Cada perro arrastra $\dfrac{180}{9} = 20$ kg al cabo de 2 días

74.

El padre realiza $\dfrac{3}{7} = \dfrac{12}{28}$ del trabajo,

El hijo realiza $\dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{28}$

Entre los dos realizan $\dfrac{19}{28}$ del trabajo,

Queda por realizar $\dfrac{9}{28}$ del trabajo, en lo que el padre emplea 3 horas.

En $\frac{1}{28}$ del trabajo el padre hubiera empleado $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ horas ,
Si el padre hubiera hecho todo el trabajo, es decir si hubiera hecho 28/28 del total, entonces habría tardado :

$$28.\ \frac{1}{3}=\frac{28}{3}=9.\frac{1}{3} hora = 9h \text{ y 20 minutos}$$

Solución : Sin ayuda del hijo el padre hubiera tardado en hacer todo el trabajo: 9 horas y 20 minutos .

75.

Trabajadores	casas	días
6	3	10
x	2	8

$$\frac{6}{x}=\frac{3}{2}=\frac{8}{10}\Rightarrow 8.3.x=6.2.10$$

$$x=\frac{6.2.10}{8.3.2}\Rightarrow x=5\ trabajadores$$

76.

Personas	Café	Azúcar	Agua
4	6 cucharadas	10 cucharadas	½ l
6	*X*	y	z

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{x}\Rightarrow x=9 cucharadas$$

$$\frac{4}{6}=\frac{10}{y}\Rightarrow y=\frac{60}{4}=15 cucharadas$$

$$\frac{4}{6}=\frac{1/2}{z}\Rightarrow 4z=3\Rightarrow z=\frac{3}{4} litros$$

Solución: café 9cucharadas; azúcar 15 cucharadas y agua :¾ litro

77.

Artesanos	días	horas/ días
24	40	8
12	x	10

$$\frac{40}{x}=\frac{12}{24}=\frac{10}{8}\Rightarrow x=64$$

Solución : 64 días

78.

Personas	Miga de pan	Leche condensada	Leche	Huevos	Fruta confitada
4	150 g	200 g	250 cl	3	100 g
6	x	y	z	m	n

Sea k la constante de proporcionalidad: $4k = 6 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

$x = 150 \cdot \frac{3}{2} = 225$ $\quad$ $y = 200 \cdot \frac{3}{2} = 300$

$z = 250 \cdot \frac{3}{2} = 375$ $\quad$ $m = 3 \cdot \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$

$n = 100 \cdot \frac{3}{2} = 150$

Solución:

225 g de miga de pan , 300 g de leche condensada

375 cl de leche , $4\ \frac{1}{2}$ huevos

150 g de fruta confitada

79.

Días	Obreros	Ancho	Largo
9	25	4 m	300 m
x	15	6 m	240 m

$$\frac{9}{x} = \frac{15}{25} = \frac{4}{6} = \frac{300}{240} \Rightarrow x = 18$$

Solución: 18 días

80.

Trabajadores	Piezas	Horas/día	Tiempo
12	240	8	1 semana
12	x	6	2 semanas

$$\frac{240}{x} = \frac{8}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 360$$

Solución : 360 piezas

81.

Personas	Kw	Tiempo
4	540	1 año
6	x	1,5 años

$$\frac{540}{x}=\frac{4}{6}=\frac{1}{1,5}\Rightarrow x=1215$$

Solución : 1215 kw

82.

4500 = 4k +6k +8k

4500 = 18 k

k = 250

4k =1000

6k =1500

8k =2000

$$8602=\frac{k}{2}+\frac{k}{4}+\frac{k}{6}$$

$$8602=\frac{6k+3k+2k}{12}$$

$$8602=\frac{11k}{12}$$

$$k=9384$$

$$\frac{k}{2}=4692$$

$$\frac{k}{4}=2346$$

$$\frac{k}{6}=1564$$

83.

a) 6200= 4k + 6k +10 k

k = 310

4 k = 1240

6 k = 1860

10 k = 3100

b)

$$6200=\frac{k}{4}+\frac{k}{6}+\frac{k}{10}$$

k =12000

$$\frac{k}{4}=3000$$

$$\frac{k}{6}=2000$$

$$\frac{k}{10}=1200$$

84.

Garrafas	Capacidad
15	5 l
x	3/4 l

$$\frac{15}{x}=\frac{3/4}{5}\Rightarrow\frac{15}{x}=\frac{3}{20}\Rightarrow x=\frac{15.20}{3}=100\ botellas$$

85.

120 km/h______4,5 h
90 km/h ______x h

$$\frac{4{,}5}{x}=\frac{90}{120}\Rightarrow x=6$$

Solución: 6 horas

86. Para realizar un trabajo tardamos 14 días trabajando 8 h diarias. Si dedicamos 2 h menos al día, ¿cuántos días tardaremos en acabar el trabajo?

87. Un padre decide repartir 24 000 € entre sus 3 hijos en partes directamente proporcionales a las edades de estos. Si el mayor tiene 31 años, el mediano 26 y el menor 23, ¿qué cantidad le corresponde a cada uno?

88. Vamos a repartir una gratificación de 1 230 € entre los 3 trabajadores de una oficina en partes inversamente proporcionales a los días que no han asistido al trabajo. Si Juan faltó 2 días, Belén faltó 3 días y Sonia no pudo asistir durante una semana, ¿qué cantidad le corresponde a cada uno?

89. A 3 amigos les tocan 15 000 € en la lotería. El billete lo compraron entre los tres, aportando cada uno las siguientes cantidades: el primero puso 12 €, el segundo 15 € y el tercero 3 €. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

90. Tres socios aportan un capital para emprender un negocio que produce un beneficio de 27 000 €. Si el primero aportó la mitad del capital y el segundo la tercera parte, ¿qué cantidad le corresponderá a cada uno de los beneficios obtenidos?

91. Un empresario decide repartir un incentivo entre sus 3 empleados de forma directamente proporcional a los años que llevan en la empresa. El más antiguo lleva 12 años, el siguiente lleva 6 años y el más joven solo 2 años. Calcula lo que les corresponde a cada uno de los empleados si la cantidad que se repartirá es 14 000 €.

92. Cuando voy a comprar una bicicleta que cuesta 150 € me dicen que tengo que pagar el 16% de IVA. ¿Cuántos euros tengo que pagar finalmente por la bicicleta?

93. En la cesta de la compra los vecinos del 5º, que son 4, gastan 240 € a la semana. ¿Cuánto gastarán los del 4º, sabiendo que son una familia de 6? Entendemos que las dos familias tienen gustos culinarios parecidos y de precios equivalentes. Resuélvelo por reducción a la unidad.

94. Depositamos 5 000 € en un banco que nos ofrece un rédito del 2'7%. ¿Qué interés nos producirá al cabo de 3 años? ¿Y al cabo de 9 meses? ¿Y al cabo de 20 días?

95. Quiero prestar un capital de 20 000 € con la intención de que me produzca un interés de 10 000 € en 10 años. ¿A qué porcentaje de interés debo realizar el préstamo?

96. Un prestamista cede un capital de 9 120 € a un interés del 12% durante 25 días. ¿Qué beneficio obtendrá?

97. Regando los jardines durante 4 h al día, los servicios municipales de jardinería emplean 90 000 L de agua en una semana. Calcula la cantidad de agua que emplearían regando 3 h al día durante 10 días.

86.

14 días ________ 8 h/d
x días_________6 h/d

$$\frac{14}{x}=\frac{6}{8}\Rightarrow x=\frac{56}{3}\Rightarrow x=18\frac{2}{3}\Rightarrow$$

Solución: 18 días y $\frac{2}{3}$ días =18 días y 16 horas

87.

$31k + 26k + 23k = 24000$

$80k = 24000$

$k = 300$

Mayor: $31\ k = 31 \cdot 300 = 9300$ €

Mediano : $26\ k = 26 \cdot 300 = 7800$ €

Menor: $23\ k = 23 \cdot 300 = 6900$ €

88.

Juan: k/2, Belén: k/3, Sonia: k/7

$$\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{7}=1230 \Rightarrow 21k+14k+6k=1230.42$$

$$41k=1230.42 \Rightarrow k=\frac{1230.42}{41} \Rightarrow k=1260$$

Juan: $\frac{1260}{2} = 630$ €

Belén: $\frac{1260}{3} = 420$ €

Sonia: $\frac{1260}{7} = 180$ €

89.

	Juegan	Perciben
Primero	12 €	X
Segundo	15 €	Y
Tercero	3 €	Z
TOTAL	30€	15000€

$30\ k = 15000 \Rightarrow k = 500$

$x = 12\ k \Rightarrow x = 6000$ €
$y = 15\ k \Rightarrow y = 7500$ €
$z = 3\ k \Rightarrow z = 1500$ €

Solución: primero 6000 €, segundo 7500 €, tercero 1500 €

90.

Primero : $\frac{x}{2} = \frac{27000}{2} = 13500€$

Segundo: $\frac{x}{3} = \frac{27000}{3} = 9000€$

Tercero: $\frac{x}{6} = \frac{27000}{6} = 4500€$

91.

12 k + 6 k + 2 k = 14000
20 k = 14000
k = 700

Solución: El más antigüo recibirá: 8400€
El mediano : 4200 €
Y el más joven: 1400 €

92.

150·1’16 = 174 euros

93.

4 personas___240€
1 persona ___ 60€
6 personas___360€

94.

a) $i = \frac{crt}{100} = \frac{5000.2,7.3}{100} = 405$ €

b) $i = \frac{crt}{1200} = \frac{5000.2,7.9}{1200} = 101,25$ €

c) $i = \frac{crt}{36000} = \frac{5000.2,7.20}{36000} = 7,5$ €

95.

i = $\frac{crt}{100}$

$10000 = \frac{20000.r.10}{100} \Rightarrow r = 5$

Solución= 5 %

	Años	Cantidad
Más antiguo	12	12 k
Mediano	6	6 k
Más joven	2	2 k
TOTAL	20	14000

96.

C = 9120
r =12%
t = 25 días

$$i = \frac{crt}{3600}$$

$$i = \frac{9120 \cdot 12 \cdot 25}{3600}$$

i = 760 €

97.

horas/ día	litros	tiempo
4	90.000	7 días
3	x	10 días

$$\frac{90000}{x} = \frac{4}{3} = \frac{7}{10}$$

$7 \cdot 4 \cdot x = 3 \cdot 10 \cdot 90000$
$x = 96428,\ 57\ \text{l}$

Solución : 96428, 57 litros

AUTOEVALUACIÓN PAG. 65

AUTOEVALUACIÓN

1. La razón entre dos números es $\frac{2}{3}$. Si el primero es 14, ¿cuál es el segundo número?
2. En una fábrica 10 operarios producen 200 piezas en 21 h de trabajo. ¿Cuántas piezas producirán 15 operarios en 7 h?
3. En un barco tienen comida para 32 tripulantes durante 66 días de travesía. Si rescatan a 16 personas en alta mar, ¿cuántos días dispondrán de víveres para todos?
4. Si 3 kg de melocotones cuestan 5'25 €, ¿cuánto costarán 8 kg? Resuelve este problema por reducción a la unidad.
5. Hace no mucho llenaba los 40 L del depósito de mi coche con 36 €. Si la gasolina ha subido un 15% en el último año, ¿cuánto me costará ahora llenar el depósito de mi coche?
6. Para hacer una obra en 10 días necesito 12 obreros trabajando 6 h diarias. Por un imprevisto tengo que hacer la obra en 6 días. Si los obreros trabajan 8 h diarias, ¿cuántos obreros necesitaré?
7. Calcula el 6% del 2% de 12 000 €.
8. Si la gasolina sin plomo cuesta 1'10 €/L y le suben un 5% su precio, ¿cuánto pagaré después de la subida por litro de gasolina sin plomo?
9. Expresa en tanto por uno y tanto por mil los porcentajes:

   a) 2% b) 25% c) 40'5%
10. En un bar 3 camareros se reparten las propinas en forma inversamente proporcional a los días que faltaron. Si Juan faltó 2 días, Alejandro 4 días y Guillermo faltó 5 días, ¿cómo se repartirán los 760 € del bote?

Proporcionalidad 65

1.

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}, a=14$$

$$\frac{14}{b}=\frac{2}{3} \Rightarrow 2b=14.3 \Rightarrow b=21$$

2.

Operarios	Piezas	Horas
10	200	21
15	X	7

$$\frac{200}{x}=\frac{10}{15}=\frac{21}{7} \Rightarrow x=100$$

Solución: 100 piezas

3.

Personas	Días
32	66
48	x

$$\frac{66}{x}=\frac{48}{32} \Rightarrow x=44$$

Solución: 44 días

4 .

3 kg cuestan 5,25 €

1 kg cuesta $\frac{5,25}{3}=1,75€$

8 kg cuestan 8. 1,75 = 14 €

Solución: 14 €

5.

40 litro = 36 €

1 litro = $\frac{36}{40}€ \Rightarrow 1\ litro = 0,9€$

La gasolina costaba 0,9 €/ litro

Tras la subida del 15% cuesta :

1 · 0’9 + 0’15 · 0’9 = 1’15 · 0’9 = 1’035 €/ litro

1’035 · 40 = 41’4 euros

Solución: 41’4 €

6.

Días	Obreros	Horas /día
10	12	6
6	x	8

$$\frac{12}{x}=\frac{6}{10}=\frac{8}{6}\Rightarrow x=15$$

Solución: 15 obreros

7. 0,06 · 0,02 · 12000 = 14,4

8. 1,05 · 1,1 = 1,155 €

9.

Tanto por ciento	Tanto por uno	Tanto por mil
2%	0,02	20
25%	0,25	250
40,5%	0,405	405

10.

	Juan	Alejandro	Guillermo	Total
Días	2	4	5	11
€	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{4}$	$\frac{k}{5}$	760

Sea k la constante de proporcionalidad:

$$\frac{k}{2}+\frac{k}{4}+\frac{k}{5}=760$$

10k + 5k +4k = 760 · 20

19 k = 760 · 20

k = 800

Solución: A Juan le corresponde 400 € , Alejandro recibe 200 € y Guillermo 160€.

DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 67

Olimpiada matemática

1. Con los números del 1 al 9, debes buscar 3 números de 3 cifras cada uno, de forma que el segundo número sea el doble que el primero y el tercer número sea el triple. No puede repetirse ninguna cifra ni puede faltar ninguno de los números comprendidos entre 1 y 9, ambos inclusive.
2. Un ganadero deja en herencia a sus 3 hijos 11 vacas lecheras, que deben repartirse, sin sacrificar ni vender ninguna, de la siguiente manera: al hermano mayor le corresponden la mitad de las vacas, al segundo la mitad que al mayor y al pequeño la tercera parte que al primero. Al testamentario se le ocurre una manera de hacer el reparto, ¿cómo lo hizo?

1. 219, 438, 657

2. El testamentario añade una vaca lechera más, con lo que son 12. La mitad de las vacas, esto es, 6 vacas, son para el hermano mayor; para el segundo son 3 y al menor le corresponden 2 vacas. Sobra una vaca que recupera el testamentario.

UNIDAD 4. POLINOMIOS

ACTIVIDADES PAG. 70

ACTIVIDADES

1. Realiza las siguientes sumas y restas de monomios:

a) $2x^4 + 3x^4$ b) $5x^5 - 4x^4 + 3x^5 - 3x^4$ c) $3x^7 - 12x^6 + 14x^6 + 15x^7 + 3x$

2. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $4x^2 \cdot 5x^3$ b) $2x^4 \cdot 5x^3$ c) $21x^{15} : 3x^{12}$ d) $45x^6 : 15x^4$

1.

a) $2x^4 + 3x^4 = 5x^4$

b) $5x^5 - 4x^4 + 3x^5 - 3x^4 = 8x^5 - 7x^4$

c) $3x^7 - 12x^6 + 14x^6 + 15x^7 + 3x = 18x^7 + 2x^6 + 3x$

2.

a) $4x^2 \cdot 5x^3 = 20x^5$

b) $2x^4 \cdot 5x^3 = 10x^7$

c) $21x^{15} : 3x^{12} = 7x^3$

d) $45x^6 : 15x^4 = 3x^2$

ACTIVIDADES PAG. 71

ACTIVIDADES

3. Expresa los siguientes polinomios en su forma irreducible:

a) $4x^4 - 5x^3 + 7x^4 + 3x^2 - 2x^3 + 12x - 7x^2 + 23$

b) $5x^3 + 6x^7 + 2x^3 - 12x^2 + 4 + 12x - 4x^2$

c) $5x^{11} + 7x^3 - x^{11} + 8x^3 + 9x^2 - 2x + 45x - 24$

4. Indica el grado de los siguientes polinomios:

a) $2x^3 + 11x^7 - 9$ b) $6x^2 + 3x$ c) $12x^6 - 9x^8 + 3$

5. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 2$ y $x = 1$:

a) $P(x) = 4x^2 - 5x + 5$

b) $Q(x) = 5x^3 - 12x + 14$

c) $R(x) = 2x^4 + 4x^2 - 5x + 6$

3.

a) $4x^4 - 5x^3 + 7x^4 + 3x^2 - 2x^3 + 12x - 7x^2 + 23 = 11x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 12x + 23$

b) $5x^3 + 6x^7 + 2x^3 - 12x^2 + 4 + 12x - 4x^2 = 6x^7 + 7x^3 - 16x^2 + 12x + 4$

c) $5x^{11} + 7x^3 - x^{11} + 8x^3 + 9x^2 - 2x + 45x - 24 = 4x^{11} + 15x^3 + 9x^2 + 43x - 24$

4.

a) Grado 7

b) Grado 2

c) Grado 8

5.

a) $p(2) = 4{\cdot}2^2 - 5{\cdot}2 + 5 = 16 - 10 + 5 = 11$

$p(1) = 4{\cdot}1^2 - 5{\cdot}1 + 5 = 4 - 5 + 5 = 4$

b) $q(2) = 5{\cdot}2^3 - 12{\cdot}2 + 14 = 40 - 24 + 14 = 30$

$q(1) = 5{\cdot}1^3 - 12{\cdot}1 + 14 = 5 - 12 + 14 = 7$

c) $R(2) = 2{\cdot}2^4 + 4{\cdot}2^2 - 5{\cdot}2 + 6 = 32 + 16 - 10 + 6 = 44$

$R(1) = 2{\cdot}1^4 + 4{\cdot}1^2 - 5{\cdot}1 + 6 = 2 + 4 - 5 + 6 = 7$

ACTIVIDADES PAG. 72

ACTIVIDADES

6. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(2a + 3b + 4ab - 5ab^2) + (3a - 4b + 2ab + 9ab^2)$

b) $(1 + xy - y + 2x - 5x^2y + 8xy^2) + (2 - 3xy + 4y - 7x + 23x^2y - 6xy^2)$

c) $(0'2x + 3 - 2'4x^2 + 9x^3) + (1'8x - 2 - 0'6x^2 - 5x^3)$

7. Sean $F(x) = 2 - x^2 + 6x^4$, $G(x) = 9 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + 12x^4$, $H(x) = 6 + 5x - 12x^4$, realiza las siguientes operaciones:

a) $F(x) + G(x)$ c) $F(x) - H(x)$ e) $G(x) + H(x)$ g) $-H(x) + G(x)$

b) $F(x) - G(x)$ d) $F(x) + H(x)$ f) $H(x) - G(x)$ h) $H(x) - F(x)$

8. Realiza las siguientes operaciones de polinomios:

a) $(2x + 3y - 5z) + (4x - 5y + 4z)$

b) $(2a - 12b + 14c) - (3a + 13b - 15c)$

6.

a) $(2a + 3b + 4ab - 5ab^2) + (3a - 4b + 2ab + 9ab^2) = 5a - b + 6ab + 4ab^2$

b)

$(1 + xy - y + 2x - 5x^2y + 8xy^2) + (2 - 3xy + 4y - 7x + 23x^2y - 6xy^2) =$

$3 - 2xy + 3y - 5x + 18x^2y + 2xy^2$

c) $(0'2x + 3 - 2'4x^2 + 9x^3) + (1'8x - 2 - 0'6x^2 - 5x^3) = 2x + 1 - 3x^2 + 4x^3$

7.

a)

$F(x) + G(x) = (2 - x^2 + 6x^4) + (9 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + 12x^4) =$

$= 11 - 3x + 3x^2 - 5x^3 + 18x^4$

b)

$F(x) - G(x) = (2 - x^2 + 6x^4) - (9 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + 12x^4) =$

$= -7 + 3x - 5x^2 + 5x^3 - 6x^4$

c)

$F(x) - H(x) = (2 - x^2 + 6x^4) - (6 + 5x - 12x^4) =$

$= -4 - 5x - x^2 + 18x^4$

d)

$F(x) + H(x) = (2 - x^2 + 6x^4) + (6 + 5x - 12x^4) =$

$= 8 + 5x - x^2 - 6x^4$

e)

$G(x) + H(x) = (9 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + 12x^4) + (6 + 5x - 12x^4) =$

$= 15 + 2x + 4x^2 - 5x^3$

f)

$$H(x)-G(x)=\left(6+5x-12x^4\right)-\left(9-3x+4x^2-5x^3+12x^4\right)=$$
$$=-3+8x-4x^2+5x^3-24x^4$$

g)

$$-H(x)+G(x)=-\left(6+5x-12x^4\right)+\left(9-3x+4x^2-5x^3+12x^4\right)=$$
$$=3-8x+4x^2-5x^3+24x^4$$

h)

$$H(x)-F(x)=\left(6+5x-12x^4\right)-\left(2-x^2+6x^4\right)=$$
$$=4+5x+x^2-18x^4$$

8.

a) $(2x+3y-5z)+(4x-5y+4z)=6x-2y-z$

b) $(2a-12b+14c)-(3a+13b-15c)=-a-25b+29c$

ACTIVIDADES PAG. 73

ACTIVIDADES

9. Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $x^2y \cdot xy^2$ b) $3a^2b \cdot 4ab^3c$ c) $4x^3y^2 \cdot 6xy^4$ d) $4ax^2 \cdot 5a^4x^3$

10. Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $4x^2(2x^2+3x-4)$ b) $3x(9x^3-6x+2)$ c) $5x^3(8x-12x-3)$

11. Con $F(x)=4x+5$, $G(x)=3x^2-2x+1$ y $H(x)=3x-7$, calcula:

a) $F(x) \cdot G(x)$ b) $F(x) \cdot H(x)$ c) $G(x) \cdot H(x)$

12. Saca factor común en las siguientes expresiones:

a) x^6-x^4 b) $6a^7-3a^3+9a^2$ c) $12x^5y^6z^3-6x^3y^5z^4+18x^4y^4z^5$

9.

a) $x^2y \cdot xy^2=x^3y^3$

b) $3a^2b \cdot 4ab^3c=12a^3b^4c$

c) $4x^3y^2 \cdot 6xy^4=24x^4y^6$

d) $4ax^2 \cdot 5a^4x^3=20a^5x^5$

10.

a) $4x^2\left(2x^2+3x-4\right)=8x^4+12x^3-16x^2$

b) $3x\left(9x^3-6x+2\right)=27x^4-18x^2+6x$

c) $5x^3(8x-12x-3)=5x^3(-4x-3)=-20x^4-15x^3$

11.

a)

$$F(x) \cdot G(x)=(4x+5)\left(3x^2-2x+1\right)=$$
$$12x^3-8x^2+4x+15x^2-10x+5=12x^3+7x^2-6x+5$$

b) $F(x) \cdot H(x)=(4x+5)(3x-7)=12x^2-28x+15x-35=12x^2-13x-35$

c)

$$G(x) \cdot H(x)=\left(3x^2-2x+1\right)(3x-7)=$$
$$9x^3-21x^2-6x^2+14x+3x-7=9x^3-27x^2+17x-7$$

12.

a) $x^6 - x^4 = x^4(x^2 - 1)$

b) $6a^7 - 3a^3 + 9a^2 = 3a^2\left(2a^5 - a + 3\right)$

c) $12x^5y^6z^3 - 6x^3y^5z^4 + 18x^4y^4z^5 = 6x^3y^4z^3\left(2x^2y^2 - yz + 3xz^2\right)$

ACTIVIDADES PAG. 74

ACTIVIDADES

13. Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(9x - 4)^2$ c) $(x - 8)^2$ e) $(x^2 + 6)^2$

b) $(4x + 5)^2$ d) $(4x - 7) \cdot (4x + 7)$ f) $(x + 1) \cdot (x - 1)$

14. Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(x + 1) - (x - 1)^2$ c) $(x + 2) - (x - 1) \cdot (x + 1)$

b) $(2x + y)^2 - (y - 2x)^2$ d) $(x - 2x) \cdot (x + 2) + (x - 3x)^2$

13.

a) $(9x - 4)^2 = 81x^2 - 72x + 16$

b) $(4x + 5)^2 = 16x^2 + 40x + 25$

c) $(x - 8)^2 = x^2 - 16x + 64$

d) $(4x - 7)\cdot(4x + 7) = 16x^2 - 49$

e) $\left(x^2 + 6\right)^2 = x^4 + 12x^2 + 36$

f) $(x + 1)\cdot(x - 1) = x^2 - 1$

14.

a) $(x + 1) - (x - 1)^2 = x + 1 - \left(x^2 - 2x + 1\right) = x + 1 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 3x$

b)

$(2x + y)^2 - (y - 2x)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 - \left(y^2 - 4xy + 4x^2\right) =$

$4x^2 + 4xy + y^2 - y^2 + 4xy - 4x^2 = 8xy$

c) $(x + 2) - (x - 1)\cdot(x + 1) = x + 2 - \left(x^2 - 1\right) = x + 2 - x^2 + 1 = -x^2 + x + 3$

d) $(x - 2x)(x + 2) + (x - 3x)^2 = -x(x + 2) + (-2x)^2 = -x^2 - 2x + 4x^2 = 3x^2 - 2x$

ACTIVIDADES PAG. 75

ACTIVIDADES

15. Las siguientes expresiones son identidades notables desarrolladas. Exprésalas en su forma más reducida:

a) $4x^2 - 16x + 16$ c) $\frac{x^2}{9} - 9$ d) $25x^2 + 60x + 36$

b) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ d) $x^2 - 4xy + 4y^2$ f) $2x^2 - 16$

15.

a) $4x^2 - 16x + 16 = (2x - 4)^2$

b) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

c) $\dfrac{x^2}{9} - 9 = \left(\dfrac{x}{3} - 3\right)\left(\dfrac{x}{3} + 3\right)$

d) $x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2$

e) $25x^2 + 60x + 36 = (5x + 6)^2$

f) $2x^2 - 16 = \left(\sqrt{2}x + 4\right)\left(\sqrt{2}x - 4\right)$

ACTIVIDADES PAG. 76

ACTIVIDADES

16. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{12x^3y^5}{4}$ b) $\dfrac{-30a^6b^3}{6}$ c) $\dfrac{75x^4}{25x^3}$ d) $\dfrac{-36ab^4}{-4ab^3}$ e) $\dfrac{-24x^4a^3b^5}{12ab^4}$

17. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas sacando, previamente, factor común:

a) $\dfrac{ax + ay^2}{ab^2 - a^2}$ c) $\dfrac{14x^4y^3z^2 - 28x^3y^4z^3}{7x^2y^3z^5 - 21x^5y^4z^3}$

b) $\dfrac{x + x^2}{x^2y - x}$ d) $\dfrac{2a^2 + 6ab^3}{10ab^2 + 8a^4}$

18. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas haciendo uso de las identidades notables siempre que sea necesario:

a) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b}$ c) $\dfrac{6a^2 - 12ab + 6b^2}{12a - 12b}$

b) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$ d) $\dfrac{ax + x - a - 1}{a - 1}$

16.

a) $\dfrac{12x^3y^5}{4} = 3x^3y^5$

b) $\dfrac{-30a^6b^3}{6} = -5a^6b^3$

c) $\dfrac{75x^4}{25x^3} = 3x$

d) $\dfrac{-36ab^4}{-4ab^3} = 9b$

e) $\dfrac{-24x^4a^3b^5}{12ab^4} = -2x^4a^2b$

17.

a) $\dfrac{ax + ay^2}{ab^2 - a^2} = \dfrac{\cancel{a}\left(x + y^2\right)}{\cancel{a}\left(b^2 - a\right)} = \dfrac{x + y^2}{b^2 - a}$

b) $\dfrac{x + x^2}{x^2y - x} = \dfrac{\cancel{x}(1 + x)}{\cancel{x}(xy - 1)} = \dfrac{1 + x}{xy - 1}$

c) $\dfrac{14x^4y^3z^2-28x^3y^4z^3}{7x^2y^3z^5-21x^5y^4z^3}=\dfrac{14x^3y^3z^2(x-2yz)}{7x^2y^3z^3(z^2-3x^3y)}=\dfrac{2x(x-2yz)}{z(z^2-3x^3y)}$

d) $\dfrac{2a^2+6ab^3}{10ab^2+8a^4}=\dfrac{2a(a+3b^3)}{2a(5b^2+4a^3)}=\dfrac{a+3b^3}{5b^2+4a^3}$

18.

a) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)}=a+b$

b) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}=\dfrac{a+b}{a-b}$

c) $\dfrac{6a^2-12ab+6b^2}{12a-12b}=\dfrac{6(a^2-2ab+b^2)}{12(a-b)}=\dfrac{(a-b)^2}{2(a-b)}=\dfrac{a-b}{2}$

d) $\dfrac{ax+x-a-1}{a-1}=\dfrac{x(a+1)-(a+1)}{a-1}=\dfrac{(a+1)(x-1)}{a-1}$

ACTIVIDADES PAG. 77

ACTIVIDADES

19. Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^2+12x+4):(x-2)$

b) $(x^3-1):(x-1)$

c) $(4x^4+4x^2+1):(2x^2+2x+1)$

d) $(3x^4+2x^3+5x-17):(x^2-2x-1)$

e) $(9x^2-13x+12):(x-3)$

f) $(2x^3+6x^2-7x+2):(2x^2-5)$

g) $(14x^4-15x^3-16x^2+17x+5):(2x^2-x-2)$

19.

a)

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +\ 12x & +\ 4 & x\ -\ 2 \\ \cline{4-4} -x^2 & +\ 2x & & x+14 \\ \hline & 14x & +\ 4 & \\ & -14x & +28 & \\ \hline & & 32 & \end{array}$$

b)

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad - \quad 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + x^2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{1-1}
x^2 & \\
-x^2 + x & \\ \cline{1-1}
x - 1 & \\
-x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 \quad + \quad 4x^2 \quad + \quad 1 & 2x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-4x^4 - 4x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 2x + 3 \\ \cline{1-1}
-4x^3 + 2x^2 & \\
4x^3 + 4x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
6x^2 + 2x + 1 & \\
-6x^2 - 6x - 3 & \\ \cline{1-1}
-4x - 2 &
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 + 2x^3 + \quad 5x - 17 & x^2 - 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-3x^4 + 6x^3 + 3x^2 & 3x^2 + 8x + 19 \\ \cline{1-1}
8x^3 + 3x^2 + 5x & \\
-8x^3 + 16x^2 + 8x - 17 & \\ \cline{1-1}
19x^2 + 13x - 17 & \\
-19x^2 + 38x + 19 & \\ \cline{1-1}
51x + 2 &
\end{array}
$$

e)

$$
\begin{array}{l|l}
9x^2 - 13x + 12 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-9x^2 + 27x & 9x + 14 \\ \cline{1-1}
14x + 12 & \\
-14x + 42 & \\ \cline{1-1}
54 &
\end{array}
$$

f)

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + 6x^2 - 7x + 2 & 2x^2 - 5 \\ \hline
\underline{-2x^3 \qquad\quad + 5x} & x + 3 \\
\qquad 6x^2 - 2x + 2 & \\
\qquad \underline{-6x^2 \qquad + 15} & \\
\qquad\qquad -2x + 17 &
\end{array}
$$

g)

$$
\begin{array}{l|l}
14x^4 - 15x^3 - 16x^2 + 17x + 5 & 2x^2 - x - 2 \\ \hline
\underline{-14x^4 + 7x^3 + 14x^2} & 7x^2 - 4x - 3 \\
\qquad -8x^3 - 2x^2 + 17x & \\
\qquad \underline{8x^3 - 4x^2 - 8x + 5} & \\
\qquad\qquad -6x^2 + 9x + 5 & \\
\qquad\qquad \underline{6x^2 - 3x - 6} & \\
\qquad\qquad\qquad 6x - 1 &
\end{array}
$$

DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 78

Desafío matemático

Aplicaciones de los polinomios

El estudio de las matemáticas se realiza en ocasiones de forma muy parcial, desconectado de la realidad. Cuando estudiamos los polinomios, muchas veces pensamos que son solo una herramienta para plantear y resolver ecuaciones. Sin embargo, sus aplicaciones son numerosas; su estudio es fundamental para modelizar situaciones que nos permitirán resolver diversos problemas. Por ejemplo, podemos calcular el área de un cuadrado de 2 m de lado y deducimos que es 4 m^2. Si realizamos la misma operación para calcular el área de un cuadrado de 3 m de lado, obtenemos que su área es 9 m^2. Siguiendo con este razonamiento, deducimos que el área de un cuadrado de x m de lado es x^2 metros cuadrados. Y aquí aparece de forma natural un polinomio de segundo grado.

1. Si tenemos un cubo de 2 m de lado, ¿cuál será su volumen?
2. Escribe en forma de polinomio la expresión del volumen de un cubo de x m de lado.

La casa

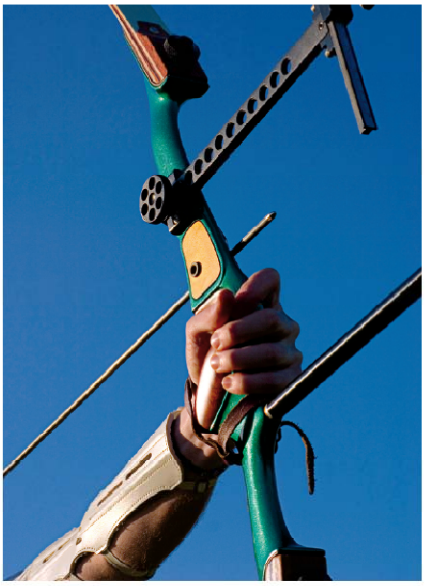
Queremos construir una casa que mida 5 metros más de largo que de ancho.

1. ¿Podrías hacer un mapa esquemático indicando de forma algebraica las medidas de la planta de la casa?
2. Expresa en forma algebraica la superficie de la casa.
3. Expresa en forma de polinomio el volumen de la casa si mide 2 metros menos de alto que de ancho.

El tiro parabólico

El disparo de una flecha con un arco describe una curva llamada parábola. Esta es una expresión polinómica de segundo grado. Si tenemos ajustado nuestro disparo según la siguiente expresión polinómica:

$$f(x) = -x^2 + 4x$$



1. Haz un dibujo de la gráfica que represente la función sobre un eje de coordenadas.
2. Supongamos que la diana se encuentra en el punto (4, 0), ¿desde qué posición debemos efectuar el disparo para dar en el blanco?
3. Teniendo en cuenta que cada punto de nuestro sistema de coordenadas representa 100 metros: ¿alcanzaremos el objetivo en (4, 0) si entre los puntos (1, 0) y (3, 0) tenemos una colina de 200 metros de altura?
4. Supongamos que hemos localizado un naufrago en la posición (5, –5). Si desde un avión enviamos un paracaídas con víveres. ¿Le llegará al naufrago si se lanza desde la posición (2, 6), siguiendo la expresión parabólica $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ en la que ascendemos 200 metros sobre la parábola anterior?
5. ¿Llegarán los víveres si se lanzan desde la posición (2, 4) de la parábola $f(x) = -x^2 + 4x$?

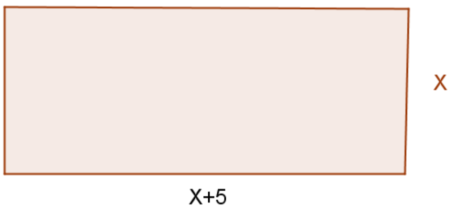
Aplicaciones de los polinomios

1. 2^3

2. x^3

La casa

1.

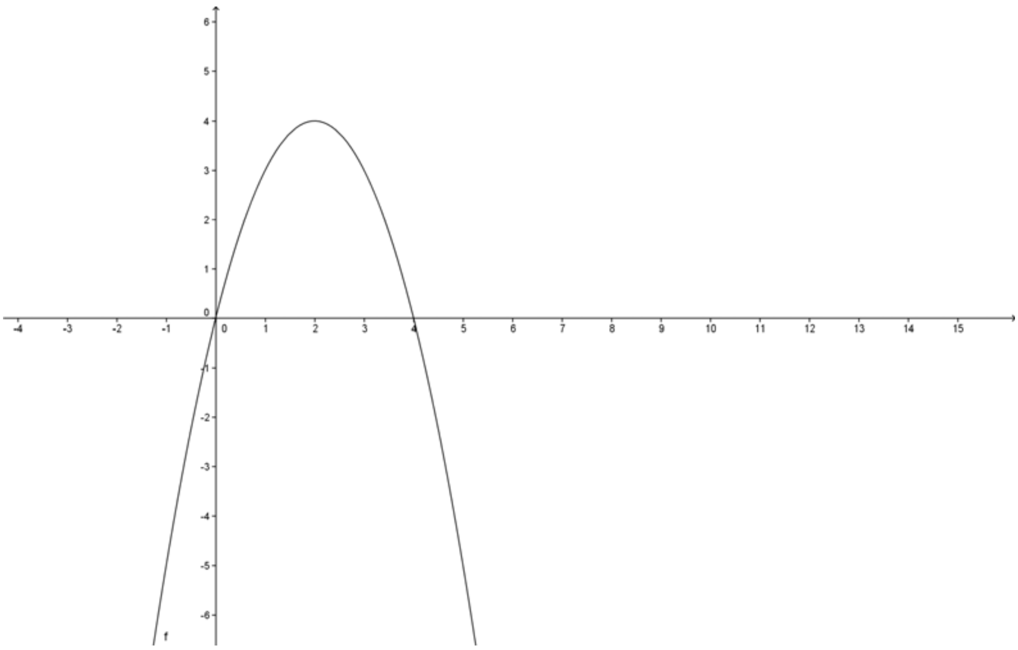


2. $x \cdot (x + 5)$

3. $x \cdot (x + 3) \cdot (x + 5)$

El tiro parabólico

1.



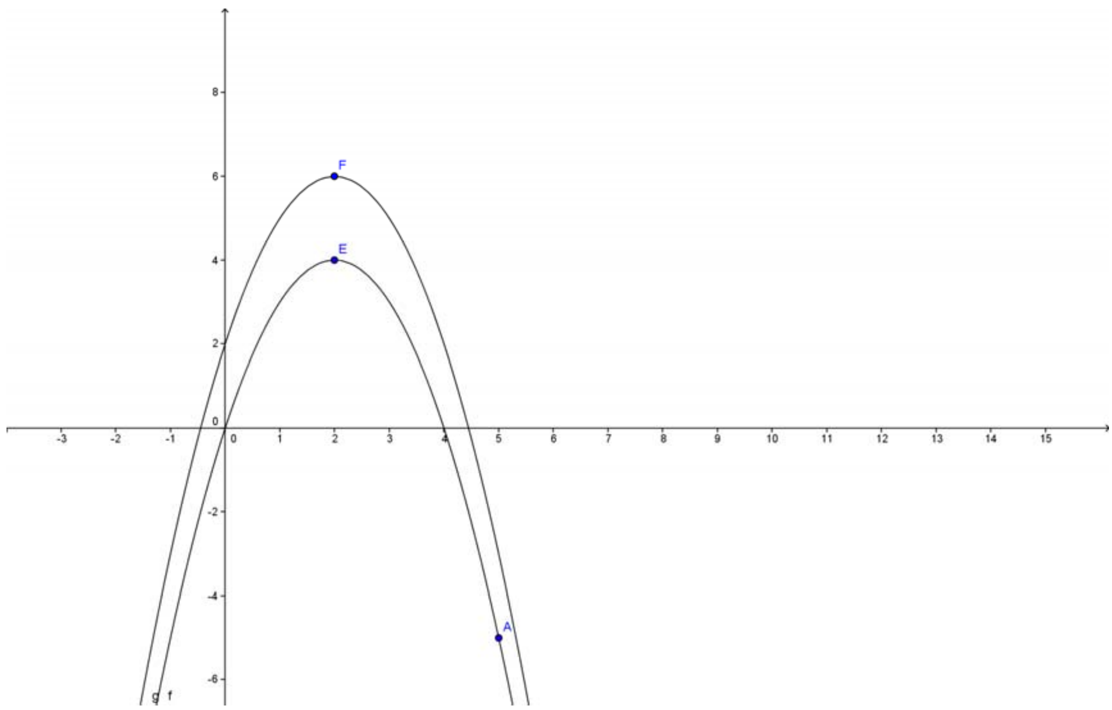
2. En posición $(0{,}0)$.

3. Sí, porque la trayectoria se encuentra 100 metros más alta que la colina.

4. Llamemos A al punto $(5, -5)$.

Los víveres no llegarán si se lanzan desde el punto $F(2{,}6)$, porque el punto A no pertenece a la parábola $f(x) = -x^2 + 4x + 2$.

En efecto, $f(5) = -5^2 + 4 \cdot 5 + 2 = -25 + 20 + 2 = -3 \neq -5$



Se ve claramente en la gráfica que el punto $(5,-5)$ no pertenece a la función $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

5. Si se lanzan los víveres desde el punto $E(2{,}4)$, llegarán al punto $A(5,-5)$ pues ambos pertenecen a la misma función $f(x) = -x^2 + 4x$

ACTIVIDADES FINALES PAG. 80

EJERCICIOS

Operaciones con monomios

20. Realiza las siguientes operaciones entre monomios:

a) $3x + 2x - 8x$
b) $-4x^2 - 5x^2 + x^2$
c) $4x^4 + \frac{1}{2}x^4 - 5x^4$
d) $-\frac{2}{3}x^3 + 5x^3 - \frac{1}{2}x^3$

21. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $2x^3 \cdot 5x$
b) $3a^4 \cdot 4a^4 \cdot 2a^2$
c) $5xy^2 \cdot 4x^2y^3 \cdot 2xy$
d) $-3x^2y \cdot 4xy^4z$
e) $-5a^3xb \cdot (-7ax^4b^5)$
f) $2s^4 \cdot 4xs^2 \cdot 3ax^5$

22. Divide los siguientes monomios:

a) $30a^7 : 15a^4$
b) $12x^3y^5 : 3x^2y^3$
c) $(14x^5 - 7x^3) : 7x^2$
d) $36ab^5c^3 : 12ab^4c^2$
e) $(2a^3 - 4a^4 + 6a^6) : 2a^2$
f) $(15a^8 - 3a^5) : 6a^2$

Polinomios: sumas y restas

23. Dado el polinomio $P(x) = 3x^2 - 4$, calcula el valor de $P(a)$ para los valores $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ y $a = 3$.

24. Dados $F(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $G(x) = x^2 + 2x - 1$ y $H(x) = 5x^2 - 3x + 7$, calcula:

a) $F(x) + G(x)$
b) $F(x) - G(x)$
c) $-F(x) - G(x)$
d) $2F(x) + 2G(x) - 3H(x)$
e) $H(x) - 5G(x)$
f) $F(x) + G(x) - H(x)$

25. Dados:

$$F(x) = 3x^4 - 5x^2 + 4x - 3$$
$$G(x) = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 7$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $F(x) + G(x)$
b) $F(x) - G(x)$
c) $-F(x) - G(x)$
d) $G(x) - F(x)$

26. Opera y simplifica:

a) $(2x + 3x^2 - 7x^3) + (1 + 4x - 5x^2 + 9x^3 - 4x^4)$
b) $(9 + 5x - 3x^2 + 9x^3) + (-3 - 4x - 5x^2 + 4x^3)$
c) $(2 + a + 3a^2) - (9 - 5a + 23a^2)$
d) $(8 - 3a + 16a^2 + 6a^3) + (-9 - 3a + 5a^2)$

27. Sean:

$$F(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$
$$G(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 9$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $F(x) + G(x)$
b) $-F(x) + G(x)$
c) $F(x) - G(x)$
d) $G(x) - F(x)$

28. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{1}{2} - 3x^2 + \frac{7}{3}x^3\right) - \left(\frac{5}{2} + 9x - 6x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$

b) $\left(2 - 4x + \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{8}x^3\right) + \left(3 + 9x + \frac{6}{5}x^2 - \frac{13}{8}x^3\right)$

c) $\left(4 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^2\right) - \left(3 + \frac{11}{2}x - \frac{11}{3}x^2\right)$

29. Opera y simplifica:

a) $(6a - 4x) - (12x - 7y) + (6z - 3a + 12y)$
b) $(5y - 3x) + (7a - 8x) - (7y - 3a)$
c) $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab^2\right) - \left(\frac{7}{2}a^2 - \frac{1}{2}ab^2\right)$

Simplificación de polinomios

30. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $4ax^2 - 8a^2x + 4b + 3ax^2 + 7b - a^2x$
b) $3x - 5b + 7x - 3b + 13b - 22x$
c) $(3a^2b - 5a^3 + 4ab^2 - 8a^2b) - (4a^2b + 4a^3 - 6ab^2 + 9a^2b)$
d) $(12x^3y^2 + 5x^2y^3 - 7y^3) - (2x^2y^3 + 5y^3 - 2x^3y)$

31. Realiza las siguientes sumas y simplifica:

a) $(12xy^4 - 3x^4y) - (5x^4y - 4xy^4) + (6x^4y - 8xy^4)$
b) $(12a^2c - 3ab^2) - (+14ab^2 - 5a^2b) - (2ab^2 - a^2c)$
c) $(9y^2 - 5ax) + (4y^2 - 9ax) - (3ax - 14y^2)$
d) $(9ab + 8ac - 5bc) + (4ac - 4bc + 12ab)$
e) $-(4bc + 12ab) - (7bc + ac - 3ab)$

32. Elimina los paréntesis y reduce:

a) $(8x - y - z) + (9x - 3y + 6z) - (4x + 4y - 12z)$
b) $3(x^2 - 3x + 4) - 8(2x^2 + 5x + 12)$
c) $x - [(5y - z) - (-x + 2z)]$
d) $3ab - [2xy - (4ab - 5xy)] - [9ab - 3(2xy - 7ab)]$

80 UNIDAD 4

20.

a) $3x + 2x - 8x = -3x$

b) $-4x^2 - 5x^2 + x^2 = -8x^2$

c) $4x^4 + \frac{1}{2}x^4 - 5x^4 = -\frac{1}{2}x^4$

d) $-\frac{2}{3}x^3 + 5x^3 - \frac{1}{2}x^3 = \frac{23}{6}x^3$

21.

a) $2x^3 \cdot 5x = 10x^4$

b) $3a^4 \cdot 4a^4 \cdot 2a^2 = 24a^{10}$

c) $5xy^2 \cdot 4x^2y^3 \cdot 2xy = 40x^4y^6$

d) $-3x^2y \cdot 4xy^4z = -12x^3y^5z$

e) $-5a^3xb \cdot \left(-7ax^4b^5\right) = 35a^4x^5b^6$

f) $2s^4 \cdot 4xs^2 \cdot 3ax^5 = 24s^6ax^6$

22.

a) $30a^7 : 15a^4 = 2a^3$

b) $12x^3y^5 : 3x^2y^3 = 4xy^2$

c) $\left(14x^5 - 7x^3\right) : 7x^2 = \dfrac{7x^3\left(2x^2 - 1\right)}{7x^2} = x\left(2x^2 - 1\right)$

d) $36ab^5c^3 : 12ab^4c^2 = 3bc$

e) $\left(2a^3 - 4a^4 + 6a^6\right) : 2a^2 = \dfrac{2a^3\left(1 - 2a + 3a^3\right)}{2a^2} = a\left(1 - 2a + 3a^3\right)$

f) $\left(15a^8 - 3a^5\right) : 6a^2 = \dfrac{3a^5\left(5a^3 - 1\right)}{6a^2} = \dfrac{a^3\left(5a^3 - 1\right)}{2}$

23.

Si a = 0 $\Rightarrow$ $p(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$

Si a = 1 $\Rightarrow$ $p(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 = 3 - 4 = -1$

Si a = -1 $\Rightarrow$ $p(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 4 = 3 - 4 = -1$

Si a = 3 $\Rightarrow$ $p(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 = 27 - 4 = 23$

24 .

a) $F(x) + G(x) = \left(2x^2 - 3x + 1\right) + \left(x^2 + 2x - 1\right) = 3x^2 - x$

b) $F(x) - G(x) = \left(2x^2 - 3x + 1\right) - \left(x^2 + 2x - 1\right) = x^2 - 5x + 2$

c) $-F(x) - G(x) = -\left(2x^2 - 3x + 1\right) - \left(x^2 + 2x - 1\right) = -3x^2 + x$

d)

$$2F(x) + 2G(x) - 3H(x) = 2\left(2x^2 - 3x + 1\right) + 2\left(x^2 + 2x - 1\right) - 3\left(5x^2 - 3x + 7\right) =$$
$$4x^2 - 6x + 2 + 2x^2 + 4x - 2 - 15x^2 + 9x - 21 = -9x^2 + 7x - 21$$

e)

$$H(x) - 5G(x) = 5x^2 - 3x + 7 - 5\left(x^2 + 2x - 1\right) =$$
$$5x^2 - 3x + 7 - 5x^2 - 10x + 5 = -13x + 12$$

f)

$$F(x) + G(x) - H(x) = \left(2x^2 - 3x + 1\right) + \left(x^2 + 2x - 1\right) - \left(5x^2 - 3x + 7\right) =$$
$$= -2x^2 + 2x - 7$$

25.

a)

$$F(X)+G(x)=\left(3x^4-5x^2+4x-3\right)+\left(2x^4-4x^3+5x^2-8x+7\right)=$$
$$=5x^4-4x^3-4x+4$$

b)

$$F(X)-G(x)=\left(3x^4-5x^2+4x-3\right)-\left(2x^4-4x^3+5x^2-8x+7\right)=$$
$$=x^4+4x^3-10x^2+12x-10$$

c)

$$-F(X)-G(x)=-\left(3x^4-5x^2+4x-3\right)-\left(2x^4-4x^3+5x^2-8x+7\right)=$$
$$=-5x^4+4x^3+4x-4$$

d)

$$G(x)-F(x)=\left(2x^4-4x^3+5x^2-8x+7\right)-\left(3x^4-5x^2+4x-3\right)=$$
$$=-x^4-4x^3+10x^2-12x+10$$

26.

a) $\left(2x+3x^2-7x^3\right)+(1+4x-5x^2+9x^3-4x^4)=1+6x-2x^2+2x^3-4x^4$

b) $\left(9+5x-3x^2+9x^3\right)+(-3-4x-5x^2+4x^3)=6+x-8x^2+13x^3$

c) $\left(2+a+3a^2\right)-(9-5a+23a^2)=-7+6a-20a^2$

d) $\left(8-3a+16a^2+6a^3\right)+(-9-3a+5a^2)=-1-6a+21a^2+6a^3$

27.

a) $F(x)+G(x)=\left(2x^3-4x^2+5x-6\right)+\left(x^3+5x^2-7x+9\right)=3x^3+x^2-2x+3$

b)

$$-F(x)+G(x)=-\left(2x^3-4x^2+5x-6\right)+\left(x^3+5x^2-7x+9\right)=$$
$$-2x^3+4x^2-5x+6+3x^3+x^2-2x+3=x^3+5x^2-7x+9$$

c)

$$F(x)-G(x)=\left(2x^3-4x^2+5x-6\right)-\left(x^3+5x^2-7x+9\right)=$$
$$x^3-9x^2+12x-15$$

d)

$$G(x)-F(x)=\left(x^3+5x^2-7x+9\right)-\left(2x^3-4x^2+5x-6\right)=$$
$$-x^3+9x^2-12x+15$$

28.

a) $\left(\frac{1}{2}-3x^2+\frac{7}{3}x^3\right)-\left(\frac{5}{2}+9x-6x^2-\frac{1}{3}x^3\right)=-2-9x+3x^2+\frac{8}{3}x^3$

b) $\left(2-4x+\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{8}x^3\right)+\left(3+9x+\frac{6}{5}x^2-\frac{13}{8}x^3\right)=5+5x+2x^2-2x^3$

c) $\left(4+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^2\right)-\left(3+\frac{11}{2}x-\frac{11}{3}x^2\right)=1-5x+3x^2$

29.

a) $\left(6a-4x\right)-\left(12x-7y\right)+\left(6z-3a+12y\right)=3a-16x+19y+6z$

b) $\left(5y-3x\right)+\left(7a-8x\right)-(7y-3a)=10a-11x-2y$

c) $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}ab^2\right)-\left(\frac{7}{2}a^2-\frac{1}{2}ab^2\right)=-3a^2+\frac{1}{6}ab^2$

30.

a) $4ax^2-8a^2x+4b+3ax^2+7b-a^2x=7ax^2-9a^2x+11b$

b) $3x-5b+7x-3b+13b-22x=-12x+5b$

c)

$$\left(3a^2b-5a^3+4ab^2-8a^2b\right)-\left(4a^2b+4a^3-6ab^2+9a^2b\right)=$$
$$\left(-5a^2b-5a^3+4ab^2\right)-\left(13a^2b+4a^3-6ab^2\right)=$$
$$-5a^2b-5a^3+4ab^2-13a^2b-4a^3+6ab^2=-18a^2b-9a^3+10ab^2$$

d)

$$\left(12x^3y^2+5x^2y^3-7y^3\right)-\left(2x^2y^3+5y^3-2x^3y\right)=$$
$$12x^3y^2+5x^2y^3-7y^3-2x^2y^3-5y^3+2x^3y=$$
$$14x^3y^2+3x^2y^3-12y^3$$

31.

a)

$$\left(12xy^4-3x^4y\right)-\left(5x^4y-4xy^4\right)+\left(6x^4y-8xy^4\right)=$$
$$12xy^4-3x^4y-5x^4y+4xy^4+6x^4y-8xy^4=8xy^4-2x^4y$$

b)

$$\left(12a^2c-3ab^2\right)-\left(+14ab^2-5a^2b\right)-\left(2ab^2-a^2c\right)=$$
$$12a^2c-3ab^2-14ab^2+5a^2b-2ab^2+a^2c=$$
$$13a^2c-19ab^2+5a^2b$$

c)

$$\left(9y^2-5ax\right)+\left(4y^2-9ax\right)-\left(3ax-14y^2\right)=$$
$$9y^2-5ax+4y^2-9ax-3ax+14y^2=27y^2-17ax$$

d) $\left(9ab+8ac-5bc\right)+\left(4ac-4bc+12ab\right)=21ab+12ac-9bc$

e)

$$-\left(4bc+12ab\right)-\left(7bc+ac-3ab\right)=-4bc-12ab-7bc-ac+3ab=-11bc-9ab-ac$$

32.

a)

$$\left(8x-y-z\right)+\left(9x-3y+6z\right)-\left(4x+4y-12z\right)=$$
$$8x-y-z+9x-3y+6z-4x-4y+12z=13x-8y+17z$$

b)

$$3\left(x^2-3x+4\right)-8\left(2x^2+5x+12\right)=3x^2-9x+12-16x^2-40x-96=$$
$$=-13x^2-49x-84$$

c)

$$x-\left[(5y-z)-(-x+2z)\right]=x-(5y-z+x-2z)=$$
$$=x-(x+5y-3z)=x-x-5y+3z=-5y+3z$$

d)

$$3ab-\left[2xy-(4ab-5xy)\right]-\left[9ab-3(2xy-7ab)\right]=$$
$$3ab-(2xy-4ab+5xy)-(9ab-6xy+21ab)=$$
$$3ab-2xy+4ab-5xy-9ab+6xy-21ab=-23ab-xy$$

---

33. Realiza las siguientes operaciones de polinomios:

a) $(-4a+b-2c)-(-2a-5b-c)+(3a+2b-5c)$

b) $(1+2x-3y)-(8-3x+4y)-(5-9x+8y)$

c) $(5a-3b)-(8a+4b)$

d) $(x^4-2x)-(3x^4-8x-5)$

34. Realiza las siguientes sumas y simplifica:

a) $(5ab-3ac+4bc)+(6ab+4ac-9bc)$

b) $(12ax-4by+z)+(8ax+9by-12z)$

c) $(25ay^2-3ax^2+9x^2y^2)+(12ay^2+9ax^2-4x^2y^2)$

d) $(4ab^2-5a^2b+7a^2b)+(8a^2b-7ab^2)$

35. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5-3yx+4y^2-9cx)-(8+5cx-3yx+4y^2)$

b) $\left[(3+x-5x^2)-(6-9x-x^2)\right]+(-3x+4x^2)$

c) $(3ax+7a^2x-3a^2x^2)+(2ax-5a^2x+12a^2x^2)-$
$-(4ax-a^2x+5a^2x^2)$

d) $(9-8by+zc^2)-(2by-9zc^2)+(3+4by-12zc^2)$

36. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(2az-9b^2z+12a^4x^3)-(5az-6b^2z+a^4x^3)+$
$+(12az+4b^2z+2a^4x^3)$

b) $(7a^5b-8a^2b^3+7)+(-3a^5b-6a^2b^3+6)+$
$+(-5a^5b+9a^2b^3+1)-(-9a^5b-8a^2b^3-8)$

c) $(2-3bx^4+8b^3x^3)-(12+5bx^4-2b^3x^3)+$
$+(-1+6bx^4-12b^3x^3)$

d) $(3+axb-8bx^4y^3)-(2+2axb-10bx^4y^3)+$
$+(4+5axb+3bx^4y^3)$

37. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(6ab-15b^2x+3c^2z-2ab)-(9ab-9c^2z+3b^2x)-$
$-(ab-4c^2z)$

b) $(9a^4c-6a^2c)-(8a^2c-9a^4c)$

c) $2(x^3-3x^2y+5xy^2-7y^3)+3(2x^3-5x^2y-2xy^2+3y^3)$

d) $4(-az^3+3a^2z^2-5a^3z+6z^4)-2(az^3-4a^2z^2-a^3z-2z^4)$

Producto de polinomios

38. Realiza las siguientes multiplicaciones:

a) $(2x^2-x+5)\cdot(x-3)$

b) $(x^2-5x+3)\cdot(4x-5)$

c) $(x^2-5)\cdot(2x^3-4)$

d) $(4x^2-9x+1)\cdot(7x-2)$

39. Sean $F(x)=3x^2+x-2$, $G(x)=4x^3-5$, realiza las siguientes operaciones:

a) $F(x)\cdot G(x)$

b) $2F(x)-3G(x)$

c) $3F(x)-5G(x)$

d) $F(x)+G(x)-2F(x)\cdot G(x)$

40. Multiplica los siguientes polinomios:

a) $(3x^2y+5y-3x)\cdot(xy^2-2y+4x)$

b) $(-6x^2+5by+4ac)\cdot(2by+ax)$

c) $(9a+3b+4c)(2ab+3bc)$

d) $(-3x^3y)\cdot(2x+4y-5xy^2)$

41. Si definimos $F(x)=2x+3$, $G(x)=3x^2-3x+1$, $H(x)=5x^2-8x-3$, realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $F(x)\cdot G(x)$

b) $F(x)\cdot H(x)$

c) $G(x)\cdot H(x)$

d) $(2x^2)\cdot F(x)-3G(x)\cdot(x-2)$

42. Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $(m^3-3m^2n+5mn^2-6)\cdot 8m^2n$

b) $(9y^2z-8ax^2+ayx)\cdot(xy-5a+8z)$

c) $(12zb-6mn)\cdot(3z^3-7n^2)$

d) $(7x-12ay)\cdot(3y-4a^2x)$

43. Opera y simplifica los siguientes polinomios:

a) $(2a-5x)\cdot(6x-5b)+(a-b)\cdot 9x$

b) $(9x^3-5x+2)\cdot ax^2-(x^2+6a)\cdot x^2$

c) $\left[(a-y)x^2+(-2a+5x^2)y\right]+(3ax^2+9x^2y)$

d) $(9x^3+27x^2-3x+18)\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)-(2x^2+6x-4)\cdot\left(\frac{1}{2}x^4\right)$

Factor común

44. Extrae el factor común en las siguientes expresiones:

a) a^2-2a

b) $5x^2-15xy$

c) $4x^3-2x^2$

d) $\frac{1}{2}a^2x^3-\frac{1}{4}ax^2$

e) $8m-24m^4$

f) $20+30b$

33.

a)

$$\left(-4a+b-2c\right)-\left(-2a-5b-c\right)+\left(3a+2b-5c\right)=$$
$$-4a+b-2c+2a+5b+c+3a+2b-5c=a+8b-6c$$

b)

$$\left(1+2x-3y\right)-\left(8-3x+4y\right)-\left(5-9x+8y\right)=$$
$$1+2x-3y-8+3x-4y-5+9x-8y=-12+14x-15y$$

c) $\left(5a-3b\right)-\left(8a+4b\right)=5a-3b-8a-4b=-3a-7b$

d) $\left(x^4-2x\right)-\left(3x^4-8x-5\right)=x^4-2x-3x^4+8x+5=-2x^4+6x+5$

34.

a) $(5ab-3ac+4bc)+(6ab+4ac-9bc)=11ab+ac-5bc$

b) $(12ax-4by+z)+(8ax+9by-12z)=20ax+5by-11z$

c) $(25ay^2-3ax^2+9x^2y^2)+(12ay^2+9ax^2-4x^2y^2)=37ay^2+6ax^2+5x^2y^2$

d) $(4ab^2-5a^2b+7a^2b)+(8a^2b-7ab^2)=-3ab^2+10a^2b$

35.

a) $\left(5-3yx+4y^2-9cx\right)-(8+5cx-3yx+4y^2)=-3-14cx$

b)

$$\left[\left(3+x-5x^2\right)-\left(6-9x-x^2\right)\right]+\left(-3x+4x^2\right)=$$
$$=\left(-3+10x-4x^2\right)+\left(-3x+4x^2\right)=-3+7x$$

c)

$$\left(3ax+7a^2x-3a^2x^2\right)+\left(2ax-5a^2x+12a^2x^2\right)-$$
$$-\left(4ax-a^2x+5a^2x^2\right)=ax+3a^2x+4a^2x^2$$

d) $\left(9-8by+zc^2\right)-\left(2by-9zc^2\right)+\left(3+4by-12zc^2\right)=12-6by-2zc^2$

36.

a)

$$\left(2az-9b^2z+12a^4x^3\right)-\left(5az-6b^2z+a^4x^3\right)+\left(12az+4b^2z+2a^4x^3\right)=$$
$$9az+b^2z+13a^4x^3$$

b)

$$\left(7a^5b-8a^2b^3+7\right)+\left(-3a^5b-6a^2b^3+6\right)+$$
$$+\left(-5a^5b+9a^2b^3+1\right)-\left(-9a^5b-8a^2b^3-8\right)=8a^5b+3a^2b^3+22$$

c

$$\left(2-3bx^4+8b^3x^3\right)-\left(12+5bx^4-2b^3x^3\right)+\left(-1+6bx^4-12b^3x^3\right)=$$
$$-11-2bx^4-2b^3x^3$$

d)

$$\left(3+axb-8bx^4y^3\right)-\left(2+2axb-10bx^4y^3\right)+\left(4+5axb+3bx^4y^3\right)=$$
$$5+4abx+5bx^4y^3$$

37.

a)

$$\left(6ab-15b^2x+3c^2z-2ab\right)-\left(9ab-9c^2z+3b^2x\right)-\left(ab-4c^2z\right)=$$
$$-6ab-18b^2x+16c^2z$$

b) $\left(9a^4c-6a^2c\right)-\left(8a^2c-9a^4c\right)=18a^4c-14a^2c$

c)

$$2\left(x^3-3x^2y+5xy^2-7y^3\right)+3\left(2x^3-5x^2y-2xy^2+3y^3\right)=$$
$$2x^3-6x^2y+10xy^2-14y^3+6x^3-15x^2y-6xy^2+9y^3=8x^3-21x^2y+4xy^2-5y^3$$

d)

$$4\left(-az^3+3a^2z^2-5a^3z+6z^4\right)-2\left(az^3-4a^2z^2-a^3z-2z^4\right)=$$
$$-4az^3+12a^2z^2-20a^3z+24z^4-2az^3+8a^2z^2+2a^3z+4z^4=$$
$$28z^4-6az^3+20a^2z^2-18a^3z$$

38.

a) $(2x^2-x+5)\cdot(x-3)=2x^3-6x^2-x^2+3x+5x-15=2x^3-7x^2+8x-15$

b) $\left(x^2-5x+3\right)\cdot(4x-5)=4x^3-5x^2-20x^2+25x+12x-15=4x^3-25x^2+37x-15$

c) $(x^2-5)\cdot(2x^3-4)=2x^5-4x^2-10x^3+20=2x^5-10x^3-4x^2+20$

d) $\left(4x^2-9x+1\right)\cdot(7x-2)=28x^3-63x^2+7x-8x^2+18x-2=28x^3-71x^2+25x-2$

39.

a)

$$F(x)\cdot G(x)=\left(3x^2+x-2\right)\cdot\left(4x^3-5\right)=12x^5-15x^2+4x^4-5x-8x^3+10=$$
$$=12x^5+4x^4-8x^3-15x^2-5x+10$$

b)

$$2F(x)-3G(x)=2\cdot\left(3x^2+x-2\right)-3\left(4x^3-5\right)=$$
$$=6x^2+2x-4-12x^3+15=-12x^3+6x^2+2x+11$$

c)

$$3F(x)-5G(x)=3\cdot\left(3x^2+x-2\right)-5\left(4x^3-5\right)=$$
$$=9x^2+3x-6-20x^3+25=-20x^3+9x^2+3x+19$$

d)

$$F(x)+G(x)-2F(x)\cdot G(x)=$$
$$3x^2+x-2+4x^3-5-2\cdot(12x^5+4x^4-8x^3-15x^2-5x+10)=$$
$$3x^2+x-2+4x^3-5-24x^5-8x^4+16x^3+30x^2+10x-20=$$
$$-24x^5-8x^4+20x^3+33x^2+11x-27$$

40.

a)

$$\left(3x^2y+5y-3x\right)\left(xy^2-2y+4x\right)=3x^3y^3-6x^2y^2+12x^3y+$$
$$+5xy^3-10y^2+20xy-3x^2y^2+6xy-12x^2=$$
$$3x^3y^3+12x^3y-9x^2y^2+5xy^3+26xy-10y^2-12x^2$$

b) $\left(-6x^2+5by+4ac\right)\left(2by+ax\right)=-12x^2by-6ax^3+10b^2y^2+5abxy+8abcy+4a^2cx$

c)
$(9a+3b+4c)\cdot(2ab+3bc)=18a^2b+27abc+6ab^2+9b^2c+8abc+12bc^2 =$
$18a^2b+35abc+6ab^2+9b^2c+12bc^2$
d) $(-3x^3y)\cdot(2x+4y-5xy^2)=-6x^4y-12x^3y^2+15x^4y^3$

41.
a)
$$F(x)\cdot G(x)=(2x+3)\cdot(3x^2-3x+1)=6x^3-6x^2+2x+9x^2-9x+3=$$
$$=6x^3+3x^2-7x+3$$
b)
$$F(x)\cdot H(x)=(2x+3)\cdot(5x^2-8x-3)=10x^3-16x^2-6x+15x^2-24x-9=$$
$$=10x^3-x^2-30x-9$$
c)
$$\mathrm{G(x)\cdot H(x)}=(3x^2-3x+1)\cdot(5x^2-8x-3)=$$
$$=15x^4-24x^3-9x^2-15x^3+24x^2+9x+5x^2-8x-3=$$
$$=15x^4-39x^3+20x^2+x-3$$
d)
$$(2x^2)\cdot F(x)-3\cdot G(x)\cdot(x-2)=(2x^2)\cdot(2x+3)-3\cdot(3x^2-3x+1)\cdot(x-2)=$$
$$4x^3+6x^2-3\cdot(3x^3-3x^2+x-6x^2+6x-2)=$$
$$=4x^3+6x^2-9x^3+9x^2-3x+18x^2-18x+6=-5x^3+33x^2-21x+6$$

42.
a) $(m^3-3m^2n+5mn^2-6)\cdot 8m^2n=8m^5n-24m^4n^2+40m^3n^3-48m^2n$
b)
$$(9y^2z-8ax^2+ayx)\cdot(xy-5a+8z)=9xy^3z-45ay^2z+72y^2z^2-8ax^3y+$$
$$+40a^2x^2-64ax^2z+ax^2y^2-5a^2xy+8axyz$$
c) $(12zb-6mn)\cdot(3z^3-7n^2)=36z^4b-18mnz^3-84zbn^2+42mn^3$
d) $(7x-12ay)\cdot(3y-4a^2x)=21xy-28a^2x^2-36ay^2+48a^3xy$

43.
a)
$$(2a-5x)\cdot(6x-5b)+(a-b)\cdot 9x=12ax-10ab-30x^2+25bx+9ax-9bx=$$
$$=-30x^2+21ax+16bx-10ab$$
b)
$$(9x^3-5x+2)\cdot ax^2-(x^2+6a)\cdot x^2=9ax^5-5ax^3+2ax^2-x^4-6ax^2=$$
$$=-x^4+9ax^5-5ax^3-4ax^2$$
c)
$$[(a-y)x^2+(-2a+5x^2)y]+(3ax^2+9x^2y)=$$
$$=ax^2-yx^2-2ay+5x^2y+3ax^2+9x^2y=4ax^2+13x^2y-2ay$$

d)

$$\left(9x^3+27x^2-3x+18\right)\left(\frac{1}{3}x\right)-\left(2x^2+6x-4\right)\left(\frac{1}{2}x^4\right)=$$

$$=3x^4+9x^3-x^2+6x-x^6-3x^5+2x^4=-x^6-3x^5+5x^4+9x^3-x^2+6x$$

44.

a) $a^2-2a=a(a-2)$

b) $5x^2-15xy=5x(x-3y)$

c) $4x^3-2x^2=2x^2(2x-1)$

d) $\frac{1}{2}a^2x^3-\frac{1}{4}ax^2=\frac{1}{2}ax^2\left(ax-\frac{1}{2}\right)$

e) $8m-24m^4=8m\left(1-3m^3\right)$

f) $20a+30b=10(2a+3b)$

45. Extrae el factor común en las siguientes expresiones:

a) $(a-b)m-(a-b)n$

b) $8(2x+y)-5(2x+y)$

c) $2(x^2+xy)-4(x^2+xy)$

d) $9(ab^2-a^2b)+8(ab^2-a^2b)$

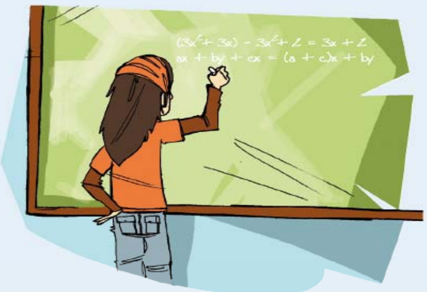
46. Extrae el factor común en las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{2}x^2(m^2-n)-\frac{1}{4}xy(m^2-n)$

b) $2ab^3-12a^3b+6a^2b^2$

c) $\frac{3}{4}a^6b^3(x-y^2)-\frac{3}{2}a^3b^4(x-y^2)$

d) $5z^6d^4-15z^4d^6-18z^2d^3$



47. Extrae el factor común en las siguientes expresiones:

a) $2x(a+9b)-5x(a+9b)+7y(a+9b)$

b) $2x(m-3)+2x(m-2)+2x(m+5)$

c) $7x(a-9m)+4x(a-9m)-x(a-9m)$

d) $(2x-1)\cdot(a^2y-axy^3)+(4x-5)\cdot(a^2y-axy^3)$

48. Opera las siguientes expresiones extrayendo antes el factor común:

a) $3a^4-9a^2-2a^2(a^2-3)$

b) $x^2y(m-2n)-6x^2y(m-2n)-5x^2ym-10x^2yn$

c) $20ac^2(x-2y)+15a^2c(x-2y)$

Identidades notables

49. Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(x+2y)^2$

b) $(2x-y)^2$

c) $(a-5b)\cdot(a+5b)$

d) $(8-5m)\cdot(8+5m)$

e) $(1+m)^2$

f) $(2-c)^2$

50. Desarrolla las siguientes identidades notables:

a) $(a+4)^2$

b) $(x+1)\cdot(x-1)$

c) $(2-5m)\cdot(2+5m)$

d) $(6-5b)^2$

e) $(2a-b)^2$

f) $(3+z)(3-z)$

51. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(3x-2)^2$

b) $(8+4y)^2$

c) $(5-2b)(5+2b)$

d) $\left(9-\frac{1}{9}b^2\right)^2$

52. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(2x+3y)^2$

b) $\left(\frac{1}{2}x-4\right)^2$

c) $\left(5ax-\frac{1}{5}c\right)^2$

d) $\left(a+\frac{2}{3}b\right)^2$

e) $\left(a-\frac{1}{6}b\right)^2$

f) $\left(4x+\frac{y}{8}\right)^2$

53. Expresa como igualdad notable:

a) x^2+2x+1

b) $x^2-10x+25$

c) x^2-81

d) $x^2-12x+36$

e) a^2-25

f) $4x^2+4x+1$

g) x^6-16

h) x^2-6x+9

i) $a^2-4ab+4b^2$

j) $a^2+4ab+4b^2$

k) b^4-4

l) $a^2+18a+81$

m) $x^2+x+\frac{1}{4}$

n) $a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}$

Fracciones algebraicas

54. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{12a}{16a^2}$

b) $\frac{5ab^2}{10a^2b}$

c) $\frac{4xy}{8x^2}$

d) $\frac{120x^4y^6z^2}{12x^3y^4z^6}$

55. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{-36m^4n^3r^5}{-12mn^3r^6}$

b) $\frac{-25a^2cx^6}{20ac^3x^5}$

c) $\frac{12a^3b^7c^6d^4}{-9a^5b^5c^7d^9}$

d) $\frac{210x^7y^{12}z^{23}}{70x^6y^{13}z^{24}}$

82 UNIDAD 4

45.

a) $(a-b)m-(a-b)n=(a-b)(m-n)$

b) $8(2x+y)-5(2x+y)=(8-5)(2x+y)=3(2x+y)$

c) $2(x^2+xy)-4(x^2+xy)=(2-4)(x^2+xy)=-2(x^2+xy)=-2x(x+y)$

d) $9(ab^2-a^2b)+8(ab^2-a^2b)=17(ab^2-a^2b)=17ab(b-a)$

46.

a) $\frac{1}{2}x^2(m^2-n)-\frac{1}{4}xy(m^2-n)=\frac{1}{2}x\left(x-\frac{1}{2}y\right)(m^2-n)$

b) $2ab^3-12a^3b+6a^2b^2=2ab(b^2-6a^2+3ab)$

c) $\frac{3}{4}a^6b^3(x-y^2)-\frac{3}{2}a^3b^4(x-y^2)=\frac{3}{2}a^3b^3\left(\frac{1}{2}a^3-b\right)(x-y^2)$

d) $5z^6d^4-15z^4d^6-18z^2d^3=z^2d^3(5z^4d-15z^2d^3-18)$

47.

a) $2x(a+9b)-5x(a+9b)+7y(a+9b)=(2x-5x+7y)(a+9b)=(-3x+7y)(a+9b)$

b) $2x(m-3)+2x(m-2)+2x(m+5)=2x(m-3+m-2+m+5)=2x\cdot 3m=6xm$

c) $7x(a-9m)+4x(a-9m)-x(a-9m)=(7x+4x-x)(a-9m)=10x(a-9m)$

d)

$$(2x-1)(a^2y-axy^3)+(4x-5)(a^2y-axy^3)=(2x-1+4x-5)(a^2y-axy^3)=$$
$$=(6x-6)ay(a-xy^2)=6ay(x-1)(a-xy^2)$$

48.

a) $3a^4-9a^2-2a^2(a^2-3)=3a^2(a^2-3)-2a^2(a^2-3)=a^2(a^2-3)$

b)

$$x^2y(m-2n)-6x^2y(m-2n)-5x^2ym-10x^2yn=$$
$$=x^2y(m-2n)-6x^2y(m-2n)-5x^2y(m+2n)=-5x^2y(m-2n)-5x^2y(m+2n)=$$
$$=-5x^2y[(m-2n)+(m+2n)]=-5x^2y\cdot 2m=-10mx^2y$$

c) $20ac^2(x-2y)+15a^2c(x-2y)=5ac(x-2y)(4c+3a)$

49.

a) $(x+2y)^2=x^2+4xy+4y^2$

b) $(2x-y)^2=4x^2-4xy+y^2$

c) $(a-5b)(a+5b)=a^2-25b^2$

d) $(8-5m)\cdot(8+5m)=64-25m^2$

e) $(1+m)^2=1+2m+m^2$

f) $(2-c)^2=4-4c+c^2$

50.

a) $(a+4)^2=a^2+8a+16$

b) $(x+1)(x-1)=x^2-1$

c) $(2-5m)(2+5m)=4-25m^2$
d) $(6-5b)^2=36-60b+25b^2$
e) $(2a-b)^2=4a^2-4ab+b^2$
f) $(3+z)(3-z)=9-z^2$

51.
a) $(3x-2)^2=9x^2-12x+4$
b) $(8+4y)^2=64+64y+16y^2$
c) $(5-2b)(5+2b)=25-4b^2$
d) $\left(9-\frac{1}{9}b^2\right)^2=81-2b^2+\frac{1}{81}b^4$

52.
a) $(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$
b) $\left(\frac{1}{2}x-4\right)^2=\frac{1}{4}x^2-4x+16$
c) $\left(5ax-\frac{1}{5}c\right)^2=25a^2x^2-2axc+\frac{1}{25}c^2$
d) $\left(a+\frac{2}{3}b\right)^2=a^2+\frac{4}{3}ab+\frac{4}{9}b^2$
e) $\left(a-\frac{1}{6}\right)^2=a^2-\frac{1}{3}a+\frac{1}{36}$
f) $\left(4x+\frac{y}{8}\right)^2=16x^2+xy+\frac{1}{64}y^2$

53.
a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$
b) $x^2-10x+25=(x-5)^2$
c) $x^2-81=(x+9)(x-9)$
d) $x^2-12x+36=(x-6)^2$
e) $a^2-25=(a+5)(a-5)$
f) $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$
g) $x^6-16=(x^3+4)(x^3-4)$
h) $x^2-6x+9=(x-3)^2$
i) $a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2$
j) $a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2$
k) $b^4-4=(b^2-2)(b^2+2)$
l) $a^2+18a+81=(a+9)^2$

m) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

n) $a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{16} = \left(a - \frac{1}{4}\right)^2$

54.

a) $\frac{12a}{16a^2} = \frac{3}{4a}$

b) $\frac{5ab^2}{10a^2b} = \frac{b}{2a}$

c) $\frac{4xy}{8x^2} = \frac{y}{2x}$

d) $\frac{120x^4y^6z^2}{12x^3y^4z^6} = \frac{10xy^2}{z^4}$

55.

a) $\frac{-36m^4n^3r^5}{-12mn^3r^6} = \frac{3m^3}{r}$

b) $\frac{-25a^2cx^6}{20ac^3x^5} = -\frac{5ax}{4c^2}$

c) $\frac{12a^3b^7c^6d^4}{-9a^5b^5c^7d^9} = -\frac{4b^2}{3a^2cd^5}$

d) $\frac{210x^7y^{12}z^{23}}{70x^6y^{13}z^{24}} = \frac{3x}{yz}$

PROBLEMAS

56. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas extrayendo, previamente, factor común:

a) $\frac{3(1+x)+2a(1+x)}{1+x}$

b) $\frac{5(1-2b)+4x^2(1-2b)}{x-2bx}$

c) $\frac{6xy^2-3x^2y}{8x^2y^2-4x^3y}$

57. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas extrayendo, previamente, factor común:

a) $\frac{x+x^3}{a+ax^2}$

b) $\frac{a^2x+by}{a^2xy+by^2}$

c) $\frac{25a^3b^2+50a^2b^3}{5a^2b^2+10ab^3}$

58. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

b) $\frac{5(1-x^2)-3(1-x)}{(1-x)^2}$

c) $\frac{1+4x+4x^2}{1-4x^2}$

59. Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(8x^3+4x^2-5x+6):(x^3-2x^2+1)$

b) $(10x^4-5x^3+12x^2-15x+16):(x^2-2x+2)$

c) $(x^2+7x-13):(x-1)$

d) $(9x^3+7x^2-5x+2):(x+3)$

e) $(12x^4+7x^2-15):(x^2-2)$

f) $(7x^3-9x^2+16x-12):(x^2+5x+2)$

56.

a) $\frac{3(1+x)+2a(1+x)}{1+x} = \frac{(3+2a)\cdot\cancel{(1+x)}}{\cancel{(1+x)}} = 3+2a$

b) $\dfrac{5(1-2b)+4x^2(1-2b)}{x-2bx}=\dfrac{\left(5+4x^2\right)\cdot\cancel{(1-2b)}}{x\cancel{(1-2b)}}=\dfrac{5+4x^2}{x}$

c) $\dfrac{6xy^2-3x^2y}{8x^2y^2-4x^3y}=\dfrac{3xy\,\cancel{(2y-x)}}{4x^2y\,\cancel{(2y-x)}}=\dfrac{3}{4x}$

57.

a) $\dfrac{x+x^3}{a+ax^2}=\dfrac{x\cancel{\left(1+x^2\right)}}{a\cancel{\left(1+x^2\right)}}=\dfrac{x}{a}$

b) $\dfrac{a^2x+by}{a^2xy+by^2}=\dfrac{\cancel{(a^2x+by)}}{y\cdot\cancel{(a^2x+by)}}=\dfrac{1}{y}$

c) $\dfrac{25a^3b^2+50a^2b^3}{5a^2b^2+10ab^3}=\dfrac{5a\cancel{\left(5a^2b^2+10ab^3\right)}}{\cancel{\left(5a^2b^2+10ab^3\right)}}=5a$

58.

a) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{\left(a+b\right)^2}{\left(a+b\right)\cdot(a-b)}=\dfrac{a+b}{a-b}$

b) $\dfrac{5(1-x^2)-3(1-x)}{(1-x)^2}=\dfrac{5(1-x)(1+x)-3(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\dfrac{\cancel{(1-x)}\left[5(1+x)-3\right]}{\cancel{(1-x)}(1+x)}=\dfrac{5+5x-3}{1+x}=\dfrac{5x+2}{1+x}$

c) $\dfrac{1+4x+4x^2}{1-4x^2}=\dfrac{\left(1+2x\right)^2}{\left(1-2x\right)\left(1+2x\right)}=\dfrac{\left(1+2x\right)}{\left(1-2x\right)}$

59.

a)

$$\begin{array}{rl|l}
 & 8x^3+4x^2-5x+6 & x^3-2x^2+1 \\ \cline{3-3}
 & -8x^3+16x^2\qquad-8 & 8 \\ \hline
 & 20x^2-5x-2 &
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rl|l}
 & 10x^4-5x^3+12x^2-15x+16 & x^2-2x+2 \\ \cline{3-3}
 & -10x^4+20x^3-20x^2 & 10x^2+15x+22 \\ \hline
 & 15x^3-8x^2-15x & \\
 & -15x^3+30x^2-30x+16 & \\ \hline
 & 22x^2-45x+16 & \\
 & -22x^2+44x-44 & \\ \hline
 & -x-28 &
\end{array}$$

c)

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 + 7x - 13 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^2 + x & x + 8 \\
\hline
8x - 13 & \\
-8x + 8 & \\
\hline
-5 &
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{l|l}
9x^3 + 7x^2 - 5x + 2 & x + 3 \\
\cline{2-2}
-9x^3 - 27x^2 & 9x^2 - 20x + 55 \\
\hline
-20x^2 - 5x & \\
20x^2 + 60x & \\
\hline
55x + 2 & \\
-55x - 165 & \\
\hline
-163 &
\end{array}
$$

e)

$$
\begin{array}{l|l}
12x^4 + 7x^2 - 15 & x^2 - 2 \\
\cline{2-2}
-12x^4 + 24x^2 & 12x^2 + 31 \\
\hline
31x^2 - 15 & \\
-31x^2 + 62 & \\
\hline
47 &
\end{array}
$$

f)

$$
\begin{array}{l|l}
7x^3 - 9x^2 + 16x - 12 & x^2 + 5x + 2 \\
\cline{2-2}
-7x^3 - 35x^2 - 14x & 7x - 44 \\
\hline
-44x^2 + 2x - 12 & \\
44x^2 + 220x + 88 & \\
\hline
222x + 76 &
\end{array}
$$

AUTOEVALUACIÓN PAG. 83

AUTOEVALUACIÓN

1. Sean $F(x) = x^2 - 3x + 4$ y $G(x) = 2x^2 - 5x + 5$, realiza las siguientes operaciones:

   a) $F(x) + G(x)$

   b) $2F(x) - 3G(x)$

2. Efectúa las siguientes operaciones:

   a) $(x^3 - 2x^2 + 5x - 1) \cdot 4x^3$

   b) $(x - 2) \cdot (x^2 - 8x + 3)$

3. Saca factor común en las siguientes expresiones:

   a) $2x^3 - 4x^2$

   b) $2(x - 1) - a(x - 1)$

4. Desarrolla las siguientes igualdades notables:

   a) $(1 - x)^2$

   b) $(2 + 3y)^2$

5. Realiza las siguientes sumas y simplifica:

   a) $(5ab^3 + 9a^3b + ax^2) - 2(2ab^3 - 4a^3b - 3ax^2)$

   b) $(2mn + mn^2 - 5m^2n) + 3(5mn - 8mn^2 - 4m^2n)$

6. Realiza las siguientes operaciones:

   a) $(-a - 2b - 3c) - (-2a + 3b - 5c) + (8a - 4b + 9c)$

   b) $(5a - 9x) \cdot (8b + 3x)$

7. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

   a) $\dfrac{12ax^4b^5c^{12}}{6ax^3b^4c^{12}}$ b) $\dfrac{3ab^2 - 9a^3b^5}{12a^4b^2 - 15ab^7}$

8. Realiza la siguiente división de polinomios:

   $(8x^3 - 3x^2 + 5x - 6) : (x^2 - 3x + 1)$

9. Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

   a) $(x + 3)^2 = x^2 + 3^2$

   b) $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$

   c) $(3x + 1)^2 = x^2 + 6x + 1$

   d) $(1 - x)^2 = 1 + 2x - x^2$

10. Desarrolla los siguientes productos notables:

    a) $(x + 3) \cdot (x - 3)$

    b) $\left(5x - \dfrac{4}{3}y\right) \cdot \left(5x + \dfrac{4}{3}y\right)$

Polinomios 83

1.

a) $F(x) + G(x) = \left(x^2 - 3x + 4\right) + \left(2x^2 - 5x + 5\right) = 3x^2 - 8x + 9$

b) $2F(x) - 3G(x) = 2\left(x^2 - 3x + 4\right) - 3\left(2x^2 - 5x + 5\right) = 4x^2 - 6x + 8 - 6x^2 + 15x - 15 = -2x^2 + 9x - 7$

2.

a) $\left(x^3 - 2x^2 + 5x - 1\right)4x^3 = 4x^6 - 8x^5 + 20x^4 - 4x^3$

b) $\left(x - 2\right) \cdot (x^2 - 8x + 3) = x^3 - 8x^2 + 3x - 2x^2 + 16x - 6 = x^3 - 10x^2 + 19x - 6$

3.

a) $2x^3 - 4x^2 = 2x^2\left(x - 2\right)$

b) $2(x - 1) - a(x - 1) = \left(2 - a\right)\left(x - 1\right)$

4.

a) $(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$

b) $\left(2 + 3y\right)^2 = 4 + 12y + 9y^2$

5.

a)

$$\left(5ab^3+9a^3b+ax^2\right)-2\left(2ab^3-4a^3b-3ax^2\right)=$$

$$=5ab^3+9a^3b+ax^2-4ab^3+8a^3b+6ax^2=ab^3+17a^3b+7ax^2$$

b)

$$\left(2mn+mn^2-5m^2n\right)+3\left(5mn-8mn^2-4m^2n\right)=$$

$$=2mn+mn^2-5m^2n+15mn-24mn^2-12m^2n=17mn-23mn^2-17m^2n$$

6.

a)

$$(-a-2b-3c)-(-2a+3b-5c)+(8a-4b+9c)=$$

$$=-a-2b-3c+2a-3b+5c+8a-4b+9c=9a-9b+11c$$

b) $\left(5a-9x\right)\cdot\left(8b+3x\right)=40ab+15ax-72bx-27x^2$

7.

a) $\dfrac{12ax^4b^5c^{12}}{6ax^3b^4c^{12}}=2xb$

b) $\dfrac{3ab^2-9a^3b^5}{12a^4b^2-15ab^7}=\dfrac{\cancel{3ab^2}\left(1-3a^2b^3\right)}{\cancel{3ab^2}\left(4a^3-5b^5\right)}=\dfrac{1-3a^2b^3}{4a^3-5b^5}$

8.

$$\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & -\ 3x^2 & +\ 5x & -\ 6 & x^2-3x+1 \\
\cline{5-5}
-8x^3 & +\ 24x^2 & -\ 8x & & 8x+21 \\
\hline
 & 21x^2 & -\ 3x & -\ 6 & \\
 & -21x^2 & +\ 63x & -\ 21 & \\
\hline
 & & 60x & -\ 27 &
\end{array}$$

9.

a) $\left(x+3\right)^2=x^2+3^2$ Falsa

b) $\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)=x^2-4$ Verdadera

c) $\left(3x+1\right)^2=x^2+6x+1$ Falsa

d) $(1-x)^2=1+2x-x^2$ Falsa

10.

a) $\left(x+3\right)\left(x-3\right)=x^2-9$

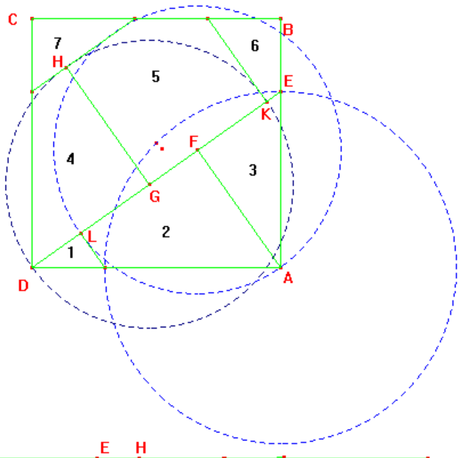
b) $\left(5x-\dfrac{4}{3}y\right)\cdot\left(5x+\dfrac{4}{3}y\right)=25x^2-\dfrac{16}{9}y^2$

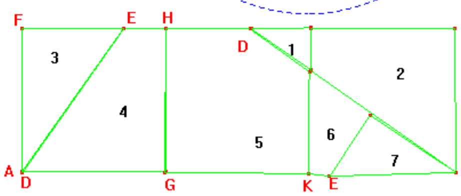
DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 85

Olimpiada matemática

1. Dado un cuadrado cualquiera, deshazlo en 7 partes de forma que, uniéndolas adecuadamente, constituyan por separado tres cuadriláteros iguales.
2. Problema de Busschop. Dado un cuadrado, cualquiera deshazlo en 8 partes de forma que, uniéndolas adecuadamente, constituyan separadamente dos cuadriláteros tal que el mayor sea exactamente el doble que el pequeño.
3. A un chico se le caen los cromos en el patio del colegio. Cuando le preguntan cuántos eran responde: «solo sé que al agruparlos de dos en dos me sobraba uno, si los agrupaba de tres en tres me sobraban dos, al agruparlos de cuatro en cuatro me sobraban tres y al agruparlos de cinco en cinco me sobraban cuatro». ¿Podrías averiguar el número de cromos que tenía en niño?

1.

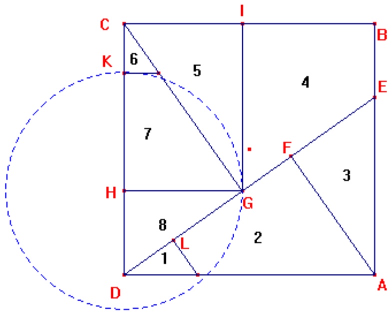


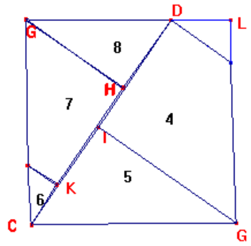


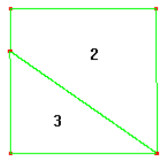
$$AE = \frac{\text{diagonal}}{2},\ AF \perp DE,\ CG \perp DE,\ GH = AF,\ GK = AF,\ FL = AF$$

Los demás son segmentos paralelos o perpendiculares a *AF*.

2.







Realizamos, como en la figura anterior, los segmentos *AF*, *CG* y el punto *L*.
GH y *GI* son paralelas a los lados del cuadrilátero.

$$HK = GH$$

3. El mcm(2, 3, 4, 5) = 60

Si los agrupamos de 2 en 2 nos sobra 1 $\Rightarrow N = 59 \rightarrow (59 = 2 \cdot 29 + 1)$

Si los agrupamos de 3 en 3 nos sobran 2 $\Rightarrow N = 59 \rightarrow (59 = 3 \cdot 19 + 2)$

Si los agrupamos de 3 en 3 nos sobran 2 $\Rightarrow N = 59 \rightarrow (59 = 4 \cdot 14 + 3)$

Si los agrupamos de 4 en 4 nos sobran 3 $\Rightarrow N = 59 \rightarrow (59 = 5 \cdot 11 + 4)$

El mínimo número de cromos que tiene el chico son 59.

Si tuviera más cromos sería cualquier número de la serie aritmética cuyo primer miembro es 59 con diferencia es 60:

$$59, 119, 179, 239, 299, 359, 419, 479...$$

UNIDAD 5. Ecuaciones

ACTIVIDADES PAG. 88

ACTIVIDADES

1. Teniendo en cuenta el primer principio de equivalencia, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4 + x = 12$ b) $-9 - x = 3$ c) $14 - x = 15$ d) $2 + x = 23$

2. Teniendo en cuenta el segundo principio de equivalencia resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{3} = 15$ b) $4 - \frac{x}{2} = 2$ c) $2x + 6x + \frac{x}{3} = 25$

3. Teniendo en cuenta los principios primero y segundo de equivalencia, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3 + 2x = 3x + 1$ b) $5x - 6 = 10x - 1$ c) $6x - 7 = 4x + 3$

1.

a) $4 + x = 12 \Rightarrow x = 12 - 4 \Rightarrow x = 8$

b) $-9 - x = 3 \Rightarrow -x = -9 - 3 \Rightarrow x = -12$

c) $14 - x = 15 \Rightarrow x = 14 - 15 \Rightarrow x = -1$

d) $2 + x = 23 \Rightarrow x = 23 - 2 \Rightarrow x = 21$

2.

a) $\frac{x}{3} = 15 \Rightarrow x = 15 \cdot 3 \Rightarrow x = 45$

b) $4 - \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow 4 - 2 = \frac{x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 4$

c) $2x + 6x + \frac{x}{3} = 25 \Rightarrow 8x + \frac{x}{3} = 25 \Rightarrow \frac{24x + x}{3} = 25 \Rightarrow \frac{25}{3}x = 25 \Rightarrow \frac{x}{3} = 1 \Rightarrow x = 3$

3.

a) $3 + 2x = 3x + 1 \Rightarrow 2x - 3x = 1 - 3 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$

b) $5x - 6 = 10x - 1 \Rightarrow 5x - 10x = 6 - 1 \Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = -1$

c) $6x - 7 = 4x + 3 \Rightarrow 6x - 4x = 3 + 7 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

ACTIVIDADES PAG. 89

ACTIVIDADES

4. Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis:

a) $x + 2(x - 1) = 7$ c) $6(x - 2) + 3(x - 4) = x$

b) $3(x - 1) - 2(x - 2) = -x - 1$ d) $9(x + 1) + 10(x + 2) = 9x - 1$

5. a las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{x - 4}{8} - \frac{x - 6}{3} + \frac{x}{6} = 1$ c) $\frac{2(x + 5)}{7} + \frac{9(4x - 7)}{3} = 3x - 1$

b) $x + \frac{3x + 1}{4} = 2x - 1$ d) $\frac{3(5 + x)}{2} + \frac{5(x - 3)}{4} = 3x + 1$

4.

a) $x + 2(x - 1) = 7 \Rightarrow x + 2x - 2 = 7 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

b)

$$3(x-1) - 2(x-2) = -x - 1 \Rightarrow 3x - 3 - 2x + 4 = -x - 1 \Rightarrow$$
$$x + 1 = -x - 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

c)

$$6(x-2)+3(x-4)=x \Rightarrow 6x-12+3x-12=x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x-24=x \Rightarrow 8x=24 \Rightarrow x=3$$

d)

$$9(x+1)+10(x+2)=9x-1 \Rightarrow 9x+9+10x+20=9x-1 \Rightarrow$$
$$19x+29=9x-1 \Rightarrow 10x=-30 \Rightarrow x=-3$$

5.

a)

$$\frac{x-4}{8}-\frac{x-6}{3}+\frac{x}{6}=1 \Rightarrow \frac{3(x-4)-8(x-6)+4x}{24}=1$$
$$\Rightarrow \frac{3x-12-8x+48+4x}{24}=1 \Rightarrow -x+36=24 \Rightarrow x=36-24 \Rightarrow x=12$$

b) $x+\dfrac{3x+1}{4}=2x-1 \Rightarrow \dfrac{4x+3x+1}{4}=2x-1 \Rightarrow 7x+1=8x-4 \Rightarrow x=5$

c)

$$\frac{2(x+5)}{7}+\frac{9(4x-7)}{3}=3x-1 \Rightarrow \frac{6(x+5)+63(4x-7)}{21}=3x-1$$
$$\Rightarrow 6x+30+252x-441=63x-21 \Rightarrow 258x-411=63x-21 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 258x-63x=411-21 \Rightarrow 195x=390 \Rightarrow x=2$$

d)

$$\frac{3(5+x)}{2}+\frac{5(x-3)}{4}=3x+1 \Rightarrow \frac{6(5+x)+5(x-3)}{4}=3x+1 \Rightarrow$$
$$\frac{30+6x+5x-15}{4}=3x+1 \Rightarrow 11x+15=12x+4 \Rightarrow x=11$$

ACTIVIDADES PAG. 90

ACTIVIDADES

6. Resuelve las siguientes ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$:

a) $x^2 - 25 = 0$ c) $6x^2 - 5 = 49$ e) $(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 221$

b) $x^2 - 24 = 120$ d) $7x^2 - 29 = 61 - 3x^2$ f) $4x^2 - 64 = 0$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$:

a) $x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 - x = 0$ e) $3x^2 - 108x = 0$

b) $4x^2 - 3x = 0$ d) $7x^2 - 42x = 0$ f) $3x = 4x^2 - 2x$

6.

a) $x^2-25=0 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$

b) $x^2-24=120 \Rightarrow x^2=144 \Rightarrow x=\pm 12$

c) $6x^2-5=49 \Rightarrow 6x^2=54 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

d) $7x^2-29=61-3x^2 \Rightarrow 10x^2=90 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

e) $(3x+2)(3x-2)=221 \Rightarrow 9x^2-4=221 \Rightarrow 9x^2=225 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$

f) $4x^2-64=0 \Rightarrow x^2-16=0 \Rightarrow x=\pm 4$

7.

a) $x^2+5x=0 \Rightarrow x(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$

b) $4x^2-3x=0 \Rightarrow x(4x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x-3=0 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

c) $x^2-x=0 \Rightarrow x\cdot(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

d) $7x^2-42x=0 \Rightarrow 7x(x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} 7x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$

e) $3x^2-108x=0 \Rightarrow 3x(x-36)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-36=0 \Rightarrow x=36 \end{cases}$

f)

$3x=4x^2-2x \Rightarrow 3x+2x=4x^2 \Rightarrow$

$5x-4x^2=0 \Rightarrow x(5-4x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5-4x=0 \Rightarrow 5=4x \Rightarrow x=\dfrac{5}{4} \end{cases}$

ACTIVIDADES PAG. 91

ACTIVIDADES

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-3x+2=0$ b) $x^2-5x+6=0$ c) $x^2-4x+3=0$ d) $x^2-6x+8=0$ e) $x^2-5x+4=0$ f) $x^2+10=7x$

9. Calcula el número de raíces de las siguientes ecuaciones sin resolverlas:

a) $x^2-10x+24=0$ c) $x^2+16=0$ e) $4x^2-12x+9=0$

b) $x^2-8x+16=0$ d) $14x^2-9x+14=0$ f) $3x^2-2x+1=0$

8.

a) $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ x=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases}$

b) $x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{cases}$

c) $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\dfrac{4\pm2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ x=\dfrac{4-2}{2}=1 \end{cases}$

d) $x^2-6x+8=0 \Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\dfrac{6\pm2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6+2}{2}=4 \\ x=\dfrac{6-2}{2}=2 \end{cases}$

e) $x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{5\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5+3}{2}=4 \\ x=\dfrac{5-3}{2}=1 \end{cases}$

f)

$$x^2+10=7x \Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{7\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7+3}{2}=5 \\ x=\dfrac{7-3}{2}=2 \end{cases}$$

9.

a) $x^2-10x+24=0 \Rightarrow \Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot24 \Rightarrow \Delta=100-96 \Rightarrow \Delta=4 \Rightarrow$

$\Delta>0 \Rightarrow$ la ecuación posee dos soluciones reales y distintas

b) $x^2-8x+16=0 \Rightarrow \Delta=(-8)^2-4\cdot1\cdot16 \Rightarrow \Delta=64-64 \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ raíz doble (Una única solución)

c) $x^2+16=0 \Rightarrow \Delta=0-4\cdot1\cdot16 \Rightarrow \Delta=-64 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$

No existe solución real

d) $14x^2-9x+14=0 \Rightarrow \Delta=(-9)^2-4\cdot14\cdot14 \Rightarrow \Delta=81-784=-703 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$

No existe solución real

e) $4x^2-12x+9=0 \Rightarrow \Delta=(-12)^2-4\cdot4\cdot9 \Rightarrow \Delta=144-144 \Rightarrow \Delta=0$

$\Rightarrow$ raíz doble (Una única solución)

f) $3x^2-2x+1=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot3\cdot1 \Rightarrow \Delta=4-12 \Rightarrow \Delta=-8$

$\Delta<0 \Rightarrow$ no posee solución real.

ACTIVIDADES PAG. 92

ACTIVIDADES

10. Calcula cuatro números pares consecutivos cuya suma sea 68.

11. Un padre reparte 60 € entre sus 3 hijos para que vayan a la feria. Al mediano le da el doble que al pequeño y al mayor le da tanto como al pequeño y al mediano juntos. ¿Cuánto recibió cada hijo?

12. Un TALGO sale de Madrid con dirección a Barcelona manteniendo una velocidad de 100 km/h. Cuando lleva recorridos 50 km sale de Atocha por una vía paralela a la anterior un AVE que lleva una velocidad de 300 km/h. ¿A qué distancia de la capital alcanzará el AVE al TALGO? ¿Cuánto tiempo tardará en darle alcance?

10.

Sean x- 2 , x , x + 2 y x + 4 los números buscados.

$x-2+x+x+2+x+4=68$

$4x+4=68$

$x+1=17$

$x=16$

Los números buscados son: 14, 16, 18 y 20

11.

Sea x la cantidad que da al menor.

Menor	x
Mediano	$2x$
mayor	$x + 2x = 3x$

$x + 2x + 3x = 60$

$6x = 60$

$x = 10$

El pequeño percibe 10 €, el mediano 20 € y el mayor 30 €

12.

Sea x el tiempo en horas que tarda el AVE en alcanzar al TALGO.

En este tiempo el AVE ha recorrido 300 x km y el TALGO 100 x km.

$$50 = 300x - 100x$$
$$50 = 200x$$
$$x = \frac{50}{200}$$
$$x = \frac{1}{4}$$

El AVE tardará $\frac{1}{4}$ de hora en alcanzar al TALGO a $300 \cdot \frac{1}{4} = 75$ km de la capital.

ACTIVIDADES PAG. 93

ACTIVIDADES

13. Dado un cierto número, primero le resto 4 y por otro lado le sumo 4, el producto de los números resultantes es 128. ¿De qué número se trata?

14. La diferencia de dos números es 2 y su producto es 195. ¿De qué números se trata?

15. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 2 cm más que uno de los catetos y este, a su vez, mide 2 cm más que el otro cateto. ¿Cuál es la longitud de los catetos y de la hipotenusa?

16. Si en un rectángulo disminuyo la longitud de uno de los lados en 3 cm obtengo un cuadrado de 144 cm² de área. ¿Cuál es la longitud del rectángulo en un principio?

13.

Sea x el número buscado

$(x-4)\cdot(x+4) = 128$

$x^2 - 16 = 128$

$x^2 = 144$

$x = \pm 12$

Aparecen dos números que cumplen las condiciones del problema: 12 y – 12

14.

Los números buscados son $x,\ x-2$

$x \cdot (x-2) = 195$

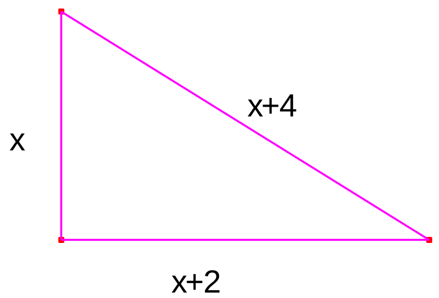
$x^2 - 2x - 195 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+780}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{2 \pm 28}{2} = \begin{cases} 15 \\ -13 \end{cases}$$

Los números buscados son 15 y 13, o bien, -13 y - 15

15.

Sea x la longitud del cateto menor, como indica la figura:



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$(x+4)^2 = (x+2)^2 + x^2$

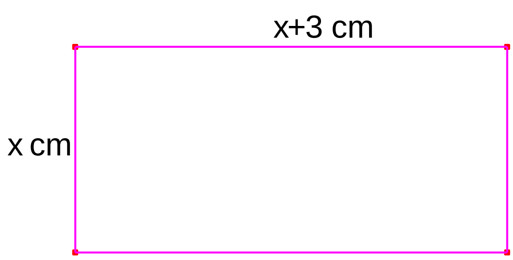
$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x + 4 + x^2$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$$

Las medidas del triángulo son 6 cm, 8 cm los catetos y 10 cm la hipotenusa.

16.



Si obtenemos un cuadrado al disminuir en 3 cm un lado del rectángulo, el lado mayor mide 3 cm más que el lado menor.

$x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$, con lo que las medidas del rectángulo son 15 cm de largo y 12 cm de ancho.

Desafío matemático

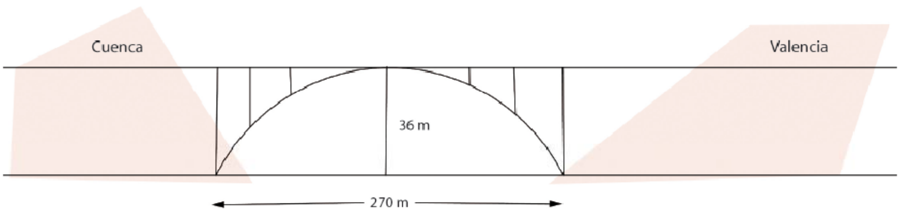
El viaducto de la línea de Alta Velocidad (AVE) Madrid-Valencia

El 18 de diciembre de 2010 Sus Majestades los Reyes de España inauguraron la línea de Alta Velocidad (AVE) Madrid-Valencia. Esta obra supuso un gran esfuerzo económico así como importantes retos tecnológicos en los que las matemáticas estaban presentes.

Fue necesario salvar un desnivel creando un viaducto cuyo arco de hormigón es el más grande construido en un puente ferroviario en Europa. El viaducto de aproximadamente 700 metros de longitud y el arco que lo sostiene tiene su origen en la provincia de Cuenca y acaba en la provincia de Valencia. La distancia a la que se encuentra el pilar de Cuenca del inicio del viaducto coincide con $\frac{31}{70}$ partes de la longitud total del viaducto y, la distancia del extremo situado en la provincia de Valencia al final del viaducto, coincide con los $\frac{6}{35}$ de la longitud total del mismo. El recorrido del arco viene dado por la siguiente ecuación:

$$f(x) = -0'002x^2 + 0'54x$$

Las bases de apoyo del viaducto están a 0 metros de altitud sobre el terreno. Y la altura máxima del viaducto es de 36 metros.



1. ¿A qué distancia del origen del viaducto se encuentra el pilar de apoyo del arco que se encuentra en la provincia de Cuenca?

2. ¿Cuántos metros quedan para llegar al final del viaducto una vez que se ha superado el arco sobre el que se apoya?

3. Si consideramos el inicio del arco en la provincia de Cuenca como el punto 0 de un imaginario eje de coordenadas cuyo eje de abscisas fuera la horizontal sobre la cota cero, ¿qué altura alcanza el arco en los puntos $x = 50$, $x = 100$, $x = 135$, $x = 170$, $x = 200$, $x = 250$ y $x = 270$?

4. La distancia que recorre el AVE Madrid-Valencia es de 391 km. Si la velocidad media del tren en dicho trayecto es de 4 km y 73 metros por minuto, ¿cuánto tiempo tardará en realizar el recorrido? (El espacio recorrido por un móvil es el producto de la velocidad por el tiempo). Aproxima el resultado y exprésalo en lenguaje coloquial, tantas horas y tantos minutos.

5. El precio del billete del AVE Madrid-Valencia tiene importantes descuentos. Al efectuar la compra 15 días antes, se obtiene un descuento del 60 por ciento y si se realiza la compra con 10 días de antelación, el descuento es del 40 por ciento. Si un grupo de amigos paga 941'64 euros por la compra de sus billetes sabiendo que 13 de ellos los compraron con 15 días de anticipación y los 10 restantes con 7 días de adelanto: ¿cuánto cuesta el billete en clase turista sin descuento?, ¿cuánto pagó cada uno por su billete?

La distancia del origen del viaducto a los pilares de apoyo representa $\frac{31}{70}+\frac{6}{35}=\frac{43}{70}$ partes del viaducto $\Rightarrow$ el arco representa un $\frac{27}{70}$ de la longitud del viaducto. Sea x la longitud en metros del viaducto.

$$\frac{27}{70}x = 270 \Rightarrow x = 700 \text{ m}$$

El viaducto mide 700 metros de longitud.

1.El pilar de apoyo del arco que se encuentra en la provincia de Cuenca se encuentra a $\frac{31}{70}\cdot 700 = 310\ m$ del origen del viaducto.

2.Superado el arco quedan $\frac{6}{35}\cdot 700 = 120 \text{ m}$ por recorrer para llegar al final del viaducto.

3.El arco tiene por ecuación $f(x) = -0002x^2 + 054x$

Si $x = 50 \Rightarrow f(50) = -0002 \cdot 50^2 + 054 \cdot 50 = 22 \Longrightarrow$alcanza 22 m de altura.

Si $x = 100 \Longrightarrow f(100) = -0002 \cdot 100^2 + 054 \cdot 100 = 34 \Longrightarrow$ alcanza 34 m de altura.

Si $x = 135 \Longrightarrow f(135) = -0002 \cdot 135^2 + 054 \cdot 135 = 3645 \Longrightarrow$alcanza 36’45 m de altura.

Si $x = 170 \Longrightarrow f(170) = -0002 \cdot 170^2 + 054 \cdot 170 = 34 \Longrightarrow$alcanza 34 m de altura

Si $x = 200 \Longrightarrow f(200) = -0002 \cdot 200^2 + 054 \cdot 200 = 28 \Longrightarrow$alcanza 28 m de altura.

Si $x = 250 \Longrightarrow f(250) = -0002 \cdot 250^2 + 054 \cdot 250 = 10 \Longrightarrow$alcanza 10 m de altura.

Si $x = 270 \Longrightarrow f(270) = -0002 \cdot 270^2 + 054 \cdot 270 = 0 \Longrightarrow$ el arco se encuentra a 0m de altura

4.La velocidad media es de 4073 m/minuto = 4073·60 m/h = 244380 m/h =244’38 km/h

$$espacio = velocidad \cdot tiempo \Longrightarrow e = v \cdot t \Longrightarrow t = \frac{e}{v}$$

$$t = \frac{391}{24438} = 16 \text{ horas} = 1 \text{ hora y } 36 \text{ minutos.}$$

5.

Tiempo de antelación en la compra	Descuento efectuado
15 días	60 %
10 días	40 %

Sea x el precio del billete en clase turista sin descuento alguno.

$$13 \cdot 06x + 10 \cdot 04x = 94164 \Longrightarrow 118x = 94164 \Longrightarrow x = 798$$

El precio del billete sin descuento es de 798

Los que compraron el billete con 15 días de antelación pagaron $06 \cdot 798 = 4788$ .Los que compraron el billete con 10 días de antelación pagaron $04 \cdot 798 = 3192$

ACTIVIDADES FINALES PAG. 96

EJERCICIOS

Ecuaciones de primer grado

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $9 + x = 6$ c) $11 - x = 14$ e) $7 + x = -5$

b) $-8 + x = 7$ d) $2 - x = 3$ f) $14 - x = 8$

18. Teniendo en cuenta el primer principio de equivalencia, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $15 + x = 23$ c) $x + 12 = 98$

b) $2 - x - 45$ d) $-x + 23 - 78$

19. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 3 = 6x - 9 - 15$

b) $8x - 3x + 12 = 9x + 27 - 3x$

c) $2x - 5x - 4 = 7x - 8x - 3$

d) $12 - 13x + 14x = 3x - 7x + 23$

20. Aplica el segundo principio de equivalencia para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x}{3} = 42$ c) $2x + \frac{x}{2} = -3$

b) $5 + \frac{x}{4} = 21$ d) $13 - \frac{3x}{4} = 7 - 3x$

21. Aplica los principios primero y segundo de equivalencia para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $5x + 3x = 4x + 25$

b) $16 + \frac{3x}{5} = 8 - 2x$

c) $23x + 4x - 6x + 7 - x - \frac{7}{2}$

d) $4x + 15 = 75 - \frac{5x}{6}$

Ecuaciones de primer grado con denominadores

22. Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{x}{2} = 14$ d) $\frac{5}{2} + 3x = 11$

b) $\frac{x}{3} - 1 = 15$ e) $\frac{5}{7} - \frac{1}{14}x = 28$

c) $2 - \frac{3}{4}x = 11$ f) $5 + \frac{2}{3}x = 16$

Ecuaciones de primer grado con paréntesis

23. Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{2}x = \frac{3}{4}x + 1$ c) $4 - \frac{x-6}{5} = 2 - \frac{x+2}{15}$

b) $\frac{x+1}{3} - \frac{x+3}{6} = 3x - 2$ d) $\frac{3x-2}{4} - \frac{x-3}{2} = \frac{5x-4}{6}$

24. Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis:

a) $5 + 2(x - 3) = 6$ c) $4 - 2(3 - 4x) = 2$

b) $3(x - 7) + 12 = 14$ d) $7(5x - 3) = 14$

25. Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis:

a) $2(x - 3) + 5(x - 2) = 6x + 15$

b) $2(4 - x) + 3(2x - 5) = 2x - 3$

c) $100 - 5(x - 15) = 3x + 23$

d) $5(x - 4) + 3(3x - 5) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores y paréntesis:

a) $\frac{2(x-3)}{3} - \frac{3(x-4)}{4} = \frac{5(x-2)}{6} - \frac{1}{12}$

b) $\frac{2(3x-5)}{4} - \frac{3(4x-3)}{2} = \frac{4(3x-2)}{8}$

27. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis con coeficientes racionales:

a) $\frac{3(2x-1)}{4} + \frac{5(4x-3)}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{87}{4}$

b) $\frac{12(x-1)}{5} + \frac{5(2x-1)}{4} = \frac{4(3x-2)}{5} + \frac{8x+1}{20}$

c) $\frac{3(x-7)}{4} - \frac{2x-8}{9} - \frac{5}{36}$

d) $\frac{7x-5}{12} + \frac{5(3x-2)}{4} = \frac{7x}{3} + \frac{37}{12}$

Ecuaciones de segundo grado incompletas

28. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 42 = 7$ c) $x^2 - 25 = 0$

b) $2x^2 - 92 = 36$ d) $2x^2 - 15 = 12 - x^2$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 3x = 0$ c) $2x^2 - 7x = 0$

b) $x^2 - 6x = 0$ d) $8x^2 - 5x = 0$

96 UNIDAD 5

17.

a) $9 + x = 6 \Rightarrow x = 6 - 9 \Rightarrow x = -3$

b) $-8 + x = 7 \Rightarrow x = 7 + 8 \Rightarrow x = 15$

c) $11 - x = 14 \Rightarrow -x = 14 - 11 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$

d) $2 - x = 3 \Rightarrow -x = 3 - 2 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$

e) $7 + x = -5 \Rightarrow x = -5 - 7 \Rightarrow x = -12$

f) $14-x=8 \Rightarrow -x=8-14 \Rightarrow -x=-6 \Rightarrow x=6$

18.

a) $15+x=23 \Rightarrow x=23-15 \Rightarrow x=8$

b) $2-x=45 \Rightarrow -x=45-2 \Rightarrow -x=43 \Rightarrow x=-43$

c) $x+12=98 \Rightarrow x=98-12 \Rightarrow x=86$

d) $-x+23=78 \Rightarrow -x=78-23 \Rightarrow -x=55 \Rightarrow x=-55$

19.

a) $5x-3=6x-9-15 \Rightarrow 5x-3=6x-24 \Rightarrow 5x-6x=3-24 \Rightarrow -x=-21 \Rightarrow x=21$

b)

$$8x-3x+12=9x+27-3x \Rightarrow 5x+12=6x+27 \Rightarrow 5x-6x=27-12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -x=15 \Rightarrow x=-15$$

c)

$$2x-5x-4=7x-8x-3 \Rightarrow -3x-4=-x-3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3x+x=4-3 \Rightarrow -2x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

d)

$$12-13x+14x=3x-7x+23 \Rightarrow 12+x=-4x+23 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+4x=23-12 \Rightarrow 5x=11 \Rightarrow x=\frac{11}{5}$$

20.

a) $\frac{2x}{3}=42 \Rightarrow 2x=42 \cdot 3 \Rightarrow 2x=126 \Rightarrow x=\frac{126}{2} \Rightarrow x=63$

b) $5+\frac{x}{4}=21 \Rightarrow \frac{x}{4}=21-5 \Rightarrow \frac{x}{4}=16 \Rightarrow x=4 \cdot 16 \Rightarrow x=64$

c) $2x+\frac{x}{2}=-3 \Rightarrow \frac{5x}{2}=-3 \Rightarrow 5x=-6 \Rightarrow x=-\frac{6}{5}$

d)

$$13-\frac{3x}{4}=7-3x \Rightarrow -\frac{3x}{4}+3x=7-13 \Rightarrow \frac{9x}{4}=-6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x=-24 \Rightarrow x=-\frac{24}{9} \Rightarrow x=-\frac{8}{3}$$

21.

a) $5+3x=4x+25 \Rightarrow 3x-4x=25-5 \Rightarrow -x=20 \Rightarrow x=-20$

b) $16+\frac{3x}{5}=8-2x \Rightarrow \frac{3x}{5}+2x=8-16 \Rightarrow \frac{13x}{5}=-8 \Rightarrow 13x=-40 \Rightarrow x=-\frac{40}{13}$

c)

$$23x+4x-6x+7=x-\frac{7}{2} \Rightarrow 21x+7=x-\frac{7}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 21x-x=-\frac{7}{2}-7 \Rightarrow 20x=-\frac{21}{2} \Rightarrow x=-\frac{21}{40}$$

d) $4x+15=75-\frac{5x}{6}\Rightarrow 4x+\frac{5x}{6}=75-15\Rightarrow \frac{29x}{6}=60\Rightarrow 29x=360\Rightarrow x=\frac{360}{29}$

22.

a) $\frac{x}{2}=14\Rightarrow x=28$

b) $\frac{x}{3}-1=15\Rightarrow \frac{x}{3}=16\Rightarrow x=48$

c) $2-\frac{3}{4}x=11\Rightarrow -\frac{3}{4}x=9\Rightarrow -3x=36\Rightarrow x=\frac{36}{-3}\Rightarrow x=-12$

d) $\frac{5}{2}+3x=11\Rightarrow 3x=11-\frac{5}{2}\Rightarrow 3x=\frac{17}{2}\Rightarrow x=\frac{17}{6}$

e) $\frac{5}{7}-\frac{1}{14}x=28\Rightarrow -\frac{1}{14}x=28-\frac{5}{7}\Rightarrow -\frac{1}{14}x=\frac{191}{7}\Rightarrow -x=382\Rightarrow x=-382$

f) $5+\frac{2}{3}x=16\Rightarrow \frac{2}{3}x=11\Rightarrow 2x=33\Rightarrow x=\frac{33}{2}$

23.

a)

$$\frac{2}{3}x-\frac{5}{2}x=\frac{3}{4}x+1\Rightarrow \frac{4x-15x}{6}=\frac{3}{4}x+1\Rightarrow \frac{-11x}{6}=\frac{3}{4}x+1\Rightarrow \frac{-11x}{6}-\frac{3}{4}x=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-22x-9x}{12}=1\Rightarrow -\frac{31}{12}x=1\Rightarrow x=-\frac{12}{31}$$

b)

$$\frac{x+1}{3}-\frac{x+3}{6}=3x-2\Rightarrow \frac{2(x+1)-\left(x+3\right)}{6}=3x-2\Rightarrow \frac{2x+2-x-3}{6}=3x-2\Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{6}=3x-2\Rightarrow x-1=18x-12\Rightarrow 17x=11\Rightarrow x=\frac{11}{17}$$

c)

$$4-\frac{x-6}{5}=2-\frac{x+2}{15}\Rightarrow \frac{x+2}{15}-\frac{x-6}{5}=2-4\Rightarrow \frac{x+2-3x+18}{15}=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+20}{15}=-2\Rightarrow -2x+20=-30\Rightarrow -2x=-50\Rightarrow x=25$$

d)

$$\frac{3x-2}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{5x-4}{6}\Rightarrow \frac{3(3x-2)-6(x-3)}{12}=\frac{2(5x-4)}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x-6-6x+18=10x-8\Rightarrow 3x+12=10x-8\Rightarrow 3x-10x=-8-12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x=-20\Rightarrow x=\frac{20}{7}$$

24.

a) $5+2(x-3)=6\Rightarrow 5+2x-6=6\Rightarrow -1+2x=6\Rightarrow 2x=7\Rightarrow x=\frac{7}{2}$

b) $3(x-7)+12=14\Rightarrow 3x-21+12=14\Rightarrow 3x-9=14\Rightarrow 3x=23\Rightarrow x=\frac{23}{3}$

c) $4-2(3-4x)=2 \Rightarrow 4-6+8x=2 \Rightarrow -2+8x=2 \Rightarrow 8x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{8} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

d) $7(5x-3)=14 \Rightarrow 35x-21=14 \Rightarrow 35x=21+14 \Rightarrow 35x=35 \Rightarrow x=\frac{35}{35} \Rightarrow x=1$

25.

a)

$$2(x-3)+5(x-2)=6x+15 \Rightarrow 2x-6+5x-10=6x+15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7x-16=6x+15 \Rightarrow 7x-6x=15+16 \Rightarrow x=31$$

b)

$$2(4-x)+3(2x-5)=2x-3 \Rightarrow 8-2x+6x-15=2x-3 \Rightarrow 4x-7=2x-3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x-2x=-3+7 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

c)

$$100-5(x-15)=3x+23 \Rightarrow 100-5x+75=3x+23 \Rightarrow 175-5x=3x+23 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 175-23=3x+5x \Rightarrow 152=8x \Rightarrow x=\frac{152}{8} \Rightarrow x=19$$

d)

$$5(x-4)+3(3x-5)=2(x+\frac{1}{2}) \Rightarrow 5x-20+9x-15=2x+1 \Rightarrow 14x-35=2x+1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x-2x=35+1 \Rightarrow 12x=36 \Rightarrow x=3$$

26.

a)

$$\frac{2(x-3)}{3}-\frac{3(x-4)}{4}=\frac{5(x-2)}{6}-\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{8(x-3)-9(x-4)}{12}=\frac{10(x-2)-1}{12} \Rightarrow$$
$$8x-24-9x+36=10x-20-1 \Rightarrow -x+12=10x-21 \Rightarrow -x-10x=-12-21 \Rightarrow$$
$$-11x=-33 \Rightarrow x=3$$

b)

$$\frac{2(3x-5)}{4}-\frac{3(4x-3)}{2}=\frac{4(3x-2)}{8} \Rightarrow \frac{4(3x-5)-12(4x-3)}{8}=\frac{4(3x-2)}{8} \Rightarrow$$
$$12x-20-48x+36=12x-8 \Rightarrow -48x+16=-8 \Rightarrow -48x=-8-16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -48x=-24 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

27.

a)

$$\frac{3(2x-1)}{4}+\frac{5(4x-3)}{2}=\frac{3x}{2}+\frac{87}{4} \Rightarrow \frac{3(2x-1)+10(4x-3)}{4}=\frac{6x+87}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x-3+40x-30=6x+87 \Rightarrow 40x-33=87 \Rightarrow 40x=120 \Rightarrow x=3$$

b)

$$\frac{12(x-1)}{5}+\frac{5(2x-1)}{4}=\frac{4(3x-2)}{5}+\frac{8x+1}{20} \Rightarrow \frac{48(x-1)+25(2x-1)}{20}=\frac{16(3x-2)+8x+1}{20} \Rightarrow$$
$$48x-48+50x-25=48x-32+8x+1 \Rightarrow 98x-73=56x-31 \Rightarrow 42x=42 \Rightarrow x=1$$

c)

$$\frac{3(x-7)}{4}=\frac{2x-8}{9}-\frac{5}{36}\Rightarrow\frac{27(x-7)}{36}=\frac{4(2x-8)-5}{36}\Rightarrow 27x-189=8x-32-5\Rightarrow$$

$$27x-8x=189-37\Rightarrow 19x=152\Rightarrow x=\frac{152}{19}\Rightarrow x=8$$

d)

$$\frac{7x-5}{12}+\frac{5(3x-2)}{4}=\frac{7x}{3}+\frac{37}{12}\Rightarrow\frac{7x-5+15(3x-2)}{12}=\frac{28x+37}{12}\Rightarrow$$

$$7x-5+45x-30=28x+37\Rightarrow 52x-35=28x+37\Rightarrow 52x-28x=35+37\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x=72\Rightarrow x=\frac{72}{24}\Rightarrow x=3$$

28.

a) $x^2-42=7\Rightarrow x^2=42+7\Rightarrow x^2=49\Rightarrow x=\pm 7$

b) $2x^2-92=36\Rightarrow x^2-46=18\Rightarrow x^2=46+18\Rightarrow x^2=64\Rightarrow x=\pm 8$

c) $x^2-25=0\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x=\pm 5$

d) $2x^2-15=12-x^2\Rightarrow 2x^2+x^2=15+12\Rightarrow 3x^2=27\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$

29.

a) $x^2-3x=0\Rightarrow x\left(x-3\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x-3=0\Rightarrow x=3\end{cases}$

b) $x^2-6x=0\Rightarrow x\left(x-6\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x-6=0\Rightarrow x=6\end{cases}$

c) $2x^2-7x=0\Rightarrow x\left(2x-7\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\2x-7=0\Rightarrow 2x=7\Rightarrow x=\dfrac{7}{2}\end{cases}$

d) $8x^2-5x=0\Rightarrow x\left(8x-5\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\8x-5=0\Rightarrow 8x=5\Rightarrow x=\dfrac{5}{8}\end{cases}$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $4x^2 - 20x = -x^2 + 155x$ b) $3'5x^2 + 3x = x^2 + 16x$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $25x^2 - 625 = 0$ c) $13x^2 - 65 = 0$

b) $63x^2 - 252 = 0$ d) $17x^2 - 289 = 0$

32. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $16x^2 - 48x = 0$ c) $\frac{5}{3}x^2 - \frac{3125}{243}x = 0$

b) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{27}x = 0$ d) $0'3x^2 - 2'7x = 0$

Ecuaciones de segundo grado. Fórmula general

33. Resuelve la siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $(5x - 8) \cdot (5x + 8) = 36$ c) $(2x + 3)^2 = 36$

b) $(x - 6) \cdot (x + 6) = -9$ d) $(4x - 12)^2 = 16$

34. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con raíces enteras:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $x^2 - 6x + 13 = 2x - 2$

c) $x^2 - 14x + 45 = 10x - x^2 - 25$

d) $3x^2 - 48x = -189$

e) $6x^2 - 10x - 23 = 2x^2 - 30x + 33$

f) $x^2 - 3x - 40 = 15x - 72$

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $4x^2 - 1 = 0$ c) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

b) $x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0$ d) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

36. Aplica la fórmula para resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 2x - 35 = 0$ c) $x^2 - 2x - 63 = 0$

b) $x^2 - 5x - 6 = 0$ d) $6x^2 + 11x - 35 = 0$

37. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$ c) $6x^2 + 35x - 6 = 0$

b) $6x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} = 0$ d) $3x^2 + 8x - 3 = 0$

38. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $10x^2 - 3x - 1 = 0$ c) $6x^2 + 5x + 1 = 0$

b) $2x^2 - 12x + 10 = 0$ d) $x^2 - 2x = 15$

Estudio del discriminante

39. Calcula el número de raíces de las siguientes ecuaciones sin resolverlas previamente:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - 6x - 9 = 0$ d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

40. Indica el número de raíces de las siguientes ecuaciones sin calcularlas previamente:

a) $10x^2 + 7x + 10 = 0$ c) $25x^2 + 10x - 1 = 0$

b) $25x^2 + 10x + 1 = 0$ d) $10x^2 + 7x + 1 = 0$

41. Calcula el número de raíces de las siguientes ecuaciones sin calcularlas previamente:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ c) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

b) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ d) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

42. Sin resolverlas, calcula el número de raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 + 3x + 2 = 0$ c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $4x^2 + 4 = 0$ d) $x^2 - x - 6 = 0$

43. Indica el número de raíces de las siguientes ecuaciones sin resolverlas previamente:

a) $x^2 - 9x + 9 = 0$ c) $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 8x + 15 = 0$

Identidades notables

44. Expresa las siguientes ecuaciones de segundo grado como cuadrado de una suma o una diferencia y da su solución sin aplicar la fórmula:

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$ c) $4x^2 - x + \frac{1}{16} = 0$

b) $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 0$ d) $9x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{81} = 0$

45. Expresa las siguientes ecuaciones en forma de identidad notable y da su solución sin aplicar la fórmula:

a) $49x^2 - 2401 = 0$ c) $9x^2 - 14x + \frac{49}{9} = 0$

b) $4x^2 - 25 = 0$ d) $\frac{16}{9}x^2 - 24x + 81 = 0$

Ecuaciones 97

30.

a) $4x^2 - 20x = -x^2 + 155x \Rightarrow 5x^2 - 175x = 0 \Rightarrow 5x \cdot (x - 35) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 35 \end{cases}$

b)

$$3'5x^2 + 3x = x^2 + 16x \Rightarrow 2'5x^2 - 13x = 0 \Rightarrow x \cdot (2'5x - 13) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2'5x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{2'5} \Rightarrow x = 5'2 \end{cases}$$

31.

a) $25x^2-625=0 \Rightarrow 25x^2=625 \Rightarrow x^2=\dfrac{625}{25} \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm 5$

b) $63x^2-252=0 \Rightarrow 63x^2=252 \Rightarrow x^2=\dfrac{252}{63} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

c) $13x^2-65=0 \Rightarrow 13x^2=65 \Rightarrow x^2=\dfrac{65}{13} \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

d) $17x^2-289=0 \Rightarrow 17x^2=289 \Rightarrow x^2=\dfrac{289}{17} \Rightarrow x^2=17 \Rightarrow x=\pm\sqrt{17}$

32.

a) $16x^2-48x=0 \Rightarrow 16x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} 16x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$

b) $\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{8}{27}x=0 \Rightarrow \dfrac{2}{3}x\left(x-\dfrac{4}{9}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-\dfrac{4}{9}=0 \Rightarrow x=\dfrac{4}{9} \end{cases}$

c) $\dfrac{5}{3}x^2-\dfrac{3125}{243}x=0 \Rightarrow \dfrac{5}{3}x\left(x-\dfrac{625}{81}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{3}x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-\dfrac{625}{81}=0 \Rightarrow x=\dfrac{625}{81} \end{cases}$

d) $0'3x^2-2'7x=0 \Rightarrow 0'3x(x-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} 0'3x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{cases}$

33.

a) $(5x-8)(5x+8)=36 \Rightarrow 25x^2-64=36 \Rightarrow 25x^2=100 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

b) $(x-6)(x+6)=-9 \Rightarrow x^2-36=-9 \Rightarrow x^2=27 \Rightarrow x=\pm\sqrt{27}$

c)

$$(2x+3)^2=36 \Rightarrow 4x^2+12x+9=36 \Rightarrow 4x^2+12x-27=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{144+432}}{8}=\frac{-12\pm\sqrt{576}}{8}=\frac{-12\pm 24}{8}=\begin{cases} \dfrac{-12+24}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-12-24}{8}=-\dfrac{36}{8}=-\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Otra solución. Tomando raíz cuadrada a ambos lados obtenemos:

$$2x+3=6 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$
$$2x+3=-6 \Rightarrow 2x=-9 \Rightarrow x=-\frac{9}{2}$$

d)

$$(4x-12)^2 = 16 \Rightarrow 16x^2 - 96x + 144 = 16 \Rightarrow 16x^2 - 96x + 128 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Otra solución. Tomando raíz cuadrada a ambos lados obtenemos:

$$4x - 12 = 4 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$4x - 12 = -4 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

34 .

a) $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+1}{2} = 4 \\ x = \frac{7-1}{2} = 3 \end{cases}$

b)

$$x^2 - 6x + 13 = 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8+2}{2} = 5 \\ x = \frac{8-2}{2} = 3 \end{cases}$$

c)

$$x^2 - 14x + 45 = 10x - x^2 - 25 \Rightarrow 2x^2 - 24x + 70 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{576-560}}{4} = \frac{24 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{24 \pm 4}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{24+4}{4} = 7 \\ x = \frac{24-4}{4} = 5 \end{cases}$$

d)

$$3x^2 - 48x = -189 \Rightarrow 3x^2 - 48x + 189 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{48 \pm \sqrt{2304-2268}}{6} = \frac{48 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{48 \pm 6}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{48+6}{6} = 9 \\ x = \frac{48-6}{6} = 7 \end{cases}$$

e)

$$6x^2 - 10x - 23 = 2x^2 - 30x + 33 \Rightarrow 4x^2 + 20x - 56 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5+9}{2} = 2 \\ x = \frac{-5-9}{2} = -7 \end{cases}$$

f)

$$x^2-3x-40=15x-72 \Rightarrow x^2-18x+32=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{324-128}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{18\pm 14}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{18+14}{2}=16 \\ x=\frac{18-14}{2}=2 \end{cases}$$

35.

a) $4x^2-1=0\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

b)

$$x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{12}=0\Rightarrow 12x^2+x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{24}=\frac{-1\pm 7}{24}=\begin{cases} \frac{-1+7}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4} \\ \frac{-1-7}{24}=-\frac{8}{24}=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

c) $5x^2-4x-1=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{10}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{10}=\begin{cases} \frac{4+6}{10}=1 \\ \frac{4-6}{10}=-\frac{1}{5} \end{cases}$

d) $3x^2+4x+1=0\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{6}=\begin{cases} \frac{-4+2}{6}=-\frac{1}{3} \\ \frac{-4-2}{6}=-1 \end{cases}$

36.

a) $x^2+2x-35=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+140}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{144}}{2}=\begin{cases} \frac{-2+12}{2}=5 \\ \frac{-2-12}{2}=-7 \end{cases}$

b) $x^2-5x-6=0\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}=\begin{cases} \frac{5+7}{2}=6 \\ \frac{5-7}{2}=-1 \end{cases}$

c) $x^2-2x-63=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+252}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{256}}{2}=\begin{cases} \frac{2+16}{2}=9 \\ \frac{2-16}{2}=-7 \end{cases}$

d) $6x^2+11x-35=0\Rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{121+840}}{12}=\frac{-11\pm\sqrt{961}}{12}=\begin{cases} \frac{-11+31}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3} \\ \frac{-11-31}{12}=-\frac{42}{12}=-\frac{7}{2} \end{cases}$

37.

a)

$$x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=0\Rightarrow 6x^2-x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12}=\begin{cases}\frac{1+5}{12}=\frac{1}{2}\\ \frac{1-5}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

b)

$$6x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}=0\Rightarrow 72x^2-6x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36+288}}{144}=\frac{6\pm\sqrt{324}}{144}=\begin{cases}\frac{6+18}{144}=\frac{24}{144}=\frac{1}{6}\\ \frac{6-18}{144}=-\frac{12}{144}=-\frac{1}{12}\end{cases}$$

c) $6x^2+35x-6=0\Rightarrow x=\frac{-35\pm\sqrt{1225+144}}{12}=\frac{-35\pm\sqrt{1369}}{12}=\begin{cases}\frac{-35+37}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\\ \frac{-35-37}{12}=-\frac{72}{12}=-6\end{cases}$

d) $3x^2+8x-3=0\Rightarrow x=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{6}=\begin{cases}\frac{-8+10}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\\ \frac{-8-10}{6}=-\frac{18}{6}=-3\end{cases}$

38.

a) $10x^2-3x-1=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{20}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{20}=\begin{cases}\frac{3+7}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}\\ \frac{3-7}{20}=-\frac{4}{20}=-\frac{1}{5}\end{cases}$

b) $2x^2-12x+10=0\Rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{4}=\frac{12\pm\sqrt{64}}{4}=\begin{cases}\frac{12+8}{4}=5\\ \frac{12-8}{4}=1\end{cases}$

c) $6x^2+5x+1=0\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{12}=\begin{cases}\frac{-5+1}{12}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}\\ \frac{-5-1}{12}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}\end{cases}$

d) $x^2-2x=15\Rightarrow x^2-2x-15=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\begin{cases}\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5\\ \frac{2-8}{2}=-\frac{6}{2}=-3\end{cases}$

39 .

a) $\Delta=36-36=0\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow$ Solución única (Raíz doble)

b) $\Delta = 36 + 36 = 72 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas
c) $\Delta = 36 - 72 = -36 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ La ecuación no posee solución real
d) $\Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas

40.
a) $\Delta = 49 - 400 = -351 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ La ecuación no posee solución real
b) $\Delta = 100 - 100 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ Solución única (Raíz doble)
c) $\Delta = 100 + 100 = 200 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas
d) $\Delta = 49 - 40 = 9 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas

41.
a) $\Delta = 25 + 24 = 49 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas
b) $\Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas
c) $\Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas
d) $\Delta = 9 - 16 = -7 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ La ecuación no posee solución real

42.
a) $\Delta = 9 - 16 = -7 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ La ecuación no posee solución real
b) $\Delta = 0 - 64 = -64 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ La ecuación no posee solución real
c) $\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ Solución única (Raíz doble)
d) $\Delta = 1 + 25 = 26 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas

43.
a) $\Delta = 81 - 36 = 45 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas
b) $\Delta = 0 + 324 = 324 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas
c) $\Delta = 100 - 100 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ Solución única (Raíz doble)
d) $\Delta = 64 - 60 = 4 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas

44.
a) $x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$

b) $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

c) $4x^2 - x + \frac{1}{16} = 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Rightarrow 2x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

d) $9x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{81} = 0 \Rightarrow \left(3x - \frac{2}{9}\right)^2 = 0 \Rightarrow 3x - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow 3x = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{2}{27}$

45.
a) $49x^2 - 2401 = 0 \Rightarrow x^2 - 49 = 0 \Rightarrow (x-7)\cdot(x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$

b) $4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x-5)\cdot(2x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$

c) $9x^2 - 14x + \frac{49}{9} = 0 \Rightarrow \left(3x - \frac{7}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow 3x - \frac{7}{3} = 0 \Rightarrow 3x = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \frac{7}{9}$

d) $\frac{16}{9}x^2 - 24x + 81 = 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}x - 9\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}x - 9 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}x = 9 \Rightarrow x = \frac{27}{4}$

PROBLEMAS

○**46.** Calcula un número tal que si le sumamos 39 nos da 87.

○**47.** Si sumamos tres números pares consecutivos obtenemos como resultado 54. ¿De qué números se trata?

○**48.** Calcula tres números impares consecutivos cuya suma sea 81.

○**49.** Cinco veces un número más 3 veces el siguiente son 19. ¿De qué números se trata?

◐**50.** El producto de dos números pares consecutivos es 2600. Calcula dichos números.

●**51.** La suma de un número y su inverso es $\frac{53}{14}$. Calcula de qué número se trata.

◐**52.** Calcula dos números que suman 82 y tales que la diferencia de sus cuadrados es 1 476.

◐**53.** Dos hermanos se llevan un año de diferencia. Si el triple de la edad del mayor más el doble de la del menor es 103, calcula la edad de cada hermano.

◐**54.** Alberta tiene 4 años más que Fátima y, dentro de 2 años, tendrá el doble de edad. ¿Cuántos años tienen Alberta y Fátima?

○**55.** Un padre tiene dos hijos. El triple de la edad del mayor mas el doble de la edad del menor es la edad del padre. ¿Qué edad tiene cada uno si el padre tiene 34 años y la diferencia de las edades de los hermanos es de 3 años?

◐**56.** Mezclamos vino bueno de 8 €/L con vino de calidad inferior de 4 €/L, obteniendo 120 L de mezcla a 5 €/L. ¿Cuántos litros de cada clase hemos mezclado?

●**57.** Dos obreros juntos tardan 10 h en realizar un trabajo. Si lo hacen por separado, uno de ellos emplea 15 h más que el otro. ¿Cuánto tiempo emplea cada uno de ellos en realizar el trabajo por sí solo?

●**58.** Dos pintores tardan 4 h en pintar un edificio trabajando juntos. ¿Cuánto tardará en hacerlo cada uno individualmente si uno de ellos tarda 6 h más que el otro?

●**59.** Tenemos dos clases de café: natural y torrefacto. Si el kilo de natural cuesta 80 cts. de euro más caro, calcula el precio de cada uno de ellos si, habiéndonos llevado 2 kg de torrefacto y 9 kg de natural, nos hemos gastado 31'4 €.

◐**60.** Mezclamos leche desnatada de 0'75 €/L con leche entera de 0'9 €/L. ¿Cuántos litros de cada clase hemos de mezclar si queremos obtener 12 L de mezcla a 0'85 €/L?

●**61.** Llenamos un depósito en 3 h abriendo dos grifos iguales a la vez. ¿Cuánto tiempo tardará cada uno de los grifos, por separado, en llenar el depósito si uno tarda 8 h más que el otro?

●**62.** Un frutero compra naranjas a un agricultor por valor de 7 500 €. Por el mismo precio podía haber comprado 7 500 kg más de naranjas de una calidad inferior, ahorrándose 5 cts. por kilo. ¿Cuántos kilos de naranjas compró? ¿Cuánto pagó por kilo? ¿Cuánto hubiera pagado por kilo si hubiera aceptado la oferta?

◐**63.** Observamos que la superficie de un cuadrado aumenta 24 cm² cuando aumentamos la longitud de su lado 2 cm. ¿Cuánto medía el lado del cuadrado en un principio?

◐**64.** En un rectángulo la base mide 2 unidades más que la altura. Si unimos el punto medio del lado mayor con los vértices de los lados opuestos obtenemos un triángulo isósceles. ¿Qué longitud tienen los lados del rectángulo si el área del triángulo es de 4 unidades de superficie?

○**65.** Queremos saber las medidas de una parcela rectangular de 96 m², sabiendo que el lado mayor mide 10 m más que el menor.

◐**66.** La diagonal de un rectángulo mide 25 cm y un lado es 17 cm mayor que el otro. Calcula el área de dicho rectángulo.

●**67.** A la hora de realizar una obra, observamos que el coste de la misma viene dado por la fórmula:

$$C = 20x^2 + 15x$$

donde C indica el precio en euros y x indica el coste de la hora trabajada. Calcula lo que vale la hora de trabajo si la obra cuesta 25 025 €.

●**68.** Los alumnos de 3º de ESO realizan una actividad extraescolar y el autobús les cuesta 296 €. En el último momento se apuntan 3 alumnos más y, como consecuencia, el autobús les cuesta 0'6 € menos a cada uno. ¿Cuántos alumnos iban al principio a la excursión?

46.
Sea x el número buscado $\Rightarrow x+39=87 \Rightarrow x=87-39 \Rightarrow x=48$

47.
Sean los números buscados: $x-2$, x, $x+2$
$x-2+x+x+2=54 \Rightarrow 3x=54 \Rightarrow x=18 \Rightarrow$ Los números buscados son:
$x-2=16$, $x=18$ y $x+2=20$

48.
Sean los números buscados: $x-1$, $x+1$, $x+3$
$x-1+x+1+x+3=81 \Rightarrow 3x+3=81 \Rightarrow 3x=78 \Rightarrow x=26 \Rightarrow$ Los números buscados son: $x-1=25$, $x+1=27$, $x+3=29$

49.
Sean x y $x+1$ los números buscados.
$5x+3(x+1)=19 \Rightarrow 5x+3x+3=19 \Rightarrow 8x=16 \Rightarrow x=2$
Los números buscados son 2 y 3.

50.
Sean x, $x+2$ los números buscados.
$$x(x+2)=2600 \Rightarrow x^2+2x-2600=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+10400}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{10404}}{2}=\frac{-2\pm102}{2}=\begin{cases}50\\-52\end{cases}$$
Los números buscados son: 50 y 52 , o bien , - 52 y – 50

51.
Sea x el número buscado.

$$x+\frac{1}{x}=\frac{53}{14} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=\frac{53}{14} \Rightarrow 14x^2-53x+14=0 \Rightarrow$$
$$x=\frac{53\pm\sqrt{2809-784}}{28}=\frac{53\pm\sqrt{2025}}{28}=\frac{53\pm45}{28}=\begin{cases}\frac{7}{2}\\\frac{2}{7}\end{cases}$$
Aparecen dos números que cumplen las condiciones del problema: $\frac{2}{7}$ y $\frac{7}{2}$

52.
Los números buscados son x y 82 - x . Como la diferencia de sus cuadrados es 1476 tenemos la siguiente ecuación:

$$x^2-(82-x)^2=1476 \Rightarrow x^2-\left(x^2-164x+6724\right)=1476 \Rightarrow 164x=8200 \Rightarrow x=50$$
Los números buscados son 50 y 32.

53.
Sean x los años del mayor.
$3x+2(x-1)=103 \Rightarrow 3x+2x-2=103 \Rightarrow 5x=105 \Rightarrow x=21$
Las edades de los hermanos son 21 y 20 años respectivamente

54.
Sea x la edad que tiene Fátima actualmente. Planteamos el problema mediante la siguiente tabla:

	Alberta	Fátima
Hoy	$x + 4$	x
Dentro de 2 años	$x + 6$	$x + 2$

Dentro de dos años la edad de Alberta será el doble que la de Fátima. Esto se traduce al lenguaje algebraico mediante la siguiente ecuación:

$$x+6=2\left(x+2\right)\Rightarrow x+6=2x+4\Rightarrow x=2$$

La edad de Fátima es de 2 años y la de Alberta de 6 años.

55.
Sea x la edad del hijo menor.
3 Edad Mayor + 2 Edad Menor = Edad del Padre.
Sea x la edad del menor.
$3(x+3)+2x=34\Rightarrow 3x+9+2x=34\Rightarrow 5x=25\Rightarrow x=5$
El menor tiene 5 años y el mayor tiene 8 años.

56.

Vino bueno	Vino calidad inferior	Mezcla	
8	4	5	€ / litro
x	120 - x	120	Litros

$$8x+4\left(120-x\right)=5\cdot 120\Rightarrow 8x+480-4x=600\Rightarrow 4x=120\Rightarrow x=30$$

Así que hemos mezclado 30 litros de vino bueno con 90 litros de vino de calidad inferior.

57.
Supongamos que el primer obrero tarda x horas en hacer el trabajo sólo. Entonces el segundo obrero tardará x + 15 horas en realizarlo sólo. Como juntos tardan 10 horas, planteamos el problema por reducción a la unidad.
La cantidad de trabajo que hace el primer obrero en una hora, mas la cantidad de trabajo que hace el segundo obrero en una hora, es la cantidad de trabajo que realizan los dos obreros en una hora. Esto se traduce al lenguaje algebraico con la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{x+15+x}{x\left(x+15\right)}=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{2x+15}{x\left(x+15\right)}=\frac{1}{10}\Rightarrow 20x+150=x\left(x+15\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x+150=x^2+15x\Rightarrow x^2+15x-20x-150=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5x-150=0\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+600}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{625}}{2}=\frac{5\pm 25}{2}=\begin{cases}15\\-10\end{cases}$$

Desechamos la solución x = -10 porque no tiene sentido.
Así que el primer obrero realiza el trabajo en 15 horas y el segundo en 30 horas.

58.

Primer pintor	Segundo pintor	Juntos	
x	x- 6	4	Horas que tardan en realizar el trabajo
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-6}$	$\frac{1}{4}$	Trabajo realizado en 1 hora

La ecuación es la siguiente:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{x-6+x}{x(x-6)}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{2x-6}{x(x-6)}=\frac{1}{4}\Rightarrow 8x-24=x^2-6x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-14x+24=0\Rightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{196-96}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{14\pm 10}{2}=\begin{cases}12\\2\end{cases}$$

La solución $x=2$ no tiene sentido en este problema, ya que el segundo pintor no puede tardar - 4 horas en realizar el trabajo.
Solución: 12 horas el primer pintor y 6 horas el segundo pintor.

59.

Natural	Torrefacto	
x + 0’8	x	€ / kg
9	2	kilos
9 (x + 80)	2 x	Gasto Total

$$9(x+0'8)+2x=31'4\Rightarrow 9x+7'2+2x=31'4\Rightarrow 11x=24'2\Rightarrow x=2'2$$

El café torrefacto cuesta 2’2 €/ kg y el café natural cuesta 3 € / kg

60.

Semidesnatada	Entera	Mezcla	
0’75	0’9	0’85	€ / litro
12 – x	x	12	litros

$$(12-x)\cdot 0'75+0'9x=12\cdot 0'85\Rightarrow 9-0'75x+0'9x=10'2\Rightarrow$$

$$9+0'15x=10'2\Rightarrow 0'15x=1'2\Rightarrow x=8$$

La leche entera cuesta 8 € /litro y la leche semidesnatada cuesta 4 € / litro

61.
Sea x la cantidad de horas que tarda el primer grifo en llenar el depósito. El segundo grifo tardará x + 8 horas.

El problema se resuelve planteando la cantidad de depósito que se llena en una hora. “La cantidad de depósito que llena el primer grifo en una hora, mas la cantidad de depósito que llena el segundo depósito en una hora es la cantidad de depósito que llenan los dos grifos en una hora”

Algebraicamente se traduce en:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+8}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{x+8+x}{x(x+8)}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{2x+8}{x(x+8)}=\frac{1}{3}\Rightarrow 6x+24=x^2+8x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x-24=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{-2\pm10}{2}=\begin{cases}4\\-6\end{cases}$$

El primer grifo tarda 4 horas y el segundo grifo tarda 12 horas en llenar el depósito.

62.

Sea *x* el número de naranjas que compró. Ordenamos los datos en la siguiente tabla:

	Naranja buena	Naranja calidad inferio
Kilos	x	$7500 + x$
€ / kg	$\frac{7500}{x}$	$\frac{7500}{7500+x}$
€	7500	7500

€/kg Naranja buena - €/kg Naranja calidad inferior = 0’05

$$\frac{7500}{x}-\frac{7500}{7500+x}=0'05\Rightarrow\frac{56250000}{(7500+x)\cdot x}=0'05\Rightarrow 0'05\,x^2+375\,x-56250000=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{-375\pm\sqrt{140625-4\cdot0'05\cdot(-56250000)}}{2\cdot0.05}=\frac{-375\pm\sqrt{11390625}}{0'1}=\frac{-375\pm3375}{0'1}$$

$$=\begin{cases}\frac{-375-3375}{0.1}=-\frac{3750}{0.1}=-37500\\ \frac{-375+3375}{0.1}=\frac{3000}{0.1}=30000\end{cases}$$

No tiene sentido la solución -37500. Por lo tanto compró 30 000 kg de naranjas.

Pagó el kilo a $\frac{7500}{30000}=0'25$ €

Si hubiera aceptado la oferta hubiera pagado las naranjas a $\frac{7500}{37500}=0'2$ €/kg

63.

Sea *x* cm la longitud del lado del cuadrado inicialmente.

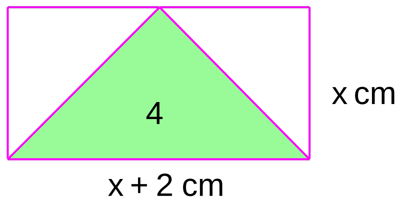
Si aumentamos en 2 cm la longitud del lado, la superficie del cuadrado resultante es $(x+2)^2$. Esta superficie es 24 cm^2 mayor que la superficie inicial x^2 del cuadrado.

Entonces la ecuación resultante es:

$$(x+2)^2=x^2+24\Rightarrow x^2+4x+4=x^2+24\Rightarrow 4x+4=24\Rightarrow 4x=20\Rightarrow x=5$$

El cuadrado inicial media 5 cm y después del aumento mide 7 cm.

64.

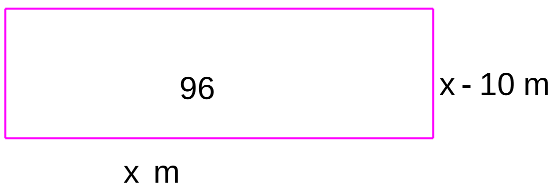


Como el área del triángulo es 4 cm^2

$$\frac{(x+2)x}{2} = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

El rectángulo mide 4 cm de largo por 2 cm de ancho.

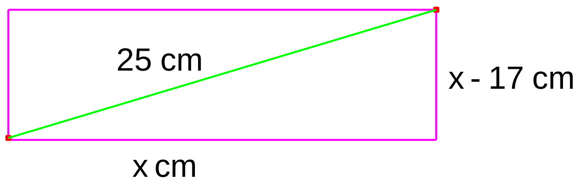
65.



$$(x-10)x = 96 \Rightarrow x^2 - 10x - 96 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+384}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{10 \pm 22}{2} = \begin{cases} 16 \\ -6 \end{cases}$$

La solución – 6 no tiene sentido.
Las medidas de la parcela son 16 metros de largo y 6 metros de ancho.

66.



Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$25^2 = x^2 + (x-17)^2 \Rightarrow 625 = x^2 + x^2 - 34x + 289 \Rightarrow 2x^2 - 34x - 336 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 17x - 168 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{289+672}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{17 \pm 31}{2} = \begin{cases} 24 \\ -7 \end{cases}$$

La solución – 7 no tiene sentido.
Las medidas del rectángulo son 24 m de largo y 7 m de ancho. Su área es de 168 m^2.

67.

$$20x^2 + 15x = 25025 \Rightarrow 20x^2 + 15x - 25025 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 5005 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+80080}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{80089}}{8} = \frac{-3 \pm 283}{8} = \begin{cases} 35 \\ -\dfrac{143}{4} \end{cases}$$

La hora de trabajo cuesta 35 euros.

68.

Número de alumnos	x	$x+3$
Coste/ alumno	$\frac{296}{x}$	$\frac{296}{x+3}$

coste inicial – 0’6 = Coste final

$$\frac{296}{x}-0'6=\frac{296}{x+3}\Rightarrow\frac{296}{x}-\frac{296}{x+3}=0'6\Rightarrow\frac{296(x+3)-296x}{x(x+3)}=0'6\Rightarrow$$

$$296x+888-296x=0'6x^2+1'8x\Rightarrow 0'6x^2+1'8x-888=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{-1'8\pm\sqrt{3'24+2131'2}}{1'2}=\frac{-1'8\pm 46.2}{1'2}=\begin{cases}37\\-40\end{cases}$$

Al principio iban 37 alumnos a la excursión.

69. Un grupo de amigos celebra una comida que acuerdan pagar entre todos. En el momento en que el camarero trae la factura, que es de 360 €, dos de ellos reciben una llamada que les obliga a abandonar precipitadamente el restaurante. El resto de sus compañeros decide asumir solidariamente la factura, con lo que deberán pagar 2 € más cada uno. ¿Cuántos comensales se sentaron a la mesa?

70. Si en un cuadrado aumentamos la longitud de dos de sus lados paralelos en 2 unidades, el área del rectángulo resultante aumenta en 8 unidades. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

71. En una etapa de la vuelta ciclista a España, el primer corredor saca una ventaja de 3 km al segundo. Si el primero lleva una velocidad constante de 40 km/h y el segundo de 45 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo corredor en alcanzar al primero?, ¿qué distancia han de recorrer los dos para que le alcance? Si la meta está a 30 km del primer corredor, ¿quién ganará la etapa?

72. El atunero Urdiales, de regreso al puerto de Castro, se detiene un mes a pescar atún en el Océano Índico, con lo que aumenta $\frac{1}{6}$ la carga que transporta en su bodega. ¿Cuántas toneladas de pescado lleva el Urdiales en su bodega antes de la parada en el Océano Índico si cuando llega a puerto descarga 35 000 kg de pescado?

69.

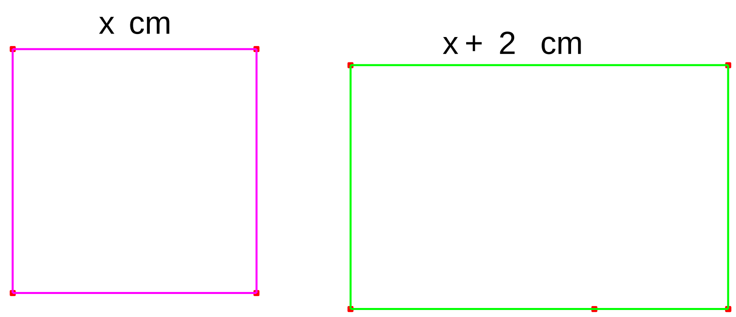
Sea x el número de comensales. Como la factura es de 360 €, le corresponde $\frac{360}{x}$ € a cada uno. Al abandonar 2 comensales el restaurante, le corresponde abonar a cada uno de los restantes comensales $\frac{360}{x-2}$ €. Dado que la diferencia entre ambas cantidades es 2 €, resulta la siguiente ecuación:

$$\frac{360}{x-2}-\frac{360}{x}=2 \Rightarrow \frac{360x-360(x-2)}{x(x-2)}=2 \Rightarrow 2x^2-4x-720=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+5760}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{5776}}{4}=\frac{4\pm 76}{4}=\begin{cases}20\\-18\end{cases}$$

La respuesta – 18 no tiene sentido.
En la mesa se sentaron 20 comensales.

70.



Sea x la longitud del lado del cuadrado. La ecuación resultante es: $(x+2)\cdot x = x^2+8 \Rightarrow$ $x^2+2x = x^2+8 \Rightarrow x = 4$
Por lo tanto, el cuadrado inicial mide 4 cm de lado.

71.
Sea x el tiempo en horas que tarda el segundo corredor en alcanzar al primero. En ese tiempo el primero recorre $40x$ km y el segundo recorre $45x$ km . Además el segundo recorre 3 km más que el primero. Así la ecuación es:

$$3=45x-40x \Rightarrow 5x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{5}\ .$$

El segundo corredor tardará $\frac{3}{5}$ de hora, es decir 36 minutos, en alcanzar al primer corredor. En ese tiempo el primer corredor ha recorrido $40\cdot\frac{3}{5}=24$ km y el segundo corredor ha recorrido $45\cdot\frac{3}{5}=27$ km . La carrera la gana el segundo corredor.

72.
Sea x el número de kg de pescado que lleva el barco en su bodega

$$x+\frac{1}{6}x = 35000 \Longrightarrow 7x = 210000 \Longrightarrow x = 30000$$

Solución: 30000 kg = 30 Tm de pescado lleva en su bodega antes de la parada en el Índico

AUTOEVALUACIÓN PAG. 99

AUTOEVALUACIÓN

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = 3x - 12$

b) $5 \cdot (x - 1) + 7 \cdot (x - 3) = 8 \cdot (2 \cdot x - 7)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $4x - 7 + 9(x - 1) = 8x - 5 - \frac{x}{2}$

b) $\frac{3x-5}{2} + \frac{8x-6}{4} = \frac{7x-6}{2} - \frac{9x-7}{2}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - 40 = 4x^2 + 41$

b) $16x^2 - 32x = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 + 5x - 12 = 0$

b) $12x^2 - 11x + 2 = 0$

5. El producto de dos números consecutivos es 132. Calcúlalos.

6. Averigua el número de raíces de las siguientes ecuaciones sin resolverlas:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$

b) $x^2 - 2x - 2 = 0$

c) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

7. En el transporte escolar viajan el doble de chicos que de chicas. Calcula cuántos chicos y chicas viajan, si las 51 plazas del autobús están ocupadas.

8. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 31. ¿De qué números se trata?

9. La pintura utilizada para pintar una habitación cuesta 120 €. Hay una oferta según la cual, si compramos otra clase de pintura que cuesta 2'25 € menos el kilo, podríamos adquirir 12 kg más. ¿Cuántos kilogramos de pintura podría comprar con la oferta?

10. Una camisa cuesta los $\frac{4}{9}$ de un pantalón. Al ir a pagar nos piden 3 600 €. ¿Cuánto cuesta cada prenda si el dependiente se equivocó y en lugar de sumar los precios los multiplicó?

Ecuaciones 99

1 .

a) $2x - 5 = 3x - 12 \Rightarrow x = 7$

b)

$$5(x-1) + 7(x-3) = 8(2x-7) \Rightarrow 5x - 5 + 7x - 21 = 16x - 56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x - 26 = 16x - 56 \Rightarrow 4x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{4} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

2.

a) $4x - 7 + 9(x-1) = 8x - 5 - \frac{x}{2} \Rightarrow 13x - 16 = \frac{15}{2}x - 5 \Rightarrow \frac{11}{2}x = 11 \Rightarrow x = 2$

b)

$$\frac{3x-5}{2} + \frac{8x-6}{4} = \frac{7x-6}{2} - \frac{9x-7}{2}$$

$$6x - 10 + 8x - 6 = 14x - 12 - 18x + 14$$

$$14x - 16 = -4x + 2$$

$$18x = 18$$

$$x = 1$$

3.

a) $5x^2 - 40 = 4x^2 + 41 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$

b) $16x^2 - 32x = 0 \Rightarrow 16x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

4.

a) $2x^2+5x-12=0 \Rightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+96}}{4}=\dfrac{-5\pm 11}{4}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\\ -4\end{cases}$

b) $12x^2-11x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-96}}{24}=\dfrac{11\pm 5}{24}=\begin{cases}\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

5.

$(x-1)x=132 \Rightarrow x^2-x-132=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{529}}{2}=\dfrac{1\pm 23}{2}=\begin{cases}12\\ -11\end{cases}$

Los números buscados son 11 y 12, o bien, -12 y -11.

6.

a) $\Delta=4-8=-4 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ La ecuación no posee raíces reales

b) $\Delta=4+8=12 \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow$ La ecuación posee dos raíces reales y distintas

c) $\Delta=16-24=-8 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ La ecuación no posee raíces reales

7.

Sea x el número de chicas que viaja en el transporte escolar. Los chicos son $2x$.

$$x+2x=51 \Rightarrow 3x=51 \Rightarrow x=17$$

En el trasporte viajan 17 chicas y 34 chicos.

8.

Sean x- 1 y x los números buscados.

$$x^2-(x-1)^2=31 \Rightarrow x^2-x^2+2x-1=31 \Rightarrow 2x=32 \Rightarrow x=16$$

Los números buscados son 15 y 16

9.

Sea x el número de kilos de pintura que utiliza para pintar la habitación inicialmente.

	Precio inicial	**Oferta**
Kilos	x	$12+x$
€ / kg	$\dfrac{120}{x}$	$\dfrac{120}{12+x}$
€	120	120

La diferencia entre la oferta y el precio inicial es de 2'25 €/kg. Se plantea la siguiente ecuación:

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+12}=2'25 \Rightarrow \frac{120(x+12)-120x}{x(x+12)}=2'25 \Rightarrow 1440=2'25x^2+27x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2'25x^2+27x-1440=0 \Rightarrow x=\frac{-27\pm\sqrt{729+12960}}{4'5}=\frac{-27\pm\sqrt{13689}}{4'5}\frac{-27\pm 117}{4'5}=\begin{cases}20\\ -32\end{cases}$$

Inicialmente se comprarían 20 kilos de pintura.

Aprovechando la oferta, se podría adquirir 32 kilos de pintura.

10.

Si el pantalón cuesta x €, la camisa cuesta $\frac{4}{9}x$ €.

La ecuación resultante es: $x\frac{4}{9}x = 3600 \Rightarrow x^2 = 8100 \Rightarrow x = 90$

El pantalón cuesta 90 € y la camisa 40 €.

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 101

Olimpiada matemática

1. Un grupo de excursionistas tiene que cruzar un río profundo y el puente de dicho río está roto. El organizador de la excursión observa que en la orilla hay una barquita en la que juegan dos niños y es tan pequeña que solo cabe un adulto en ella. ¿Qué estrategia utilizarán los excursionistas para cruzar el río? Nota: los excursionistas son adultos.
2. Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3 por 3. Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas y los tres que se leen en columnas. ¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?
3. Prueba que, para todo entero positivo n, la expresión decimal $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ es periódica mixta.
4. Forma una figura con tres cuadrados iguales y yuxtapuestos. Córtala en cuatro partes, de forma que los cuatro trozos formen un cuadrado que en su interior tenga un cuadrado vacío.

1. Los dos niños cruzan el río, quedando uno de ellos en la orilla opuesta mientras que el otro vuelve con la barquita. A continuación, un adulto cruza al otro lado y el niño que está en la orilla opuesta vuelve con la barquita.

Repetiremos este argumento de doble ida y doble vuelta tantas veces como adultos hay.

2. Consideremos la distribución:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Sea S la suma:

$S = ABC + DEF + GHI + ADG + BEH + CFI$

$S = 100(A + D + G + A + B + C) + 10(B + E + H + D + E + F) + (C + F + I + G + H + I)$

$S = 200A + 110B + 101C + 110D + 20E + 11F + 101G + 11H + 2I$

$S = (9 \cdot 22 + 2)A + (9 \cdot 12 + 2)B + (9 \cdot 11 + 2)C + (9 \cdot 12 + 2)D +$

$+ (9 \cdot 2 + 2)E + (9 + 2)F + (9 \cdot 11 + 2)G + (9 + 2)H + (9 \cdot 0 + 2)$

$S = \dot{9} + 2(A + B + C + D + E + F + G + H + I)$

$S = \dot{9} + 2 \cdot 45 = \dot{9} + 2 \cdot 5 \cdot 9$

$S = \dot{9} + \dot{9}$

$S = \dot{9}$

Como 2001 no es múltiplo de 9 no existe ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor dado.

3. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$

Para que una fracción origine un número decimal periódico mixto, una vez reducida debe tener en el denominador algún factor primo del conjunto {2, 5} y alguno que no sea ni el 2 ni el 5.

La fracción anterior tiene en el denominador, al menos, un factor 2 más que el numerador.

En efecto, si *n* es par entonces *n* = 2*k*, por tanto:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{12k^2 + 12k + 2}{2k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)} = \frac{6k^2 + 6k + 1}{2k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)}$$

El numerador es impar y el denominador es par. Si *n* es impar, *n* = 2*k* + 1.

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{12k^2 + 24k + 11}{(2k+1) \cdot (2k+2) \cdot (2k+3)}$$

El numerador es impar y el denominador es par.

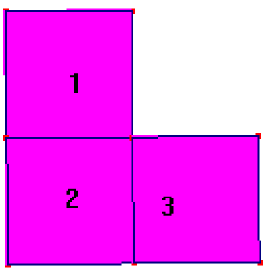
En ambos casos el denominador tiene, al menos, un factor 2 que no está en el numerador.

Además, la expresión

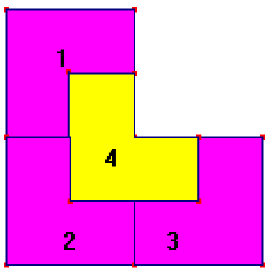
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

muestra que el numerador no contiene el factor primo 3 (da resto 2 al dividirlo entre 3), mientras el denominador al ser producto de tres números consecutivos es múltiplo de 3.

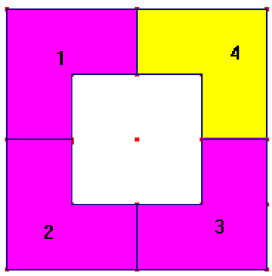
4. Paso 1:



Paso 2:



Paso 3:



UNIDAD 6. Sistemas de ecuaciones

ACTIVIDADES PAG. 104

ACTIVIDADES

1. Encuentra, al menos, cinco soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5y - 2 = 0$ b) $4x - 3y - 1 = 0$

2. Indica el grado de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2 - 5y = 46 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

1.

a) (x = - 4 , y = - 2) , (x = 1 , y = 0) , (x = 6 , y = 2) , (x = 11 , y = 4) , (x= 16 , y=6)

b) (x = - 5 , y = - 7) , (x = - 2 , y = - 3) , ($x = -\frac{1}{2}$, y = - 1) , (x = 4 , y = 5) , (x = 1 , y = 1)

2.

a) grado 1

b) grado 2

ACTIVIDADES PAG. 105

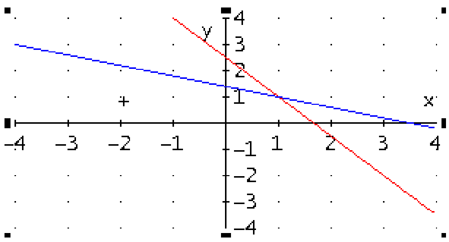
ACTIVIDADES

3. Representa gráficamente en tu cuaderno los sistemas e indica si son equivalentes:

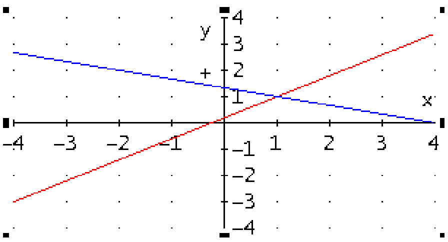
a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 5y = -1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

3.

a)



b)



Tienen la misma solución, por lo tanto, son equivalentes

ACTIVIDADES PAG. 106

ACTIVIDADES

4. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 5y = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y = 12 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = 19 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

4.

a)

$$\begin{cases} 2x+y=7 \Rightarrow y=7-2x \\ x+5y=17 \end{cases}$$

$$x+5(7-2x)=17$$
$$x+35-10x=17$$
$$-9x=-18$$
$$\boxed{x=2}$$
$$y=7-2x$$
$$y=7-4$$
$$\boxed{y=3}$$

b)

$$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ x-2y=5 \Rightarrow x=2y+5 \end{cases}$$

$$2(2y+5)+3y=-4$$
$$4y+10+3y=-4$$
$$7y=-14$$
$$\boxed{y=-2}$$
$$x=-4+5$$
$$\boxed{x=1}$$

c)

$$\begin{cases} x-5y=12 \Rightarrow x=5y+12 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$$

$$4(5y+12)+3y=2$$
$$20y+48+3y=2$$
$$23y=-46$$
$$\boxed{y=-2}$$
$$x=-10+12$$
$$\boxed{x=2}$$

d)

$$\begin{cases} 5x-3y=19 \\ 2x+y=1 \Rightarrow y=1-2x \end{cases}$$

$$5x-3(1-2x)=19$$
$$5x-3+6x=19$$
$$11x=22$$
$$\boxed{x=2}$$
$$y=1-4$$
$$\boxed{y=-3}$$

ACTIVIDADES PAG. 107

ACTIVIDADES

5. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 2x+5y=6 \\ 6x-y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-4y=10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y=2 \\ x-6y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-7y=-4 \\ 3x+2y=19 \end{cases}$

5.

a)

$$\begin{cases} 2x+5y=6 \Rightarrow y=\dfrac{6-2x}{5} \\ 6x-y=2 \Rightarrow y=6x-2 \end{cases}$$

$$\frac{6-2x}{5}=6x-2$$
$$6-2x=30x-10$$
$$32x=16$$
$$\boxed{x=\frac{1}{2}}$$
$$y=6x-2$$
$$y=3-2$$
$$\boxed{y=1}$$

b)

$$\begin{cases} x+2y=5 \Rightarrow x=5-2y \\ 3x-4y=10 \Rightarrow x=\dfrac{4y+10}{3} \end{cases}$$

$$\frac{4y+10}{3}=5-2y$$
$$4y+10=15-6y$$
$$10y=5$$
$$y=\frac{5}{10}$$
$$\boxed{y=\frac{1}{2}}$$
$$x=5-2y$$
$$x=5-1$$
$$\boxed{y=4}$$

c)

$$\begin{cases} x+3y=2 \Rightarrow x=2-3y \\ x-6y=5 \Rightarrow x=5+6y \end{cases}$$

$$5+6y=2-3y$$
$$9y=-3$$
$$y=-\frac{3}{9}$$
$$\boxed{y=-\frac{1}{3}}$$
$$x=2-3y$$
$$x=2+1$$
$$\boxed{x=3}$$

d)

$$\begin{cases} 2x-7y=-4 \Rightarrow x=\dfrac{7y-4}{2} \\ 3x+2y=19 \Rightarrow x=\dfrac{19-2y}{3} \end{cases}$$

$$\frac{7y-4}{2}=\frac{19-2y}{3}$$
$$21y-12=38-4y$$
$$25y=50$$
$$\boxed{y=2}$$
$$x=\frac{7y-4}{2}$$
$$\boxed{x=5}$$

ACTIVIDADES

6. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 5y = 22 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$

6.

a)

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-x}+2y=-1 \\ \cancel{x}+5y=22 \end{cases}$$

$$7y=21$$

$$\boxed{y=3}$$

$$x=1+2y$$

$$\boxed{x=7}$$

b)

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\cancel{2y}=6 \\ 4x-\cancel{2y}=14 \end{cases}$$

$$5x=20$$

$$\boxed{x=4}$$

$$y=2x-7$$

$$\boxed{y=1}$$

c)

$$\begin{cases} x-y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x}+2y=-8 \\ \cancel{2x}-5y=14 \end{cases}$$

$$-3y=6$$

$$\boxed{y=-2}$$

$$x=4+y$$

$$\boxed{x=2}$$

d)

$$\begin{cases} 3x+5y=2 \\ 4x-3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x+\cancel{15y}=6 \\ 20x-\cancel{15y}=35 \end{cases}$$

$$29x=41$$

$$\boxed{x=\frac{41}{29}}$$

$$\begin{cases} \cancel{12x}+20y=8 \\ \cancel{-12x}+9y=-21 \end{cases}$$

$$29y=-13$$

$$\boxed{y=-\frac{13}{29}}$$

ACTIVIDADES PAG. 109

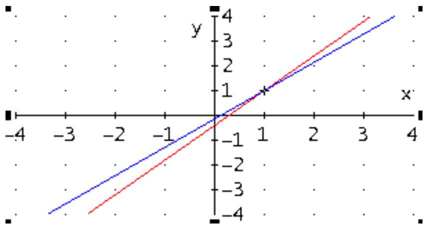
ACTIVIDADES

7. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas lineales:

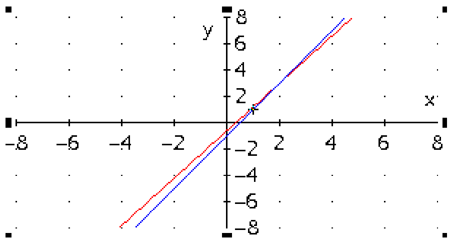
a) $\begin{cases} 7x-5y=2 \\ 8x-7y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x-5y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$

7.

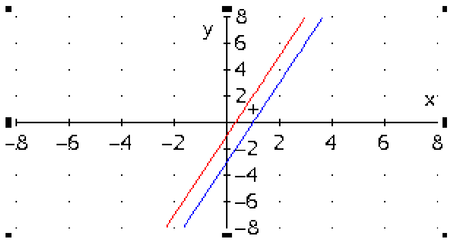
a)



b)



c)



ACTIVIDADES PAG. 110

ACTIVIDADES

8. Resuelve los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases} 2(x+3y)-x=1 \\ x-(2x+5y)=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{3}-y=-1 \\ \frac{x}{3}+2y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-\frac{y-1}{2}=4 \\ \frac{x-2}{2}+\frac{y+1}{3}=4 \end{cases}$

8.

a)

$$\begin{cases} 2(x+3y)-x=1 \\ x-(2x+5y)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6y-x=1 \\ x-2x-5y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x}+6y=1 \\ -\cancel{x}-5y=-2 \end{cases}$$

$$\boxed{y=-1}$$

$$x+6y=1 \Rightarrow x=1-6y \Rightarrow x=1+6 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

b)

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-y=-1 \\ \frac{x}{3}+2y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\cancel{x}}{\cancel{3}}+y=1 \\ \frac{\cancel{x}}{\cancel{3}}+2y=11 \end{cases}$$

$$3y=12 \Rightarrow y=\frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{y=4}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-y=-1 \\ \frac{x}{3}+2y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x-\cancel{2y}=-2 \\ \frac{x}{3}+\cancel{2y}=11 \end{cases}$$

$$\frac{3}{3}x=9 \Rightarrow \boxed{x=9}$$

c)

$$\begin{cases} x-\frac{y-1}{2}=4 \\ \frac{x-2}{2}+\frac{y+1}{3}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-(y-1)=8 \\ 3(x-2)+2(y+1)=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+1=8 \\ 3x-6+2y+2=24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x+2y=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-\cancel{2y}=14 \\ 3x+\cancel{2y}=28 \end{cases}$$

$$7x=42 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

$$2x-y=7 \Rightarrow 12-y=7 \Rightarrow \boxed{y=5}$$

ACTIVIDADES PAG. 111

ACTIVIDADES

9. Si se suman dos números se obtiene 57 y si se restan se obtiene 15. ¿De qué números se trata?

10. Una señora compra 2 cajitas de té de jazmín y 3 de té rojo por un importe de 14 € en total. Su amiga compra 5 cajitas de té de jazmín y 1 de té rojo y todo le cuesta 15'5 €. ¿Cuánto cuesta cada cajita de cada clase de té?

11. Para adquirir un disco que cuesta 15 €, una chica rompe su hucha y entrega al dependiente un total de 12 monedas. Si las monedas son de 2 € y de 50 cts de euro, ¿cuántas monedas entregó de cada clase?

9.

Sean x e y los números buscados.

$$\begin{cases} x+y=57 \\ x-y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\cancel{y}=57 \\ x-\cancel{y}=15 \end{cases}$$

$$2x=72 \Rightarrow \boxed{x=36}$$

$$x-y=15 \Rightarrow 36-y=15 \Rightarrow \boxed{y=21}$$

10.

Sea x los euros que cuesta la caja de té jazmín e y los euros que cuesta la caja de té rojo:

$$\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 5x+y=15'5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=14 \\ -15x-3y=-46'5 \end{cases}$$

$$-13x=-32'5 \Rightarrow \boxed{x=2'5}$$

$$5x+y=15'5 \Rightarrow y=15'5-5x \Rightarrow y=15'5-12'5 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

Cada cajita de té jazmín cuesta 2'5 € y de té rojo 3 €

11.

Sea x el número de monedas de 2 € e y el número de monedas de 50 céntimos de euro.

$$\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+0'5y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0'5x-\cancel{0'5y}=-6 \\ 2x+\cancel{0'5y}=15 \end{cases}$$

$$1'5x=9 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

$$x+y=12 \Rightarrow y=12-x \Rightarrow y=12-6 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

Entrega 6 monedas de cada clase

DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 112

Desafío matemático

Aplicando sistemas lineales en problemas de trenes

La resolución de sistemas lineales se utiliza en numerosas ramas de la ciencia. Desde la meteorología a la minería, industria espacial , sistemas de optimización de regadíos, etc. Para resolver los problemas que a continuación tienes planteados, sigue los siguientes pasos.

a) Lee atentamente el problema.

b) Define las incógnitas e indica qué representan.

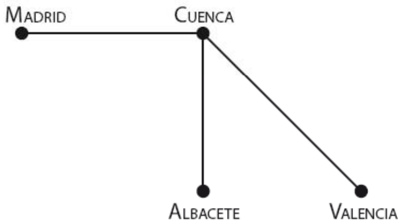
c) Traduce el problema a una expresión matemática.

d) Resuelve el sistema que has planteado por el método más eficaz que conozcas. Recuerda que en este momento el sistema es un medio para resolver el problema, que es el objetivo final que nos hemos fijado.

e) Traslada la solución del sistema al problema inicial.

f) Verifica que la solución tiene sentido en el contexto del problema.

1 Tres amigos se van a reunir a las 12:00 del mediodía en Cuenca. Para ello salen de las estaciones del AVE, cada uno en su ciudad. Uno sale de Madrid a las 11:15 horas, a las 11:20 horas sale de Valencia y el de Albacete sale a las 11:34 horas. Si la velocidad media del AVE es de 276 km/h, ¿cuántos kilómetros separan a las ciudades anteriores?



2 Un tren de mercancías sale de Madrid dirección Valencia a una velocidad media de 60 km/h. Treinta y seis minutos más tarde sale de Valencia dirección a Madrid un AVE cuya velocidad media es de 240 km/h.

a) ¿En qué punto del recorrido se cruzarán?

b) Calcula los kilómetros que ha recorrido cada tren cuando se cruzan.

SUGERENCIA: plantea un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Observa que si el AVE tarda x horas, y el mercancías tarda y horas, una ecuación es $y = x + \frac{36}{60}$ horas. Con lo que el sistema que queda es el siguiente $\begin{cases} \text{tiempo del mercancías en vía} = \text{tiempo AVE} + 36 \text{ horas} \\ \text{espacio recorrido por los dos trenes} = \text{distancia de Madrid a Valencia} \end{cases}$

3 Si 5 minutos más tarde que el AVE procedente de Valencia, sale de Albacete un AVE destino Madrid con 225 km/h de velocidad media:

a) ¿Cuál de los dos trenes llegará antes a Madrid?

b) ¿Qué diferencia de tiempo hay entre la llegada de ambos trenes?

c) En el momento en que cada tren AVE hace su entrada en la estación de Atocha de Madrid ¿dónde estará el mercancías?

4 Al tiempo que el mercancías sale de Cuenca, parte de Madrid un tren AVE dirección Valencia, con una velocidad de 330 km/ hora.

a) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarle?

b) Calcula la distancia del punto de alcance a Madrid, Cuenca y Valencia.

112 UNIDAD 6

1. Velocidad: $276\ \frac{km}{h} : 60\ \frac{min}{h} = 46\ \frac{km}{min}$

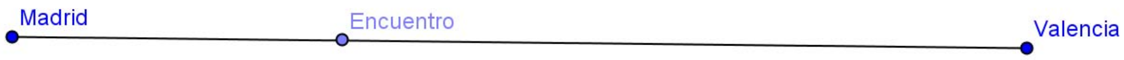
$$espacio = velocidad \cdot tiempo$$

Distancia Madrid-Cuenca: $4'6\ \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot 45\ \text{min} = 207\ \text{km}$

Distancia Cuenca-Valencia: $4'6\ \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot 44\ \text{min} = 184\ \text{km}$

Distancia Cuenca-Albacete: $4'6\ \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot 26\ \text{min} = 119'6\ \text{km} \cong 120\ \text{km}$

2.



Sea x el tiempo en horas que tarda en llegar el AVE, y el tiempo en horas que tarda en llegar el mercancías a su destino.

$$\begin{cases} y = x + \frac{36}{60} \\ 240x + 60y = 391 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + \frac{3}{5} \\ 240x + 60y = 391 \end{cases}$$

$$240x + 60 \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right) = 391 \Rightarrow 300x = 355 \Rightarrow x = \frac{355}{300} \Rightarrow x = \frac{71}{60} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 1\frac{11}{60} \Rightarrow x = 1\text{h y } 11 \text{ minutos}$$

$$y = \frac{71}{60} + \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{107}{60} \Rightarrow y = 1\frac{47}{60} \Rightarrow y = 1 \text{ hora y } 47 \text{ minutos}$$

b) $e = v \cdot t \Rightarrow$ el AVE recorre $= 240\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{71}{60}\ \text{h} = 284\ \text{km}$

$el\ mercancías\ recorre$: $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{107}{60}\text{h} = 107\ \text{km}$

a) Se cruzan a 107 km de Madrid ó 284 km de Valencia.

3.

Distancia Madrid-Albacete: 207 + 120 = 327 km ; $tiempo = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}$

Tiempo de llegada a Madrid del AVE procedente de Albacete: $\frac{327}{225} \cong 1\text{h } 27 \text{ minutos}$

Tiempo de llegada a Madrid del AVE procedente de Valencia: $\frac{391}{240} \cong 1\text{h } 37 \text{ minutos}$

a. El AVE que llega primero a Madrid es el procedente de Albacete.
b. El AVE procedente de Albacete llega a Madrid 5 minutos antes que el procedente de Valencia.
c. Cuando se produce el encuentro entre el AVE procedente de Valencia y el mercancías, el AVE lleva 1h y 11 minutos de trayecto. Todavía le queda:
   1hora 37 minutos – 1hora 11 minutos = 26 minutos de trayecto.

En esos 26 minutos que emplea el Ave procedente de Valencia en llegar a Atocha, el mercancías recorre: $60 \cdot \frac{26}{60} = 26$ km

Cuando el AVE procedente de Albacete llega a Atocha, el mercancías se encuentra a $60 \cdot \frac{327}{225} = 87'2$km de Madrid.

En el momento que el AVE procedente de Valencia llega a Atocha, el mercancías se encuentra a $107 + 26 = 133$ km de Madrid

Haciéndolo directamente, en el momento que el AVE procedente de Valencia llega a Atocha, el mercancías se encuentra a $60 \cdot \left(1 + \frac{37}{60} + \frac{36}{60}\right) = 133$ km de Madrid.

Como el AVE procedente de Albacete llega 5 minutos antes que el procedente de Valencia, el mercancías circula 5 minutos menos que el AVE procedente de Valencia, esto es 26 – 5 = 21 minutos más, desde el m omento que se produce el encuentro en ese tiempo el mercancías recorre $60 \cdot \frac{21}{60} = 21$ km .

En el momento que el AVE procedente de Albacete llega a Atocha, el mercancías se encuentra a $107 + 21 = 128$ km de Madrid

Otra forma de verlo: Cuando el AVE de Albacete llega a Atocha, el mercancías lleva 2 horas y 8 minutos circulando = $\frac{128}{60}$ horas.
En ese tiempo el mercancías ha recorrido $60\ \frac{km}{h} \cdot \frac{128}{60}\ h = 128$ km.

4.

a. El tiempo de permanencia en la vía de ambos trenes es el mismo.
Sea x el espacio recorrido por el mercancías al salir de Cuenca, hasta que resulta alcanzado por el AVE.

espacio recorrido por el AVE - espacio recorrido por el mercancías = x

Sustituyendo en la ecuación de arriba, recordando que $e = v \cdot t$, tenemos:

$$330t - 60t = 207 \Longrightarrow 270t = 207 \Longrightarrow t = \frac{207}{270} \text{ horas } \Longrightarrow t = 46 \text{ minutos}$$

b. Distancia punto alcance a Cuenca: $60 \cdot \frac{46}{60} = 46$ km.

Distancia punto alcance a Madrid: $207 + 46 = 253$ km
(Directamente: espacio = velocidad · tiempo ⟹
$distancia\ recorrida\ desde\ Madrid = 330 \cdot \frac{46}{60} = 253$ km)
Distancia punto alcance a Valencia: $184 - 46 = 138$ km

EJERCICIOS

Sistemas lineales. Método Sustitución

○ **12.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x - 7y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = -6 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$

○ **13.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 10x + 6y = 20 \\ 5x - y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 15x - 4y = -4 \end{cases}$ d d) $\begin{cases} 3x - y = 14 \\ x + y = 42 \end{cases}$

Sistemas lineales. Método de Igualación

○ **14.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 7y = 4 \\ 2x - 19y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 33 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 14x + y = 51 \\ 7x + y = 50 \end{cases}$

○ **15.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 13y = 14 \\ 2x + 39y = 29 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 2y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + y = 7 \end{cases}$

Sistemas lineales. Método de reducción

○ **16.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 2y = -5 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$

○ **17.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 12x + y = 13 \\ 30x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ x + 4y = 19 \end{cases}$

Sistemas lineales. Cualquier método

○ **18.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que consideres más adecuado:

a) $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 7x + 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x - 5y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 25x + y = 51 \\ 5x + y = 11 \end{cases}$

◐ **19.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que te resulte más cómodo:

a) $\begin{cases} x + 7y = 7 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 25x + y = 51 \\ 50x + y = 52 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4y = 1 \\ 5x - 19y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 9x + 4y = 12 \end{cases}$

◐ **20.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que te resulte más cómodo:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 15y = 19 \\ x + 25y = -1 \end{cases}$

Sistemas con números racionales

◐ **21.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 9x - 2y = 5 \\ 2x - 5y = 33 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ \dfrac{x}{9} + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + \dfrac{3}{8}y = 4 \\ 2x + \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{5} = -2 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{6} = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + \dfrac{y}{7} = -1 \\ 6x + y = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{7} = 10 \\ 2x - \dfrac{y}{5} = 7 \end{cases}$

12.

a)

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \Rightarrow x = 2y + 2 \\ 3x - 7y = 4 \end{cases}$$

$$3x - 7y = 4 \Rightarrow 3(2y + 2) - 7y = 4 \Rightarrow 6y + 6 - 7y = 4 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$x = 2y + 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 2 + 2 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

b)

$$\begin{cases} x-y=-6 \Rightarrow x=y-6 \\ 5x-y=6 \end{cases}$$

$$5x-y=6 \Rightarrow y=5x-6 \Rightarrow y=5(y-6)-6 \Rightarrow y=5y-36 \Rightarrow 4y=36 \Rightarrow \boxed{y=9}$$

$$x=y-6 \Rightarrow x=9-6 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

c)

$$\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 2x+y=7 \Rightarrow y=7-2x \end{cases}$$

$$5x-2y=4 \Rightarrow 5x-2(7-2x)=4 \Rightarrow 5x-14+4x=4 \Rightarrow 9x=18 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$y=7-2x \Rightarrow y=7-2\cdot 2 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

d)

$$\begin{cases} 2x+7y=8 \Rightarrow x=\dfrac{8-7y}{2} \\ 6x-2y=1 \end{cases}$$

$$6x-2y=1 \Rightarrow 6\cdot\frac{8-7y}{2}-2y=1 \Rightarrow 24-21y-2y=1 \Rightarrow 23y=23 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$x=\frac{8-7y}{2} \Rightarrow x=\frac{8-7}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

13.

a)

$$\begin{cases} 2x-y=9 \Rightarrow y=2x-9 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$$

$$3x-2y=11 \Rightarrow 3x-2(2x-9)=11 \Rightarrow 3x-4x+18=11 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

$$y=2x-9 \Rightarrow y=14-9 \Rightarrow \boxed{y=5}$$

b)

$$\begin{cases} 5x+6y=17 \Rightarrow x=\dfrac{17-6y}{5} \\ 15x-4y=-4 \end{cases}$$

$$15x-4y=-4 \Rightarrow 15\cdot\frac{17-6y}{5}-4y=-4 \Rightarrow 51-18y-4y=-4 \Rightarrow 22y=55 \Rightarrow \boxed{y=\frac{5}{2}}$$

$$x=\frac{17-6y}{5} \Rightarrow x=\frac{17-15}{5} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{5}}$$

c)

$$\begin{cases} 10x+6y=20 \\ 5x-y=-2 \Rightarrow y=5x+2 \end{cases}$$

$$10x+6y=20 \Rightarrow 5x+3y=10 \Rightarrow 5x+3\left(5x+2\right)=10 \Rightarrow 5x+15x+6=10 \Rightarrow 20x=4 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{5}}$$

$$y=5x+2 \Rightarrow y=5\cdot\frac{1}{5}+2 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

d)

$$\begin{cases} 3x-y=14 \Rightarrow y=3x-14 \\ x+y=42 \end{cases}$$

$$x+y=42 \Rightarrow x+\left(3x-14\right)=42 \Rightarrow 4x=56 \Rightarrow \boxed{x=14}$$

$$y=3x-14 \Rightarrow y=3\cdot14-14 \Rightarrow \boxed{y=28}$$

14.

a)

$$\begin{cases} 4x-y=7 \Rightarrow y=4x-7 \\ x+2y=13 \Rightarrow y=\dfrac{13-x}{2} \end{cases}$$

$$\frac{13-x}{2}=4x-7 \Rightarrow 13-x=8x-14 \Rightarrow 9x=27 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

$$y=4x-7 \Rightarrow y=4\cdot3-7 \Rightarrow \boxed{y=5}$$

b)

$$\begin{cases} 2x+y=33 \Rightarrow y=33-2x \\ x+3y=44 \Rightarrow y=\dfrac{44-x}{3} \end{cases}$$

$$33-2x=\frac{44-x}{3} \Rightarrow 99-6x=44-x \Rightarrow 5x=55 \Rightarrow \boxed{x=11}$$

$$y=33-2x \Rightarrow y=33-2\cdot11 \Rightarrow \boxed{y=11}$$

c)

$$\begin{cases} x-7y=4 \Rightarrow x=4+7y \\ 2x-19y=3 \Rightarrow x=\dfrac{3+19y}{2} \end{cases}$$

$$4+7y=\frac{3+19y}{2} \Rightarrow 8+14y=3+19y \Rightarrow 5=5y \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$x=4+7y \Rightarrow x=4+7\cdot1 \Rightarrow \boxed{x=11}$$

d)

$$\begin{cases} 14x+y=51 \Rightarrow y=51-14x \\ 7x+y=50 \Rightarrow y=50-7x \end{cases}$$

$$50-7x=51-14x \Rightarrow 7x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{7}}$$

$$y=50-7x \Rightarrow y=50-7\cdot\frac{1}{7} \Rightarrow \boxed{y=49}$$

15.

a)

$$\begin{cases} 2x-y=11 \Rightarrow y=2x-11 \\ 3x-2y=12 \Rightarrow y=\dfrac{3x-12}{2} \end{cases}$$

$$\frac{3x-12}{2}=2x-11 \Rightarrow 3x-12=4x-22 \Rightarrow -x=-10 \Rightarrow \boxed{x=10}$$

$$y=2x-11 \Rightarrow y=2\cdot 10-11 \Rightarrow \boxed{y=9}$$

b)

$$\begin{cases} 2x+y=1 \Rightarrow y=1-2x \\ 5x+2y=-2 \Rightarrow y=\dfrac{-5x-2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-5x-2}{2}=1-2x \Rightarrow -5x-2=2-4x \Rightarrow -x=4 \Rightarrow \boxed{x=-4}$$

$$y=1-2x \Rightarrow y=1-2\cdot(-4) \Rightarrow \boxed{y=9}$$

c)

$$\begin{cases} x+13y=14 \Rightarrow x=14-13y \\ 2x+39y=29 \Rightarrow x=\dfrac{29-39y}{2} \end{cases}$$

$$\frac{29-39y}{2}=14-13y \Rightarrow 29-39y=28-26y \Rightarrow -13y=-1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{13}}$$

$$x=14-13y \Rightarrow x=14-13\cdot\frac{1}{13} \Rightarrow \boxed{x=13}$$

d)

$$\begin{cases} x-2y=4 \Rightarrow x=4+2y \\ -2x+y=7 \Rightarrow x=\dfrac{7-y}{-2} \end{cases}$$

$$\frac{7-y}{-2}=4+2y \Rightarrow 7-y=-8-4y \Rightarrow 3y=-15 \Rightarrow \boxed{y=-5}$$

$$x=4+2y \Rightarrow x=4+2\cdot(-5) \Rightarrow \boxed{x=-6}$$

16.

a)

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x-\cancel{y}=-2 \\ x+\cancel{y}=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{x}+y=2 \\ \cancel{x}+y=4 \end{cases}$$

$$2x=2 \qquad\qquad 2y=6$$

$$\boxed{x=1} \qquad\qquad \boxed{y=3}$$

b)

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ 3x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x+\cancel{2y}=10 \\ 6x-\cancel{2y}=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{3x}-6y=-30 \\ \cancel{3x}-y=2 \end{cases}$$

$$7x=14 \qquad\qquad -7y=-28$$

$$\boxed{x=2} \qquad\qquad \boxed{y=4}$$

c)

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=12 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x-y=3 \\ -2x-2y=-24 \end{cases}$$

$$3x=15 \Rightarrow \boxed{x=3} \qquad\qquad -3y=-21 \Rightarrow \boxed{y=7}$$

d)

$$\begin{cases} 5x+2y=-5 \\ x+4y=17 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} -10x-\cancel{4y}=10 \\ x+\cancel{4y}=17 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{5x}+2y=-5 \\ -\cancel{5x}-20y=-85 \end{cases}$$

$$-9x=27 \qquad\qquad -18y=-90$$

$$\boxed{x=-3} \qquad\qquad \boxed{y=5}$$

17.

a)

$$\begin{cases}3x+4y=3\\4x+3y=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9x-\cancel{12y}=-9\\16x+\cancel{12y}=72\end{cases}\qquad\begin{cases}\cancel{12x}+16y=12\\-\cancel{12x}-9y=-54\end{cases}$$

$$7x=63 \qquad 7y=-42$$

$$\boxed{x=9} \qquad \boxed{y=-6}$$

b)

$$\begin{cases}x+3y=7\\x-2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+\cancel{6y}=14\\3x-\cancel{6y}=6\end{cases}\qquad\begin{cases}-\cancel{x}-3y=-7\\\cancel{x}-2y=2\end{cases}$$

$$5x=20 \qquad -5y=-5$$

$$\boxed{x=4} \qquad \boxed{y=1}$$

c)

$$\begin{cases}12x+y=13\\30x-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12x+\cancel{y}=13\\30x-\cancel{y}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}-\cancel{360x}-30y=-390\\\cancel{360x}-12y=12\end{cases}$$

$$42x=14 \qquad -42y=-378$$

$$\boxed{x=\frac{1}{3}} \qquad \boxed{y=9}$$

d)

$$\begin{cases}x-5y=1\\x+4y=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-\cancel{20y}=4\\5x+\cancel{20y}=95\end{cases}\qquad\begin{cases}-\cancel{x}+5y=-1\\\cancel{x}+4y=19\end{cases}$$

$$9x=99 \qquad 9y=18$$

$$\boxed{x=11} \qquad \boxed{y=2}$$

18.

a)

$$\begin{cases} 5x+\ \ y=1 \\ 7x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x-\cancel{2y}=-2 \\ \quad 7x+\cancel{2y}=5 \end{cases}$$

$$-3x=3 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

$$5x+y=1 \Rightarrow y=1-5x \Rightarrow y=1-5\cdot(-1)\ \boxed{y=6}$$

b)

$$\begin{cases} 3x+5y=-4 \\ 5x+3y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9x-\cancel{15y}=12 \\ 25x+\cancel{15y}=20 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{15x}-25y=20 \\ \cancel{15x}+\ 9y=12 \end{cases}$$

$$16x=32 \qquad\qquad -16y=32$$

$$\boxed{x=2} \qquad\qquad \boxed{y=-2}$$

c)

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x-5y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-\cancel{5y}=\ 1 \\ -2x+\cancel{5y}=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{6x}+10y=-2 \\ \cancel{6x}-15y=12 \end{cases}$$

$$\boxed{x=-3} \qquad\qquad -5y=10$$

$$\boxed{y=-2}$$

d)

$$\begin{cases} 25x+y=51 \\ \ \ 5x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x+\cancel{y}=51 \\ -5x-\cancel{y}=-11 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{25x}+\ \ y=\ \ 51 \\ -\cancel{25x}-5y=-55 \end{cases}$$

$$20x=40 \qquad\qquad -4y=-4$$

$$\boxed{x=2} \qquad\qquad \boxed{y=1}$$

19.

a)

$$\begin{cases} x+7y=7 \\ 2x+5y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x}-14y=-14 \\ \cancel{2x}+\ \ 5y=-4 \end{cases}$$

$$-9y=-18$$

$$\boxed{y=2}$$

$$x+7y=7 \Rightarrow x=7-7y \Rightarrow x=7-7\cdot 2 \Rightarrow \boxed{x=-7}$$

b)

$$\begin{cases} x-4y=1 \Rightarrow x=1+4y \\ 5x-19y=3 \end{cases}$$

$$5x-19y=3 \Rightarrow 5(1+4y)-19y=3 \Rightarrow 5+20y-19y=3 \Rightarrow \boxed{y=-2}$$

$$x=1+4y \Rightarrow x=1+4\cdot(-2) \Rightarrow \boxed{x=-7}$$

c)

$$\begin{cases} 25x+y=51 \\ 50x+y=52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25x-\cancel{y}=-51 \\ 50x+\cancel{y}=\ \ 52 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{50x}-2y=-102 \\ \cancel{-50x}+\ \ y=\ \ 52 \end{cases}$$

$$25x=1 \qquad\qquad -y=-50$$

$$\boxed{x=\frac{1}{25}} \qquad\qquad \boxed{y=50}$$

d)

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 9x+4y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{9x}-6y=-15 \\ \cancel{9x}+4y=\ 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6x-\cancel{4y}=-10 \\ 9x+\cancel{4y}=12 \end{cases}$$

$$-2y=-3 \qquad\qquad 3x=2$$

$$\boxed{y=\frac{3}{2}} \qquad\qquad \boxed{x=\frac{2}{3}}$$

20.

a)

$$\begin{cases} 5x+2y=3 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+\cancel{2y}=3 \\ -4x-\cancel{2y}=2 \end{cases}$$

$$\boxed{x=5}$$

$$2x+y=-1 \Rightarrow y=-1-2x \Rightarrow y=-1-2\cdot 5 \Rightarrow \boxed{y=-11}$$

b)

$$\begin{cases} 3x+5y=\ \ 8 \\ 2x+5y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+\cancel{5y}=8 \\ -2x-\cancel{5y}=3 \end{cases}$$

$$\boxed{x=11}$$

$$2x+5y=-3 \Rightarrow 2\cdot 11+5y=-3 \Rightarrow 5y=-25 \Rightarrow \boxed{y=-5}$$

c)

$$\begin{cases} 2x+y=\ 2 \\ 5x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x-\cancel{2y}=-4 \\ 5x+\cancel{2y}=1 \end{cases}$$

$$\boxed{x=-3}$$

$$2x+y=2 \Rightarrow y=2-2x \Rightarrow y=2-2\cdot(-3) \Rightarrow \boxed{y=8}$$

d)

$$\begin{cases} x+15y=19 \Rightarrow x=19-15y \\ x+25y=-1 \Rightarrow x=-1-25y \end{cases}$$

$$19-15y=-1-25y \Rightarrow 10y=-20 \Rightarrow \boxed{y=-2}$$

$$x=-1-25y \Rightarrow x=-1+50 \Rightarrow \boxed{x=49}$$

21.

a)

$$\begin{cases} 9x-2y=5 \\ 2x-5y=33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{18x}+4y=-10 \\ \cancel{18x}-45y=297 \end{cases} \qquad \begin{cases} 45x-\cancel{10y}=25 \\ -4x+\cancel{10y}=-66 \end{cases}$$

$$-41y=287 \qquad 41x=-41$$

$$\boxed{y=-7} \qquad \boxed{x=-1}$$

b)

$$\begin{cases} 5x+\dfrac{3}{8}y=4 \\ 2x+\dfrac{1}{2}y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40x+3y=32 \\ 4x+y=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 40x+\cancel{3y}=32 \\ -12x-\cancel{3y}=-18 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{40x}-3y=-32 \\ \cancel{40x}+10y=60 \end{cases}$$

$$28x=14 \qquad 7y=28$$

$$\boxed{x=\frac{1}{2}} \qquad \boxed{y=4}$$

c)

$$\begin{cases} 4x+\dfrac{1}{7}y=-1 \\ 6x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28x+y=-7 \\ 6x+y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 28x+\cancel{y}=-7 \\ -6x-\cancel{y}=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{168x}-6y=42 \\ \cancel{168x}+28y=112 \end{cases}$$

$$22x=-11 \qquad 22y=154$$

$$\boxed{x=-\frac{1}{2}} \qquad \boxed{y=7}$$

d)

$$\begin{cases} x+3y=4 \\ \dfrac{x}{9}+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\ 3y=4 \\ x+18y=9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\cancel{x}-3y=-4 \\ \cancel{x}+18y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} -18x-\cancel{54y}=-72 \\ 3x+\cancel{54y}=27 \end{cases}$$

$$15y=5 \qquad -15x=-45$$

$$\boxed{y=\frac{1}{3}} \qquad \boxed{x=3}$$

e)

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{5}=-2 \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{6}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+y=-10 \\ 3x+5y=60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\cancel{15x}-3y=\ 30 \\ \cancel{15x}+25y=300 \end{cases} \qquad \begin{cases} 25x+\cancel{5y}=-50 \\ -3x-\cancel{5y}=-60 \end{cases}$$

$$22y=330 \qquad 22x=-110$$

$$\boxed{y=15} \qquad \boxed{x=-5}$$

f)

$$\begin{cases} x+\frac{y}{7}=10 \\ 2x-\frac{y}{5}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+y=70 \\ 10x-y=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+\cancel{y}=70 \\ 10x-\cancel{y}=35 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{70x}+10y=700 \\ -\cancel{70x}+7y=-245 \end{cases}$$

$$17x=105 \qquad 17y=455$$

$$x=\frac{105}{17} \qquad y=\frac{455}{17}$$

Sistemas con paréntesis

22. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con fracciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{5} + y = 7 \\ x - \dfrac{x+y}{5} = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2} - 4 = 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y+3}{3} = 5 \end{cases}$

23. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con paréntesis:

a) $\begin{cases} (x+y) - 4 = x \\ 2(2x+3y) + 5 = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - (y+1) = -3 \\ 2x + 5y = 31 \end{cases}$

Sistemas con paréntesis y números racionales

24. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 5(x+y) - 5(x-y) = 1 \\ 5(x+y) + 5(x-y) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} - (x-y) = 1 \\ x - \dfrac{(3x-y)}{2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{3} - \dfrac{x+y}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3x+y}{8} + \dfrac{2x}{3} = 1 \end{cases}$

25. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con fracciones:

a) $\begin{cases} 55x + 22y = 121 \\ \dfrac{x}{4} + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 7y = 8 \\ \dfrac{x}{7} + 49y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + 2y = 6 \\ x - \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{3x + \frac{1}{3}y}{5} + y = 1 \\ 6x + 4y = 5 \end{cases}$

26. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 10(x+y) - 15(x-2y) = -17 \\ 3(2x+y) - 2(2x-y) = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{11}{12} \\ x - \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{5}{12} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{10x-y}{2} + \dfrac{161x-y}{75} = 3 \\ \dfrac{2x+y}{13} + \dfrac{x-y}{5} = -2 \end{cases}$

27. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 5(x+y) - 10(2x-y) = -3 \\ \dfrac{3x-y}{2} + \dfrac{3(4x-3y)}{4} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8(x+y) - 4(x-y) = 5 \\ 4(2x+y) - 5(x-2y) = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2} + \dfrac{x - 2\left(y + \frac{1}{2}\right)}{3} = 4 \\ \dfrac{x+10y}{10} + \dfrac{6x-4y}{7} = 5 \end{cases}$

28. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + 3(x+2y) = 32 \\ x + \dfrac{6\left(\frac{x}{3} + 4y\right)}{13} = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+5y}{13} + y = 1 \\ \dfrac{x + \frac{x+y}{2}}{5} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + \dfrac{6(x+2y)}{31} = 3 \\ 9x + y = 8 \end{cases}$

29. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 5(x+y) - 15(x-y) = \dfrac{22}{3} \\ x + \dfrac{x + \frac{x+y}{2}}{\frac{3}{5}} = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 16y = 8 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{8}{9}(3x + 12y) = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + \dfrac{x+21y}{4} = 9 \\ 3x + 42y = 23 \end{cases}$

22.

a)

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}+y=7 \\ x-\dfrac{x+y}{5}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+5y=35 \\ 5x-(x+y)=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+6y=35 \\ 4x-y=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\cancel{6y}=35 \\ 24x-\cancel{6y}=90 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{-4x}-24y=-140 \\ \cancel{4x}-y=15 \end{cases}$$

$$25x=125 \qquad -25y=-125$$

$$\boxed{x=5} \qquad \boxed{y=5}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2}-4=1 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{2y+3}{3}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-8=2 \\ 3x+2(2y+3)=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=10 \Rightarrow x=10-2y \\ 3x+4y=24 \end{cases}$$

$$3x+4y=24 \Rightarrow 3(10-2y)+4y=24 \Rightarrow 30-6y+4y=24 \Rightarrow 30-2y=24 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

$$x=10-2y \Rightarrow x=10-6 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

23.

a)

$$\begin{cases} (x+y)-4=x \\ 2(2x+3y)+5=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=4} \\ 4x+6y=8 \Rightarrow 2x+3y=4 \Rightarrow x=\dfrac{4-3y}{2} \Rightarrow \boxed{x=-4} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x-(y+1)=-3 \\ 2x+5y=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-2 \Rightarrow x=y-2 \\ 2x+5y=31 \end{cases}$$

$$2x+5y=31 \Rightarrow 2\cdot(y-2)+5y=31 \Rightarrow 7y=35 \Rightarrow \boxed{y=5}$$

$$x=y-2 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

24.

a)

$$\begin{cases} 5(x+y)-5(x-y)=1 \\ 5(x+y)+5(x-y)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+5y-5x+5y=1 \\ 5x+5y+5x-5y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10y=1 \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{10}} \\ 10x=2 \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{1}{5}} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}-\left(x-y\right)=1 \\ x-\dfrac{\left(3x-y\right)}{2}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3\left(x-y\right)=3 \\ 6x-3(3x-y)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3x+3y=3 \\ 6x-9x+3y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4y=3 \\ -3x+3y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x+\cancel{12y}=9 \\ 12x-\cancel{12y}=-8 \end{cases}$$

$$6x=1$$

$$\boxed{x=\frac{1}{6}}$$

$$\begin{cases} \cancel{-6x}+12y=9 \\ \cancel{6x}-\ \ 6y=-4 \end{cases}$$

$$6y=5$$

$$\boxed{y=\frac{5}{6}}$$

c)

$$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{8}+\dfrac{2x}{3}=1 \\ \dfrac{x-y}{3}-\dfrac{x+y}{6}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x+3y+16x=24 \\ 2x-2y-x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x+3y=24 \\ x-3y=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 25x+\cancel{3y}=24 \\ x-\cancel{3y}=\ \ 2 \end{cases}$$

$$26x=26$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\begin{cases} \cancel{25x}+\ \ 3y=\ \ 24 \\ \cancel{-25x}+75y=-50 \end{cases}$$

$$78y=-26$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}}$$

25.

a)

$$\begin{cases} 55x+22y=121 \\ \dfrac{x}{4}+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y=11 \\ x+4y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 10x+\cancel{4y}=22 \\ -x-\cancel{4y}=-4 \end{cases}$$

$$9x=18$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\begin{cases} \cancel{5x}+2y=11 \\ \cancel{-5x}-20y=-20 \end{cases}$$

$$-18y=-9$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+2y=6 \\ x-\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+6y=18 \\ 2x-x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7y=18 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+\cancel{7y}=18 \\ -7x-\cancel{7y}=-21 \end{cases}$$

$$-6x=-3$$

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} \cancel{x}+7y=18 \\ \cancel{-x}-y=-3 \end{cases}$$

$$6y=15$$

$$\boxed{y=\frac{5}{2}}$$

c)

$$\begin{cases} x+7y=8 \\ \dfrac{x}{7}+49y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7y=8 \\ x+343y=56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{x}-7y=-8 \\ \cancel{x}+343y=56 \end{cases}$$

$$336y=48$$

$$\boxed{y=\frac{1}{7}}$$

$$x+7y=8 \Rightarrow x+1=8 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

d)

$$\begin{cases} \dfrac{3x+\frac{1}{3}y}{5}+y=1 \\ 6x+4y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+\dfrac{1}{3}y+5y=5 \\ 6x+4y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x+16y=15 \\ 6x+\ 4y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9\,x-\cancel{16y}=-15 \\ 24x+\cancel{16y}=\ \ 20 \end{cases}$$

$$15x=5$$

$$\boxed{x=\frac{1}{3}}$$

$$6x+4y=5 \Rightarrow 2+4y=5 \Rightarrow 4y=3 \Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{4}}$$

26.

a)

$$\begin{cases} 10(x+y)-15(x-2y)=-17 \\ 3(2x+y)-2(2x-y)=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+10y-15x+30y=-17 \\ 6x+3y-4x+2y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+40y=-17 \\ 2x+\ \ 5y=\ \ 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\ 5x+\cancel{40y}=-17 \\ -16x-\cancel{40y}=-\,88 \end{cases}$$

$$-21x=-105$$

$$\boxed{x=5}$$

$$2x+5y=11 \Rightarrow 10+5y=11 \Rightarrow 5y=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{5}}$$

b)

$$\begin{cases} x+\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{11}{12} \\ x-\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{5}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+6x+6y=11 \\ 12x-6x+6y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x+6y=11 \\ 6x+\ 6y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18\,x+\cancel{6y}=11 \\ -6x-\cancel{6y}=-5 \end{cases}$$

$$12x=6$$

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

$$6x+6y=5 \Rightarrow 3+6y=5 \Rightarrow 6y=2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}}$$

c)

$$\begin{cases}\dfrac{10x-y}{2}+\dfrac{161x-y}{75}=3\\ \dfrac{2x+y}{13}+\dfrac{x-y}{5}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}750x-75y+322x-2y=450\\ 10x+5y+13x-13y=-130\end{cases}$$

$$\begin{cases}1072x-77y=450\\ 23x-8y=-130\end{cases}\Rightarrow\qquad 8y=23x+130\Rightarrow y=\frac{23x+130}{8}$$

$$1072x-77y=450\Rightarrow 1072x-77\cdot\frac{23x+130}{8}=450$$

$$8576x-1771x-10010=3600\Rightarrow 6805x=13610\Rightarrow x=2$$

$$y=\frac{23x+130}{8}\Rightarrow y=\frac{23\cdot 2+130}{8}\Rightarrow y=22$$

27.

a)

$$\begin{cases}5(x+y)-10(2x-y)=-3\\ \dfrac{3x-y}{2}+\dfrac{3(4x-3y)}{4}=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+5y-20x+10y=-3\\ 6x-2y+12x-9y=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-15x+15y=-3\\ 18x-11y=\ \ 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5x+5y=-1\Rightarrow y=\dfrac{5x-1}{5}\Rightarrow y=x-\dfrac{1}{5}\\ 18x-11y=\ \ 5\end{cases}$$

$$18x-11y=5\Rightarrow 18x-11\left(x-\frac{1}{5}\right)=5\Rightarrow 7x=\frac{14}{5}\Rightarrow\boxed{x=\frac{2}{5}}$$

$$y=x-\frac{1}{5}\Rightarrow\boxed{y=\frac{1}{5}}$$

b)

$$\begin{cases}8(x+y)-4(x-y)=5\\ 4(2x+y)-5(x-2y)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x+8y-4x+4y=5\\ 8x+4y-5x+10y=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4x+12y=5\\ 3x+14y=5\Rightarrow 3x=5-14y\Rightarrow x=\dfrac{5-14y}{3}\end{cases}$$

$$4x+12y=5\Rightarrow 4\frac{5-14y}{3}+12y=5\Rightarrow 20-56y+36y=15$$

$$-20y=-5\Rightarrow\boxed{y=\frac{1}{4}}$$

$$x=\frac{5-14y}{3}\Rightarrow x=\frac{5-\frac{7}{2}}{3}\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

c)

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{2}+\dfrac{x-2\left(y+\dfrac{1}{2}\right)}{3}=4 \\ \dfrac{x+10y}{10}+\dfrac{6x-4y}{7}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+6y+2x-4y-2=24 \\ 7x+70y+60x-40y=350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y=26 \\ 67x+30y=350 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 75x+\cancel{30y}=390 \\ -67x-\cancel{30y}=-350 \end{cases}$$

$$8x=40 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

$$5x+2y=26 \Rightarrow 25+2y=26 \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$$

28.

a)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+3(x+2y)=32 \\ x+\dfrac{6\left(\dfrac{x}{3}+4y\right)}{13}=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+9x+18y=96 \\ x+\dfrac{2x+24y}{13}=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+9y=48 \\ 15x+24y=143 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{15x}+27y=144 \\ -\cancel{15x}-24y=-143 \end{cases}$$

$$3y=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}}$$

$$5x+9y=48 \Rightarrow 5x+3=48 \Rightarrow 5x=45 \Rightarrow \boxed{x=9}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{x+5y}{13}+y=1 \\ \dfrac{x+\dfrac{x+y}{2}}{5}-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5y+13y=13 \\ \dfrac{3x+y}{10}-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+18y=13 \\ 3x+y-5y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+18y=13 \\ 3x-4y=10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{3x}+54y=39 \\ -\cancel{3x}+4y=-10 \end{cases}$$

$$58y=29 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$$

$$3x-4y=10 \Rightarrow 3x-2=10 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

c)

$$\begin{cases} 3x+\dfrac{6(x+2y)}{31}=3 \\ 9x+y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 93x+6x+12y=93 \\ 9x+y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 99x+12y=93 \\ 9x+y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 33x+4y=31 \\ 9x+y=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -33x-\cancel{4y}=-31 \\ 36x+\cancel{4y}=32 \end{cases}$$

$$3x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}$$

$$9x+y=8 \Rightarrow 3+y=8 \Rightarrow \boxed{y=5}$$

29.

a)

$$\begin{cases} 5(x+y)-15(x-y)=\dfrac{22}{3} \\ x+\dfrac{x+\frac{x+y}{2}}{\frac{3}{5}}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+5y-15x+15y=\dfrac{22}{3} \\ x+\dfrac{\frac{3x+y}{2}}{\frac{3}{5}}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x+20y=\dfrac{22}{3} \\ x+\dfrac{15x+5y}{6}=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -30x+60y=22 \\ 6x+15x+5y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x+30y=11 \\ 21x+5y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x-\cancel{30y}=-11 \\ 126x+\cancel{30y}=-36 \end{cases}$$

$$141x=-47 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}}$$

$$-15x+30y=11 \Rightarrow 5+30y=11 \Rightarrow 30y=6 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{5}}$$

b)

$$\begin{cases} x-16y=-8 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{9}(3x+12y)=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-16y=-8 \\ 9x+48x+192y=-180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-16y=-8 \\ 57x+192y=-180 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 12x-\cancel{192y}=-96 \\ 57x+\cancel{192y}=-180 \end{cases}$$

$$69x=-276 \Rightarrow \boxed{x=-4}$$

$$x-16y=-8 \Rightarrow -16y=-4 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{4}}$$

c)

$$\begin{cases} x+\dfrac{x+21y}{4}=9 \\ 3x+42y=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+x+21y=36 \\ 3x+42y=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+21y=36 \\ 3x+42y=23 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\cancel{15x}-63y=-108 \\ \cancel{15x}+210y=115 \end{cases} \Rightarrow$$

$$147y=7 \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{1}{21}}$$

$$5x+21y=36 \Rightarrow 5x+1=36 \Rightarrow 5x=35 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

○ **30.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+\dfrac{x}{2}}=1 \\ \dfrac{x}{2}+8\left(y+\dfrac{x}{4}\right)=18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+18\left(y+\dfrac{7}{6}\right)=21 \\ 6x+6y+12\left(\dfrac{2x}{9}-7y\right)=11 \end{cases}$

○ **31.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{6x+y}{2}+\dfrac{9x+2y}{3}=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{12x+y}{4}+\dfrac{18x+5y}{3}=-\dfrac{11}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+14y}{3}-\dfrac{7(x-4y)}{5}=-6 \\ \dfrac{x+\dfrac{x+7y}{2}}{11}-\dfrac{x+\dfrac{x-21y}{5}}{3}=-2 \end{cases}$

PROBLEMAS

○ **32.** Calcula dos números que sumen 29 y cuya diferencia sea 1.

○ **33.** Calcula dos números tales que si al primero le sumamos 4 obtenemos el segundo, y si al segundo le sumamos 2 obtenemos cuatro veces el primero.

○ **34.** Calcula dos números cuya suma sea 160 mientras que la cuarta parte del primero más la tercera parte del segundo sea 45.

○ **35.** Calcula dos números consecutivos tales que el menor más cuatro veces el mayor sea 39.

○ **36.** Un señor va a comprar con 14 monedas que tienen un valor total de 13 €. Si las monedas son de 50 cts. y de 1 €, ¿cuántas monedas tiene de cada clase?

○ **37.** Un niño posee, entre coches y camiones, 7 vehículos de juguete. Si el número de coches excede en 1 unidad al doble que el de camiones, ¿cuántos juguetes tiene de cada clase?

○ **38.** Un granjero posee, entre pollos y gansos, 135 aves. Como consecuencia de la gripe aviar pierde la mitad de los pollos y la tercera parte de los gansos, quedándole en total 55 aves. ¿Cuántos animales de cada clase tenía antes de la epidemia?

○ **39.** La edad de un chico es un número de dos cifras y la de su padre es un número que utiliza las mismas cifras que tiene la edad de su hijo pero en orden inverso. Sabiendo que la suma de ambas edades es 55 y la diferencia de sus edades es 1 año menor del doble de la edad del chico, calcula la edad de ambos.

○ **40.** Félix y Paco están intercambiando cromos. Si Félix le da 1 cromo a Paco los dos tendrán el mismo número de cromos, pero si Paco le da 2 a Félix entonces Félix tendría cuatro veces más cromos que Paco. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?

○ **41.** Un padre tiene el triple de años que su hijo, pero dentro de 10 años solo tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

○ **42.** Un bodeguero mezcla vino que cuesta 5 €/L con otro vino que está a 8 €/L. ¿Cuántos litros de cada clase ha de emplear para obtener 120 L de mezcla a 6 €/L?

○ **43.** En una clase hay 5 chicas más que chicos. Calcula el número de chicas que hay en la clase si en total hay 31 alumnos.

○ **44.** En un garaje hay coches y motos. En total hay 70 vehículos y 200 ruedas. ¿Cuántos vehículos hay de cada clase?

116 UNIDAD 6

30.

a)

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+\dfrac{x}{2}}=1 \\ \dfrac{x}{2}+8\left(y+\dfrac{x}{4}\right)=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=y+\dfrac{x}{2} \\ \dfrac{x}{2}+8y+2x=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}-y=1 \\ \dfrac{5}{2}x+8y=18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x-\cancel{8y}=8 \\ \dfrac{5}{2}x+\cancel{8y}=18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{13}{2}x=26 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$\frac{x}{2}-y=1 \Rightarrow 2-y=1 \boxed{y=1}$$

b)

$$\begin{cases} x+18\left(y+\dfrac{7}{6}\right)=21 \\ 6x+6y+12\left(\dfrac{2x}{9}+7y\right)=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+18y+21=21 \\ 6x+6y+\dfrac{8}{3}x+84y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+18y=0 \\ \dfrac{26}{3}x+90y=11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+18y=0 \\ 26x+270y=33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{\dfrac{26}{3}x}-156y=0 \\ \cancel{\dfrac{26}{3}x}+90y=11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-66y=11 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{6}}$$

$$x+18y=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

31.

a)

$$\begin{cases} \dfrac{6x+y}{2}+\dfrac{9x+2y}{3}=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{12x+y}{4}+\dfrac{18x+5y}{3}=-\dfrac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x+3y+18x+4y=-9 \\ 36x+3y+72x+20y=-33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36x+7y=-9 \\ 108x+23y=-33 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\cancel{108x}-21y=27 \\ \cancel{108x}+23y=-33 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2y=-6 \Rightarrow \boxed{y=-3}$$

$$36x+7y=-9 \Rightarrow 36x-21=-9 \Rightarrow 36x=12 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{x+14y}{3}-\dfrac{7(x-4y)}{5}=-6 \\ \dfrac{x+\dfrac{x+7y}{2}}{11}-\dfrac{x+\dfrac{x+21y}{5}}{3}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+70y-21x+84y=-90 \\ \dfrac{3x+7y}{22}-\dfrac{6x+21y}{15}==-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16x+154y=-90 \\ 45x+105y-132x-462y=-660 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x+77y=-45 \\ -87x-357y=-660 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-77y=45 \\ -29x-119y=-220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-232x}+2233y=-1305 \\ \cancel{232x}+952y=1760 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3185y=455 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{7}}$$

$$8x-77y=45 \Rightarrow 8x-11=45 \Rightarrow 8x=56 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

32.
Sean *x* e y los números buscados. El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=29 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x}+y=29 \\ -\cancel{x}+y=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2y=28 \Rightarrow \boxed{y=14}$$

$$x-y=1 \Rightarrow x-14=1 \Rightarrow \boxed{x=15}$$

Solución: Los números buscado son 14 y 15

33.
Sean *x* e y los números buscados. El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x+4=y \\ y+2=4x \Rightarrow y=4x-2 \end{cases}$$

$$x+4=y \Rightarrow x+4=4x-2 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$y=4x-2 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

Solución: Los números buscado son 2 y 6.

34.
Sean *x* e y los números buscados. El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=160 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\dfrac{x}{4}}+\dfrac{y}{4}=40 \\ -\cancel{\dfrac{x}{4}}-\dfrac{y}{3}=-45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{12}y=-5 \Rightarrow \boxed{y=60}$$

$$x+y=160 \Rightarrow x=160-60 \Rightarrow \boxed{x=100}$$

Solución: Los números buscado son 100 y 60.

35.
Sean *x* e y los números buscados, x < y. El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} y = x+1 \\ x+4y=39 \Rightarrow x+4(x+1)=39 \Rightarrow 5x=35 \Rightarrow \boxed{x=7} \end{cases}$$

$$y = x+1 \Rightarrow \boxed{y=8}$$

Solución: Los números buscado son 7 y 8

36.
Sea *x* el número de monedas de 50 cts e *y* el número de monedas de 1 €. El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=14 \\ \frac{1}{2}x+y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{y}{2}=-7 \\ \cancel{\frac{x}{2}}+y=13 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}y=6 \Rightarrow \boxed{y=12}$$

$$x+y=14 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Solución: 2 monedas de 50 cts y 12 monedas de 1 €

37.
Sea *x* el número de coches e y el número de camiones

$$\begin{cases} x+y=7 \Rightarrow (2y+1)+y=7 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow \boxed{y=2} \\ x=2y+1 \end{cases}$$

$$x=2y+1 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

Solución: 5 coches y 2 camiones

38.
Sea *x* el número de pollos e *y* el número de gansos:

$$\begin{cases} x+y=135 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{x}{3}-\cancel{\frac{y}{3}}=-45 \\ \frac{x}{2}+\cancel{\frac{y}{3}}=55 \end{cases}$$

$$\frac{1}{6}x=10 \Rightarrow \boxed{x=60}$$

$$x+y=135 \Rightarrow \boxed{y=75}$$

Solución: 60 pollos y 75 gansos

39.
Sea E la edad del chico y P la edad del padre.

$$\begin{cases} E + P = 55 \\ P - E = 2E - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E + P = 55 \\ 3E - P = 1 \end{cases}$$

$$4\,E = 56 \Rightarrow E = 14$$

$$E + P = 55 \Rightarrow 14 + P = 55 \Rightarrow P = 41$$

Solución: La edad del chico es de 14 años y la del padre 41 años

Otra forma de hacerlo:

$$E = xy \Rightarrow E = y + 10x$$

$$P = yx \Rightarrow P = x + 10y$$

$$\begin{cases} y + 10x + x + 10y = 55 \\ x + 10y - y - 10x = 2y + 20x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x + 11y = 55 \\ -29x + 7y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -29x + 7y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7x - 7y = -35 \\ -29x + 7y = -1 \end{cases}$$

$$-36x = -36 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4$$

Solución: La edad del chico es de 14 años y la del padre 41 años

40.
Sea x el número de cromos que tiene Félix e y el número de cromos que tiene Paco:

$$\begin{cases} x - 1 = y + 1 \\ x + 2 = 4(y - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2 \\ x - 4y = -10 \end{cases}$$

$$x - 4y = -10 \Rightarrow y + 2 - 4y = -10 \Rightarrow -3y = -12 \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

$$x = y + 2 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

Solución: Félix tiene 6 cromos y Paco 4 cromos.

41.
Sea x la edad del padre e y la edad del hijo

	Edad del padre	Edad del hijo
Hoy	x	y
Dentro de 10 años	$x + 10$	y + 10

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + 10 = 2 \cdot (y + 10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x + 10 = 2y + 20 \end{cases} \Rightarrow 3y + 10 = 2y + 20 \Rightarrow$$

$$y = 10 \Rightarrow x = 30$$

Solución: El padre tiene 30 años y el hijo 10 años

42.

Vino de 1ª clase	Vino de 2ª clase	Mezcla
8 € / litro	5 € / litro	6 € / litro
x litros	y litros	120 litros

Sea x la cantidad de vino de 1ª clase (8 €/litro) e y la cantidad de vino de 2ª clase (a 5€/ litro).

$$\begin{cases} x+y=120 \\ 8x+5y=6\cdot 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x-\cancel{5y}=-600 \\ 8x+\cancel{5y}=720 \end{cases}$$

$$3x=120 \Rightarrow \boxed{x=40}$$

$$x+y=120 \Rightarrow \boxed{y=80}$$

Solución: 40 litros de vino de 1ª clase (8 €/litro) y 80 litros de vino de 2ª clase (a 5 el litro)

43.
Sea x el número de chicos e y el número de chicas.

$$\begin{cases} x+y=31 \Rightarrow x+(x+5)=31 \Rightarrow 2x=26 \Rightarrow \boxed{x=13} \\ y=x+5 \end{cases}$$

$$y=x+5 \Rightarrow \boxed{y=18}$$

Solución: 13 chicos y 18 chicas

44.
Sea x el número de coches e y el número de motos.

$$\begin{cases} x+y=70 \\ 4x+2y=200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-140 \\ 4x+2y=200 \end{cases}$$

$$2x=60 \Rightarrow \boxed{x=30}$$

$$x+y=70 \Rightarrow \boxed{y=40}$$

Solución: 30 coches y 40 motos.

○**45.** A una competición atlética se presentan 60 deportistas. El número de corredores de fondo es la mitad que de velocistas. ¿Cuántos corredores hay de cada clase?

○**46.** Compramos filetes de ternera y chuletillas de cordero. En total hemos comprado 5 kg de carne y nos hemos gastado 50 €. Si los filetes costaban 7 €/kg y las chuletillas estaban a 12 €/kg, ¿cuántos kilos de cada tipo de carne hemos comprado?

○**47.** La suma de dos números es 20. Si el menor es $\frac{2}{3}$ del mayor, calcula dichos números.

○**48.** Un pintor y su ayudante pintan los dos juntos una casa en 3 h. Calcula en cuánto tiempo realizaría el trabajo cada uno por separado si el aprendiz tarda el triple de tiempo que su jefe.

○**49.** Calcula un número de dos cifras que sumen 11 y tal que si cambiamos el orden de colocación de dichas cifras resulta un número que es 9 unidades mayor.

○**50.** En una mañana en una tienda vendieron 14 camisas y 9 pantalones. Si en total se recaudaron 595 €, calcula el valor de cada prenda si cada pantalón cuesta 15 € más que cada camisa.

○**51.** En un jardín hemos plantado rosales y cipreses. El triple de rosales que tenemos es justamente el doble de cipreses más 2, pero el doble de cipreses es justamente el doble de rosales más 2. Calcula el número de rosales y cipreses que tenemos en nuestro jardín.

○**52.** Dos coches salen de dos ciudades, *A* y *B*, distantes entre sí 770 km. ¿En qué punto se encontrarán si el que sale de la ciudad *A* lleva una velocidad de 100 km/h y el otro va a 120 km/h? ¿Cuánto tiempo tendrán que circular hasta que se produzca el encuentro? ¿Qué distancia habrá recorrido cada coche?

45.

Sea *x* el número de fondistas e *y* el número de velocistas:

$$\begin{cases} x+y=60 \Rightarrow x+2x=60 \Rightarrow 3x=60 \Rightarrow \boxed{x=20} \\ y=2x \end{cases}$$

$$y=2x \Rightarrow \boxed{y=40}$$

Solución: 20 corredores de fondo y 40 velocistas.

46.

Sea *x* los kilos de filetes de ternera e *y* los kilos de chuletillas de cordero:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 7x+12y=50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{7x}-7y=-35 \\ \cancel{7x}+12y=50 \end{cases}$$

$$5y=15 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

$$x+y=5 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Solución: 2 kilos de filetes de ternera y 3 kilos de chuletillas de cordero:

47.

Sean *x* e y los números buscados x < y:

$$\begin{cases} x+y=20 \Rightarrow \frac{2}{3}y+y=20 \Rightarrow \frac{5}{3}y=20 \Rightarrow \boxed{y=12} \\ x=\frac{2}{3}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$x=\frac{2}{3}y \Rightarrow \boxed{x=8}$$

Solución: los números son 12 y 8.

48.
Sean x las horas que tarda el jefe en hacer el trabajo e y las horas que tarda su aprendiz.

$$\begin{cases} x+y=3 \Rightarrow x+3x=3 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{4}} \Rightarrow \\ y=3x \end{cases}$$

$$y=3x \Rightarrow \boxed{y=\frac{9}{4}}$$

Solución: el jefe tarda 45 minutos y el aprendiz dos horas y quince minutos.

49.
Sea N = xy el número buscado ⟹ N = y + 10 x

$$\begin{cases} x+y=11 \\ yx=xy+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ x+10y=y+10x+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ -9x+9y=9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{x}+y=11 \\ -\cancel{x}+y=1 \end{cases}$$

$$2y=12 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

$$x+y=11 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

Solución: el número buscado es N = 56

50.
Sea x el precio en euros de cada camisa e y el precio en euros de cada pantalón.

$$\begin{cases} 14x+9y=595 \\ y=x+15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x+9y=595 \\ -x+y=15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{14x}+9y=595 \\ -\cancel{14x}+14y=210 \end{cases}$$

$$23y=805 \Rightarrow \boxed{y=35}$$

$$y=x+15 \Rightarrow 35=x+15 \Rightarrow \boxed{x=20}$$

Solución: 20 € cada camisa y 35 € cada pantalón.

51.
Sean x el número de rosales e y el número de cipreses:

$$\begin{cases} 3x=2y+2 \\ 2y=2x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y+2 \Rightarrow 3x=2(x+1)+2 \Rightarrow 3x=2x+4 \Rightarrow \boxed{x=4} \\ y=x+1 \end{cases}$$

$$y=x+1 \Rightarrow \boxed{y=5}$$

Solución: 4 rosales y 5 cipreses

52.

Sea x el número de horas que tardan en encontrarse. Durante ese tiempo el coche que sale de la ciudad A ha recorrido $100x$ km y el vehículo que sale de la ciudad B ha recorrido $120x$ km. De aquí sale la siguiente ecuación:

$$100x + 120x = 770 \Rightarrow 220\,x = 770 \Rightarrow x = 3'5 \text{ horas}$$

Tendrán que circular 3 horas y 30 minutos para que se produzca el encuentro.

El primer coche habrá recorrido $100 \cdot 3'5 = 350$ km y el segundo coche habrá recorrido $120 \cdot 3'5 = 420$ km

El encuentro se produce a 350 km de la ciudad A

AUTOEVALUACIÓN PAG. 117

1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por igualación:
$$\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución:
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por reducción:
$$\begin{cases} 3x + 5y = 18 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

4. Resuelve el siguiente sistema con paréntesis por el método que consideres más apropiado:
$$\begin{cases} 3(x - 2y) + 6(2x - y) = -12 \\ x - 2y + 5(2x - y) = 2 \end{cases}$$

5. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con números racionales:
$$\begin{cases} \dfrac{x + 3y}{5} - \dfrac{4x + y}{4} = -1 \\ \dfrac{x + y}{7} + \dfrac{2x + y}{2} = 6 \end{cases}$$

6. La suma de dos números es 15 y el doble del primero menos el segundo es 6. ¿De qué números se trata?

7. Un padre tiene cuatro veces la edad de su hijo más 3 años, pero cuando pasen 15 años el padre solo tendrá el doble de edad que su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

8. En la contrarreloj de la Vuelta Ciclista a España un corredor lleva una velocidad de 36 km/h. A los 2 min sale el líder a una velocidad de 42 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda el líder en dar alcance al primer corredor y en qué kilómetro lo hace?

9. El perímetro de un triángulo isósceles es de 16 cm. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que el lado desigual es 1 cm mayor que cualquiera de los otros dos.

10. Compramos 4 kg de uvas y 3'5 kg de plátanos gastándonos en total 12 € con 20 cts. ¿Qué precio tenía el kilo de fruta si las uvas estaban 80 cts. más caras que los plátanos?

Sistemas de ecuaciones 117

1.

$$\begin{cases} 2x+4y=4 \\ 3x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=2 \\ 3x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ x=\dfrac{2+2y}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2-2y=\frac{2+2y}{3} \Rightarrow 6-6y=2+2y \Rightarrow 4=8y \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$$

$$x=2-2y \Rightarrow x=2-1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

2.

$$\begin{cases} 3x-y=3 \\ x+2y=15 \Rightarrow x=15-2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$3x-y=3 \Rightarrow 3\cdot(15-2y)-y=3 \Rightarrow 45-6y-y=3 \Rightarrow -7y=-42 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

$$x=15-2y \Rightarrow x=15-2\cdot 6 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

3.

$$\begin{cases} 3x+5y=18 \\ 2x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+\cancel{5y}=18 \\ 10x-\cancel{5y}=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{6x}-10y=-36 \\ \cancel{6x}-3y=-3 \end{cases}$$

$$13x=13 \qquad\qquad -13y=-39$$

$$\boxed{x=1} \qquad\qquad \boxed{y=3}$$

4.

$$\begin{cases} 3(x-2y)+6(2x-y)=-12 \\ x-2y+5(2x-y)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-6y+12x-6y=-12 \\ x-2y+10x-5y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x-12y=-12 \\ 11x-7y=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-4y=-4 \Rightarrow x=\dfrac{4y-4}{5} \\ 11x-7y=2 \Rightarrow x=\dfrac{2+7y}{11} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{4y-4}{5}=\frac{2+7y}{11} \Rightarrow 44y-44=10+35y \Rightarrow 9y=54 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

$$x=\frac{4y-4}{5} \Rightarrow \boxed{x=4}$$

5.

$$\begin{cases} \dfrac{x+3y}{5}-\dfrac{4x+y}{4}=-1 \\ \dfrac{x+y}{7}+\dfrac{2x+y}{2}=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+12y-20x-5y=-20 \\ 2x+2y+14x+7y=84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16x+7y=-20 \\ 16x+9y=84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cancel{16x}+7y=-20 \\ \cancel{16x}+9y=84 \end{cases}$$

$$16y=64 \Rightarrow \boxed{y=4}$$

$$16x+9y=84 \Rightarrow 16x+36=84 \Rightarrow 16x=48 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

6.

Sean *x* e y los números buscados:

$$\begin{cases} x+y=15 \\ 2x-y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=30 \\ 2x-y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2x}+2y=30 \\ \cancel{-2x}+y=-6 \end{cases}$$

$$3y=24 \Rightarrow \boxed{y=8}$$

$$2x-y=6 \Rightarrow 2x-8=6 \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

Solución: los números buscados son 7 y 8

7.

	Edad del padre	Edad del hijo
Hoy	*x*	y
Dentro de 15 años	*x* + 15	y + 15

$$\begin{cases} x=4y+3 \\ x+15=2(y+15) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4y+3 \\ x+15=2y+30 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4y+3)+15=2y+30 \Rightarrow 4y+18=2y+30 \Rightarrow 2y=12 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

$$x=4y+3 \Rightarrow \boxed{x=27}$$

Solución: el padre tiene actualmente 27 años y el hijo 6 años.

8 .

Sea *x* el tiempo en minutos que está el primer corredor en carrera.

El primer corredor lleva una velocidad de:

$$36 \text{ km/h} = \frac{36}{60} \text{km/minuto} = 0\text{'}6 \text{ km/minuto}$$

El segundo corredor lleva una velocidad de:

$$42 \text{ km/h} = \frac{42}{60} \text{km/minuto} = 0\text{'}7 \text{ km/minuto}$$

La distancia recorrida por el primer corredor es **0'6 *x*** kilómetros.

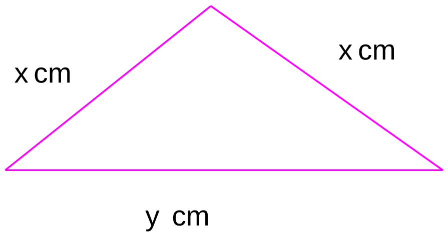
La distancia recorrida por el líder es de **0'7·(*x*-2)** kilómetros. (Observar que está en carrera 2 minutos menos). Como la distancia recorrida por ambos corredores es la misma, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$0\text{'}6x=0\text{'}7(x-2) \Rightarrow 0\text{'}6x=0\text{'}7x-1\text{'}4 \Rightarrow 0\text{'}1x=1\text{'}4 \Rightarrow x=14$$

Solución: El líder tarda en dar alcance al primer corredor *x* - 2 minutos. Con lo que el líder tarda en alcanza al primer corredor 12 minutos.

Le da alcance en el kilómetro: 12·0'7=8'4 km ,es decir , recorridos 8 km y 400 metros.

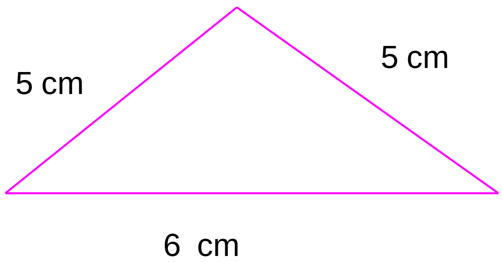
9.



$$\begin{cases} 2x+y=16 \Rightarrow 2x+(x+1)=16 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow \boxed{x=5} \\ y=x+1 \end{cases}$$

$$y=x+1 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

Solución:



10.

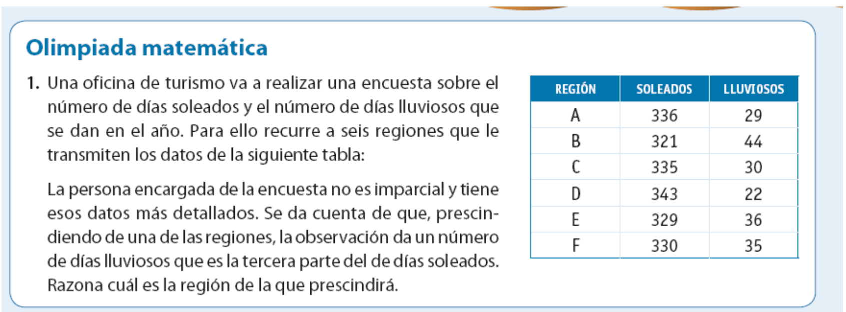
Sea *x* el precio en euros del kilo de uvas e y el precio en euros del kilo de plátanos.

$$\begin{cases} x=y+0'8 \\ 4x+3'5y=12'2 \Rightarrow 4\cdot(y+0'8)+3'5y=12'2 \Rightarrow 7'5y=9 \Rightarrow \boxed{y=1'2} \end{cases}$$

$$x=y+0'8 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Solución: 2 €/kg las uvas y 1’2 €/kg los plátanos.

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 119



Olimpiada matemática

1. Una oficina de turismo va a realizar una encuesta sobre el número de días soleados y el número de días lluviosos que se dan en el año. Para ello recurre a seis regiones que le transmiten los datos de la siguiente tabla:

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de las regiones, la observación da un número de días lluviosos que es la tercera parte del de días soleados. Razona cuál es la región de la que prescindirá.

REGIÓN	SOLEADOS	LLUVIOSOS
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

1. Al suprimir una región, la suma de los días soleados o lluviosos de las restantes regiones ha de ser múltiplo de 4. Esta suma para las 6 regiones es 1994, que dividido entre 4 da 2 de resto. El único dato de esta columna que al dividirlo entre 4 nos da 2 de resto es 330, que es justamente el correspondiente a la región F. Suprimiendo esta región quedan entre las 5 restantes 416 días lluviosos y 3 · 416 = 1248 días soleados.

UNIDAD 7. Sucesiones y progresiones

ACTIVIDADES PAG. 122

ACTIVIDADES

1. Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = n + 3$ b) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = 4 \cdot n + 2$ d) $a_n = 7 \cdot n + 1$

2. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:

a) $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} + 4$

b) $a_1 = -5$, $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 10$

3. Calcula el término general de las siguientes sucesiones:

a) 4, 7, 10, 13... b) 3, 7, 11, 15... c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...

1.
a) 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9
b) 0 , 3 , 8 , 15 , 24 , 35
c) 6, 10, 14, 18, 22, 26
d) 8, 15, 22, 29, 36, 43

2.
a) 4 , 8 , 12 , 16
b) - 5 , - 5 , – 5 , - 5

3.
a) 3 n + 1
b) 4 n – 1
c) $\frac{1}{n}$

ACTIVIDADES PAG. 123

ACTIVIDADES

4. Calcula la diferencia, el término general, a_{12} y a_{40} de la siguiente progresión aritmética: –3, –1, 1, 3, 5...

5. Una progresión aritmética consta de 50 términos y su último término es 188. Si la diferencia es 4, calcula el primer término.

6. Dada la progresión aritmética 120, 117, 114, 111..., ¿qué término es el –3?

7. El primer término de una progresión aritmética es 7, la diferencia es 5 y su último término es 6682. ¿Cuántos términos tiene la progresión?

4.
a) $\boxed{d = 2}$,

$$a_n = -3 + 2(n-1) = 2n - 5 \Rightarrow \boxed{a_n = 2n - 5}$$

$$a_{12} = 2 \cdot 12 - 5 = 24 - 5 \Rightarrow \boxed{a_{12} = 19}$$

$$a_{40} = 2 \cdot 40 - 5 = 80 - 5 \Rightarrow \boxed{a_{40} = 75}$$

5.

$$n = 50 \, , \, a_n = 188 \, , \, d = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_1 = a_n - (n-1) \cdot d \Rightarrow a_1 = 188 - 49 \cdot 4 \Rightarrow a_1 = 188 - 196 \Rightarrow \boxed{a_1 = -8}$$

6.

$$d = -3 \ , \ a_1 = 120 \ , \quad a_n = -3$$

$$-3 = 120 + (n-1)\cdot(-3) \Rightarrow -3 = 120 - 3n + 3 \Rightarrow 3n = 126 \Rightarrow \boxed{n = 42}$$

Solución: el término a_{42}

7.

$$d = 5, \ \ a_1 = 7 \ , \quad a_n = 6682$$

$$6682 = 7 + (n-1)\cdot 5 \Rightarrow 6675 = 5\cdot(n-1) \Rightarrow 1335 = n - 1 \Rightarrow \boxed{n = 1336}$$

Solución: 1336 términos

ACTIVIDADES PAG. 124

ACTIVIDADES

8. Interpola cinco medios aritméticos entre los números −10 y 26.

9. Interpola cuatro medios aritméticos entre los números −50 y −70.

10. Interpola tres medios aritméticos entre los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$.

11. Interpola cuatro medios aritméticos entre los números $\sqrt{3}$ y $21\sqrt{3}$.

12. Interpola cuatro medios aritméticos entre los números $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$.

8.

Construimos la siguiente progresión: $-10 \ , a_2 \ , a_3 \ , a_4 \ , a_5 \ , a_6 \ , 26$

$$n = 7 \ , \ a_1 = -10 \ , \ a_7 = 26$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{26-(-10)}{7-1} \Rightarrow d = \frac{36}{6} \Rightarrow \boxed{d = 6}$$

Solución: Los números buscados son: - 4 , 2 , 8 , 14 , 20

9.

Construimos la siguiente progresión: $-50 \ , a_2 \ , a_3 \ , a_4 \ , a_5 \ , -70$

$$n = 6, a_1 = -50 \ , \ a_7 = -70$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{-70-(-50)}{6-1} \Rightarrow d = \frac{-20}{5} \Rightarrow \boxed{d = -4}$$

Solución: Los números buscados son: -54 , -58 , -62 , -66

10.

Construimos la siguiente progresión: $\frac{1}{2} \ , a_2 \ , a_3 \ , a_4 \ , \frac{3}{2}$

$$n = 5, \ a_1 = \frac{1}{2}, \ a_5 = \frac{3}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{5-1} \Rightarrow d = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{4}}$$

Solución: Los números buscados son: $\frac{3}{4} \ , 1 \ , \frac{5}{4}$

11.

Construimos la siguiente progresión: $\sqrt{3}\,,a_2\,,a_3\,,a_4\,,a_5\,,21\sqrt{3}$

$$\text{n}=6\,,\ a_1=\sqrt{3}\,,\ a_6=21\sqrt{3}$$

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d\Rightarrow d=\frac{a_n-a_1}{n-1}\Rightarrow d=\frac{21\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6-1}=\frac{20\sqrt{3}}{5}=4\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{d=4\sqrt{3}}$$

Solución: Los números buscados son: $5\sqrt{3}\ ,\ 9\sqrt{3}\ ,\ 13\sqrt{3}\,,\ 17\sqrt{3}$

12.

Construimos la siguiente progresión: $\frac{2}{3}\sqrt{2}\,,a_2\,,a_3\,,a_4\,,a_5\,,4\sqrt{2}$

$$\text{n}=6\,,\ a_1=\frac{2}{3}\sqrt{2}\,,\ a_6=4\sqrt{2}$$

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d\Rightarrow d=\frac{a_n-a_1}{n-1}\Rightarrow d=\frac{4\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}}{6-1}=\frac{\frac{10}{3}\sqrt{2}}{5}=\frac{2}{3}\sqrt{2}\Rightarrow\boxed{d=\frac{2}{3}\sqrt{2}}$$

Solución: Los números buscados son: $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}\ ,\ \frac{8}{3}\sqrt{2}\,,\ \frac{10}{3}\sqrt{2}$

ACTIVIDADES PAG. 125

ACTIVIDADES

13. Calcula la suma de los 20 términos de la progresión aritmética 4, ..., 118. Calcula la diferencia.

14. Dada la progresión aritmética 3, 8, 13, ..., 123 de 25 términos, calcula la expresión del término general y la suma de los 25 términos. ¿Qué término de la progresión es el número 68?

15. La suma de las edades de seis hermanos es de 57 años. Si la edad del mayor es 8 veces la edad del menor más 1 y las edades están en progresión aritmética, ¿cuántos años tiene cada hermano?

13.

$$a_1=4\,,a_{20}=118\,,n=20$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}\Rightarrow S_n=\frac{(4+118)\cdot 20}{2}\Rightarrow\boxed{S_n=1220}$$

$$a_{20}=a_1+19\cdot d\Rightarrow d=\frac{a_{20}-a_1}{19}\Rightarrow d=\frac{118-4}{19}=6\Rightarrow\boxed{d=6}$$

14.

$$a_1=3\,,a_{25}=123\,,n=25\,,\text{d}=5$$

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d\Rightarrow a_n=3+(n-1)\cdot 5\Rightarrow\boxed{a_n=5n-2}$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}\Rightarrow S_n=\frac{(3+123)\cdot 25}{2}\Rightarrow\boxed{S_n=1575}$$

$$a_n=68\Rightarrow 5n-2=68\Rightarrow 5n=70\Rightarrow\boxed{n=14}\,.$$

El término a_{14} de la progresión es el número 68

15.
Como la suma de los seis hermanos es 57 tenemos:

$$S_6 = 57 \Rightarrow \frac{(a_1+a_6)\cdot 6}{2} = 57 \Rightarrow a_1 + a_6 = 19$$

Como la edad del mayor es 8 veces la del menor más uno tenemos:

$$a_6 = 8a_1 + 1 \implies a_1 + (8a_1 + 1) = 19 \Rightarrow 9a_1 = 18 \implies a_1 = 2 \implies a_6 = 17$$

Como $a_6 = a_1 + 5d \implies 17 = 2 + 5d \implies 15 = 5d \implies d = 3$

Solución: Las edades de los hermanos son: 2, 5, 8, 11, 14 y 17 años.

ACTIVIDADES PAG. 126

ACTIVIDADES

16. Calcula el término general de las siguientes progresiones:

a) 4, 20, 100, 500... b) 9, 36, 144, 576...

17. Calcula a_1 de una progresión geométrica sabiendo que $a_6 = 15\,552$ y $a_5 = 2\,592$.

18. De una progresión geométrica conocemos $a_3 = 16$ y $a_7 = 1$. Calcula r.

16.
a) $4 \cdot 5^{n-1}$
b) $9 \cdot 4^{n-1}$

17.

$$r = \frac{a_6}{a_5} \Rightarrow r = \frac{15552}{2592} \Rightarrow \boxed{r = 6}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot 6^4 \Rightarrow a_1 = \frac{a_5}{6^4} \Rightarrow a_1 = \frac{2592}{1296} \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

18.

$$a_7 = a_1 \cdot r^6 \Rightarrow \boxed{1 = a_1 \cdot r^6}$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow \boxed{16 = a_1 \cdot r^2}$$

Dividiendo la primera expresión entre la segunda tenemos:

$$\frac{a_1 \cdot r^2}{a_1 \cdot r^6} = \frac{16}{1} \Rightarrow \frac{1}{r^4} = 16 \Rightarrow \frac{1}{16} = r^4 \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$$

ACTIVIDADES PAG. 127

ACTIVIDADES

19. Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión geométrica siguiente: 2, 8, 32...

20. De una progresión geométrica se sabe que su razón $r = \frac{1}{2}$ y que $a_1 = 32$. Calcula la suma de sus seis primeros términos.

21. Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que $a_1 = 1024$, $r = \frac{1}{2}$

19.

$$n = 7,\quad r = \frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{r = 4}$$

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot \left(r^7 - 1\right)}{r - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{2 \cdot \left(4^7 - 1\right)}{4 - 1} \Rightarrow \boxed{S_7 = 10922}$$

20.

$$r = \frac{1}{2}\ ,\ a_1 = 32$$

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot \left(r^6 - 1\right)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{32 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{64} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_6 = -64 \cdot \left(\frac{1}{64} - 1\right)$$

$$\Rightarrow S_6 = -1 + 64 \Rightarrow \boxed{S_6 = 63}$$

21.

$$a_1 = 1024 = 2^{10} \Rightarrow a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1024 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{2^{10}}{2^9} \Rightarrow a_{10} = 2$$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1024}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-1023}{-\frac{1}{2}} = 2046$$

ACTIVIDADES PAG. 128

ACTIVIDADES

22. Calcula la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión geométrica:

a) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\ldots$

b) $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}\ldots$

22.

a) $a_1 = 4\ ,\ r = \frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \Rightarrow S_\infty = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = 8}$$

b) $a_1 = 81\ ,\ r = \frac{1}{3}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \Rightarrow S_\infty = \frac{81}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{243}{2}}$$

ACTIVIDADES PAG. 129

ACTIVIDADES

23. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos puros utilizando sumas de progresiones geométricas:

a) 0'222... b) 0'121212... c) 3'606060...

24. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos utilizando sumas de progresiones geométricas:

a) 0'5121212... b) 4'2333... c) 72'5666...

23.

a)

$$N = 0'222\ldots = 0'2 + 0'02 + 0'002 + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{2}{10}$, $r = \frac{1}{10}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{9}}$$

b)

$$N = 0'1212\ldots = 0'12 + 0'0012 + \ldots = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{12}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \Rightarrow \boxed{N = \frac{4}{33}}$$

c)

$$N = 3'606060\ldots = 3 + 0'60 + 0'0060 + \ldots = 3 + \frac{60}{100} + \frac{60}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 3 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{60}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{60}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{60}{99} = \frac{20}{33}$$

$$N = 3 + \frac{20}{33} = \frac{99+20}{33} \Rightarrow \boxed{N = \frac{119}{33}}$$

24.

a)

$$N = 0'5121212\ldots = 0'5 + 0'012 + 0'00012 + \ldots = 0'5 + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 0’5 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{12}{1000}$, $r = \frac{1}{100}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{12}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{990} = \frac{2}{165}$$

$$N = 0'5 + \frac{2}{165} = \frac{1}{2} + \frac{2}{165} = \frac{165+4}{330} \Rightarrow \boxed{N = \frac{169}{330}}$$

b)

$$N = 4'2333\ldots = 4'2 + 0'03 + 0'003 + \ldots = 4'2 + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 4’2 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{3}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

$$N = 4'2 + \frac{1}{30} = \frac{42}{10} + \frac{1}{30} = \frac{126+1}{30} \Rightarrow \boxed{N = \frac{127}{30}}$$

c)

$$N = 72'5666\ldots = 72'5 + 0'06 + 0'006 + \cdots = 72'5 + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 72’5 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{6}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

$$N = 72'5 + \frac{1}{15} = \frac{725}{10} + \frac{1}{15} = \frac{2175+2}{30} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2177}{30}}$$

Desafío matemático

El interés compuesto

Supongamos que una persona tiene ahorrado cierta cantidad de dinero, por ejemplo, 5 000 euros, y como no quiere que se deprecie, lo deposita en un banco que le da un interés del 4% (r) anual. Eso significa que al cabo de un año (t), esa persona obtiene un beneficio de $i = 5000 \cdot \frac{4}{100} = 200$ euros. Si mantiene el depósito durante 5 años, obtiene un beneficio total de $200 \cdot 5 = 1\,000$ euros. En este tipo de depósito los beneficios obtenidos no producen nuevos intereses. Estamos ante un caso de interés simple ya estudiado en la unidad 3.

$$\text{interés} = \text{Capital} \cdot \frac{r}{100} \cdot t$$

Sin embargo, lo que suele ocurrir es que los intereses que se producen, pasen a formar parte del capital, con lo que también producirán intereses en el futuro; este tipo de depósitos son a interés compuesto.

Si llamamos C_0 a la imposición inicial, C_1 al capital que obtiene al cabo de 1 año, ..., C_n al capital que tenemos al cabo de n años, al r por uno anual, obtenemos la siguiente fórmula:

$$n = 0,\ C_0$$
$$n = 1,\ C_1 = C_0 + C_0 \cdot r = C_0 \cdot (1 + r)$$
$$n = 2,\ C_2 = C_1 + C_1 \cdot r = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$
$$\dots \quad C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot r = C_0 \cdot (1 + r)^n$$

1. Un accionista deposita en el banco 6 000 euros el 31 de diciembre de 2010 a un interés del 6'25% anual. Si los intereses producidos se incorporan al depósito, calcula el capital que se encontrará en el depósito el 1 de enero de 2015.

2. Si realizamos el razonamiento en semestres, siendo r el tanto por uno anual y r_s el tanto por uno semestral, al cabo de un año hemos obtenido $C_0 \cdot (1 + r_s)^2$, que tiene que coincidir con la inversión al r anual.

$$C_0 \cdot (1 + r_s)^2 = C_0 \cdot (1 + r) \Rightarrow (1 + r_s)^2 = (1 + r) \Rightarrow (1 + r_s) = (1 + r)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r_s = (1 + r)^{\frac{1}{2}} - 1$$

   Calcula una fórmula equivalente a la anterior cuando la unidad de tiempo es cuatrimestral (r_c el tanto por uno cuatrimestral), trimestral (r_t el tanto por uno trimestral), mensual (r_m el tanto por uno mensual) y diaria (r_d el tanto por uno diario).

3. Si nuestro banco nos oferta depositar los 6 000 euros al 20% anual:

   a) Calcula el tanto por uno anual de interés.

   b) Calcula el tanto por ciento de interés semestral que nos ofrece.

   c) Calcula el capital obtenido al cabo de 3 años.

1. Se trata de aplicar la fórmula $C_n = C_0 \cdot (1+r)^n$

En nuestro caso, han trascurrido 4 años, luego $n = 4$, $C_0 = 6000$, $r = 0'0625$
El capital que se encontrará en el depósito el 1 de enero de 2015 será:

$$C_4 = 6000 \cdot (1 + 0´0625)^4 = 7646´57$$

2. Si realizamos el razonamiento en cuatrimestres, siendo *r* el tanto por uno anual y r_c el tanto por uno cuatrimestral, al cabo de una año hemos obtenido :

$C_0 \cdot (1+r_c)^3$, que tiene que coincidir con la inversión al *r* anual.

$$C_0.(1+r_c)^3 = C_0 \cdot (1+r) \Rightarrow (1+r_c)^3 = (1+r) \Rightarrow 1 + r_c = (1+r)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$
$$r_c = (1+r)^{\frac{1}{3}} - 1$$

- Si realizamos el razonamiento en trimestres, siendo *r* el tanto por uno anual y r_t el tanto por uno trimestral, al cabo de una año hemos obtenido :

  $C_0 \cdot (1+r_t)^4$, que tiene que coincidir con la inversión al *r* anual.

  $$C_0.(1+r_t)^4 = C_0 \cdot (1+r) \Rightarrow (1+r_t)^4 = (1+r) \Rightarrow 1 + r_t = (1+r)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$
  $$r_t = (1+r)^{\frac{1}{4}} - 1$$

- Si realizamos el razonamiento mensual, siendo r el tanto por uno anual y r_m el tanto por uno mensual, al cabo de una año hemos obtenido:

  $C_0 \cdot (1+r_m)^{12}$, que tiene que coincidir con la inversión al r anual.

  $$C_0.(1+r_m)^{12} = C_0 \cdot (1+r) \Rightarrow (1+r_m)^{12} = (1+r) \Rightarrow 1 + r_m = (1+r)^{\frac{1}{12}} \Rightarrow$$
  $$r_m = (1+r)^{\frac{1}{12}} - 1$$

- Si realizamos el razonamiento diario, siendo *r* el tanto por uno anual y r_d el tanto por uno diario, al cabo de una año hemos obtenido:

  $C_0 \cdot (1+r_d)^{365}$, que tiene que coincidir con la inversión al *r* anual.

  $$C_0 \cdot (1+r_d)^{365} = C_0 \cdot (1+r) \Rightarrow (1+r_d)^{365} = (1+r) \Rightarrow 1 + r_d = (1+r)^{365} \Rightarrow$$
  $$r_d = (1+r)^{365} - 1$$

3.

a) $r = 20\% = 0´20$

b) $r_s = (1+r)^{\frac{1}{2}} - 1 = (1+0´2)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0´0954 \cong 954\ \%$

c) $C_3 = C_0 \cdot (1+r)^3 = 6000 \cdot (1+0´2)^3 = 10368$

ACTIVIDADES FINALES PAG. 132

EJERCICIOS

Progresiones aritméticas

25. Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $\dfrac{2n}{n+1}$ c) $4n + 30$

b) $\dfrac{5n-1}{3}$ d) $\dfrac{1}{n+1}$

26. Dada la progresión 6, 11, 16, 21... calcula su término a_{50}.

27. Indica cuál de las siguientes progresiones es aritmética:

a) 7, 12, 17, 22...

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36...

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96...

28. Dadas las siguientes progresiones aritméticas, calcula su diferencia y la expresión de su término general:

a) –3, –1, 1, 3... c) 5, 9, 13, 17...

b) 7, 8, 9... d) 2, 5, 8...

29. Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 8, 11, 14, 17... c) 2, 6, 10, 14, 18...

b) 0, 3, 8, 15, 24... d) 5, 11, 17, 23, 29...

30. Indica si las siguientes progresiones aritméticas son crecientes o decrecientes y señala cuál es la diferencia de la progresión:

a) 2, 5, 8, 11, 14... b) 238, 233, 228, 223, 218...

31. Indica si las siguientes progresiones aritméticas son crecientes o decrecientes y señala cuál es la diferencia de la progresión:

a) $5, \dfrac{11}{2}, 6, \dfrac{13}{2}, 7...$ 7 b) $7, \dfrac{20}{3}, \dfrac{19}{3}, 6...$

32. Sabemos que el primer término de una progresión aritmética es 4 y la diferencia de la progresión es 6. Calcula su término vigésimo.

33. El primer término de una progresión aritmética de once términos es 8 y el último término es 13. Calcula la diferencia de la progresión y su término noveno.

34. Interpola nueve términos en progresión aritmética entre 8 y 28.

35. Interpola cinco medios aritméticos entre 1 y 5.

36. Interpola cuatro medios aritméticos entre 6 y 26.

37. Calcula la suma de los 10 primeros múltiplos de 6.

38. Interpola cinco medios aritméticos entre 2 y 11.

39. Encuentra tres números entre 3 y 6 que estén en progresión aritmética.

40. Suma los diez términos de una progresión aritmética de la que conocemos $a_1 = \dfrac{1}{2}$ y $a_3 = \dfrac{7}{6}$.

41. Calcula el valor de n para que las siguientes expresiones constituyan tres términos consecutivos de una progresión aritmética:

$$2n - 1,\ 3n,\ n^2 + 1$$

42. Calcula el valor de n para que las siguientes expresiones constituyan tres términos consecutivos de una progresión aritmética:

$$2n - 1,\ n^2 - 1,\ 4n - 1$$

Forma la progresión que resulta.

43. Considera las siguientes expresiones polinómicas:

$$n^2 - 4n + 1,\ n^2 - 2n + 2,\ n^2 + 3$$

¿Constituyen las expresiones anteriores una progresión aritmética? Si así fuera, y suponiendo que $n^2 - 4n + 1$ fuera el primer término, calcula el término octavo de dicha progresión.

44. De una progresión aritmética sabemos que $a_7 = 45$ y $a_8 = 52$. Calcula la suma de sus 50 primeros términos.

45. Suma todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 200.

46. La suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética es 65 y la suma de los 20 primeros términos es 230. Calcula la diferencia y los términos primero y quinto de la progresión.

47. Calcula la suma de los primeros 500 números.

48. Calcula la suma de los 200 primeros números impares.

49. De una progresión aritmética sabemos que la suma de los términos segundo y séptimo es $\dfrac{73}{2}$ y la suma de los términos tercero y quinto es $\dfrac{65}{2}$. Calcula los siete primeros términos de dicha progresión.

50. La suma de los elementos primero y séptimo de una progresión aritmética de siete términos vale 9. Si el quinto término es $\dfrac{11}{2}$, calcula el valor del sexto término.

132 UNIDAD 7

25.

a) $1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{5}{3}$

b) $\dfrac{4}{3}, 3, \dfrac{14}{3}, \dfrac{19}{3}, 8$

c) 34, 38, 42, 46, 50

d) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}$

26.
Se trata de una progresión aritmética donde $a_1 = 6$, d = 5

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_{50} = a_1 + 49\cdot d \Rightarrow a_{50} = 6 + 49\cdot 5 \Rightarrow a_{50} = 6 + 245 \Rightarrow \boxed{a_{50} = 251}$$

27.
Sólo la *a*)

28.
a) d = 2 , $a_n = -5 + 2n$
b) d = 1 , $a_n = 6 + n$
c) d = 4 , $a_n = 1 + 4n$
d) d = 3 , $a_n = -1 + 3n$

29.
a) $a_n = 5 + 3n$
b) $a_n = n^2 - 1$
c) $a_n = -2 + 4n$
d) $a_n = -1 + 6n$

30.
a) Creciente, d = 3
b) Decreciente, d = - 5

31.
a) Creciente , $d = \frac{1}{2}$
b) Decreciente , $d = -\frac{1}{3}$

32.

$a_1 = 4$, d = 6

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_{20} = a_1 + 19\cdot d \Rightarrow a_{20} = 4 + 19\cdot 6 \Rightarrow \boxed{a_{20} = 118}$$

33.

$a_1 = 8$, n = 11 , $a_{11} = 13$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10\cdot d \Rightarrow 13 = 8 + 10\cdot d \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{2}}$$

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow a_9 = 8 + 8\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a_9 = 12}$$

34.
Construimos la siguiente progresión: 8 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 , a_7 , a_8 , a_9 , a_{10} , 28

n = 11 , $a_1 = 8$, $a_{11} = 28$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{28-8}{11-1} \Rightarrow d = \frac{20}{10} \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

Solución: Los números buscados son:

10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 22 , 24 , 26

35.

Construimos la siguiente progresión: $1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 5$

n = 7 , $a_1 = 1$, $a_7 = 5$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{5-1}{7-1} \Rightarrow d = \frac{4}{6} \Rightarrow \boxed{d = \frac{2}{3}}$$

Solución. Los números buscados son:

$$\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3} = 3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}$$

36.

Construimos la siguiente progresión: $6, a_2, a_3, a_4, a_5, 26$

n = 6 , $a_1 = 6$, $a_6 = 26$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{26-6}{6-1} \Rightarrow d = \frac{20}{5} \Rightarrow \boxed{d = 4}$$

Solución: Los números buscados son: 10, 14, 18, 22

37.

$d = 6$, $a_1 = 6$

Se trata de una progresión aritmética.

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})}{2}\cdot 10 \Rightarrow S_{10} = \frac{(6+60)}{2}\cdot 10 \Rightarrow \boxed{S_{10} = 330}$$

38.

Construimos la siguiente progresión: $2, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 11$

n = 7 , $a_1 = 2$, $a_7 = 11$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{11-2}{7-1} \Rightarrow d = \frac{9}{6} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{2}}$$

Solución: Los números buscados son: $\frac{7}{2}, \frac{10}{2} = 5, \frac{13}{2}, \frac{16}{2} = 8, \frac{19}{2}$

39.

Construimos la siguiente progresión: $3, a_2, a_3, a_4, 6$

n = 5 , $a_1 = 3$, $a_5 = 6$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{6-3}{5-1} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{4}}$$

Solución: Los números buscados son: $\frac{15}{4}, \frac{18}{4}, \frac{21}{4}$

40.

$$a_1 = \frac{1}{2} \ , \ a_3 = \frac{7}{6}$$

$$a_3 = a_1 + 2d \Rightarrow \frac{7}{6} = \frac{1}{2} + 2d \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{3}} \ ,$$

$$a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a_{10} = \frac{7}{2}}$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 \Rightarrow S_{10} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}}{2} \cdot 10 \Rightarrow \boxed{S_{10} = 20}$$

41.
Por ser los términos de una progresión aritmética

$$\left.\begin{array}{l} 2n - 1 + d = 3n \Rightarrow d = n + 1 \\ 3n + d = n^2 + 1 \Rightarrow d = n^2 - 3n + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow n + 1 = n^2 - 3n + 1 \Rightarrow n^2 - 3n + 1 - n - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n = 0} \\ \boxed{n = 4} \end{cases}$$

Solución:
Si n = 0 , la progresión es -1 , 0 , 1
Si n = 4, la progresión es 7, 12, 17

42.
Por ser los términos de una progresión aritmética

$$2n - 1 + d = n^2 - 1 \Rightarrow d = n^2 - 2n$$
$$n^2 - 1 + d = 4n - 1 \Rightarrow d = -n^2 + 4n$$
$$n^2 - 2n = -n^2 + 4n \Rightarrow 2n^2 - 6n = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 3 \end{cases}$$

Solución:
Si n = 0 , la progresión es -1 , -1 , -1
Si n = 3 , la progresión es 5 , 8 , 11

43.

Para que constituyan una progresión aritmética se ha de verificar que la diferencia d entre los términos de la progresión sea la misma

$$\left.\begin{array}{l} n^2 - 4n + 1 + d = n^2 - 2n + 2 \Rightarrow \boxed{d = 2n + 1} \\ n^2 - 2n + 2 + d = n^2 + 3 \Rightarrow \boxed{d = 2n + 1} \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, constituyen una progresión aritmética

$$a_8 = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_8 = n^2 - 4n + 1 + (n-1) \cdot (2n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_8 = n^2 - 4n + 1 + 2n^2 + n - 2n - 1 \Rightarrow \boxed{a_8 = 3n^2 - 5n}$$

44.

$$d = a_8 - a_7 \Rightarrow d = 52 - 45 \Rightarrow \boxed{d = 7}$$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})}{2} \cdot 50$$

Necesitamos conocer a_1 y a_{50}

$$a_7 = 45 \Rightarrow a_1 + 6d = 45 \Rightarrow a_1 = 45 - 6d \Rightarrow a_1 = 45 - 42 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3}$$

$$a_{50} = a_1 + 49d \Rightarrow a_{50} = 3 + 49 \cdot 7 \Rightarrow a_{50} = 3 + 343 \Rightarrow \boxed{a_{50} = 346}$$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})}{2} \cdot 50 \Rightarrow S_{50} = \frac{(3 + 346)}{2} \cdot 50 \Rightarrow \boxed{S_{50} = 8725}$$

45.

Se trata de una progresión aritmética en la que:

$$a_1 = 7 \cdot 15 = 105 \ ; \ \ a_{14} = 7 \cdot 28 = 196$$

$$S_{14} = \frac{(a_1 + a_{14})}{2} \cdot 14 \Rightarrow S_{14} = \frac{(105 + 196)}{2} \cdot 14 \Rightarrow \boxed{S_{14} = 2107}$$

46.

$$S_{10} = 65 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{10})}{2} \cdot 10 = 65 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 13 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 9d) = 13 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 13$$

$$S_{20} = 230 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{20})}{2} \cdot 20 = 230 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 23 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 19d) = 23 \Rightarrow 2a_1 + 19d = 23$$

$$\begin{cases} -\cancel{2a_1} - \ \ 9d = -13 \\ \ \ \cancel{2a_1} + 19d = 23 \end{cases}$$

$$10d = 10 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$2a_1 + 9d = 13 \Rightarrow 2a_1 = 13 - 9d \Rightarrow 2a_1 = 13 - 9 \Rightarrow 2a_1 = 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = 2 + 4 \Rightarrow \boxed{a_5 = 6}$$

47.

Se trata de una progresión aritmética en la que d = 1, $a_1 = 1$

El último término es $a_{500} = 500$

$$S_{500} = \frac{(a_1 + a_{500})}{2} \cdot 500 = \frac{(1 + 500)}{2} \cdot 500 = 125250$$

48.

Se trata de una progresión aritmética en la que d = 2 , $a_1 = 1$

El último término es $a_{200} = a_1 + 199 \cdot d \Rightarrow a_{200} = 1 + 199 \cdot 2 \Rightarrow a_{200} = 399$

$$S_{200} = \frac{(a_1 + a_{200})}{2} \cdot 200 \Rightarrow S_{200} = \frac{(1 + 399)}{2} \cdot 200 \Rightarrow \boxed{S_{500} = 40000}$$

49.

$$\begin{cases} a_2 + a_7 = \dfrac{73}{2} \\ a_3 + a_5 = \dfrac{65}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 6d = \dfrac{73}{2} \\ a_1 + 2d + a_1 + 4d = \dfrac{65}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 7d = \dfrac{73}{2} \\ 2a_1 + 6d = \dfrac{65}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{2a_1} + 7d = \dfrac{73}{2} \\ -\cancel{2a_1} - 6d = -\dfrac{65}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{d = 4}$$

$$2a_1 + 7d = \frac{73}{2} \Rightarrow 2a_1 = \frac{73}{2} - 28 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{17}{4}}$$

$$a_2 = \frac{33}{4},\ a_3 = \frac{49}{4},\ a_4 = \frac{65}{4},\ a_5 = \frac{81}{4},\ a_6 = \frac{97}{4},\ a_7 = \frac{113}{4}$$

50.

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = 9 \\ a_5 = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 6d = 9 \\ a_1 + 4d = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 6d = 9 \\ a_1 + 4d = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{2a_1} + 6d = 9 \\ -\cancel{2a_1} - 8d = -11 \end{cases}$$

$$-2d = -2 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$a_1 + 4d = \frac{11}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{11}{2} - 4 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{3}{2}}$$

$$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow a_6 = \frac{3}{2} + 5 \Rightarrow \boxed{a_6 = \frac{13}{2}}$$

◐**51.** De una progresión aritmética sabemos que el segundo término es 7 y el octavo es 47. Calcula el valor de la diferencia, el primer término y el término vigésimo primero.

●**52.** Consideremos la progresión aritmética siguiente:

$$-3, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}...$$

La suma de sus n primeros términos es 63. ¿De cuántos términos estamos hablando? Calcula el término noveno de dicha progresión.

●**53.** Calcula tres números que están en progresión aritmética sabiendo que su suma es 48 y la diferencia del tercero y el primero es dos veces el segundo.

●**54.** Calcula la suma de los múltiplos de 7 de tres cifras.

●**55.** Calcula la suma de los n primeros números impares.

●**56.** La suma de los 30 primeros términos de una progresión aritmética es 1 415 y el sexto término es $\frac{56}{3}$. Calcula la diferencia y el primer término.

○**57.** La siguiente progresión aritmética 3, 7, 11... consta de 50 términos. Calcula su suma.

●**58.** La suma de los términos que ocupan los lugares pares de una progresión aritmética es $\frac{413}{3}$ y la suma de los términos que ocupan los lugares impares es $\frac{472}{3}$.

Calcula el número de términos de la sucesión, sabiendo que este es un número impar. Calcula también el término central de la sucesión.

◐**59.** El primer término de una progresión aritmética es 0'2 y su último término es 4'4. Si la suma de sus n primeros términos es 34'5, con n finito, calcula cuánto vale el término a_7.

●**60.** De una progresión aritmética sabemos que la suma de a_3 y a_4 es 4 y que el término a_{11} excede en 2 unidades al término a_8. Calcula la suma de sus primeros 12 términos.

●**61.** Encuentra tres números en progresión aritmética sabiendo que su suma es 2 y su producto es $-\frac{8}{9}$.

◐**62.** Escribe todos los términos de una progresión aritmética formada por ocho términos, sabiendo que su suma es 21 y que el séptimo término es cinco veces el término cuarto.

◐**63.** Sabemos que la suma de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 9 y que su producto es –48. Calcula dichos números.

●**64.** Calcula la suma de los 20 primeros números impares, excepto los múltiplos de 5.

Progresiones geométricas

○**65.** Indica cuál de las siguientes progresiones es una progresión geométrica y, en este caso, indica su razón:

a) $\frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}, 2, 2\sqrt{10}, 20...$

b) $ab,\ 2a^2b,\ 4a^3b,\ 8a^4b...$

c) $8ax,\ 16a^2x,\ 24a^4x^2,\ 32a^5x^4...$

d) $5a,\ 10a^2b,\ 15a^2b,\ 20a^3b...$

○**66.** Dadas las siguientes progresiones geométricas calcula la razón de cada una de ellas:

a) 2, 6, 18, 54...

b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{32}...$

c) $\sqrt{2},\ 4,\ 8\sqrt{2},\ 32...$

d) $x,\ \sqrt{2},\ \frac{2}{x},\ \frac{2\sqrt{2}}{x^2}...$

○**67.** Calcula el décimo término de las progresiones del ejercicio anterior.

○**68.** Dada las siguientes progresiones geométricas, di cuál es el término a_{10} correspondiente:

a) 4, 12, 36, 108...

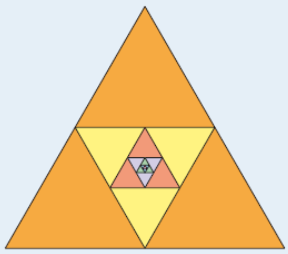
b) 3, 15, 75, 375, 1875...

c) $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}...$

○**69.** Escribe una progresión geométrica creciente y otra decreciente.

◐**70.** De una progresión geométrica conocemos $a_2 = 3$ y $a_4 = \frac{27}{4}$. Calcula a_6.

●**71.** En un triángulo equilátero de $3\sqrt[4]{3}$ cm de lado unimos los puntos medios de los lados obteniendo otro triángulo equilátero. Si repetimos la operación indefinidamente obtenemos una sucesión de triángulos encajados. Calcula la suma de las áreas de dichos triángulos.



○**72.** De una progresión geométrica sabemos que su razón es 25 y su quinto término es 12 500. Calcula el primer término de dicha sucesión.

◐**73.** De una progresión geométrica conocemos $a_3 = 12$ y $a_7 = 192$. Calcula su razón y su décimo término.

51.

$$\begin{cases} a_2 = 7 \Rightarrow a_1 + d = 7 \\ a_8 = 47 \Rightarrow a_1 + 7d = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - d = -7 \\ a_1 + 7d = 47 \end{cases}$$

$$6d = 40 \Rightarrow d = \frac{20}{3}$$

$$a_1 = 7 - d \Rightarrow a_1 = 7 - \frac{20}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_{21} = a_1 + 20d \Rightarrow a_{21} = \frac{1}{3} + \frac{400}{3} \Rightarrow a_{21} = \frac{401}{3}$$

52.

$$a_1 = -3 \ , \ d = 0 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{2}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_n = -3 + \frac{3}{2}(n-1) \Rightarrow \boxed{a_n = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}n}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow 63 = \frac{-3 - \frac{9}{2} + \frac{3}{2}n}{2} \cdot n \Rightarrow n^2 - 5n - 84 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -7 \end{cases}$$

La respuesta n = - 7 no tiene sentido.

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow a_9 = -3 + 8 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a_9 = 9}$$

Solución: estamos hablando de 9 términos, $\boxed{a_9 = 9}$

53.

Sean a_1 , $a_1 + d$, $a_1 + 2d$ los números buscados.

Como su suma es 48 $\Rightarrow$ $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 48 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 48 \Rightarrow a_1 + d = 16$

El tercero menos el primero es dos veces el segundo

$\Rightarrow (a_1 + 2d) - a_1 = 2(a_1 + d) \Rightarrow 2d = 2a_1 + 2d \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$, $\boxed{d = 16}$

Solución : Los números son : 0 , 16 , 32

54.

$a_1 = 105$, $a_1 = 7 \cdot 15$,

994 = 7 · 142 $\Rightarrow$ la progresión tiene 142 – 14 = 128 términos $\Rightarrow$ $\boxed{n = 128}$

El último término de la sucesión es $\boxed{a_{128} = 994}$

$$S_{128} = \frac{a_1 + a_{128}}{2} \cdot 128 = \frac{105 + 994}{2} \cdot 128 = 70336$$

55.

$a_1 = 1$, d = 2

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow \boxed{a_n = 2n - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n \Rightarrow \boxed{S_n = n^2}$$

56.

$$S_{30}=\frac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30\Rightarrow 1415=(a_1+a_{30})\cdot 15\Rightarrow a_1+a_{30}=\frac{283}{3}\Rightarrow a_1+a_1+29d=\frac{283}{3}\Rightarrow$$

$$2a_1+29d=\frac{283}{3}$$

$$a_6=\frac{56}{3}\Rightarrow a_1+5d=\frac{56}{3}\Rightarrow -2a_1-10d=-\frac{112}{3}$$

$$\begin{cases} \cancel{2a_1}+29d=\dfrac{283}{3} \\ -\cancel{2a_1}-10d=-\dfrac{112}{3} \end{cases}$$

$$19d=\frac{171}{3}\Rightarrow 19d=57\Rightarrow \boxed{d=3}$$

$$a_1+5d=\frac{56}{3}\Rightarrow a_1=\frac{56}{3}-15\Rightarrow \boxed{a_1=\frac{11}{3}}$$

57.

$a_1=3$, d = 4

$$a_{50}=a_1+49d\Rightarrow a_{50}=3+49\cdot 4\Rightarrow \boxed{a_{50}=199}$$

$$S_{50}=\frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50\Rightarrow S_{50}=\frac{3+199}{2}\cdot 50\Rightarrow \boxed{S_{50}=5050}$$

58.

Tenemos que $S_n=\frac{413}{3}+\frac{472}{3}\Rightarrow S_n=295$

Sea a_c el término central $\Rightarrow a_c=\frac{472}{3}-\frac{413}{3}\Rightarrow a_c=\frac{59}{3}$

$$a_c+a_c=a_1+a_n\Rightarrow 2\cdot\frac{59}{3}=a_1+a_n\Rightarrow a_1+a_n=\frac{118}{3}$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\Rightarrow 295=\frac{\frac{118}{3}}{2}\cdot n\Rightarrow \boxed{n=15}$$

Solución: La sucesión tiene 15 términos y el término central es $\frac{59}{3}$

59.

$a_1=0'2$, $a_n=4'4$

$$S_n=34'5\Rightarrow \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=34'5\Rightarrow \left(a_1+a_n\right)\cdot n=69\Rightarrow 4'6\cdot n=69\Rightarrow \boxed{n=15}$$

$$a_{15}=4'4\Rightarrow a_1+14d=4'4\Rightarrow 14d=4'4-a_1\Rightarrow d=\frac{4'2}{14}\Rightarrow \boxed{d=0'3}$$

$$a_7=a_1+6d\Rightarrow a_7=0'2+6\cdot 0'3\Rightarrow \boxed{a_7=2}$$

60.

$$\begin{cases} a_3 + a_4 = 4 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 3d = 4 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 4 \\ a_{11} = a_8 + 2 \Rightarrow a_1 + 10d - \left(a_1 + 7d\right) = 2 \Rightarrow 3d = 2 \Rightarrow \boxed{d = \frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$2a_1 + 5d = 4 \Rightarrow 2a_1 + \frac{10}{3} = 4 \Rightarrow 2a_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{1}{3}}$$

$$a_{12} = a_1 + 11d \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{3} + \frac{22}{3} \Rightarrow \boxed{a_{12} = \frac{23}{3}}$$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 \Rightarrow S_{12} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{23}{3}}{2} \cdot 12 \Rightarrow \boxed{S_{12} = 48}$$

61.

Sean los números buscados: $a_1 - d$, a_1 , $a_1 + d$

$$\sum = 2 \Rightarrow a_1 - d + a_1 + a_1 + d = 2 \Rightarrow 3a_1 = 2 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{2}{3}}$$

$$P = -\frac{8}{9} \Rightarrow \left(a_1 - d\right) \cdot a_1 \cdot \left(a_1 + d\right) = -\frac{8}{9} \Rightarrow \frac{4}{9} - d^2 = -\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow d^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \boxed{d = \pm\frac{4}{3}}$$

Solución: En cualquiera de los dos casos los números buscados son: $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2$

62.

$$\left.\begin{array}{l} S_8 = 21 \Rightarrow \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = 21 \Rightarrow a_1 + a_1 + 7d = \frac{21}{4} \Rightarrow 2a_1 + 7d = \frac{21}{4} \Rightarrow 8a_1 = 21 - 28d \\ a_7 = 5a_4 \Rightarrow a_1 + 6d = 5 \cdot \left(a_1 + 3d\right) \Rightarrow 4a_1 + 9d = 0 \Rightarrow 8a_1 = -18d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$21 - 28d = -18d \Rightarrow 21 = 10d \Rightarrow \boxed{d = \frac{21}{10}}$$

$$a_1 = -\frac{9}{4} \cdot \frac{21}{10} \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{189}{40}}$$

$$a_2 = -\frac{21}{8}, a_3 = -\frac{21}{40}, \ a_4 = \frac{63}{40}, a_5 = \frac{147}{40}, \ a_6 = \frac{231}{40}, \ a_7 = \frac{63}{8}, \ a_8 = \frac{399}{40}$$

63.

$$\sum = 9 \Rightarrow a_1 - d + a_1 + a_1 + d = 9 \Rightarrow 3a_1 = 9 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3}$$

$$P = -48 \Rightarrow \left(a_1 - d\right) \cdot a_1 \cdot \left(a_1 + d\right) = -48 \Rightarrow 9 - d^2 = -16 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow \boxed{d = \pm 5}$$

Solución: En cualquiera de los dos casos los números buscados son : - 2 , 3 , 8

64.

Tenemos que calcular la suma de los 20 primeros números impares S_{20}, menos los múltiplos de 5 comprendidos entre ellos. Si llamamos $\langle\dot{5}\rangle = \{5, 15, 25, 35\}$ a dichos números y $\sum\langle\dot{5}\rangle$ a su suma, tenemos que calcular S_{20} - $\sum\langle\dot{5}\rangle$

Para calcular S_{20} nos damos cuenta que d = 2 , $a_1 = 1$,

$a_{20} = a_1 + 19d \Rightarrow a_{20} = 1 + 19 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{a_{20} = 39}$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 \Rightarrow \boxed{S_{20} = 400}$$

$$\sum\langle\dot{5}\rangle = 5 + 15 + 25 + 35 \Rightarrow \boxed{\sum\langle\dot{5}\rangle = 80}$$

$$S_{20} - \sum\langle\dot{5}\rangle = 400 - 80 \Rightarrow \boxed{S_{20} - \sum\langle\dot{5}\rangle = 320}$$

65.

a) Sí es una progresión geométrica de razón r = $\sqrt{10}$

b) Si es una progresión geométrica de razón r = $2a$

c) No es una progresión geométrica

d) No es una progresión geométrica

66.

a) r = 3

b) r = $\frac{3}{4}$

c) r = $2\sqrt{2}$

d) r = $\frac{\sqrt{2}}{x}$

67.

a) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^9 \Rightarrow a_{10} = 39366$

b) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{3^8}{2^{17}}$

c) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = \sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^9 \Rightarrow a_{10} = 2^{14}$

d) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = x \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{16\sqrt{2}}{x^8}$

68.

a) r = 3 , $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 4 \cdot 3^9$

b) r = 5 , $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 3 \cdot 5^9$

c) r = $\frac{1}{2}$, $a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$

69.

Creciente: 2, 6, 18, 54,...

Decreciente : 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, . . .

70.

$a_2 = 3\ ,\ a_4 = \dfrac{27}{4}\ ,$

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = (a_1 \cdot r) \cdot r^2 \Rightarrow a_4 = a_2 \cdot r^2 \Rightarrow \dfrac{27}{4} = 3 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{3}{2}}$

$a_1 = \dfrac{a_2}{r} \Rightarrow a_1 = \dfrac{3}{3/2} \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^5 \Rightarrow \boxed{a_6 = \dfrac{3^5}{2^4}}$

Si $r = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = -2,\ a_6 = -\dfrac{3^5}{2^4}$

71.

Se trata de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es el área del triángulo inicial y la razón es $r = \dfrac{1}{4}$. Sea x la longitud del lado del triángulo.

$$A_1 = \frac{base.altura}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}}$$

La sucesión de las áreas es la siguiente: $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}, \dfrac{x^2\sqrt{3}}{16}, \dfrac{x^2\sqrt{3}}{64}, \ldots$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{3}\ \ cm^2$$

En nuestro caso: $S_\infty = \dfrac{\left(3\sqrt[4]{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 9\ cm^2$

72.

$r = 25\ ,\ a_5 = 12500$

$a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow a_1 = \dfrac{a_5}{r^4} \Rightarrow a_1 = \dfrac{12500}{25^4} \Rightarrow \boxed{a_1 = \dfrac{4}{125}}$

73.

$a_3 = 12\ ,\ a_7 = 192$

$$\begin{cases} a_7 = 192 \Rightarrow a_1 \cdot r^6 = 192 \\ a_3 = 12 \Rightarrow a_1 \cdot r^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot r^6}{a_1 \cdot r^2} = \frac{192}{12} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

$a_1 \cdot r^2 = 12 \Rightarrow a_1 = \dfrac{12}{r^2} \Rightarrow a_1 = \dfrac{12}{2^2} \Rightarrow \boxed{a_1 = 3}$

$a_{10} = a_1 \cdot r^9 \Rightarrow a_{10} = 3 \cdot 2^9 = 1536$

74. Calcula la suma de los términos que aparecen en las siguientes progresiones geométricas:

a) 3, 9, 27, 81, 243

b) $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16, 64

c) 0'25, 1'25, 6'25, 31'25

d) $x - 3y$, $2x - 6y$, $4x - 12y$, $8x - 24y$, $16x - 48y$

75. El noveno término de una progresión geométrica es 1 280 y su razón es 2. Calcula a_5 y la suma S_5 de dichos términos.

76. Calcula tres números que se encuentren en progresión geométrica sabiendo que su producto es 3 375 y su suma es 65.

77. La suma de los términos tercero y cuarto de una progresión geométrica es 180. Si sumamos los términos quinto y sexto resulta 45. Calcula la suma de los seis primeros términos de la progresión.

78. Queremos calcular el segundo término de una progresión geométrica de la que sabemos que su razón es 3 y su quinto término es 567.

79. Dada una progresión geométrica, sabemos que el término segundo es dos veces la razón y el cociente entre el cuarto término y el tercero es 3. Calcula la suma de los seis primeros términos de dicha progresión.

80. Calcula la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales periódicas puras utilizando sumas de progresiones geométricas:

a) $0'\widehat{2}$ b) $0'\widehat{18}$ c) $0'\widehat{27}$ d) $0'\widehat{36}$

81. Calcula la suma de las siguientes progresiones formadas por infinitos términos:

a) $27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

b) $0'07 + 0'007 + 0'0007 + 0'00007 + \ldots$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{16}{9} + \ldots$

d) $2'15 + 1'075 + 0'5375 + 0'26875 + \ldots$

82. Suma los términos de la siguiente progresión geométrica de infinitos términos:

$$\frac{125}{2},\ 25,\ 10,\ 4,\ \frac{8}{5}\ldots$$

83. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos utilizando sumas de progresiones geométricas:

a) $0'2\widehat{6}$ b) $1'1\widehat{6}$ c) $0'41\widehat{6}$ d) $0'22\widehat{72}$

84. Calcula la fracción generatriz de $6'\widehat{2}$ y de $2'5\widehat{4}$ utilizando sumas de progresiones geométricas.

85. Calcula la fracción generatriz de 5'2121212121... utilizando sumas de progresiones geométricas.

86. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 256. Calcula el octavo término sabiendo que el segundo término es 64.

87. Interpola entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{9}{4}x^3$ dos medios geométricos proporcionales.

88. Calcula la suma de las cinco primeras potencias de 3.

PROBLEMAS

89. Calcula tres números que se encuentren en progresión geométrica, sabiendo que su suma es 84 y su producto es 13 824.

90. Sean tres números tales que el segundo es 14 unidades mayor que el primero y el tercero es 42 unidades mayor que el segundo. Calcula dichos números sabiendo que se encuentran en progresión geométrica.

91. Un chico cuenta una historia a tres amigos, los cuales a los cinco minutos ya se lo han contado a otros 3 amigos cada uno. Si se repite la misma operación indefinidamente, ¿cuánto tiempo tardarán en saber el secreto en un instituto de 1 093 alumnos?

134 UNIDAD 7

74.

a) $r = 3$, $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{243 \cdot 3 - 3}{3-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{243 \cdot 3 - 3}{3-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = 363}$

b) $r = 4$, $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{64 \cdot 4 - \frac{1}{4}}{4-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = \dfrac{341}{4}}$

c) r = 5 , $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{31'25 \cdot 5 - 0'25}{5-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = 39}$

d) r = 2 , $S_5 = \dfrac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \dfrac{(16x - 48y) \cdot 2 - (x - 3y)}{2-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = 31x - 93y}$

75.

r = 2

$$a_9 = 1280 \Rightarrow a_1 \cdot r^8 = 1280 \Rightarrow a_1 = \frac{1280}{r^8} \Rightarrow a_1 = \frac{1280}{2^8} \Rightarrow \boxed{a_1 = 5}$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow a_5 = 5 \cdot 2^4 \Rightarrow \boxed{a_5 = 80}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{80 \cdot 2 - 5}{2-1} \Rightarrow \boxed{S_5 = 155}$$

76.

Sean $\dfrac{a_1}{r}, a_1, a_1 \cdot r$ los números buscados

$$P = 3375 \Rightarrow a_1^3 = 3375 \Rightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$S = 65 \Rightarrow \frac{a_1}{r} + a_1 + a_1 \cdot r = 65 \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = 65r \Rightarrow 15 + 15r + 15r^2 - 65r = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15r^2 - 50r + 15 = 0 \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{3} \\ r = 3 \end{cases}$$

Solución: Los números buscados son: 5 , 15 , 45

77.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 + a_4 = 180 \Rightarrow a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 = 180 \Rightarrow a_1 r^2 (1 + r) = 180 \\ a_5 + a_6 = 45 \Rightarrow a_1 \cdot r^4 + a_1 \cdot r^5 = 45 \Rightarrow a_1 r^4 (1 + r) = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{a_1} r^2 \cancel{(1+r)}}{\cancel{a_1} r^4 \cancel{(1+r)}} = \frac{180}{45} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = 4 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos $\boxed{a_1 = 480}$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow a_6 = \frac{480}{2^5} \Rightarrow \boxed{a_6 = 15}$$

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_6 = \frac{15 \cdot \frac{1}{2} - 480}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow \boxed{S_6 = 945}$$

78.

r = 3

$$a_5 = 567 \Rightarrow a_1 \cdot r^4 = 567 \Rightarrow a_1 = \frac{567}{r^4} \Rightarrow a_1 = \frac{567}{81} \Rightarrow \boxed{a_1 = 7}$$

Solución : $a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow \boxed{a_2 = 21}$

79.

$$a_2 = 2r \Rightarrow a_1 \cdot r = 2r \Rightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = 3 \Rightarrow \frac{a_1 \cdot r^3}{a_1 \cdot r^2} = 3 \Rightarrow r = 3$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot 3^5 \Rightarrow \boxed{a_6 = 486}$$

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_6 = \frac{486 \cdot 3 - 2}{3-1} \Rightarrow \boxed{S_6 = 728}$$

80.

a)

$$N = 0'222\ldots = 0'2 + 0'02 + 0'002 + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{2}{10}$, $r = \frac{1}{10}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{9}}$$

b)

$$N = 0'1818\ldots = 0'18 + 0'0018 + \ldots = \frac{18}{100} + \frac{18}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{18}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{18}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{18}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{18}{99} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{11}}$$

c)

$$N = 0'2727\ldots = 0'27 + 0'0027 + \ldots = \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{27}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{27}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{27}{99} \Rightarrow \boxed{N = \frac{3}{11}}$$

d)

$$N = 0'3636\ldots = 0'36 + 0'0036 + \ldots = \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{36}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{36}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{36}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{36}{99} \Rightarrow \boxed{N = \frac{4}{11}}$$

81.

a) $a_1 = 27$, $r = \frac{1}{3}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{81}{2}}$$

b) $a_1 = \frac{7}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{100}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{7}{99}}$$

c) $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{2}{\sqrt{3}}} \Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{3}{2\left(\sqrt{3}-2\right)}}$$

d) $a_1 = 2'15$, $r = \frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{2'15}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = \frac{2'15}{0'5} \Rightarrow \boxed{S_\infty = 4'3}$$

82.

$r = \frac{2}{5}$, $a_1 = \frac{125}{2}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{125}{2}}{1-\frac{2}{5}} \Rightarrow\Rightarrow S_\infty = \frac{\frac{125}{2}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{625}{6}}$$

83.

a) $N = 0'2666\ldots = 0'2 + 0'06 + 0'006 + \ldots = 0'2 + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots$

Se trata de la suma de 0’2 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{6}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{1}{15}}$$

$$N = 0'2 + \frac{1}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3+1}{15} \Rightarrow \boxed{N = \frac{4}{15}}$$

b) $N = 1'1666\ldots = 1'1 + 0'06 + 0'006 + \ldots = 1'1 + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots$

Se trata de la suma de 1’1 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{6}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{1}{15}}$$

$$N = 1'1 + \frac{1}{15} = \frac{11}{10} + \frac{1}{15} = \frac{33+2}{30} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6} \qquad \boxed{N = \frac{7}{6}}$$

c) $N = 0'41666\ldots = 0'41 + 0'006 + 0'0006 + \ldots = 0'41 + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \ldots$

Se trata de la suma de 0’41 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{6}{1000}$, $r = \frac{1}{10}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{6}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{150} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{1}{150}}$$

$$N = 0'41 + \frac{1}{150} = \frac{41}{100} + \frac{1}{150} = \frac{125}{300} \Rightarrow \boxed{N = \frac{5}{12}}$$

d) $N = 0'227272\ldots = 0'22 + 0'0072 + 0'000072 + \ldots = 0'22 + \frac{72}{10000} + \frac{72}{1000000} + \ldots$ Se trata de la suma de 0’22 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{72}{10000}$, $r = \frac{1}{100}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{72}{10000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{72}{10000}}{\frac{99}{100}} = \frac{2}{275} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{2}{275}}$$

$$N = 0'22 + \frac{2}{275} = \frac{22}{100} + \frac{2}{275} \Rightarrow \boxed{N = \frac{5}{22}}$$

84.

a)

$$6'\widehat{2} = 6'222\ldots = 6 + 0'222\ldots$$

$$N = 0'222\ldots = 0'2 + 0'02 + 0'002 + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{2}{10}$, $r = \frac{1}{10}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{9}}$$

$$6'\widehat{2} = 6 + \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{6'\widehat{2} = \frac{56}{9}}$$

b)

$$2'5\widehat{4} = 2'5444\ldots = 2'5 + 0'0444\ldots$$

$$N = 0'0444\ldots = 0'04 + 0'004 + \ldots = \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{4}{100}$, $r = \frac{1}{10}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{45} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2}{45}}$$

$$2'5\widehat{4} = 2'5 + \frac{2}{45} = \frac{25}{10} + \frac{2}{45} \Rightarrow \boxed{2'5\widehat{4} = \frac{229}{90}}$$

85.

$$5'212121\ldots. = 5 + 0'21 + 0'0021 + \cdots$$

$$N = 0'2121\ldots = 0'21 + 0'0021 + \ldots = \frac{21}{100} + \frac{21}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{21}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$N = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{21}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{21}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{21}{99} \Rightarrow \boxed{N = \frac{7}{33}}$$

$$5'212121\ldots. = 5 + 0'21 + 0'0021 + \cdots = 5 + \frac{7}{33} = \frac{172}{33}$$

86.

$$a_2 = 64 \Rightarrow a_1 \cdot r = 64 \Rightarrow a_1 = \frac{64}{r}$$

$$S_\infty = 256 \Rightarrow \frac{a_1}{1-r} = 256 \Rightarrow \frac{64}{r} = 256(1-r) \Rightarrow 256r^2 - 256r + 64 = 0 \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 = \frac{64}{r} \Rightarrow \boxed{a_1 = 128}$$

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 \Rightarrow a_8 = \frac{128}{2^7} \Rightarrow \boxed{a_8 = 1}$$

87.

Construimos la siguiente progresión: $\frac{2}{3}$, a_2 , a_3 , $\frac{9}{4}x^3$

$$n = 4 \text{ , } a_1 = \frac{2}{3}\text{, } a_4 = \frac{9}{4}x^3$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{a_4}{a_1}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\frac{9}{4}x^3}{\frac{2}{3}}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{27x^3}{8}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{3x}{2}}$$

Solución: los números buscados son: x , $\frac{3}{2}x^2$

88.

Se trata de una progresión geométrica en la que $r = 3$, $a_1 = 3$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow a_5 = 3 \cdot 3^4 \Rightarrow a_5 = 243$$

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_5 = \frac{243 \cdot 3 - 3}{3-1} = 363$$

89.

$$P = 13824 \Rightarrow \frac{a_1}{r} \cdot a_1 \cdot a_1 r = 13824 \Rightarrow a_1^3 = 13824 \Rightarrow \boxed{a_1 = 24}$$

$$S = 84 \Rightarrow \frac{a_1}{r} + a_1 + a_1 r = 84 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución: los números buscados son: 12, 24, 48

90.

Sean a_1, a_2 , a_3 los números buscados.

$$\left.\begin{cases} a_2 = 14 + a_1 \Rightarrow a_2 \cdot r = 14 \cdot r + a_1 \cdot r \\ a_3 = 42 + a_2 \Rightarrow a_2 \cdot r = 42 + a_2 \end{cases}\right. \Rightarrow 14r + a_1 r = 42 + a_1 r \Rightarrow 14r = 42 \Rightarrow \boxed{r = 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 14 + a_1 \\ a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow a_2 = 3a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 14 + a_1 = 3a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 7}$$

Solución: los números buscados son: 7 , 21 , 63

91.

Se trata de una progresión geométrica de n términos en la que :

$a_1 = 1 = 3^0$, r = 3

La progresión es: $1, 3, 3^2, 3^3 ...$

La suma de los términos de la progresión es 1093.

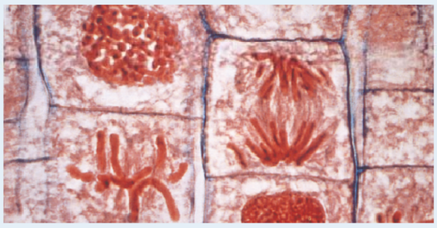
$$S_n = 1093 \Rightarrow \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = 1093 \Rightarrow \frac{a_n \cdot 3 - 1}{3-1} = 1093$$

$$\Rightarrow a_n = 729 \Rightarrow a_1 \cdot r^n = 729 \Rightarrow 3^n = 3^6 \Rightarrow \boxed{n=6}$$

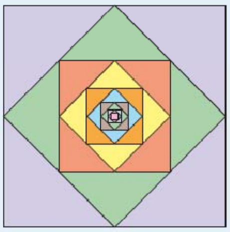
La progresión consta de los términos: $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$

Solución: Al cabo de 5 ·6 = 30 minutos saben la historia los 1093 alumnos del instituto.

92. Una célula se duplica al cabo de 5 min, volviéndose a duplicar cada una de las células resultantes cada 5 min y así indefinidamente. ¿Cuánto tiempo se tardará en obtener 2 048 células?



93. Dado un cuadrado de $\sqrt{2}$ cm de lado, inscribimos dentro de él otro cuadrado formado al unir los puntos medios de sus lados. A continuación unimos los puntos medios del segundo cuadrado, construyendo así un tercer cuadrado. Repetimos la operación indefinidamente. Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados así construidos.



94. Calcula la longitud de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que su suma es 48 y que se encuentran en progresión aritmética.

95. En un campamento de verano hay 7 niños. Al año siguiente acuden al mismo campamento 10 niños más y cada año acuden 10 niños nuevos.
En el campamento de al lado sólo hay 2 niños, pero el segundo año llegan 4 niños nuevos. El tercer año se matriculan los mismos niños que había el año anterior y se incorporan niños nuevos, exactamente el doble de los que se incorporaron nuevos el año anterior, y así sucesivamente, de tal forma que cada año los niños nuevos son el doble de los que se incorporaron nuevos el año anterior. Calcula cuántos niños hay en cada campamento al cabo de 9 años.

96. Un señor hace cuatro apuestas en las carreras de caballos. En la primera apuesta gana 100 €. Si en cada apuesta duplica el valor de la anterior y gana consecutivamente las cuatro primeras apuestas ¿cuánto gana en la cuarta apuesta? Si en la quinta apuesta juega todas las ganancias anteriores y las pierde, ¿cuánto perdió al final?

92.

Se trata de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$, r = 2,

$$a_n = 2048 \Rightarrow a_1 \cdot r^n = 2048 \Rightarrow 2^n = 2048 \Rightarrow 2^n = 2^{11} \Rightarrow n = 11$$

En la duplicación número 11, se obtienen las 2048 células. Como cada duplicación tarda 5 minutos, el tiempo empleado es 5·11= 55 minutos

93.

Se trata de la suma de las áreas de los infinitos cuadrados que se forman de la manera indicada.

Sea l_1 el lado del cuadrado inicial y A_1 el área correspondiente; l_2 el lado del segundo cuadrado y A_2 el área correspondiente, y así sucesivamente.
La progresión de las áreas es la siguiente:

$$A_1 = l_1^2$$
$$A_2 = l_2^2 = \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} l_1^2$$
$$A_3 = l_3^2 = \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} l_2^2 = \frac{1}{4} l_1^2 = \frac{1}{2^2} l_1^2$$
$$A_4 = l_4^2 = \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} l_3^2 = \frac{1}{8} l_1^2 = \frac{1}{2^3} l_1^2$$
…………………………………………………….
$$A_n = \frac{1}{2^{n-1}} l_1^2$$

Las áreas forman una progresión geométrica en la que $a_1 = l_1^2$, $r = \frac{1}{2}$

Su suma es: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{l_1^2}{1-\frac{1}{2}} = 2l_1^2$

En nuestro caso, $S_\infty = 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{S_\infty = 4 \quad cm^2}$

94.
Sean $a-d$, a, $a+d$ las longitudes de los lados del triángulo rectángulo
Por el Teorema de Pitágoras sabemos que:

$$\left(a+d\right)^2 = \left(a-d\right)^2 + a^2 \Rightarrow \boxed{d = \frac{a}{4}}$$
$$S = 48 \Rightarrow 3a = 48 \Rightarrow \boxed{a = 16} \Rightarrow d = 4$$

Solución: las medidas de los dos catetos son 12 cm y 16 cm y , la hipotenusa mide 20 cm

95.
Leyendo cuidadosamente el enunciado tenemos:
"En un campamento de verano hay 7 niños. Al año siguiente acuden al mismo campamento 10 niños más y cada año acuden 10 niños nuevos.

En este caso tenemos una progresión aritmética de 9 términos, en la que $a_1 = 7$, d = 10, n = 9
Tenemos que calcular el término a_9.

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow a_9 = 7 + 8\cdot 10 \Rightarrow \boxed{a_9 = 87}$$

La progresión es la siguiente : 7 , 17 , 27 , 37 , ... , 87

En el campamento de al lado sólo hay 2 niños, pero al cabo de un año llegan 4 nuevos niños. Al año siguiente se matriculan en el campamento los mismos niños que había el año anterior a los que además se incorporan el doble de los que se incorporaron nuevos el año anterior, y así sucesivamente. Calcula cuántos niños hay en cada campamento al cabo de 9 años."

En el primer año son $a_1 = 2$ niños

En el segundo año son $a_2 = a_1 + 2^2 = 2 + 2^2$ niños

En el tercer año son $a_3 = a_2 + 2^3 = a_3 = 2 + 2^2 + 2^3$ niños

....

En el noveno año son $a_9 = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$ niños

$$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 = \frac{2^9 \cdot 2 - 2}{2 - 1} = 1022 \Rightarrow \boxed{a_9 = 1022}$$

Solución: Al cabo de nueve años en el primer campamento hay 87 niños y en el segundo campamento 1022 niños.

96.

Apuesta	Gana	Pierde
Primera	100 €	**0**
Segunda	200 €	**0**
Tercera	400 €	**0**
Cuarta	**800 €**	**0**
Quinta	**0 €**	**800 + 400 + 200 + 100 =** 1500 €

AUTOEVALUACIÓN PAG. 135

AUTOEVALUACIÓN

1. De una progresión aritmética se sabe que $a_5 = 2$ y $a_8 = 8$. Con estos datos calcula a_{51}.

2. Interpola cinco medios aritméticos entre 3 y 27.

3. Una persona compra un coche a plazos. El primer mes paga 360 €, el segundo mes 390 €, el tercer mes 420 € y así sucesivamente. Si el último mes pagó 930 €, ¿cuántos meses estuvo pagando el coche?

4. Un niño que está jugando en la playa ha dispuesto en línea recta seis conchas separadas entre sí 2 m. Intenta llenar de agua las seis conchas cogiendo el agua del mar y llevándola entre sus manos. Si en cada viaje solo puede coger el agua necesaria para llenar una concha y suponiendo que no se le caiga, ¿cuántos metros tendrá que caminar si la primera concha está a 15 m de la orilla? Supón que el niño inicia sus viajes desde la orilla.

5. Calcula la suma de los n primeros números pares.

6. De una progresión geométrica se conocen $a_2 = 39$ y $a_4 = 6591$. Calcula a_1, a_3 y la suma de los cuatro términos de la progresión.

7. Interpola tres medios geométricos entre $\frac{2}{5}$ y 10.

8. El volumen de un prisma de base rectangular es 1 728 m³. Calcula la medida de sus aristas sabiendo que están en progresión geométrica y que su suma vale 63 m.

9. Calcula la fracción generatriz de $3,\widehat{46}$ utilizando sumas de progresiones geométricas.

10. Un niño decide coleccionar canicas y su padre le regala un día 1 canica, al día siguiente 3 canicas y el siguiente día le da 9 canicas, y así sucesivamente ¿Cuántas canicas tendrá el niño al cabo de 10 días?

Sucesiones y progresiones 135

1.

$$\left.\begin{aligned} a_5 = 2 \Rightarrow a_1 + 4d = 2 \\ a_8 = 8 \Rightarrow a_1 + 7d = 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3d = 6 \Rightarrow \boxed{d = 2} \Rightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$a_{51} = a_1 + 50d \Rightarrow a_{51} = -6 + 50 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{a_{51} = 94}$$

2.
Construimos la siguiente progresión: $3 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 , 27$

$n = 7 , \; a_1 = 3 , \; a_7 = 27$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{27-3}{7-1} \Rightarrow d = 4$$

Solución: Los números buscados son: 7 , 11 , 15 , 19 , 23

3.
Se trata de una progresión aritmética: 360, 390, 420 ..., 930 en la que $a_1 = 360$, d = 30 .Tenemos que calcular el número n de términos.

$$a_n = 930 \Rightarrow a_1 + (n-1)\cdot d = 930 \Rightarrow 360 + (n-1)\cdot 30 = 930 \Rightarrow \boxed{n = 20}$$

Solución: Tardó 20 meses en pagar el coche.

4.
Para llenar de agua las cinco primeras conchas, todos los trayectos que hace son de ida y vuelta.
Sean a_1 el trayecto de ida desde la orilla a la 1ª concha y a_5 el trayecto desde la orilla a la 5ª concha.

$$a_1 = 15 \text{ m} \;\text{ y }\; a_5 = 15 + 2\cdot 4 = 23 \text{ m}$$

Como el trayecto es de ida y vuelta:

$$S_5 = 2\cdot\frac{(a_1 + a_5)\cdot 5}{2} \Rightarrow S_5 = (a_1 + a_5)\cdot 5 \Rightarrow S_5 = \left[15 + (15 + 2\cdot 4)\right]\cdot 5 \Rightarrow S_5 = 190$$

Para llenar la sexta concha sólo hace el camino de ida (desde la orilla hasta la 6ª concha)

$$a_6 = 15 + 2\cdot 5 = 25 \text{ m}$$

Solución: Recorre 190 + 25 =215 m

5.
Se trata de calcular la suma de los n primeros números pares:

$$S_n = 2 + 4 + 6 + \dots$$

Tenemos una progresión aritmética en la que $a_1 = 2$, d = 2 ,

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)\cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \Rightarrow S_n = \frac{2 + 2n}{2}\cdot n \Rightarrow S_n = \frac{2\cdot(1+n)}{2}\cdot n \Rightarrow \boxed{S_n = n\cdot(n+1)}$$

6.

$$\left.\begin{array}{l} a_1\cdot r = 39 \\ a_1\cdot r^3 = 6591 \end{array}\right\} \Rightarrow r^2 = 169 \Rightarrow r = 13$$

Si $r = 13 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow a_3 = a_1\cdot r^2 \Rightarrow a_3 = 3\cdot 13^2 \Rightarrow a_3 = 507$

$$S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2}\cdot 4 \Rightarrow S_4 = \frac{3 + 6591}{2}\cdot 4 \Rightarrow \boxed{S_4 = 13188}$$

7.

Construimos la siguiente progresión: $\frac{2}{5}$, a_2 , a_3 , a_4 , 10

$n = 5$, $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_5 = 10$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{a_5}{a_1}} = \sqrt[4]{25} \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

Solución: los números buscados son: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 2 , $2\sqrt{5}$

8.

Sean $\frac{a}{r}, a, ar$ las medidas de las aristas del prisma.

$$\text{V} = 1728 \Rightarrow \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 1728 \Rightarrow a^3 = 1728 \Rightarrow a = 12$$

$$S = 63 \Rightarrow \frac{a}{r} + a + ar = 63 \Rightarrow a + ar + ar^2 = 63r \Rightarrow 12r^2 - 51r + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$4r^2 - 17r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} \Rightarrow r = 4$$

Solución: Las medidas son 3 m , 12 m y 48 m

Si consideramos la solución $r = \frac{1}{4}$ la solución sería la misma.

9.

$$N = 3'4646\ldots = 3 + 0'46 + 0'0046 + \ldots = 3 + \frac{46}{100} + \frac{46}{10000} + \ldots$$

Se trata de la suma de 3 y de los miembros de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1 = \frac{46}{100}$, $r = \frac{1}{100}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{46}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{46}{100}}{\frac{99}{100}} \Rightarrow \boxed{S_\infty = \frac{46}{99}}$$

$$N = 3 + \frac{46}{99} = \frac{343}{99}$$

10.

Se trata de la suma de los miembros de la siguiente progresión geométrica:

$$1, 3, 3^2, \ldots, 3^9$$

Los datos son: $a_1 = 1$, $a_{10} = 3^9$, r = 3

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{3^9 \cdot 3 - 1}{3 - 1} \Rightarrow \boxed{S_{10} = 29524}$$

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 137

Olimpiada matemática

1. Demuestra que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

1. Bastará probar que a partir de un cuadrado perfecto podemos construir otro. Sea la progresión : $a^2, a^2+d, a^2+2d, \ldots, a^2+kd\ldots$

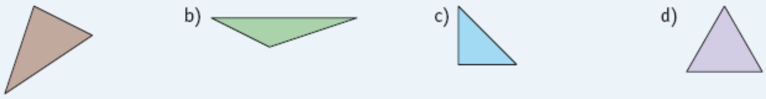
Como $(a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + d\cdot(2a+d)$, bastará tomar $k = 2a + d$ para obtener otro cuadrado en la progresión.

ACTIVIDADES PAG. 140

ACTIVIDADES

1. Indica qué tipo de triángulos son los siguientes:

a) b) c) d)



2. ¿Cuánto mide el ángulo que falta en los siguientes triángulos?

a) $\hat{A} = 80°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = ?$

b) $\hat{A} = 88°$, $\hat{B} = ?$, $\hat{C} = 95°$

c) $\hat{A} = 34°$, $\hat{B} = ?$, $\hat{C} = 81°$

d) $\hat{A} = ?$, $\hat{B} = 44'2°$, $\hat{C} = 66'2°$

1.
a) Acutángulo , escaleno
b) Obtusángulo , escaleno
c) Rectángulo , isósceles
d) Acutángulo, equilátero

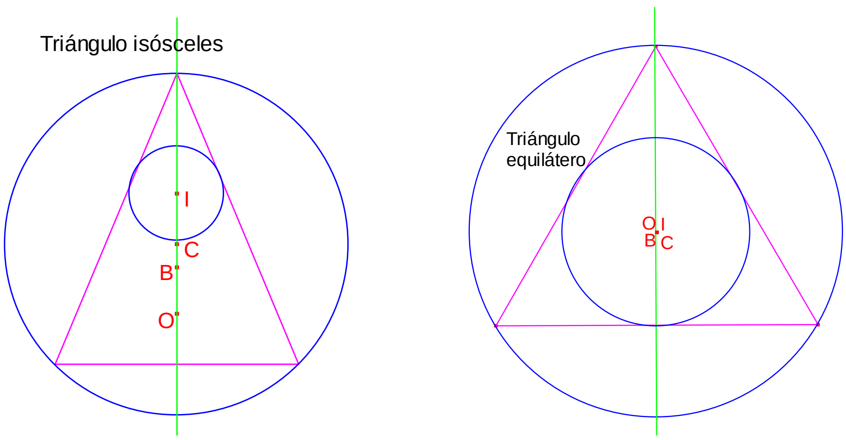
2.
a) 40 º
b) Este triángulo no existe
c) 65º
d) 69’6º

ACTIVIDADES PAG. 141

ACTIVIDADES

3. Calcula el ortocentro, el incentro, el baricentro y el ortocentro en un triángulo isósceles. Repite el ejercicio en un triángulo equilátero.

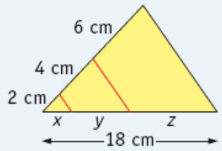
3.



Como puedes observar, en el triángulo isósceles todos los puntos notables se encuentran en la misma altura y la recta de Euler coincide con dicha altura.
En el triángulo equilátero, todos los puntos notables coinciden.

ACTIVIDADES PAG. 142

4. Calcula los valores *x*, *y*, *z* de la figura siguiente:



4.

$$\frac{2}{x}=\frac{12}{18}\Rightarrow\boxed{x=3}\ ,\ \frac{4}{y}=\frac{12}{18}\Rightarrow\boxed{y=6}\ ,\ \frac{6}{z}=\frac{12}{18}\Rightarrow\boxed{z=9}$$

ACTIVIDADES PAG. 143

5. Comprueba si son semejantes los siguientes triángulos:

6. Calcula la medida de los ángulos del triángulo $\widehat{A'B'C'}$ sabiendo que es semejante a un triángulo $\widehat{ABC}$ cuyos ángulos miden 45°, 60° y 75°.

5.
No son semejantes porque los lados no son proporcionales.

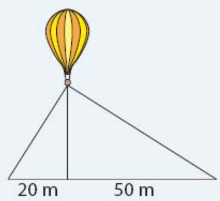
6.
Los ángulos medirán lo mismo: 45º, 60º y 75 º

ACTIVIDADES PAG. 145

7. En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos partes de 2 cm y 8 cm. ¿Qué longitud tiene la altura?

8. Un poste de telégrafo está sostenido por dos cables sujetos al suelo que se encuentran a 8 metros de distancia del mismo. ¿Qué altura tiene el poste?

9. Calcular la altura a la que ha subido un globo aerostático sabiendo que está sujeto a tierra por dos cables, uno de los cuales está sujeto a la tierra a 20 metros de la vertical del globo y el otro está sujeto a tierra a 50 metros de la misma vertical.



7.
Sea *x* la longitud de la altura.

$$x^2 = 2 \cdot 8 \Rightarrow x = 4\ cm$$

8.
Sea *x* la altura del poste.

$$x^2 = 8 \cdot 8 \Rightarrow x = 8\ m$$

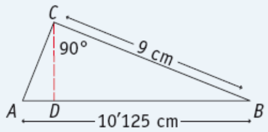
9.

Aplicación del Teorema de la altura: altura$^2 = 20 \cdot 50 \Rightarrow \boxed{altura = 10\sqrt{10} \cong\ 31.62 \text{ m}}$

ACTIVIDADES PAG. 146

ACTIVIDADES

10. Calcula lo que mide la proyección sobre la hipotenusa del cateto dado. El lado *BC* mide 9 metros, y la hipotenusa mide 10,125 metros.



10.

Aplicamos el teorema del cateto: $BC^2 = BD \cdot AB \Rightarrow 9^2 = BD \cdot 10'125$

$$BD = \frac{81}{10'125} \Rightarrow BD = 8\ cm$$

ACTIVIDADES PAG. 147

ACTIVIDADES

11. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 17 cm y uno de sus catetos 8 cm, ¿cuánto mide el otro cateto?

12. Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de sus catetos mide 6 cm y el otro cateto mide 8 cm.

13. Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que sus catetos miden 10 cm y 24 cm.

11.

Sea x la medida del cateto en centímetros $\Rightarrow 17^2 = 8^2 + x^2 \Rightarrow \boxed{x = 15}$

Solución: El otro cateto medirá 15 cm

12.

Sea x la medida de la hipotenusa en centímetros $\Rightarrow x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \boxed{x = 10}$

Solución: La hipotenusa mide 10 cm

13.

$$hipotenusa^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow hipotenusa^2 = 100 + 576\ \Rightarrow hipotenusa = 26\ cm$$

ACTIVIDADES PAG. 148

ACTIVIDADES

14. Indica qué tipo de cuadriláteros son los siguientes:

14.

a) Rombo , b) Trapezoide , c) Trapecio isósceles , d) Rectángulo

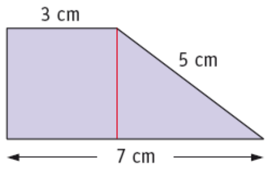
ACTIVIDADES PAG. 149

ACTIVIDADES

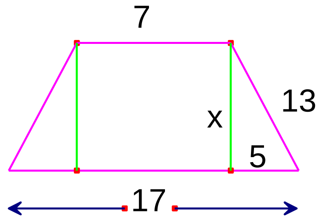
15. Calcula el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 7 y 17 cm y sus lados no paralelos miden 13 cm.

16. Calcula el área del trapecio de la figura del margen, aplicando directamente la fórmula y descomponiéndola como suma del área del cuadrado y del triángulo.

17. Calcula el área de un hexágono regular de 10 cm de lado.



15.



$$13^2 = x^2 + 5^2 \Rightarrow \boxed{x = 12}$$

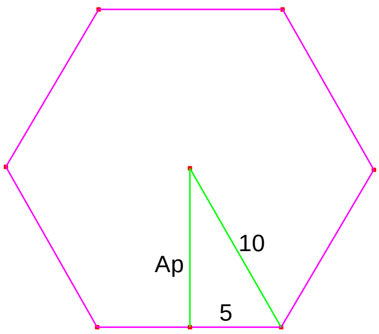
$$A = \frac{(B+b)\cdot altura}{2} = \frac{(17+7)\cdot 12}{2} \Rightarrow \boxed{A = 144cm^2}$$

16.

Aplicando la fórmula : $A = \frac{(B+b)\cdot altura}{2} = \frac{(7+3)\cdot 3}{2} \Rightarrow \boxed{A = 15cm^2}$

Suma (área del cuadrado + área triángulo) = $3 \cdot 3 + \frac{4\cdot 3}{2} \Rightarrow \boxed{A = 15 \text{ cm}^2}$

17.



$$10^2 = 5^2 + Ap^2 \Rightarrow Ap = 5\sqrt{3}$$

$$Área = \frac{Perímetro \cdot Apotema}{2} \Rightarrow Área = \frac{10\cdot 6\cdot 5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{Área = 150\sqrt{3}\, cm^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Área= 259'81 cm}^2}$$

ACTIVIDADES PAG. 150

ACTIVIDADES

18. Calcula la longitud del arco de 30° de una circunferencia de 5 m de radio.

19. Calcula el área de un sector circular de 60° en un círculo de 12 m de radio.

18.

$$L=\frac{2\cdot\pi\cdot r\cdot n}{360}\Rightarrow L=\frac{2\cdot\pi\cdot 5\cdot 30}{360}\Rightarrow \boxed{L=\frac{5}{6}\pi\ m}\Rightarrow \boxed{L\cong 2'62\ m}$$

19.

$$A=\frac{\pi\cdot r^2\cdot n}{360}\Rightarrow A=\frac{\pi\cdot 12^2\cdot 60}{360}\Rightarrow \boxed{A=24\pi\ m^2}\Rightarrow \boxed{A\cong 75'4\ m^2}$$

ACTIVIDADES PAG. 151

ACTIVIDADES

20. Calcula el área de una corona circular formada por dos circunferencias de 4 y 12 m de radio.

20.

$$A=\pi\left(12^2-4^2\right)\Rightarrow \boxed{A\cong 128\pi\ m^2}\Rightarrow \boxed{A=402'12\ m^2}$$

ACTIVIDADES PAG. 152

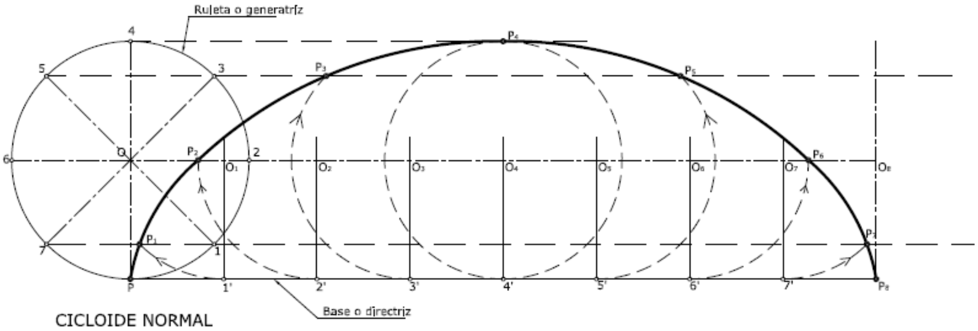
ACTIVIDADES

21. Dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano descrito por un punto *P* de una circunferencia de radio *R* cuando rueda sin resbalar sobre la recta *r*. La figura obtenida se denomina **cicloide.**

22. Realiza una gráfica que ilustre el lugar geométrico de los puntos del plano descrito por un punto *P* de una circunferencia de radio $\frac{R}{4}$ cuando rueda interiormente sin resbalar sobre una circunferencia cuyo radio es *R*. El lugar así descrito se denomina **hipocicloide de cuatro puntas.**

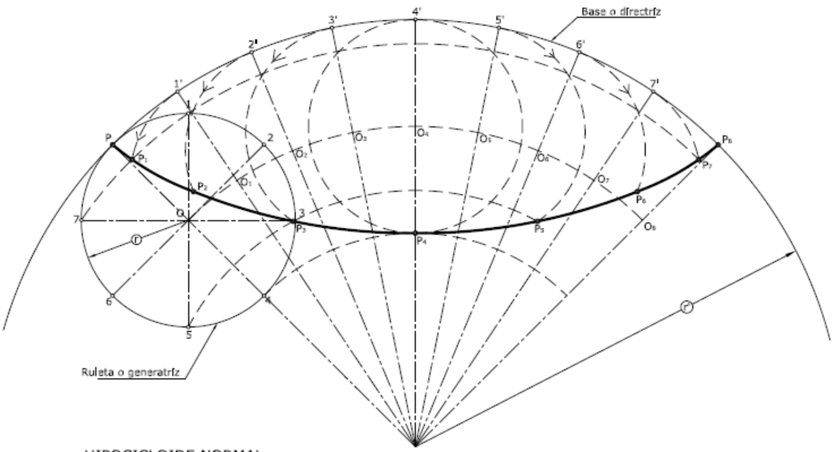
23. Realiza una gráfica que ilustre el lugar geométrico de los puntos del plano descrito por un punto *P* de una circunferencia de radio *R* a medida que rueda por fuera de una circunferencia fija de radio *R*. El lugar así descrito se denomina **cardioide.**

21.



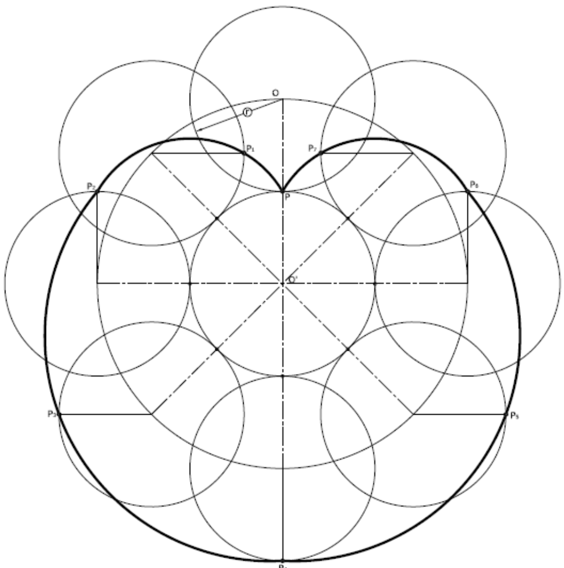
CICLOIDE NORMAL

22.



HIPOCICLOIDE NORMAL

23.



CARDIODE

Desafío matemático

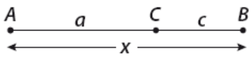
El número de oro

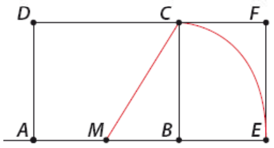
Consideremos un segmento $\overline{AB}$ de medida x arbitraria. Buscamos un punto C que verifique $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Si llamamos a = distancia (A, C), c = distancia (C, B), x = distancia (A, B), la proporción anterior se puede escribir $\frac{a+c}{a} = \frac{a}{c}$. Esta razón se llama ϕ (Fi), también conocida como razón áurea $\frac{a}{c} = \phi$. Dividiendo la ecuación por c obtengo $\frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{c}} = \frac{\frac{a}{c}}{1}$. De donde se deduce la siguiente ecuación $\frac{\phi+1}{\phi} = \phi$.

Dado un rectángulo, su lado menor mide x cm. Queremos calcular la longitud del lado mayor, de tal forma que la relación entre ambos lados sea áurea. Para ello construimos un cuadrado $ABCE$ cuyo lado coincide con la longitud del segmento menor del rectángulo y llamamos r a la recta que pasa por los puntos A y B. Trazamos un arco de circunferencia con centro en el punto medio M del lado $\overline{AB}$ y radio MC. La intersección de este arco con la recta r nos proporciona el punto E. El segmento $\overline{AE}$ es el lado mayor de este rectángulo, denominado rectángulo áureo.

Dentro del rectángulo áureo, se puede inscribir otro rectángulo áureo. Trazar un arco de circunferencia con centro en un vértice del cuadrado y radio la longitud del lado. Repitiendo esta operación se obtiene una espiral que se encuentra en la naturaleza en numerosos ejemplos.

La solución positiva de la ecuación $\frac{\phi+1}{\phi} = \phi$ se conoce como número de oro.



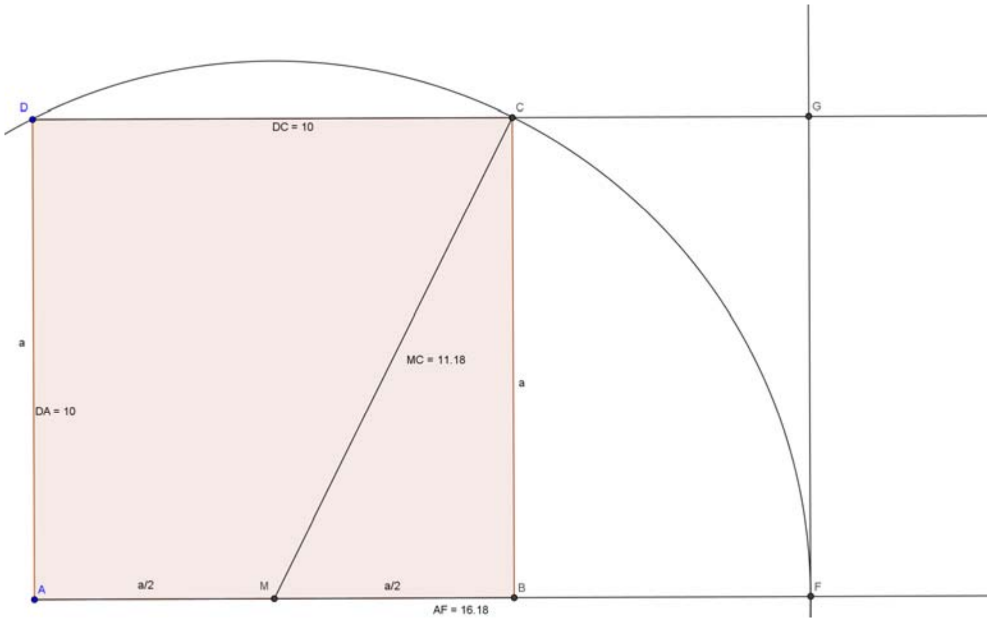


1. Si el lado menor del rectángulo áureo mide 1 dm, ¿cual es la distancia entre los puntos M y C? ¿Qué longitud tiene el lado mayor del rectángulo? El D.N.I. es un rectángulo cuyo lado menor mide 53'38 mm. Calcula la longitud de su lado mayor sabiendo que es un rectángulo áureo.

2. Calcula la longitud de la espiral resultante de la generación sucesiva de cinco rectángulos áureos, siendo el lado menor del rectángulo inicial 6 cm.

3. Observa la imagen, pertenece al claustro de la Colegiata de Santa María de Alquézar, en Huesca. El claustro está formado por 23 arcos como el de la figura. ¿Cuánto costaría acristalarlo si el cristal cuesta 18 euros/m²?

1.

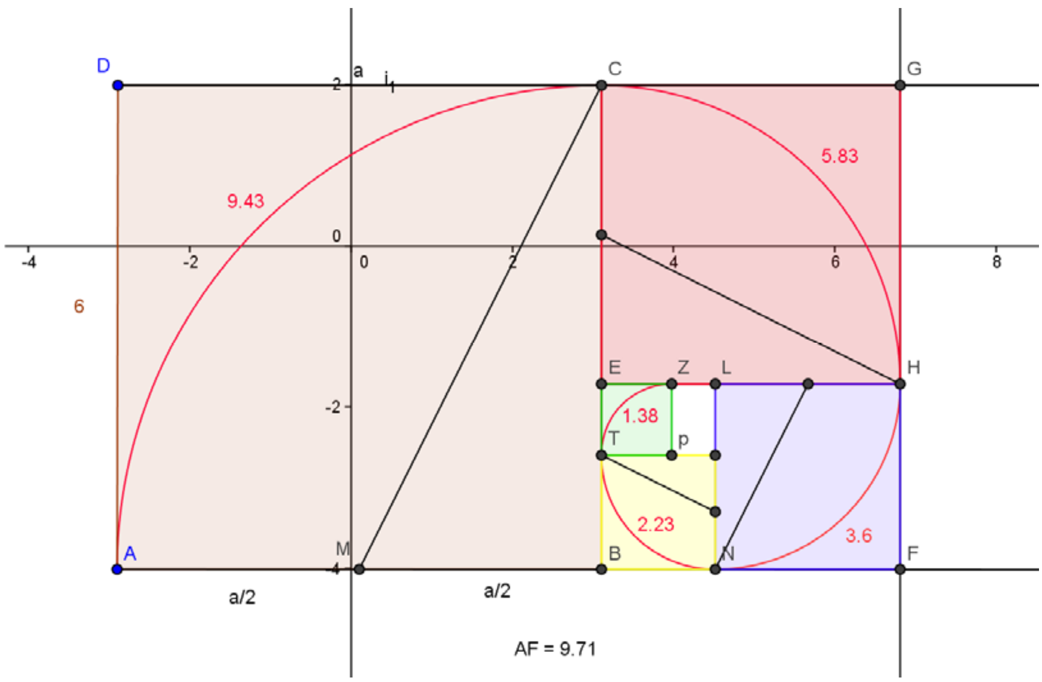


En la figura aparecen los datos en cm. Resolviendo el problema en centímetros, y aplicando el teorema de Pitágoras tenemos: $\overline{MC}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{MC}^2 = \frac{5}{4}a^2 \Rightarrow$ $\overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \Rightarrow \overline{MF} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \Rightarrow \overline{AF} = \frac{a}{2} + \overline{MF} \Rightarrow \overline{AF} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}a \Rightarrow \overline{AF} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$

En el caso que $a = 10\ cm \Rightarrow \overline{AF} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot 10 \Rightarrow \overline{AF} = 1618\ \ cm.$

En el caso del D.N.I., $a = 5338\ mm \Rightarrow \overline{AF} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot 5338 \Rightarrow \overline{AF} = 8637\ mm$

2. La figura está realizada con Geogebra, así como el cálculo aproximado de las longitudes parciales de la espiral.



Sea a_1 la longitud del lado menor del rectángulo inicial.

Fijándonos en la figura, vemos que $a_2 = \overline{BF} = \overline{MF} - \frac{a_1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_1$

$$a_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_2 \Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_1 \Rightarrow a_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a_1$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_3 \Rightarrow a_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} a_1 \Rightarrow a_4 = \left(\sqrt{5}-2\right) a_1$$

$$a_5 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_4 \Rightarrow a_5 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\sqrt{5}-2\right) a_1 \Rightarrow a_5 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} a_1$$

La longitud del primer arco es $l_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n^o}{360} \Rightarrow l_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot a_1 \cdot 90}{360} \Rightarrow l_1 = \frac{\pi}{2} a_1$

La longitud del segundo arco es $l_2 = \frac{\pi}{2} a_2 \Rightarrow l_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} a_1$

La longitud del tercer arco es $l_3 = \frac{\pi}{2} a_3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} a_1$

La longitud del cuarto arco es $l_4 = \frac{\pi}{2} a_4 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\sqrt{5}-2\right) a_1$

La longitud del quinto arco es $l_5 = \frac{\pi}{2} a_5 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{7-3\sqrt{5}}{2} a_1$

La suma pedida es $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = \pi \cdot a \cdot \frac{7-\sqrt{5}}{4}$

En nuestro caso, $a_1 = 6 \Rightarrow$la suma pedida es $\pi \cdot 6 \cdot \frac{7-\sqrt{5}}{4} \cong 2245$ cm

3.

En cada arco, la superficie a acristalar es, en su parte rectangular de 174 m^2.

En la parte superior, tenemos media circunferencia, cuya superficie viene dada por la expresión $\frac{1}{2}\pi r^2$, en nuestro caso la superficie es $\frac{1}{2}\pi \cdot 05^2 = \frac{\pi}{8}$ m^2 .

Como son 23 arcos, la superficie a acristalar es de: $23\ x\ 174 + 23 \cdot \frac{\pi}{8} \cong 49$ m^2

El precio total del cristal necesario, para acristalar el claustro de Santa María de Alquézar en las condiciones dadas, es de 18 ·49=882 €

ACTIVIDADES FINALES PAG. 156

EJERCICIOS

Teorema de Pitágoras

○ **24.** En un triángulo rectángulo un cateto mide 5 cm y el otro cateto mide 12 cm. ¿Cuánto mide su hipotenusa?

○ **25.** Calcula la altura de un triángulo isósceles cuya base mide 6 cm y sus lados iguales 5 cm.

○ **26.** En un triángulo isósceles la base mide 24 m y los otros lados 13 m cada uno. Calcula su altura.

● **27.** Calcula la altura de un triángulo equilátero en función de su lado.

○ **28.** Aplica el ejercicio anterior para calcular la altura de un triángulo equilátero de $3\sqrt{3}$ m de lado.

◐ **29.** Calcula la diagonal de un cuadrado en función del lado.

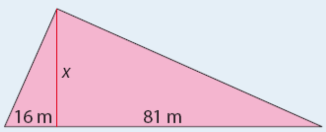
○ **30.** Aplica el ejercicio anterior para calcular la diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado.

Teoremas del cateto y de la altura

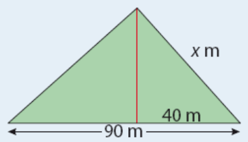
● **31.** Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 12 cm. Calcula sus proyecciones sobre la hipotenusa, la altura del mismo y su área.

● **32.** En un triángulo rectángulo isósceles la proyección de un cateto sobre la hipotenusa es de 5 cm. Calcula la altura del triángulo sobre la hipotenusa, el valor de los catetos y su área.

○ **33.** Calcula la altura del siguiente triángulo rectángulo:



○ **34.** Calcula el valor de *x* en el siguiente triángulo:



● **35.** Los catetos de un triángulo rectángulo miden 20 y 21 cm. Calcula su altura.

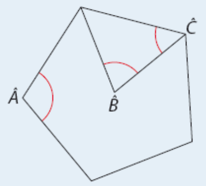
Propiedades del triángulo

○ **36.** ¿En qué punto queda el ortocentro en un triángulo rectángulo? Dibújalo. En este caso, ¿qué relación existe entre el diámetro de la circunferencia circunscrita y la hipotenusa del triángulo?

○ **37.** En un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ hemos trazado dos mediatrices. ¿En qué punto corta la tercera mediatriz a las otras dos?, ¿por qué?

○ **38.** Traza el ortocentro de un triángulo acutángulo, el de un triángulo obtusángulo y el de un triángulo rectángulo. ¿En qué caso queda fuera y en qué caso queda dentro del triángulo? En el caso del triángulo rectángulo, ¿dónde está el ortocentro?, ¿y su circuncentro?

◐ **39.** Dado el pentágono regular de la figura, calcula los ángulos señalados.

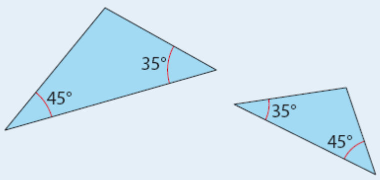


● **40.** Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, construimos otro de la siguiente manera: por cada vértice trazamos un lado que es paralelo al lado opuesto. Así se forma un triángulo en cuyo interior está el triángulo $\widehat{ABC}$. Calcula el ortocentro del triángulo pequeño y a continuación el circuncentro del triángulo mayor. ¿Qué ocurre? Traza la circunferencia circunscrita al triángulo mayor.

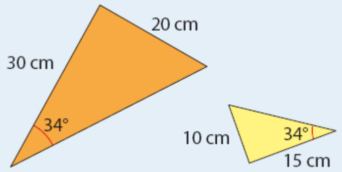
Teorema de Tales

○ **41.** Dados tres segmentos de 10, 5 y 6 cm de longitud, calcula un cuarto segmento proporcional a los dados.

○ **42.** Observa los triángulos de la figura e indica si son o no semejantes.



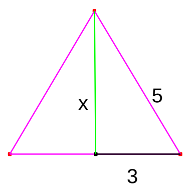
○ **43.** ¿Son semejantes los siguientes triángulos?



156 UNIDAD 8

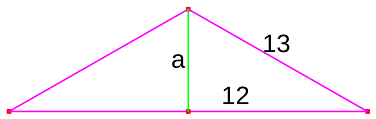
24. $h^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow \boxed{h = 13 \text{ cm}}$

25.



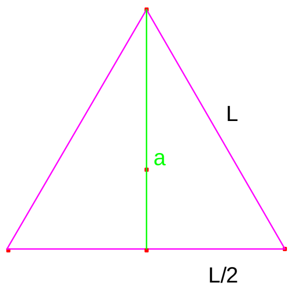
$$5^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 4 \text{ cm}}$$

26.



$$13^2 = 12^2 + a^2 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

27.

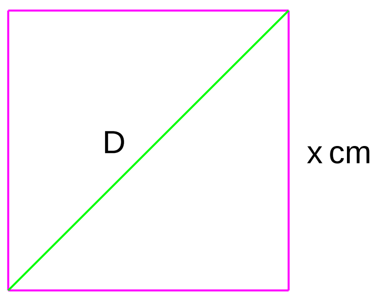


$$L^2 = a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}L^2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{2}L}$$

28.

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}L \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(3\sqrt{3}\right) \Rightarrow \boxed{a = 4'5 \text{ m}}$$

29.



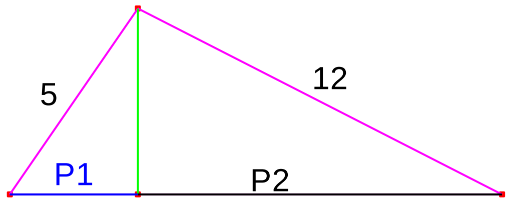
$$D^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 2x^2 \Rightarrow D = x\sqrt{2} \text{ cm}$$

30.

Si el lado del cuadrado mide x cm $\Rightarrow$ $x^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ cm

Aplicando el ejercicio anterior: $D = \sqrt{2}$ cm

31.



$hipotenusa^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow h = 13$

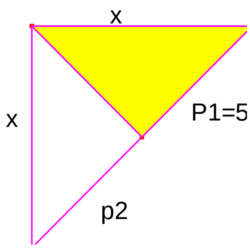
$Cateto1^2 = hipotenusa \cdot p1 \Rightarrow 5^2 = 13 \cdot p1 \Rightarrow p1 = \dfrac{25}{13} \Rightarrow \boxed{p1 \cong 1'92 \text{ cm}}$

$Cateto2^2 = hipotenusa \cdot p2 \Rightarrow 12^2 = 13 \cdot p2 \Rightarrow p2 = \dfrac{144}{13} \Rightarrow \boxed{p2 \cong 11'08 \text{ cm}}$

$\boxed{Área = 30 \text{ cm}^2}$

$altura^2 = \frac{25}{13} \cdot \frac{144}{13} \Rightarrow altura = \frac{60}{13} \text{ cm } \cong 4'6 \text{ cm}$

32.



Por el teorema de Pitágoras: $x^2 + x^2 = (5 + P_2)^2 \Rightarrow 2x^2 = 25 + 10P_2 + P_2^{\,2}$

Por el teorema del cateto: $x^2 = (P_2 + 5) \cdot 5 \Rightarrow x^2 = 5P_2 + 25$

$10P_2 + 50 = 25 + 10P_2 + P_2^{\,2} \Rightarrow P_2^{\,2} = 25 \Rightarrow \boxed{P_2 = 5}$

Por el teorema de la altura: $a^2 = 5 \cdot P_2 \Rightarrow \boxed{a = 5}$

Aplicando el teorema de Pitágoras (en el triángulo amarillo) :

$x^2 = 25 + a^2 \Rightarrow \boxed{x = 5\sqrt{2}}$

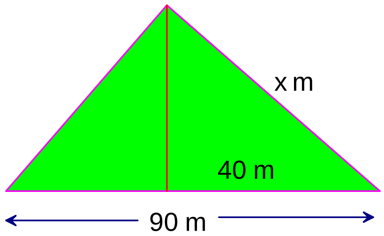
$\boxed{\text{Área triángulo} = 25 \text{ m}^2}$

33.

Aplicando el teorema de la altura:

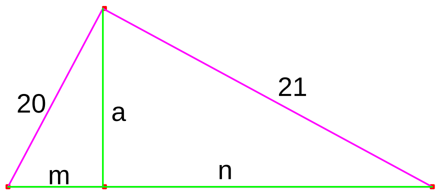
$$x^2 = 16 \cdot 81 \Rightarrow x = 4 \cdot 9 \Rightarrow x = 36 \text{ m}$$

34.
El triángulo es rectángulo, aplicando el teorema del cateto:



$$x^2 = 90 \cdot 40 \Rightarrow x^2 = 3600 \Rightarrow x = 60 \text{ m}$$

35.



Por el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{20^2 + 21^2} \Rightarrow \boxed{h = 29}$

Por el teorema del cateto: $20^2 = 29 \cdot m \Rightarrow m = \dfrac{20^2}{29} \Rightarrow \boxed{m \cong 13'79}$

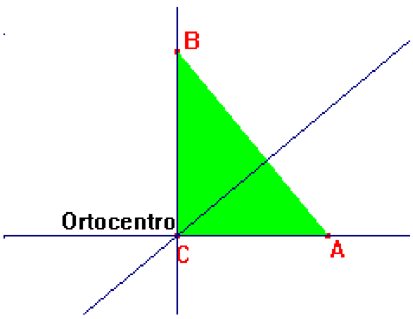
Por el teorema del cateto: $21^2 = 29 \cdot n \Rightarrow n = \dfrac{21^2}{29} \Rightarrow \boxed{n \cong 15'21}$

Por el teorema de la altura:

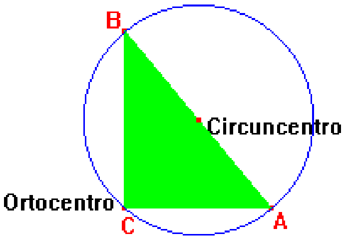
$$a^2 = m \cdot n \Rightarrow a^2 = \frac{20^2}{29} \cdot \frac{21^2}{29} \Rightarrow a = \frac{20 \cdot 21}{29} \Rightarrow \boxed{a \cong 14'48}$$

Solución: $\boxed{altura = 14'48\ cm}$

36.

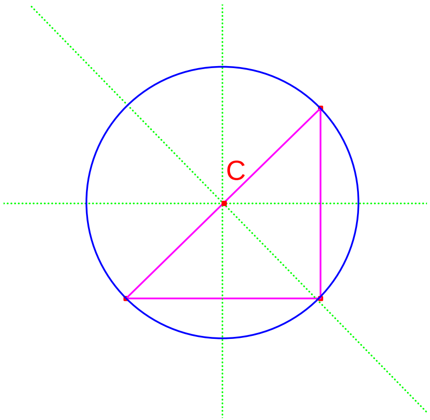


El ortocentro queda sobre el vértice del ángulo recto.



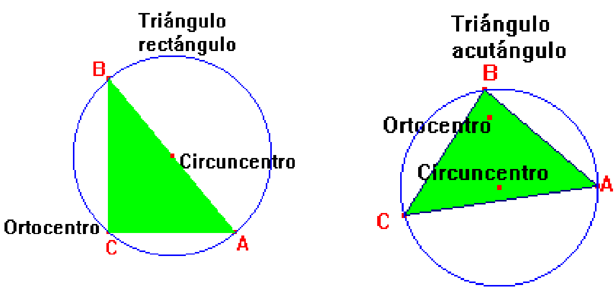
Como se aprecia en la figura, en un triángulo rectángulo su hipotenusa coincide con el diámetro de la circunferencia circunscrita.

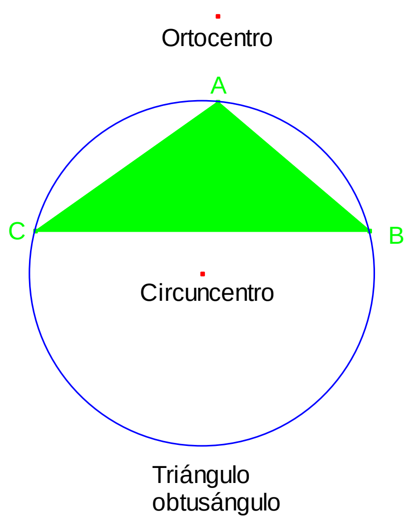
37.



En un triángulo rectángulo, las tres mediatrices coinciden en el punto medio de la hipotenusa.

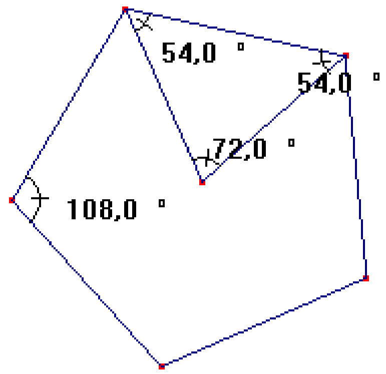
38.



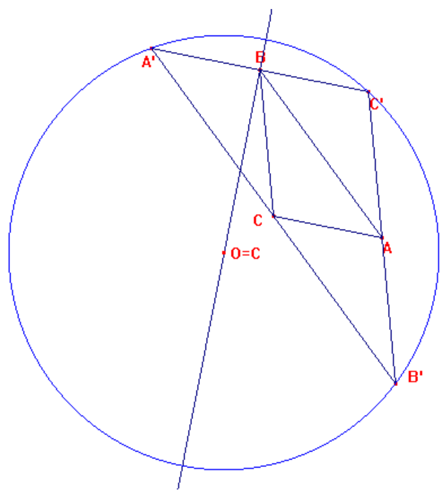


Observa que en el triángulo acutángulo el ortocentro y el circuncentro quedan dentro del triángulo , mientras que en el triángulo obtusángulo quedan fuera.
En el triángulo rectángulo el ortocentro queda sobre el vértice del triángulo rectángulo y el circuncentro queda en el punto medio de la hipotenusa.

39.



40.



El ortocentro del triángulo menor coincide con el circuncentro del triángulo mayor.

41.

$$\frac{10}{5}=\frac{6}{x}\Rightarrow \boxed{x=3}$$

Solución: el cuarto segmento proporcional mide 3 cm

42.

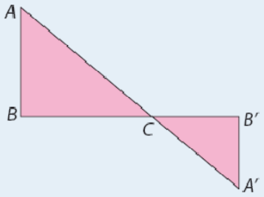
Sí son semejantes porque tienen los tres ángulos iguales.

43.

No podemos afirmar que sean semejantes porque, si bien tienen dos lados proporcionales y un ángulo igual, éste no es el ángulo comprendido entre los lados.

○**44.** Dados los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$, sabemos que el ángulo $\hat{A}$ es igual al ángulo $\hat{A}'$, $\overline{AB}$ = 6 cm, $\overline{AC}$ = 12 cm, $\overline{A'B'}$ = 9 cm y $\overline{A'C'}$ = 18 cm. ¿Son semejantes dichos triángulos?

○**45.** Indica si los triángulos de la figura son semejantes. Razona tu respuesta.



○**46.** Indica el número de ángulos que han de tener iguales dos triángulos rectángulos para ser semejantes. ¿Y si son isósceles?

●**47.** Demuestra que el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

Cuadriláteros

○**48.** Calcula el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 1 cm.

○**49.** Un cuadrado tiene un área de 25 cm². Calcula la longitud de su diagonal.

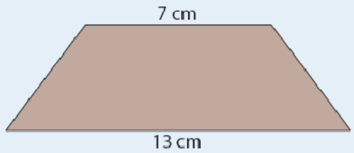
○**50.** Un rectángulo mide 6 cm de base y 5 cm de altura. Calcula su área, su perímetro y la longitud de su diagonal.

○**51.** El lado de un cuadrado mide 2′5 cm. ¿Cuál es su perímetro?

○**52.** Si un rombo tiene 18 cm de perímetro, ¿cuánto medirá el lado?

○**53.** Calcula el área de un triángulo rectángulo sabiendo que la longitud de sus catetos es de $\sqrt{5}$ y $2\sqrt{5}$ m.

◐**54.** Las bases de un trapecio isósceles de 30 m de perímetro miden 13 y 7 cm. Calcula su área.



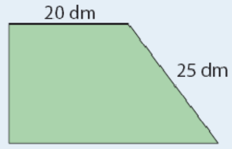
◐**55.** Calcula la diagonal mayor de un rombo sabiendo que su área es de 225 m² y que la diagonal menor mide 30 m.

◐**56.** La diagonal de un rectángulo de 30 cm de perímetro mide $5\sqrt{5}$ cm. Calcula su área.

●**57.** Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 20π cm de longitud.

●**58.** Un cuadrado de 100 m² de superficie está inscrito en una circunferencia. Calcula el área del círculo asociado a dicha circunferencia.

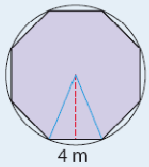
◐**59.** Calcula el área del siguiente trapecio rectángulo.



●**60.** Calcula el área de un hexágono regular en función de su lado.

◐**61.** Calcula el área de un hexágono regular cuyo lado mide $\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ m.

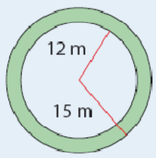
●**62.** Calcula el área de un octógono regular de 4 m de lado inscrito en una circunferencia cuyo círculo asociado tiene 20π m² de área.



Figuras circulares

○**63.** Calcula el área de una corona circular formada por dos circunferencias concéntricas de 7 y 4 m de radio.

○**64.** Calcula el área de la siguiente corona circular:

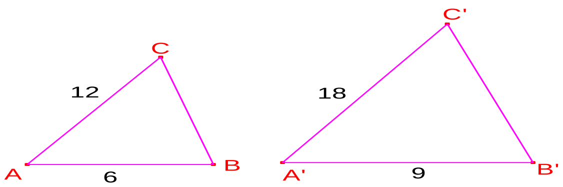


○**65.** Calcula el área de un sector circular de 10° cuyo radio es de 6 cm.

○**66.** Calcula el área de un sector circular de 60° y 12 m de radio.

○**67.** Calcula el área de un trapecio circular de 90° de ángulo comprendido entre dos coronas circulares de 25 y 20 cm.

44.

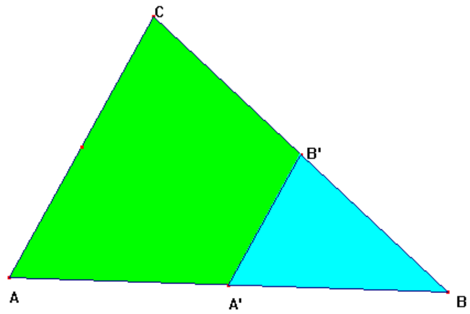


Sí son semejantes. Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido es igual $(\hat{A} = \hat{A}')$.

45.
Sí son semejantes por tener los tres ángulos iguales ($\hat{C}$ opuestos por el vértice son iguales, $\hat{B} = \widehat{B'} = 90º$ y forzosamente $\hat{A} = \widehat{A'}$)
Además tienen los lados paralelos.

46.
En ambos casos basta con uno.
En el triángulo rectángulo ya tienen igual el ángulo rectángulo, si tienen uno igual el tercero forzosamente tiene que coincidir.
En el triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales.

47.



Siendo A’ y B’ los puntos medios de los lados AB y BC, al unirlos obtenemos el segmento A’B’. Consideremos ahora los triángulos ABC (verde) y A’BC’ (azul). Observamos la semejanza de ambos triángulos (tienen un ángulo en común y sus lados son proporcionales), siendo la razón de proporcionalidad la siguiente: $\frac{BA'}{BA} = \frac{BB'}{BC} = \frac{1}{2}$ por ser A’ y B’ los puntos medios de sus respectivos lados.
Al ser los dos triángulos semejantes y tener el ángulo ABC y A’BC’ común se sigue inmediatamente que los segmentos AC y A’B’ son paralelos y los tres lados son proporcionales $\Rightarrow \frac{BA'}{BA} = \frac{BB'}{BC} = \frac{A'B'}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ A’B’ = $\frac{AC}{2}$, como queríamos demostrar.

48.
Sea L la longitud del lado.

$$L^2 + L^2 = 1 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Perímetro = $2\sqrt{2} \cong$ 2’83 cm; Área = $\frac{1}{2}$ =0’5 cm^2

49.

$$A = L^2 \Rightarrow 25 = L^2 \Rightarrow \boxed{L = 5}$$

$$D = L\sqrt{2} \Rightarrow \text{D} = \boxed{5\sqrt{2}\ cm}$$

Solución: Diagonal = $5\sqrt{2} \cong$ 7’07 cm

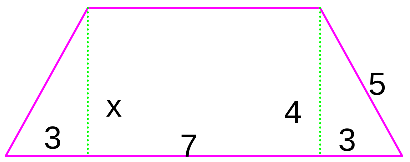
50.
Área= 30 cm^2
Perímetro = 22 cm
Diagonal = 7’81 cm

51. Perímetro = 4 · 2’5 ⇒ Perímetro = 10 cm

52. Lado = $\frac{18}{4} \Rightarrow \boxed{Lado = 4'5\ cm}$

53. Área = $\frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boxed{Área = 5\ m^2}$

54.

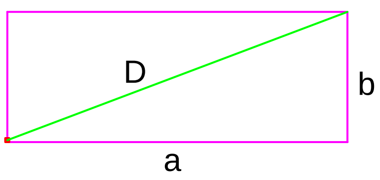


Sea a la medida del lado, y sea x la medida de la altura del trapecio
Perímetro = 30 ⇒ 20 + 2 a = 30 ⇒ $\boxed{a = 5\ cm}$
Aplicando el teorema de Pitágoras: $5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x = 4\ cm$

$$A = \frac{(B+b)\cdot altura}{2} \Rightarrow A = \frac{(13+7)\cdot 4}{2} \Rightarrow \boxed{A = 40\ cm^2}$$

55. $A = \frac{D\cdot d}{2} \Rightarrow 225 = \frac{D\cdot 30}{2} \Rightarrow \boxed{D = 15\ m}$

56.

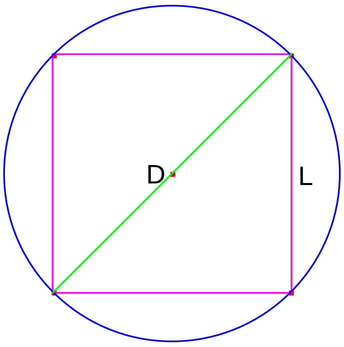


P = 30 ⇒ 2 a + 2 b = 30 ⇒ a + b = 15

$$a^2 + b^2 = D^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 125 \Rightarrow a^2 + (15 - a)^2 = 125$$

Solución: $\boxed{Área = 50\ cm^2}$

57.



Sea R el radio de la circunferencia y D el diámetro de la circunferencia (que coincide con la diagonal del cuadrado).

Longitud circunferencia = 2πR ⇒ 20 π = 2πR ⇒ 20 = 2 R ⇒ R = 10 ⇒

D = 2R ⇒ D = 20

Como L = $\dfrac{D}{\sqrt{2}}$,

Área cuadrado = L^2 ⇒ Área cuadrado = $\dfrac{D^2}{2} \Rightarrow \boxed{Área\ cuadrado = 200\ cm^2}$

58.

Sea L la longitud del lado del cuadrado, D la diagonal del cuadrado, que coincide con el diámetro de la circunferencia asociada y R el radio de dicha circunferencia.

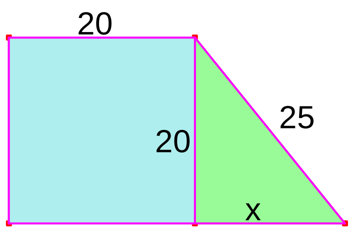
Recordemos que L = $\dfrac{D}{\sqrt{2}}$

$$Área\ cuadrado = 100 \Rightarrow L^2 = 100 \Rightarrow \frac{D^2}{2} = 100 \Rightarrow D^2 = 200 \Rightarrow$$

$$D = 10\sqrt{2} \Rightarrow R = 5\sqrt{2} \Rightarrow R^2 = 50$$

Área círculo = π R^2 ⇒ $\boxed{Área\ círculo = 50\pi\ m^2}$

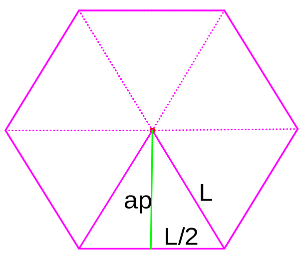
59.



$$25^2 = 20^2 + x^2 \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

$$Área = \frac{(35+20)\cdot 20}{2} \Rightarrow \boxed{Área = 550\ dm^2}$$

60.



$$L^2 = ap^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

Área hexágono = $\dfrac{Perímetro \cdot apotema}{2} = \dfrac{(6L)\cdot ap}{2} = 3L\cdot ap \Rightarrow \boxed{\text{Área hexágono} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}L^2}$

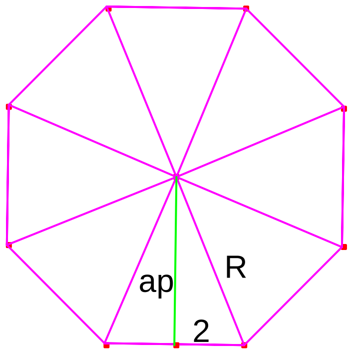
61.

$$\text{Área hexágono} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$$

$$L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{27} \Rightarrow L^2 = \frac{2}{3}\sqrt{27} \Rightarrow \text{ Área hexágono} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{27} = \sqrt{81}$$

$$\boxed{\text{Área hexágono} = 9 \text{ m}^2}$$

62.



Área círculo = 20 π ⇒ π R^2 = 20 π ⇒ R^2 = 20

$R^2 = ap^2 + 4 \Rightarrow ap^2 = 20 - 4 \Rightarrow ap = 4$

$$\text{Área hexágono} = \frac{Perímetro\cdot apotema}{2} = \frac{32\cdot ap}{2} = 16\cdot ap \Rightarrow \boxed{\text{Área} = 64 \text{ m}^2}$$

63.
Área = 49 π - 16 π ⇒ $\boxed{\text{Área} = 33\,\pi \cong 103'67 \text{ m}^2}$

64. $Área = 225\pi - 144\pi = 81\,\pi\ cm^2$

65. $A = \dfrac{\pi\cdot r^2\cdot n}{360} \Rightarrow A = \dfrac{\pi\cdot 6^2\cdot 10}{360} \Rightarrow \boxed{\text{A} = \pi \text{ cm}^2}$

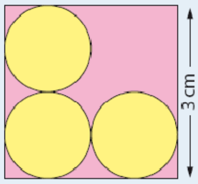
66. $A = \dfrac{\pi\cdot r^2\cdot n}{360} \Rightarrow A = \dfrac{\pi\cdot 12^2\cdot 60}{360} \Rightarrow \text{A} = 24\,\pi \Rightarrow \boxed{\text{A} = 75'4 \text{ m}^2}$

67. $A = \dfrac{\pi\cdot 25^2\cdot 90}{360} - \dfrac{\pi\cdot 20^2\cdot 90}{360} \Rightarrow \boxed{\text{A} = \dfrac{225\pi}{4} \cong 176'71 \text{ cm}^2}$

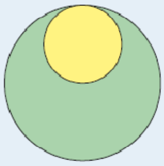
68. Calcula la longitud de una circunferencia tal que el área del círculo asociado es cuatro veces mayor que otra cuya circunferencia asociada es de 24π cm de longitud.

69. Calcula el área de un segmento circular de 10 cm de radio y 90° de ángulo.

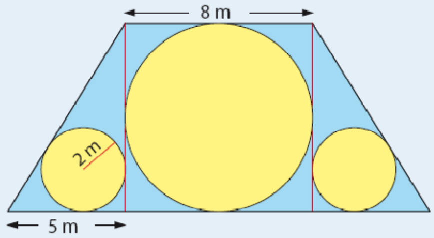
70. Calcula el área de la zona coloreada de rosa en la figura siguiente:



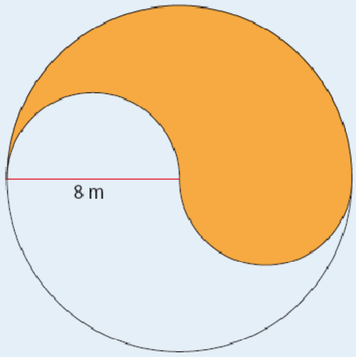
71. Calcula el área de la zona coloreada de verde de la figura siguiente sabiendo que el radio más grande es el doble que el pequeño y que el radio pequeño mide 2 cm.



72. Calcula el área de la zona de color azul:



73. Calcula el área de la zona coloreada:



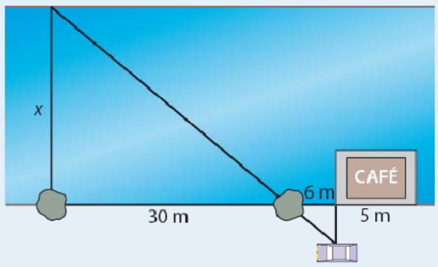
PROBLEMAS

74. Un pintor está subido sobre una escalera de 12 m de longitud. ¿A qué altura se encontrará el pintor sabiendo que el escalón sobre el que se encuentra está a 2'4 m del pie de escalera y a 3 m de la pared?

75. Un señor que mide 1'90 m de alto proyecta una sombra de 3 m. ¿Cuánto medirá su mujer si a la misma hora del día proyecta una sombra de 2'4 m?

76. Una torre proyecta una sombra de 14 m en el mismo momento en que un arbusto de 3 m proyecta una sombra de 8 m. Calcula la altura de la torre.

77. Queremos medir la anchura de un río sin necesidad de cruzarlo. Para ello observamos que dos árboles que se encuentran en la misma orilla que nosotros están separados por una distancia de 30 m. A 6 m del segundo árbol se encuentra una cafetería y nosotros hemos aparcado el coche a 5 m de ella y perpendicular al río, tal y como indica la figura. ¿Cuál es la anchura del río?



68.

Área círculo asociado de radio R = 4 · Área círculo radio r.

Longitud circunferencia asociada al círculo de radio r = 24 π ⇒ 2 π r = 24 π ⇒ r = 12

Área círculo asociado de radio R = 4 · Área círculo radio r = $4\pi\ 12^2$

$\pi R^2 = 4\pi\ 12^2 \Rightarrow R^2 = 4\cdot 12^2 \Rightarrow R = 2\cdot 12 \Rightarrow R = 24$

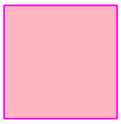
Longitud circunferencia de radio R = 2·π· 24

$\boxed{\text{Longitud circunferencia de radio R} = 48\pi \text{ cm} \cong 150'8 \text{ cm}}$

69.

$$A = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360} - \frac{10 \cdot 10}{2} \Longrightarrow A = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} - \frac{10 \cdot 10}{2} \Rightarrow \boxed{A = 25\pi - 50 \text{ cm}^2 \cong 28'54 \text{ cm}^2}$$

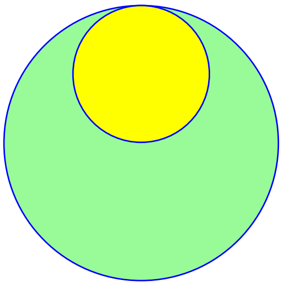
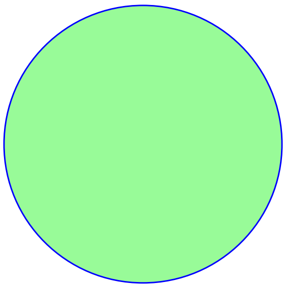
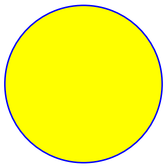
70. =

Área =  - 3

$$\text{Área} = 9 - 3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\text{Área} = 9 - \frac{27 \cdot \pi}{16} \cong 3'7 \text{ cm}^2}$$

71.

$R = 2 \cdot r = 2 \cdot 2 = 4$ m

Área zona verde  =  - 

$$\text{Área zona verde} = \pi R^2 - \pi r^2 = 16\pi - 4\pi = 12\pi \cong 37'7\ cm^2$$

$$\boxed{\text{Área} = 12\pi \cong 37'7\ cm^2}$$

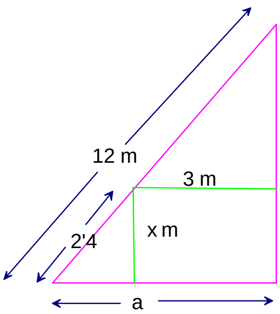
72.

Área = área trapecio – área circunferencia (R = 4) – 2 área circunferencia (r = 2)

$$\text{Área} = \frac{18+8}{2} \cdot 8 - 16\pi - 2 \cdot 4\pi \Rightarrow \text{Área} = \boxed{104 - 24\pi \cong 28'6\ m^2}$$

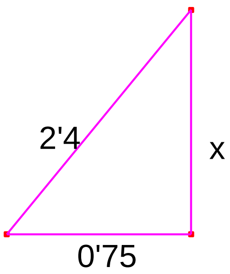
73. $\text{Área} = \frac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow \boxed{\text{Área} = 32\pi \cong 100'53\ m^2}$

74.



Llamemos a la altura buscada *x*. Vemos que los triángulos son semejantes.

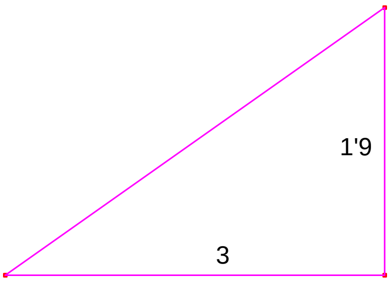
$$\frac{12}{a}=\frac{9'6}{3}\Rightarrow a=3'75$$

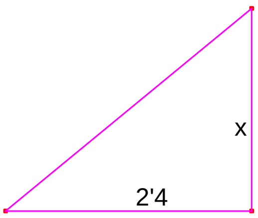


$$2'4^2=x^2+0'75^2\Rightarrow \boxed{x\cong 2'28\ m}$$

75.

Nuevamente tenemos dos triángulos semejantes.





$$\frac{1'9}{3}=\frac{x}{2'4}\Rightarrow \boxed{x=1'52\ m}$$

76.

$$\frac{x}{14}=\frac{3}{8}\Rightarrow \boxed{x=5'25\ m}$$

77.

$$\frac{x}{30}=\frac{5}{6}\Rightarrow x=25\ metros$$

○78. Un pintor apoya una escalera sobre la pared. Si la escalera mide 7 m y está separada 3 m de la pared, ¿a qué altura subirá el pintor?

○79. Un árbol de 12 m de altura proyecta una sombra, en un momento determinado del día de 4 m. Calcula la altura que alcanza otro árbol que en ese mismo momento proyecta una sombra de 3 m.

◐80. Un ciclista participará en una prueba de velocidad en un circuito. Para recorrer el circuito totalmente la rueda de su bicicleta tiene que girar 200 veces. Calcula los metros recorridos si el radio de la rueda es de 0'40 m y la carrera obliga a realizar 10 veces el circuito.

78.

Aplicación del teorema de Pitágoras: $49 = 9 + a^2 \Rightarrow \boxed{altura \cong 6'32\ m}$

79. $\dfrac{12}{4} = \dfrac{x}{3} \Rightarrow \boxed{x = 9\ \ m}$

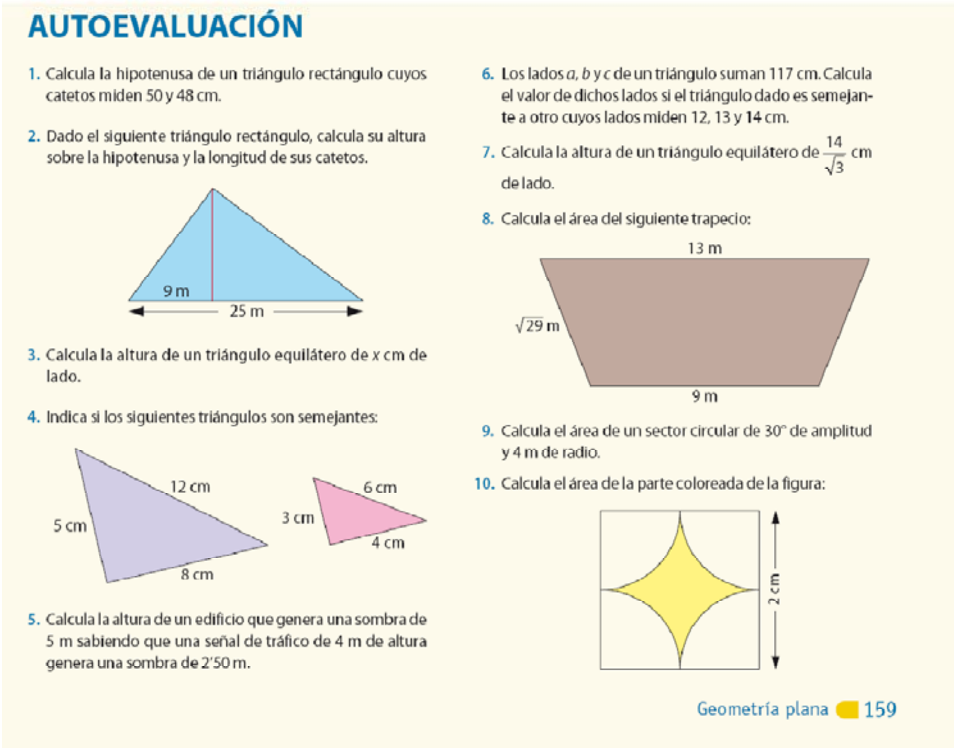
80.

1 revolución de la rueda $= 2 \cdot \pi \cdot 0'4 = 0'8\ \pi$ m

1 circuito completo = 200 revoluciones de la rueda $= 200 \cdot 0'8\pi = 160\ \pi$ m

La carrera = 10 circuitos completos = $\boxed{1600\ \pi \cong 5026'55 \text{ metros}}$

AUTOEVALUACIÓN PAG. 159



AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 50 y 48 cm.

2. Dado el siguiente triángulo rectángulo, calcula su altura sobre la hipotenusa y la longitud de sus catetos.

3. Calcula la altura de un triángulo equilátero de x cm de lado.

4. Indica si los siguientes triángulos son semejantes:

5. Calcula la altura de un edificio que genera una sombra de 5 m sabiendo que una señal de tráfico de 4 m de altura genera una sombra de 2'50 m.

6. Los lados a, b y c de un triángulo suman 117 cm. Calcula el valor de dichos lados si el triángulo dado es semejante a otro cuyos lados miden 12, 13 y 14 cm.

7. Calcula la altura de un triángulo equilátero de $\frac{14}{\sqrt{3}}$ cm de lado.

8. Calcula el área del siguiente trapecio:

9. Calcula el área de un sector circular de 30° de amplitud y 4 m de radio.

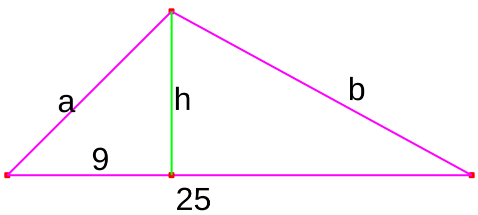
10. Calcula el área de la parte coloreada de la figura.

Geometría plana 159

1. $h^2 = 50^2 + 48^2 \Rightarrow h = \sqrt{4804} \Rightarrow h = 2\sqrt{1201} \Rightarrow \boxed{h \cong 69'31\ cm}$

2.

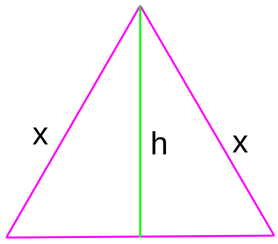
$$h^2 = 9 \cdot 16 \Longrightarrow h = \ 12 \text{ m}$$



$a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow \boxed{a = 15\ m}$

$b^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow \boxed{b = 20\ m}$

3.



$$x^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+h^2 \Rightarrow h^2=x^2-\frac{x^2}{4} \Rightarrow h^2=\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{cm}$$

4. No son semejantes, ya que si bien dos lados son proporcionales, el tercero no.

5. $\frac{4}{2'5}=\frac{x}{5} \Rightarrow \boxed{x=8\ m}$

6.

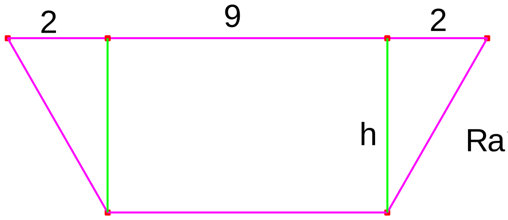
$$\frac{a}{117}=\frac{12}{39} \Rightarrow \boxed{a=36\ m}$$

$$\frac{b}{13}=\frac{117}{39} \Rightarrow \boxed{b=39\ m}$$

$$\frac{c}{14}=\frac{117}{39} \Rightarrow \boxed{c=42\ m}$$

7. Aplicamos el resultado del problema 3 $\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{14}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{h=7\ cm}$

8.

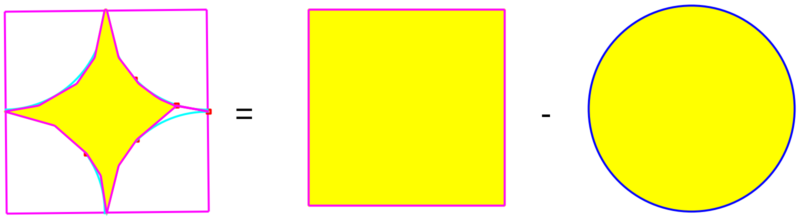


$$29=h^2+4 \Rightarrow h=5$$

$$\text{Área}=\frac{(B+b)\cdot h}{2} \Rightarrow A=\frac{(13+9)\cdot 5}{2} \Rightarrow \boxed{A=55\ m^2}$$

9. $Área=\frac{\pi\cdot r^2\cdot n}{360} \Rightarrow A=\frac{\pi\cdot 4^2\cdot 30}{360} \Rightarrow \boxed{A=\frac{4\pi}{3}\ m^2}$

10.

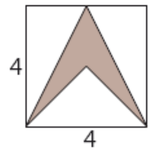


$$\text{Área figura dada} = 4 - \pi\ 1^2 \Rightarrow \boxed{A = 4 - \pi\ cm^2} \Rightarrow \boxed{A \cong 0'86\ cm^2}$$

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 161

Olimpiada matemática

1. Las cuatro cabras del prado. En un prado de 100 m de lado hay cuatro cabras. Cada una está atada a una esquina del prado con una cuerda de 50 m, lo que le permite comer una cierta parte de la hierba, de tal forma que queda un trozo en el centro que ninguna de ellas alcanza. El propietario, tras vender tres de las cabras, alargó la cuerda de la que quedaba en una de las esquinas, y entonces el área sobre la que podía pastar era equivalente al área doble sobre la que pastaban anteriormente las cuatro. ¿Qué longitud le dio a la cuerda?
2. ¿Cuál es el área de la zona sombreada de la figura?



1. El área utilizada por las cuatro es un círculo de 50 m de radio, es decir,

$$\text{Área} = 50^2\pi\ \text{m}^2$$

La que queda sola ha de pastar sobre un cuadrante de círculo cuya superficie sea la misma:

$$\frac{\pi x^2}{4} = \pi \cdot 50^2 \Rightarrow x = 100\ \text{m}$$

Justamente la longitud del campo.

2. Es la cuarta parte del área del cuadrado. El área es de 4 unidades de superficie.

UNIDAD 9. Poliedros

ACTIVIDADES PAG. 164

ACTIVIDADES

1. Calcula el número de aristas que tiene un poliedro formado por 7 caras y 7 vértices.
2. Calcula el número de vértices que tiene un poliedro formado por 6 caras y 10 aristas.
3. Calcula el número caras que tiene un poliedro de 15 aristas y 10 vértices.

1. 12

2. 6

3. 7

ACTIVIDADES PAG. 165

ACTIVIDADES

4. Comprueba si se verifica la fórmula de Euler en el tetraedro.
5. Comprueba si se verifica la fórmula de Euler en el octaedro.

4. 4 + 4 = 6 + 2, (C = V = 4, A = 2)

5. 8 + 6 = 12 + 2, (C = 8, V = 6, A = 12)

ACTIVIDADES PAG. 166

ACTIVIDADES

6. Calcula el área lateral y total de un ortoedro son las medidas de su base 5 y 6 cm y su altura 7 cm.
7. Calcula el área total de un prisma regular de base hexagonal cuya arista básica mide 3 cm y su altura 5 cm (da una aproximación hasta las centésimas).

6.

$$A_T = 2{\cdot}5{\cdot}6 + 2{\cdot}6{\cdot}7 + 2{\cdot}5{\cdot}7 = 214\ cm^2$$
$$A_L = 2{\cdot}6{\cdot}7 + 2{\cdot}5{\cdot}7 = 154\ cm^2$$

7.

$$A_L = 6{\cdot}3{\cdot}5 = 90\ cm^2$$

$A_B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}L^2$, siendo L la longitud de la arista básica. En nuestro caso L = 3 $\Rightarrow$

$$A_B = \frac{27\sqrt{3}}{2} \cong 23'38\ cm^2$$

$$A_T = A_L + 2A_B \Rightarrow A_T = 90 + 27\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_T \cong 136'77\ cm^2}$$

ACTIVIDADES PAG. 167

ACTIVIDADES

8. Calcula el área total de un ortoedro sabiendo que las aristas de su base miden 4 y 7 cm y su altura mide 9 cm.
9. Calcula el área total de un cubo sabiendo que su arista mide 3 m.
10. Calcula el volumen de un prisma hexagonal de 6 m de arista básica y 8 m de altura.
11. Calcula el volumen de un cubo de 10 m de arista.
12. Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas medidas son: 3, 5 y 12 m.

8. $A_T = 2 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 9 + 2 \cdot 7 \cdot 9 \Rightarrow \boxed{A_T = 254\ cm^2}$

9. $A_T = 6 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{A_T = 54\ m^2}$

10.

$A_B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} L^2$, siendo L la longitud de la arista básica. En nuestro caso L = 6 $\Rightarrow$

$A_B = 54\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_B \cong 93'53\ m^2}$

$V = A_B \cdot h \Rightarrow V \cong 93'53 \cdot 8 \Rightarrow \boxed{V \cong 748'24\ m^3}$

11. $V = 10^3 \Rightarrow \boxed{V = 1000\ m^3}$

12. $d = \sqrt{3^2 + 5^2 + 12^2} \Rightarrow \boxed{d \cong 13'34\ m}$

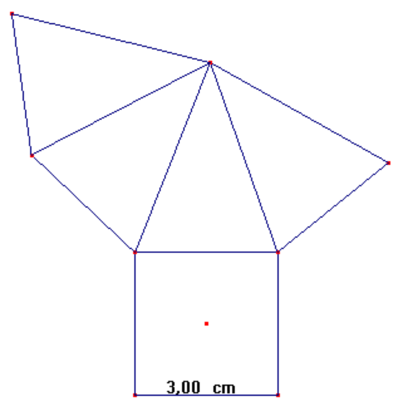
ACTIVIDADES PAG. 168

ACTIVIDADES

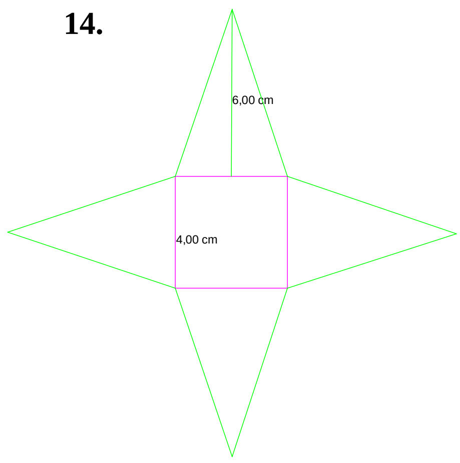
13. Dibuja el desarrollo de una pirámide de 4 cm de apotema cuya base es un cuadrado de 3 cm de lado.

14. Dibuja el desarrollo de una pirámide de 6 cm de apotema cuya base es un rectángulo cuyos lados miden 3 y 4 cm.

13.



14.



ACTIVIDADES PAG. 169

ACTIVIDADES

15. Calcula el área total de una pirámide regular de 12 cm de apotema y 10 cm de arista básica, si la base es un cuadrado.

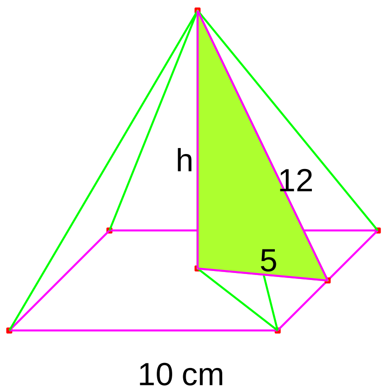
16. Calcula el área lateral de una pirámide de base pentagonal de 11 cm de apotema y 8 cm de arista básica.

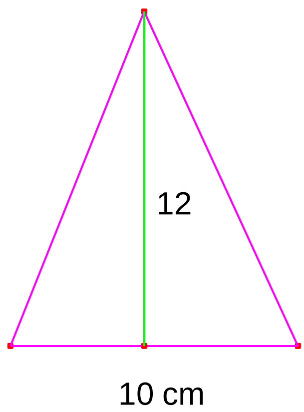
17. Calcula el volumen de una pirámide de base hexagonal de 10 cm de lado y cuya altura es $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm.

18. Calcula el área total y el volumen de una pirámide de 12 cm de altura, 14 cm de apotema y cuya base es cuadrangular de 7 cm de lado.

15.

$A_B = 100\ cm^2$





$$A_L = 4\frac{10 \cdot 12}{2} \Rightarrow \boxed{A_L = 240\ cm^2}$$

$$A_T = A_L + A_B \Rightarrow \boxed{A_T = 340\ m^2}$$

16. $A_L = 5 \cdot \frac{8 \cdot 11}{2} \Rightarrow \boxed{A_L = 220\ cm^2}$

17. $V = A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2 \cdot h = \frac{\cancel{3}\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} 10^2 \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{3}}} \Rightarrow \boxed{V = 100\ cm^3}$

18.

$$A_B = 7^2 = 49\ cm^2$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{7 \cdot 14}{2} = 196\ cm^2$$

$$A_T = 196 + 49 \Rightarrow \boxed{A_T = 245\ cm^2}$$

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 12 \Rightarrow \boxed{V = 196\ cm^3}$$

Desafío matemático

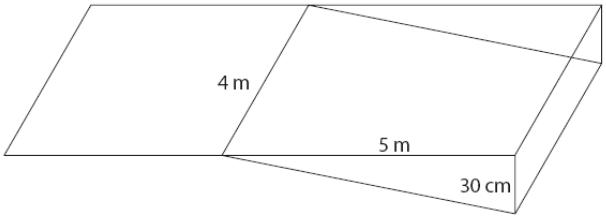
Las pirámides

Los egipcios fueron grandes matemáticos. La aplicación de las matemáticas estaba presente en su vida diaria. El Nilo se desbordaba todos los años y eso hacía necesaria la repartición anual de las tierras entre los campesinos. Esta labor la realizaban los escribas, aplicando conocimientos de geometría plana, como el teorema de Pitágoras, muchos años antes de que este naciera. También realizaron grandes monumentos funerarios. Entre ellos se encuentran las pirámides de Gizeh. La Gran Pirámide fue mandada construir por el faraón Keops en la llanura de Gizeh. Es de base cuadrada, y mide 227 m de lado y 146'60 m de altura. Cerca de ella se encuentra la pirámide de Kefrén, con un ancho de base de 215 metros y una altura de 143'50 metros. Muy cerca de ellas, se encuentra la pirámide de Micerino de 73 metros de altura. Su base es un rectángulo de 104'60 metros de largo por 102'20 metros de ancho.

1. Calcula el área lateral de cada una de las pirámides.
2. Calcula el volumen de dichas pirámides.
3. ¿Qué relación existe entre las áreas y los volúmenes de la pirámide de Keops y la de Micerino?

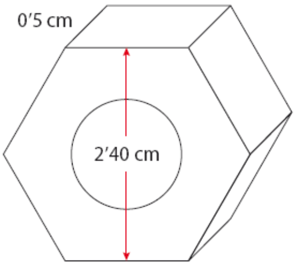
La construcción de la piscina cubierta

Un hotel quiere construir una piscina cubierta en sus instalaciones, con una ancho de 4 metros, 9 metros de largo y 120 cm de profundidad los 4 primeros metros. Posteriormente mediante un plano inclinado, se desciende de profundidad gradualmente hasta alcanzar una profundidad de 150 centímetros. El fondo de la piscina queda representado por la imagen. ¿Qué volumen de agua hay en la piscina?



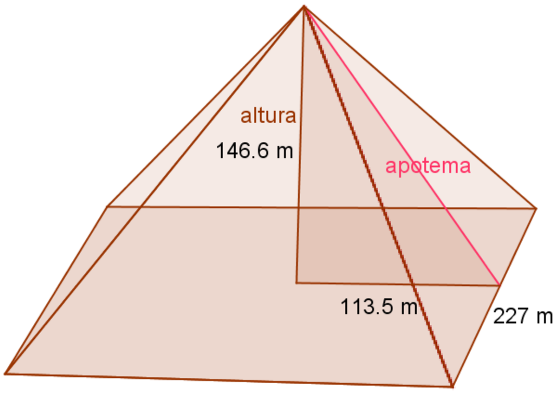
La tuerca

Queremos construir una tuerca en que la distancia entre dos caras paralelas sea 2'40 cm y que la anchura de la pieza sea 0'5 cm. Si el tornillo que admite tiene un diámetro de 2 cm, calcula el volumen de la tuerca.



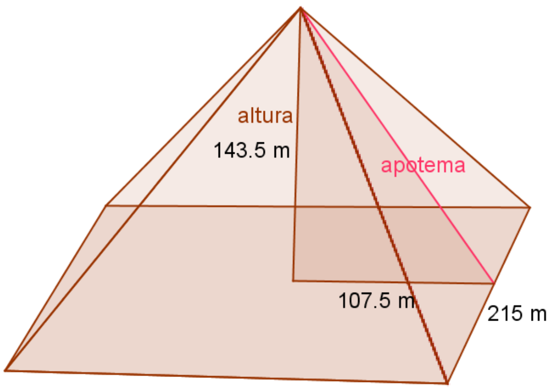
La tuerca

1. Pirámide de Keops:



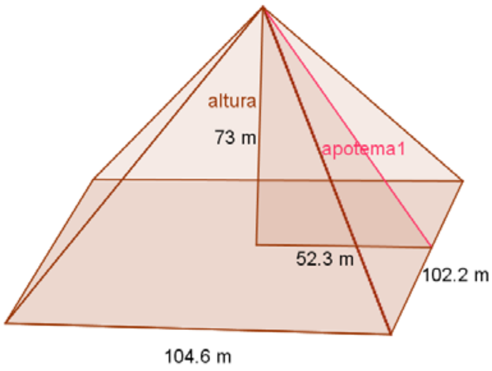
$$apotema^2 = 1466^2 + 1135^2 \Rightarrow apotema = 1854 \text{ m}$$
$$Apotema\ de\ la\ pirámide = altura\ triángulo\ lateral$$
$$A_{triángulo\ lateral} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{227 \cdot 1854}{2} = 210429 \text{ m}^2$$
$$Área\ lateral_{pirámide\ \ Keops} = 4 \cdot 210429 = 841716 \text{ m}^2$$

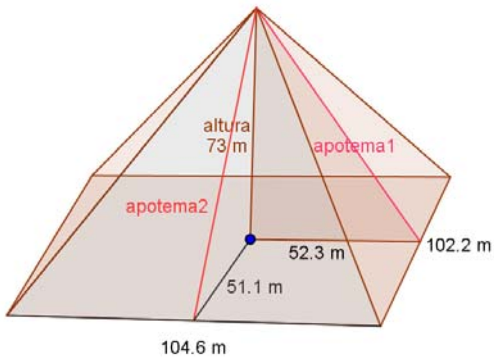
Pirámide de Kefrén:



$$apotema^2 = 1435^2 + 1075^2 \Rightarrow apotema = 179´3 \text{ m}$$
$$Apotema\ de\ la\ pirámide = altura\ triángulo\ lateral$$
$$A_{triángulo\ lateral} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{215 \cdot 1793}{2} = 1927475 \text{ m}^2$$
$$Área\ lateral_{pirámide\ Kefrén} = 4 \cdot 1927475 = 77099 \text{ m}^2$$

Pirámide de Micerino:





$$apotema1^2 = 73^2 + 52´3^2 \Rightarrow apotema1 = 89´8 \text{ m}$$
$$apotema2^2 = 73^2 + 51´1^2 \Rightarrow apotema2 = x = 89´1 \text{ m}$$

$$Apotema\ de\ la\ pirámide = altura\ triángulo\ lateral$$
$$A_{triángulo\ lateral\ de\ 102\ m\ \ de\ base} = \frac{base \cdot apotema1}{2} = \frac{102´2 \cdot 898}{2}$$
$$= 4588´78\ m^2$$
$$A_{triángulo\ lateral\ de\ 1046\ m\ \ de\ base} = \frac{base \cdot apotema2}{2} = \frac{104´6 \cdot 891}{2}$$
$$= 4659´93 \text{ m}^2$$

$$Área\ lateral_{pirámide\ Micerino} = 2 \cdot 4588´78 + 2 \cdot 4659´93 = 18497´42 \text{ m}^2$$

2. Volumen de las pirámides.

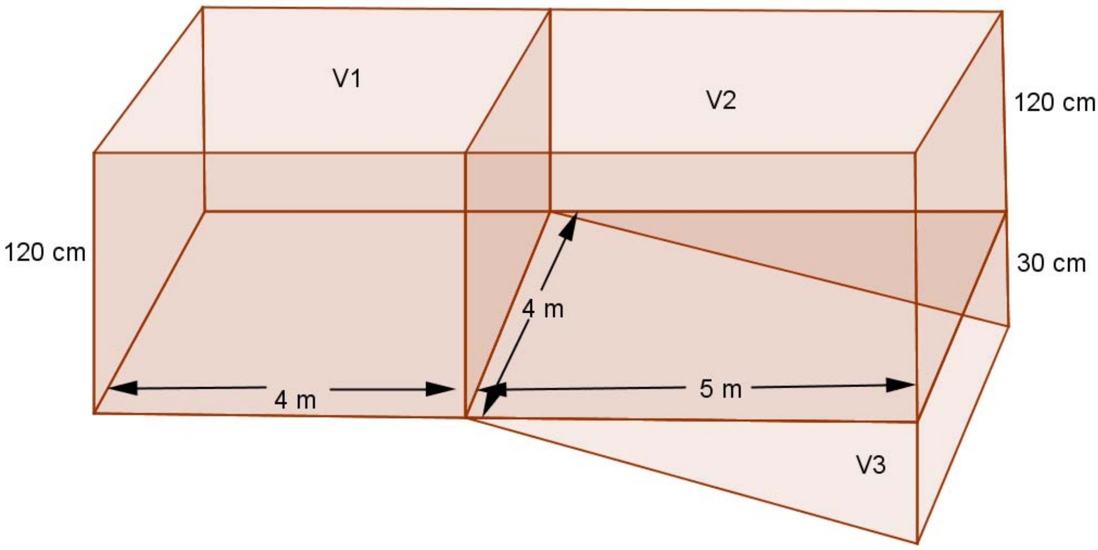
$\text{V}_{\text{Pirámide de Keops}} = Área_{base} \cdot altura = 227^2 \cdot 1466 = 75541514\ \ \text{m}^3$
$\text{V}_{\text{Pirámide de Kefrén}} = Área_{base} \cdot altura = 215^2 \cdot 1435 = \ 66332875 \text{ m}^3$
$\text{V}_{\text{Pirámide de Micerino}} = Área_{base} \cdot altura = 1046 \cdot 1022 \cdot 73 = \ \ 78037876\text{m}^3$

3. $\text{Área total Pirámide Keops} \ = \ 84171.6 + 227^2 = 1357006 \ \ \text{m}^2$
$\text{Área total Pirámide Micerino} \ = \ 77099 + 104´6 \cdot 102´2 = \ 8778912 \ \text{m}^2$

$$\frac{\text{Área total Pirámide Keops}}{\text{Área total Pirámide Micerino}} = \frac{1357006}{8778912} \cong 15$$

$$\frac{\text{Volumen Pirámide Keops}}{\text{Volumen Pirámide Micerino}} = \frac{75541514}{78037876} \cong 968$$

La construcción de la piscina cubierta



Observando la figura, el volumen total V es la suma de los volúmenes parciales:

$V = V_1 + V_2 + V_3$

$V_1 = 4 \cdot 4 \cdot 120 = 192 \text{ m}^3$

$V_2 = 4 \cdot 5 \cdot 120 = 24 \text{ m}^3$

$V_3 = \frac{1}{2} V_{prisma} = \frac{1}{2} A_{base} \cdot altura = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 03 \cdot 120 = \ 72 \text{ m}^3$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 192 + 24 + 072 = 43´92 \text{ m}^3$$

La tuerca

$V_{Tuerca} = V_{prisma\ hexagonal} - V_{cilindro\ \ tornillo}$

$Área_{\ hexágono} = \frac{perímetro \cdot apotema}{2} = \frac{6 \cdot lado \cdot 120}{2} = 36 \cdot lado$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$lado^2 = \left(\frac{lado}{2}\right)^2 + 120^2 \Rightarrow lado = \frac{4\sqrt{3}}{5} \cong 1385 \text{ cm}$

$Área_{\ hexágono} = 36 \cdot lado = 36 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{72\sqrt{3}}{25} \cong 4'988 \text{ cm}^2$

$V_{prisma\ hexagonal} = Área_{\ hexágono} \cdot altura = \frac{72\sqrt{3}}{25} \cdot 0'5 = \frac{36\sqrt{3}}{25} \cong 2'49 \text{ cm}^3$

$V_{cilindro\ \ tornillo} = \ A_{base} \cdot altura = \pi \cdot r^2 \cdot 05 = \pi \cdot 1^2 \cdot 05 = \frac{\pi}{2} \cong 157 \text{ cm}^3$

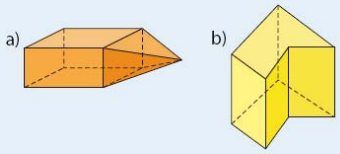
$V_{Tuerca} = V_{prisma\ hexagonal} - V_{cilindro\ \ tornillo} \cong 249 - 157 \cong 92 \text{ cm}^3$

ACTIVIDADES FINALES PAG. 172

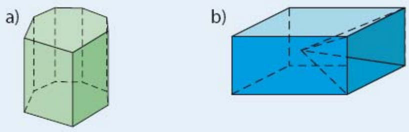
EJERCICIOS

Tipos de poliedros

○ **19.** Indica cuál de los siguientes poliedros es cóncavo:

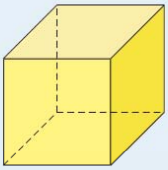


○ **20.** Indica cuál de los siguientes poliedros es convexo:

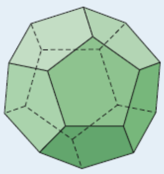


Fórmula de Euler

○ **21.** Comprueba si se verifica la fórmula de Euler para el hexaedro o cubo.



○ **22.** Comprueba si se verifica la fórmula de Euler para el dodecaedro.



Poliedros regulares

◐ **23.** Calcula el área de un tetraedro de 5 cm de lado.

◐ **24.** Calcula el área lateral de un octaedro de 12 cm de arista.

○ **25.** Calcula el área total de un ortoedro cuyas dimensiones son 12, 3 y 7 cm.

○ **26.** Calcula el volumen del ortoedro del ejercicio anterior.

◐ **27.** Calcula el área total de un ortoedro en función de las medidas *a*, *b* y *c* de sus aristas dadas en centímetros.

○ **28.** Calcula el área total de un cubo en función de la medida de sus aristas.

○ **29.** Expresa el volumen de un ortoedro en función de sus tres dimensiones.

○ **30.** Calcula la diagonal de un cubo de 9 cm de arista.

○ **31.** Calcula la diagonal de un ortoedro de 12 m de largo, 6 m de ancho y 4 m de alto.

◐ **32.** Calcula la diagonal de un cubo en función de su arista, recordando la fórmula de la diagonal de un ortoedro que dedujimos en las actividades resueltas.

● **33.** Llamamos poliedros conjugados a aquellos poliedros en los cuales el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro y viceversa. Señala, de los cinco poliedros regulares, aquellos que son conjugados.

Prismas

◐ **34.** Dibuja el desarrollo de un prisma regular de base triangular con una arista básica de 8 cm y una arista lateral de 9 cm. Calcula su área lateral y total.

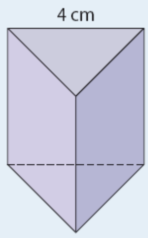
○ **35.** Calcula el volumen del prisma del ejercicio anterior.

◐ **36.** Dibuja el desarrollo de un prisma de base pentagonal y calcula su área total sabiendo que mide 10 cm de altura, su arista básica es de 1'5 cm y la apotema de la base es de 1 cm.

○ **37.** Calcula el volumen del prisma del ejercicio anterior.

○ **38.** Calcula el volumen de una viga de madera de 2'20 m de largo, 30 cm de ancho y 50 cm de alto.

◐ **39.** Calcula la altura de un prisma como el de la figura sabiendo que su volumen es de 17'3 m³.



19. a) No, b) Sí

20. a) Sí, b) No

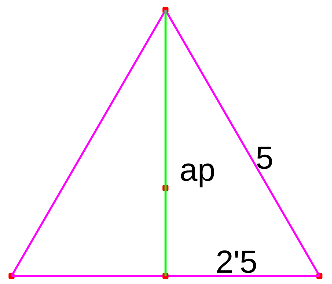
21. 6 + 8 = 12 + 2 (C = 6, V = 8 , A = 12)

22. 12 + 20 = 30 + 2 (C = 12, V = 20, A = 30)

23.

$$A = 4 \cdot \frac{5 \cdot ap}{2} = 10 \cdot ap$$

La apotema del tetraedro coincide con la altura de una cara.



$$25 = ap^2 + 6'25 \Rightarrow ap^2 = 18'75 \Rightarrow \boxed{ap = 4'33\ cm}$$

$$\boxed{Área = 43'3\ cm^2}$$

24.

La altura de un triángulo equilátero de x cm de lado es $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$$A_L = 8 \cdot \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12}{2} \Rightarrow \boxed{A_L \cong 498'83\ cm^2}$$

25. $A_T = 2 \cdot 12 \cdot 3 + 2 \cdot 12 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow \boxed{A_T = 282\ cm^2}$

26. $V = 12 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow \boxed{V = 252\ cm^3}$

27. V = 2ab + 2 ac + 2 bc cm^3

28. V = 6 a^2

29. V = $a$bc

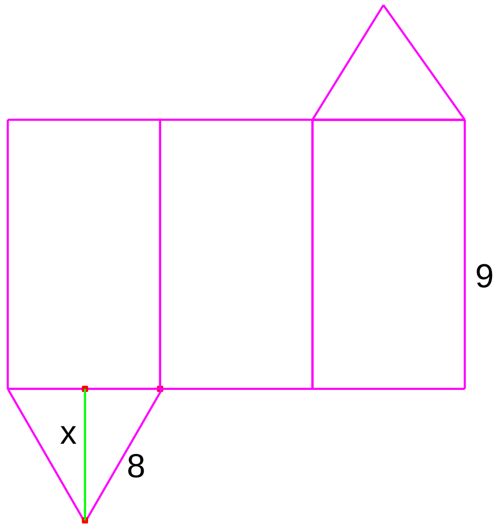
30. $D = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 9\sqrt{3} \Rightarrow D = 15'588\ \ cm$

31. $D = \sqrt{12^2 + 6^2 + 4^2} \Rightarrow \boxed{D = 14\ m}$

32. $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \boxed{D = a\sqrt{3}}$

33.
Cubo y octaedro
Dodecaedro e icosaedro
El tetraedro es conjugado consigo mismo

34.



$A_L = 3 \cdot 9 \cdot 8 \Rightarrow A_L = 216\ cm^2$. Sea x la altura del triángulo básico.

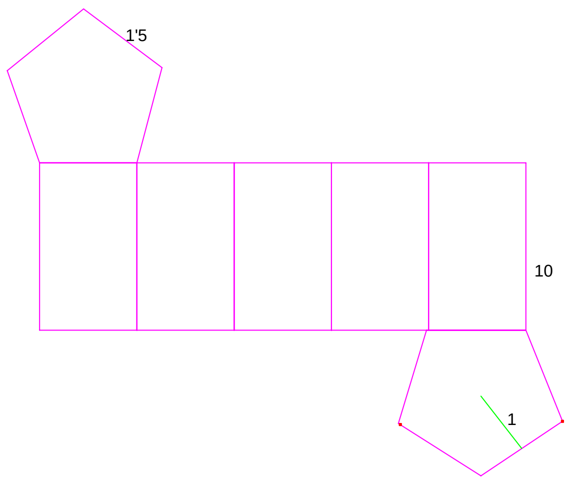
Por Pitágoras: $64 = 16 + x^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

$$A_B = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \Rightarrow A_L = 27'71\ cm^2$$

$$A_T = A_L + 2A_B \Rightarrow \boxed{A_T \cong 271'42\ cm^2}$$

35. $V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 16\sqrt{3} \cdot 9 \Rightarrow \boxed{V \cong 249'42\ cm^3}$

36.



$$A_L = 5 \cdot 10 \cdot 1'5 \Rightarrow A_L = 75\ cm^2$$

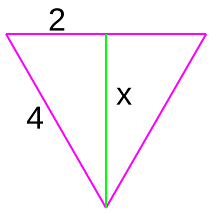
$$A_B = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_B = \frac{5 \cdot 1'5}{2} = \frac{7'5}{2}$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B \Rightarrow A_T = 75 + 7'5 \Rightarrow \boxed{A_T = 82'5\ cm^2}$$

37. $V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 3'75 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{V = 37'5\ cm^3}$

38. $V = 2'2 \cdot 0'3 \cdot 0'5 \Rightarrow V = 0'33\ m^3 \Rightarrow \boxed{V = 330\ dm^3}$

39.

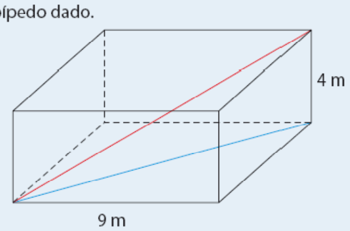


$$4^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{12}$$

$$A_B = \frac{4 \cdot \sqrt{12}}{2} \Rightarrow A_B = 2\sqrt{12}$$

$$V = A_B \cdot h \Rightarrow 17'3 = 2\sqrt{12} \cdot h \Rightarrow \boxed{h \cong 2'5\ cm}$$

○ **40.** Consideremos un paralelepípedo cuyas medidas son las siguientes: 9 m de largo, 6 m de ancho y 4 m de alto. Calcula el área lateral, el área total, su volumen, la medida de su diagonal y la longitud de la arista de un cubo que tenga el mismo volumen que el paralelepípedo dado.



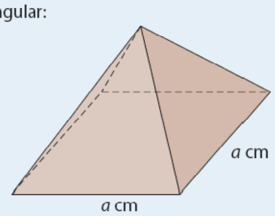
Pirámides

○ **41.** Una pirámide regular tiene por base un cuadrado. Si su apotema es de 15 cm y el lado básico mide 6 cm, ¿cuál será su área total?

● **42.** Calcula el volumen de una pirámide regular cuya base es un hexágono de 8 cm de lado y cuya altura es de 0'2 m.

◐ **43.** Dibuja el desarrollo de una pirámide cuadrangular de 6 cm de arista básica y 5 cm de arista lateral. Calcula su área total.

● **44.** Calcula el área total de la siguiente pirámide de base cuadrangular:

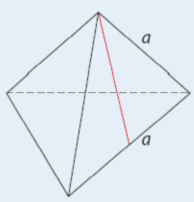


○ **45.** Calcula el volumen de una pirámide de 15 cm de altura cuya base es un cuadrado de 16 cm de lado.

● **46.** Calcula el área total de una pirámide hexagonal, siendo su apotema de 10 cm y su arista básica de 6 cm.

◐ **47.** Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular cuya altura es dos veces la arista básica.

◐ **48.** Expresa la apotema de un tetraedro en función de su arista.



● **49.** Si la altura del tetraedro anterior coincide con la medida de la apotema de la base, expresa su volumen en función de dicha arista.

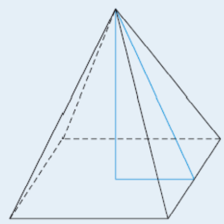
○ **50.** Deduce, del ejercicio anterior, el volumen de un tetraedro de 2 cm de arista.

◐ **51.** Calcula el volumen de una pirámide regular cuadrangular, tal que su arista mide 16 cm y su altura 10 cm.

● **52.** Calcula el volumen de una pirámide hexagonal cuya apotema tiene la misma medida que la arista de la base. Exprésalo en función del lado de la base.

○ **53.** Aplica el ejercicio anterior para calcular la altura y el volumen de una pirámide de 8 cm de lado básico y de apotema.

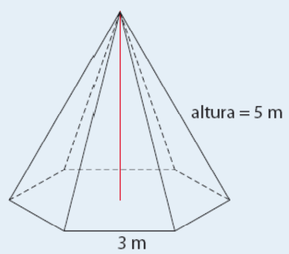
◐ **54.** Calcula el volumen de una pirámide regular de base cuadrada de 17 cm de apotema y 16 m de arista básica.



◐ **55.** Calcula el volumen de una pirámide de altura $10\sqrt{3}$ cm y cuya base es un triángulo equilátero de $8\sqrt{3}$ cm de lado.

◐ **56.** Calcula el área lateral de una pirámide de base un cuadrado de $\sqrt{32}$ m de lado, sabiendo que tiene una altura de $2\sqrt{2}$ m.

◐ **57.** Observa la siguiente pirámide de base hexagonal.



Calcula:

a) La arista de la pirámide.

b) El área lateral.

c) El área de la base.

d) El área total.

e) El volumen de la pirámide.

Poliedros 173

40.

$$A_L = 2{\cdot}9{\cdot}4 + 2{\cdot}4{\cdot}6 \Rightarrow \boxed{A_L = 120\ m^2}$$

$$A_T = 2{\cdot}9{\cdot}4 + 2{\cdot}4{\cdot}6 + 2{\cdot}6{\cdot}9 \Rightarrow \boxed{A_T = 228\ m^2}$$

$$V = 4{\cdot}6{\cdot}9 \Rightarrow \boxed{V = 216\ m^3}$$

$$D = \sqrt{4^2 + 6^2 + 9^2} \Rightarrow \boxed{D \cong 11'53\ m}$$

Sea a la arista del cubo $\Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow \boxed{a = 6\ m}$

41.

$$A_B = 36\ \text{cm}^2$$

$$A_L = 4\frac{6{\cdot}15}{2} \Rightarrow A_L = 180\ \text{cm}^3$$

$$A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = 36 + 180 \Rightarrow \boxed{A_T = 216\ cm^2}$$

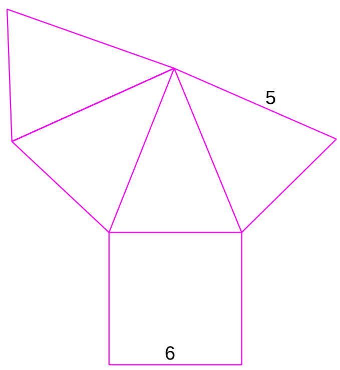
42.

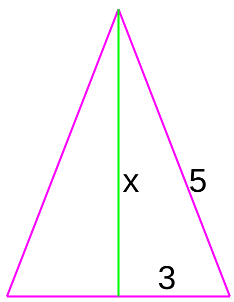
Sea L la longitud de la arista básica.

$$A_B = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 \Rightarrow A_B = 96\sqrt{3} \Rightarrow A_B \cong 166'28\ \text{cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}A_B{\cdot}h \Rightarrow V = \frac{1}{3}166'28{\cdot}20 \Rightarrow \boxed{V \cong 1108'5\ cm^3}$$

43.





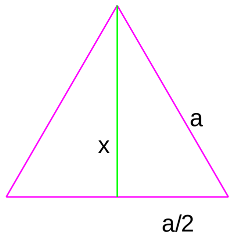
$A_B = 36$. Sea x el valor en cm de la apotema de la pirámide.

$$25 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x = 4$$

$$A_L = 4{\cdot}\frac{6{\cdot}4}{2} \Rightarrow A_L = 48\ cm^2$$

$$A_T = 36 + 48 \Rightarrow \boxed{A_T = 84\ cm^2}$$

44.



$$a^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

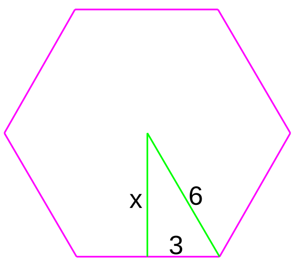
$$A_L = 4\cdot\frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} \Rightarrow A_L = a^2\sqrt{3}\ cm^2$$

$$A_B = a^2$$

$$\boxed{A_T = a^2 + a^2\sqrt{3}\ cm^2}$$

45. $V = \frac{1}{3}\cdot A_B\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 16^2\cdot 15 \Rightarrow \boxed{V = 1280\ cm^3}$

46.



$$A_B = \frac{Perímetro\cdot x}{2} = \frac{36\cdot x}{2} = 18x$$

Por el teorema de Pitágoras: $36 = 9 + x^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{27} \Rightarrow x \cong 5'2\ m \Rightarrow \boxed{A_B = 93'6\ cm^2}$

$A_L = 6\cdot\frac{6\cdot 10}{2} \Rightarrow \boxed{A_L = 180\ cm^2}$, $\boxed{A_T = 273'6\ cm^2}$

47. Sea *a* la longitud de la arista básica.

$$V = \frac{1}{3}A_b\cdot h = \frac{1}{3}a^2\cdot 2a \Rightarrow \boxed{V = \frac{2}{3}a^3}$$

48. Sea a la longitud de la arista y *ap* la apotema de la misma.

$$a^2 = ap^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \boxed{ap = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

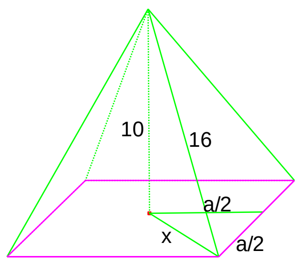
49. $V = \frac{1}{3} A_B \cdot altura$

$$A_B = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} \Rightarrow A_B = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3}{8}}$$

50. $\boxed{v = 1\ cm^3}$

51.

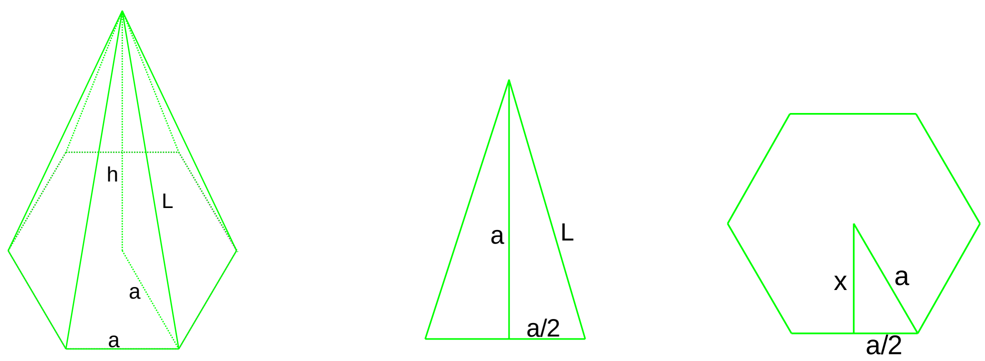


$$16^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 156.$$

$$156 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 312$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{V = 1040\ cm^3}$$

52.



$$a^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$A_B = \frac{6a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} \Rightarrow A_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$L^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow L^2 = \frac{5}{4} a^2$$

$$L^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - a^2 \Rightarrow h^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3}$$

53. Aplicamos el ejercicio anterior siendo $a = 8 \Rightarrow \boxed{\text{h} = 4 \text{ cm}}$

$V = 128 \; V = 128\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{V \cong 221'7 \; cm^3}$

54. Sea h la altura de la pirámide. Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$17^2 = 8^2 + h^2 \Rightarrow \boxed{h = 15}$

$V = \frac{1}{3} 16^2 \cdot 15 \Rightarrow \boxed{V = 1280 \; cm^3}$

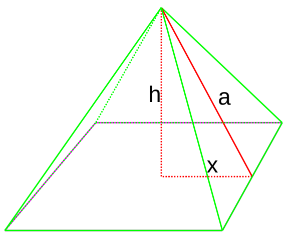
55. Calculamos primeramente la altura de la base:

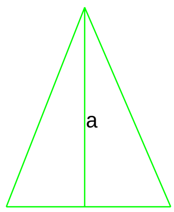
$(8\sqrt{3})^2 = a^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow a = 12$

$A_b = \frac{8\sqrt{3} \cdot 12}{2} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 48\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = 1440 \text{ cm}^3$

56.



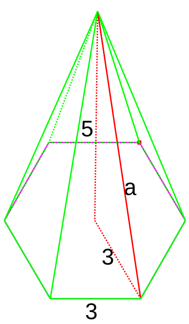


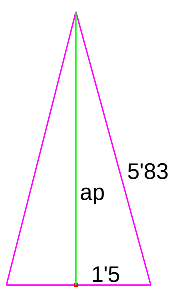
Sea x la mitad de la longitud del lado $\Rightarrow x = \frac{\sqrt{32}}{2}$

$a^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$A_L = 4 \cdot \frac{\sqrt{32} \cdot 4}{2} = 8\sqrt{32} = 32\sqrt{2} \cong 45'25 \; m^2$

57.





a) $a^2 = 3^2 + 5^2 \Rightarrow a = \sqrt{34}$ cm

b) $34 = 1'5^2 + ap^2 \Rightarrow ap = 5'63$ cm

$$A_L = 6 \cdot \frac{3 \cdot 5'63}{2} \Rightarrow \boxed{A_L = 50'63\ cm^2}$$

c) $$\acute{A}rea\ base = \frac{Perímetro \cdot apotemabase}{2}$$

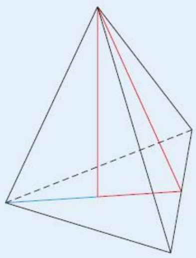
$$Apotema\ base = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot lado^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3^2 \cong 23'38$$

$$\text{Área base} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 23'38}{2} \cong 210'42\ cm^2$$

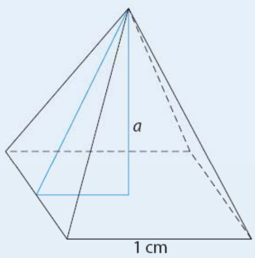
d) $$A_T = A_L + A_B \Rightarrow A_T = 50'63 + 210'42 \Rightarrow \boxed{A_T = 261'05\ m^2}$$

e) $$V = A_B \cdot h \Rightarrow A_T = 210'42 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{V = 1052'1\ m^3}$$

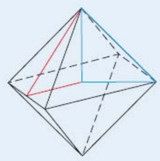
● **58.** Observa el siguiente tetraedro. Calcula su volumen sabiendo que su arista mide $\sqrt{2}$ cm. Para ello, observa que el pie de la altura del tetraedro coincide con el baricentro de la cara sobre la que se apoya.



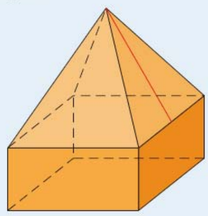
● **59.** Calcula el área total de la siguiente pirámide regular de altura a, siendo su base un cuadrado de 1 cm de lado.



● **60.** Calcula el volumen del octaedro de la figura cuyo lado mide a cm. ¿Cuál sería el volumen en caso de que $a = \sqrt{8}$ cm?



◐ **61.** Observa la figura:



Se trata de un obelisco formado por un prisma de base cuadrangular de 10 m de arista y 6 m de altura. Sobre él hemos construido una pirámide de 12 m de apotema. Calcula:

a) Área de la superficie piramidal.

b) Área de la superficie prismática.

c) Volumen de la pirámide.

d) Volumen del prisma.

e) Área total del obelisco.

f) Volumen del obelisco.

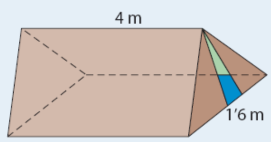
PROBLEMAS

○ **62.** En un polideportivo existen dos piscinas. Para pintar los 44 m² de la piscina infantil se ha empleado 1 kg y cuarto de pintura y para llenarla se han necesitado 24 m³ de agua. La piscina de los adultos es 3 veces más larga, 3 veces más profunda y 3 veces más ancha que la piscina infantil. Calcula los kilos de pintura que se han necesitado para pintar la piscina de los adultos y los metros cúbicos de agua empleados en llenarla.

○ **63.** Queremos pintar las paredes del salón de una casa que tiene forma de paralelepípedo cuyas dimensiones son las siguientes: 6 m de largo, 4 m de ancho y 2'5 m de alto. Si con un bote de 10 kg podemos pintar 25 m², ¿cuántos botes de pintura necesitaremos para pintar las paredes de la habitación si cada bote de 10 kg cuesta 28 €?, ¿cuánto costará pintar la sala?

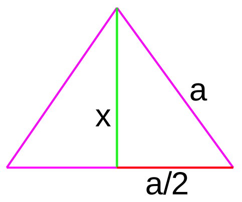
○ **64.** Una botella de licor tiene forma de ortoedro y mide 10, 12 y 20 cm. Calcula los cm³ que son necesarios para llenar la botella.

○ **65.** Calcula la cantidad de tela que es necesaria para construir una tienda de campaña en forma de prisma como la de la figura, sabiendo que la puerta (la base) y su opuesta son triángulos equiláteros. Calcula también la cantidad de aire que queda en el interior de la tienda cuando la cerramos.



174 UNIDAD 9

58.

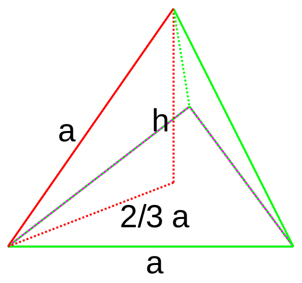


Sea a la arista del tetraedro y sea x la altura del triángulo de la base:

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}a .$$

En nuestro caso, como $a = \sqrt{2} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$$A_B = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} \Rightarrow A_B = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4} \text{ cm}^2$$



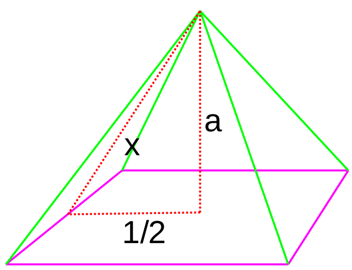
Observamos que el pie de la altura está sobre el baricentro del triángulo básico y, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

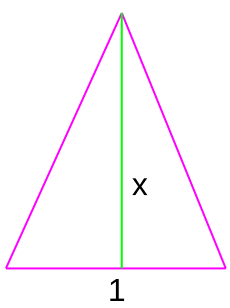
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{5}}{3}a$$

$$V = \frac{1}{3}A_B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}\,a}{3} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{15}\,a^3}{36}$$

En nuestro caso, como $a = \sqrt{2} \Rightarrow V = \dfrac{\sqrt{30}}{18} \Rightarrow \boxed{V \cong 0'3\ cm^3}$

59.





Sea x la longitud en cm de la apotema de la pirámide. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

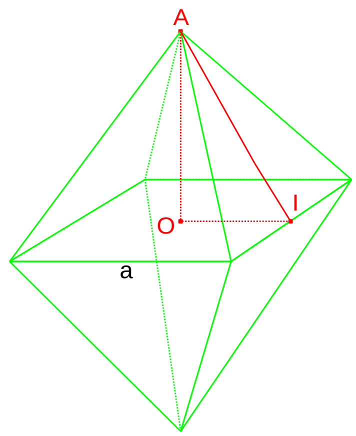
$$x^2 = a^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+1}$$

$$A_L = 4\frac{1 \cdot x}{2} \Rightarrow A_L = 2x \Rightarrow \boxed{A_L = \sqrt{4a^2+1}\ cm^2}$$

$$\boxed{A_B = 1\ cm^2}$$

$$\boxed{A_T = 1 + \sqrt{4a^2+1}\ \ cm^2}$$

60.



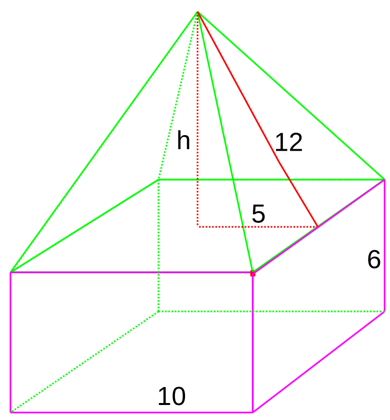
Ya vimos en el ejercicio 58 que AI = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $OI = \frac{a}{2}$

$$AI^2 = OI^2 + OA^2 \Rightarrow OA^2 = AI^2 - OI^2 \Rightarrow OA^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow OA^2 = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow OA = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}A_B \cdot altura = \frac{2}{3}A_B \cdot OA \Rightarrow V = \frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}\ cm^3}$$

Si $a = \sqrt{8} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{8}^3}{3}\sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{32}{3}cm^3 \Rightarrow \boxed{V \cong 10'6\ cm^3}$

61.



a) $A_{SPiramidal} = 4 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2} \Rightarrow \boxed{A_{SPiramidal} = 240\ m^3}$

b) $A_{S\,\text{Primática}} = A_{B\,\text{Prismática}} + A_{L\,\text{Prisma}} = 100 + 4 \cdot 10 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{A_{S\,\text{Primática}} = 340\ m^3}$

c) $V_{Pirámide} = \frac{1}{3} A_B \cdot altura = \frac{1}{3} 100h$

Aplicando el teorema de Pitágoras resulta:

$$12^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{119} \Rightarrow h \cong 10'9$$

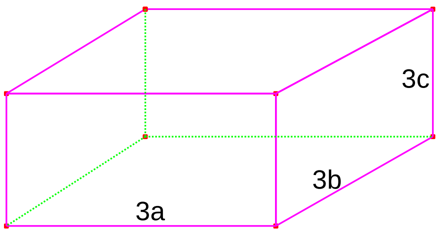
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10'9 \Longrightarrow \boxed{V_{pirámide} \cong 363'3\ \ m^3}$$

d) $V_{\text{Prisma}} = 10 \cdot 10 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{V_{Pisma} = 600\ m^3}$

e) $A_{TObelisco} = 240 + 340 \Rightarrow \boxed{A_{TObelisco} = 580\ m^3}$

f) $V_{Obelisco} \cong 363'3 + 600 \Longrightarrow \boxed{V_{Obelisco} \cong 963'3\ m^3}$

62.



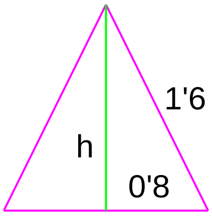
Sean a , b y c las medidas en metros de la piscina infantil.
Superficie de la piscina infantil = *2 ab + 2ac + 2 bc*
Superficie piscina adultos = 2·3· *a*·3·*b* + 2·3*a*·3·*c*+ 2 ·3*b*·3·*c*
Superficie piscina adultos = 9·*(2 ab + 2ac + 2 bc)*
Superficie piscina adultos = 9 superficie piscina infantil
Para pintar piscina adultos necesitamos $9 \cdot 1\frac{1}{4} = 9 \cdot \frac{5}{4} = 11\frac{1}{4}$ kilos de pintura
El volumen de la piscina de adultos es $V = 3a \cdot 3b \cdot 3c = 27abc$
Volumen piscina adultos = 27 veces el volumen de la piscina infantil
Volumen piscina adultos = 27 ·24 = 648 m^3

63.
En total tenemos 2 · 4 · 2’5 + 2 · 6 · 2’5 = 50 m^2 que pintar.

Necesitaremos 20 kg de pintura, es decir, 2 botes.
Pintar la sala costará 2 · 28 = 56 €

64.
Son necesarios 10 ·12 ·20 = 2400 cm^3

65.



$$1'6^2 = 0'8^2 + h^2 \Rightarrow h \cong 1'39 \Rightarrow A_{Triángulo} = \frac{1'6 \cdot 1'39}{2} \Rightarrow A_{Triángulo} = 1'11 \text{ m}^2$$

La puerta y su opuesta suman una superficie de 1'11 + 1'11 = 2'22 m^2
Las dos paredes y el suelo de la tienda ocupan una superficie de 3·4·1'6 = 19'2 m^3
En total necesitamos 19'2 + 2'22 = 21'42 m^2 de tela.
En el interior de la tienda queda $\frac{1'6 \cdot 1'39}{2} \cdot 4 \cong 4'45 \text{ m}^3$ de aire.

○**66.** La superficie de un depósito de arena de forma cúbica (sin tapa) es de 80 m^2. Calcula el volumen de arena que podemos almacenar en dicho depósito.

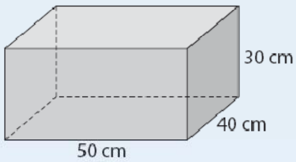
○**67.** Aparece varado en la playa un cetáceo y, a pesar de los esfuerzos de muchas personas para que vuelva al mar, el animal muere. Para evitar problemas sanitarios le entierran en un sitio cercano a la playa. El cetáceo mide 20 m de largo, 3 m en su parte más ancha y 2 m de alto. Si la fosa que se cava es 3 m más larga que el animal, 2 m más ancha y 5 m más alta, calcula la cantidad de metros cúbicos de tierra que hay que cavar.

○**68.** En una obra van a derribar un muro que tiene 24 m de largo, 3'25 m de alto y 50 cm de ancho. ¿Cuántos contenedores de 4 m de largo, 1'5 m de ancho y 1 m de alto se necesitan para retirar los escombros?

○**69.** Hemos comprado una nevera de 2 m de alto, 75 cm de largo y 1 m de profundidad. Para evitar que se raye, viene envuelta en cartón. ¿Cuántos metros cuadrados de cartón han sido necesarios para envolverla?

○**70.** Un niño tiene dos rompecabezas formados, cada uno, por ocho cubos de 6 cm de arista. Si guarda las piezas mezclándolas en una caja rectangular de 2 376 cm^3, ¿cuántas de las piezas faltan, o bien sobran, para llenar la caja?

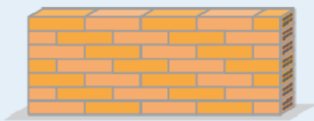
○**71.** Un cantero debe tallar unas piedras en forma de prisma de base rectangular con las medidas de la figura.



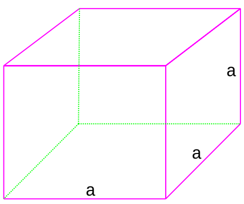
Si por ese trabajo le pagan 500 € por metro cúbico, ¿cuánto cobrará si le encomiendan la construcción de 20 piedras como la anterior?

○**72.** Queremos envolver con papel de regalo una caja de zapatos de 40 cm de largo, 15 cm de ancho y 12 cm de alto. ¿Qué cantidad de papel necesitamos?

○**73.** Hemos levantado una pared de 15 m de largo y 3 m de alto. Para ello empleamos ladrillos de 20 cm de largo, 10 cm de alto y 4 cm de ancho. Calcula el volumen de la pared. Indica el número de ladrillos necesario para levantar la pared.



66.



$$5a^2 = 80 \Rightarrow a = 4$$
$$V = a^3 \Rightarrow V = 4^3 \Rightarrow \boxed{V = 64\ m^3}$$

67. V = 23 · 5 · 7 = 805 m^3

68.

Volumen del muro = 24 · 3’25 · 0’5 = 39 m^3
Volumen del contenedor = 4 · 1’5 · 1 = 6 m^3

Necesitaremos $\frac{39}{6} = 6\frac{1}{2}$ contenedores

69. Se trata del área total de la nevera = 2 · (0’75·2 + 1·0’75 + 2·1) = 8’5 m^2

70. El volumen de cada cubo es de 216 cm^3 $\Rightarrow$ Si la caja tiene 2376 cm^3, tiene capacidad para $\frac{2376}{216} = 11$ cubos. Le sobran 5 cubos.

71.
El volumen de cada piedra es de 0’5 · 0’4 · 0’3 = 0’06 m^3
Si le encargan 20 piedras, en total talla 20 · 0’06 = 1’2 m^3
Cobrará 500 · 1’2 = 600 €

72. $\left(2{\cdot}40{\cdot}12 + 2{\cdot}15{\cdot}12 + 2{\cdot}40{\cdot}15\right)$=2520 cm^2

73.

$V_{pared} =$ 15·3·0’04 $\Rightarrow V_{pared} =$ 1’8 m^3

$V_{ladrillo} = 20 \cdot 10 \cdot 4 = 800\ cm^3$

Necesitaremos $\frac{1800000}{800}$ = 2250 ladrillos

AUTOEVALUACIÓN PAG. 175

AUTOEVALUACIÓN

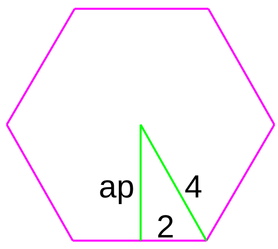
1. Comprueba que se verifica la fórmula de Euler en el icosaedro.
2. Calcula el área total y el volumen de un prisma regular de base hexagonal de 4 cm de arista básica y 8 cm de altura.
3. Calcula el área total de un prisma cuya base es un triángulo equilátero de *a* cm de longitud y cuya altura mide igual que la arista básica.
4. Calcula el volumen del prisma del ejercicio anterior.
5. Calcula el área de un octaedro en el que sus aristas miden 6 cm.
6. Calcula el volumen del octaedro anterior.
7. Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas medidas son 10, 11 y 12 cm.
8. Calcula el volumen del ortoedro del ejercicio anterior.
9. Calcula el volumen de una pirámide de base cuadrada de 6 cm de arista básica y 10 cm de altura.
10. Calcula el área total de la pirámide del ejercicio anterior.

Poliedros 175

1.

C = 20 , V = 12 , A = 30
20 + 12 = 30 + 2 $\Rightarrow$ C + V = A + 2

2.



$$16 = 4 + ap^2 \Rightarrow ap = 2\sqrt{3} \Rightarrow ap \cong 3'46$$

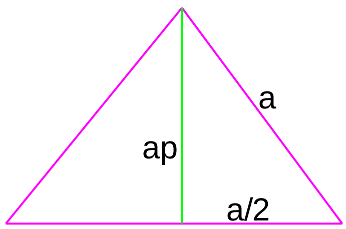
$$A_B = \frac{Perímetro \cdot apotema}{2} = \frac{24 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_B \cong 41'57\ cm^2}$$

$$A_L = 6 \cdot 4 \cdot 8 \Rightarrow \boxed{A_L = 192\ cm^2}$$

$$A_T = A_L + 2A_B \Rightarrow A_L = 192 + 83'14 \Rightarrow \boxed{A_T \cong 275'14\ cm^2}$$

$$V = A_B \cdot h \Rightarrow V = 24\sqrt{3} \cdot 8 \Rightarrow V = 192\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{V \cong 332'55\ cm^3}$$

3.



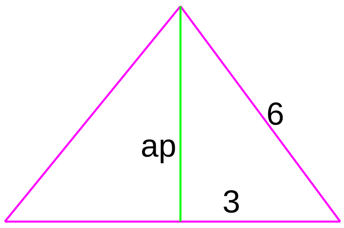
$$a^2 = ap^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$A_B = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow A_B = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, \qquad A_L = 3a^2$$

$$A_T = A_L + 2A_B \Rightarrow A_T = 3a^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow \boxed{A_T = 3a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2}$$

4. $V = A_B \cdot h \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot a \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3}$

5.



$$ap = 3\sqrt{3}\ . \quad Área\ de\ una\ cara = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Área\ de\ una\ cara = 9\sqrt{3}$$

$$A_T = 8 \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow A_T = 72\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_T \cong 124'7\ cm^2}$$

6. Aplicando el resultado del ejercicio 60 tenemos $V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}\ cm^3$, siendo a la arista del octaedro. En nuestro caso, $a = 6$

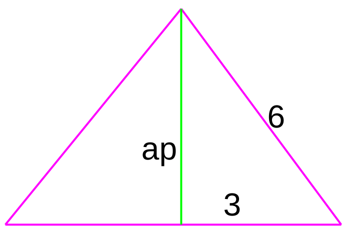
$$V = \frac{6^3}{3}\sqrt{2} = 72\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{V \cong 101'82\ cm^3}$$

7. $d = \sqrt{10^2 + 11^2 + 12^2} \Rightarrow d = \sqrt{365} \Rightarrow \boxed{d \cong 19'1\ cm}$

8. $V = 10 \cdot 11 \cdot 12 \Rightarrow \boxed{V = 1320\ cm^3}$

9. $V = \frac{1}{3}A_B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}36 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{V = 120\ cm^3}$

10.



$$ap = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Área de una cara} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Área de una cara} = 9\sqrt{3}$$

$$A_L = 4 \cdot 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \Longrightarrow A_L \cong 62'35\ \ cm^2$$

$$A_T = 36 + 62'35 \Longrightarrow \boxed{A_T \cong 98'35\ \ cm^2}$$

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 177

Olimpiada matemática

1. En el centro de una laguna circular de 3 m de diámetro crece un junco 30 cm sobre el agua. Tras un fuerte viento el junco se inclina y, justo cuando está completamente cubierto de agua, alcanza la orilla de la laguna. Calcula la profundidad de la laguna y la medida del junco.

2. Un número positivo x verifica la siguiente relación: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Demuestra que $x^5 + \frac{1}{x^5}$ es un número entero y calcula su valor.

1. Profundidad de la laguna = 360 cm; longitud del junco = 390 cm

2. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=7+2=9\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$$

$$3\cdot 9=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}+3\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$3\cdot 9=x^3+\frac{1}{x^3}+3\cdot 3\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

$$7\cdot 18=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^5}=x^5+\frac{1}{x^5}+3$$

$$126=x^5+\frac{1}{x^5}+3\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=123$$

ACTIVIDADES PAG. 180

ACTIVIDADES

1. Una puerta giratoria mide 4 m de alto y 2 m de ancho. Calcula el área lateral del cuerpo que genera.
2. Queremos construir un barril de cerveza de 1 m de alto. ¿Qué cantidad de acero será necesaria si el radio de la tapa es de 40 cm?
3. Una tubería de un oleoducto mide 2 km de longitud y su radio es de 0'5 m. ¿Qué cantidad de metal será necesaria para construirla?

1. $A_L = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 \Rightarrow A_L = 16\pi \Rightarrow \boxed{A_L \cong 50'26 \text{ m}^2}$

2. $A_L = 2 \cdot \pi \cdot 0'4 \cdot 1 \Rightarrow A_L = 0'8\pi \Rightarrow \boxed{A_L \cong 2'51 \text{ m}^2}$

$A_B = \pi \cdot 0'4^2 \Rightarrow A_B = 0'16\pi$

$A_T = A_L + 2A_B \Rightarrow A_T = 0'8\pi + 0'32\pi \Rightarrow A_T = 1'12\pi \Rightarrow \boxed{A_T \cong 3'52 \text{ cm}^2}$

3. Se trata de calcular el área lateral de un cilindro:

$A_L = 2\pi \cdot 0'5 \cdot 2000 \Rightarrow A_L = 2000\pi \Rightarrow \boxed{A_L \cong 6283'19 \text{ m}^2}$

ACTIVIDADES PAG. 181

ACTIVIDADES

4. Calcula el área de un cono de 10 cm de radio de la base y 12 cm de generatriz.
5. Si la altura de un cono es de 12 cm y el radio de la base es de 5 cm, ¿cuánto mide su generatriz?
6. Calcula la altura de un cono de 25 cm de generatriz y 15 cm de radio de la base.

4. $A_L = \pi \cdot 10 \cdot 12 \Rightarrow A_L = 120\pi \Rightarrow \boxed{A_L \cong 377 \text{ cm}^2}$

$A_B = \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A_B = 100\pi \Rightarrow \boxed{A_B \cong 314'16 \text{ cm}^2}$

$A_T = 120\pi + 100\pi \Rightarrow A_T = 220\pi \Rightarrow \boxed{A_T \cong 691'15 \text{ cm}^2}$

5. $g^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow \boxed{g = 13 \text{ cm}}$

6. $25^2 = 15^2 + h^2 \Rightarrow \boxed{h = 20 \text{ cm}}$

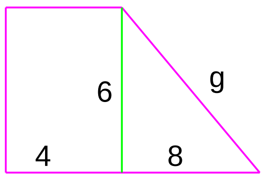
ACTIVIDADES PAG. 182

ACTIVIDADES

7. Calcula el área total de un tronco de cono sabiendo que $r = 3$ m, $R = 9$ m y $g = 6$ m.
8. Calcula el área lateral de un tronco de cono de 6 cm de altura, sabiendo que los radios de sus bases son $r = 4$ cm y $R = 12$ cm.

7. $A_{Tronco\ cono} = \pi \cdot (9+3) \cdot 6 + \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_{Tronco\ cono} = 162\pi \Rightarrow \boxed{A_{Tronco\ cono} \cong 508'9\ \text{m}^2}$

8. $A_{Lateral\ Tronco\ cono} = \pi \cdot (4+12) \cdot g = 16\pi g$



$$g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10 \Rightarrow$$

$$A_{Lateral\ Tronco\ cono} = 16\pi \cdot 10 \Rightarrow A_{Lateral\ Tronco\ cono} = 160\pi \Rightarrow \boxed{502'66\ \text{cm}^2}$$

ACTIVIDADES PAG. 183

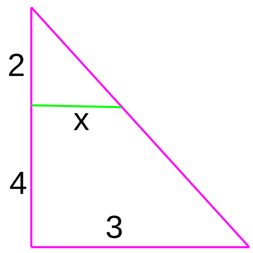
ACTIVIDADES

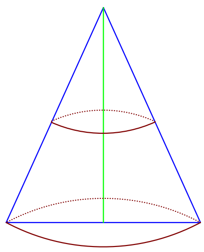
9. Calcula el volumen de un cono de 6 cm de altura y 3 cm de radio.

10. Si al cono del ejercicio anterior le cortamos con un plano paralelo a la base distante 2 m del vértice, obtenemos, bajo dicho plano, un tronco de cono. Calcula el volumen de dicho tronco.

9. $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6 \Rightarrow V = 18\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 56'55\ \text{cm}^3}$

10.





$$\frac{6}{3} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 1$$

$$V_{TC} = V_{Cono\ mayor} - V_{Cono\ menor} = \frac{\pi}{3}\left(R^2 \cdot H - r^2 \cdot h\right) \Rightarrow V_{TC} = \frac{\pi}{3}\left(3^2 \cdot 6 - 1^2 \cdot 2\right) \Rightarrow$$

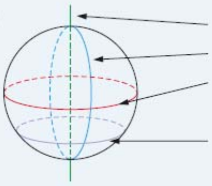
$$V_{TC} = \frac{52\pi}{3} \Rightarrow \boxed{V_{TC} \cong 54'45\ \text{m}^2}$$

ACTIVIDADES PAG. 184

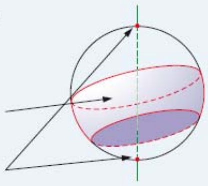
ACTIVIDADES

11. Nombra en tu cuaderno las partes que se indican en las siguientes esferas:

a)



b)



11.
a) Eje de giro , meridianos , ecuador , paralelos.
b) Polos , círculo máximo , zona esférica.

ACTIVIDADES PAG. 185

ACTIVIDADES

12. ¿Podrías decir cuáles son las coordenadas geográficas de Madrid, La Habana, Manila y Buenos Aires?

13. Cuando estás desayunando, ¿qué están haciendo en Tokio?

12. Madrid : Latitud 40º 25’ N , Longitud 3º 41’ W
La Habana : Latitud 23º 07’ N , Longitud 82º 30’ W
Manila: Latitud 6º 21’ N , Longitud 162º 24’ E
Buenos Aires : Latitud 34º 36’ S , Longitud 58º 29’ W

13. Anochece.

ACTIVIDADES PAG. 186

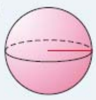
ACTIVIDADES

14. Calcula el volumen de las esferas con los radios siguientes:

a) 10 cm b) 5 mm c) 3 km d) 100 hm

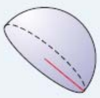
15. Calcula el volumen de las siguientes figuras esféricas:

a)



$r = 5$ m

b)



$r = 9$ m

14.

a) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 10^3 \Rightarrow V = \dfrac{4000\pi}{3} \cong 4188.79 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 5^3 \Rightarrow V = \dfrac{500\pi}{3} \cong 523.6 \text{ mm}^3$

c) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 36\,\pi \cong 113.1 \text{ km}^3$

d) $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 100^3 \Rightarrow V = \dfrac{4000000\pi}{3} \cong 418879’02 \text{ hm}^3$

15.

a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3} \cong 523.6 \text{ m}^3$

b) $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 \Rightarrow V = \frac{2}{3}\pi \cdot 9^3 \Rightarrow \text{V} = 486\pi \cong 1526\text{'}8 \text{ m}^3$

ACTIVIDADES PAG. 187

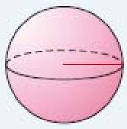
ACTIVIDADES

16. Calcula el área de las esferas con los radios siguientes:

a) 2 cm   b) 32 hm   c) 9 dam   d) 10 m

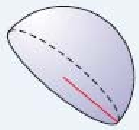
17. Calcula el área de las siguientes superficies esféricas:

a)



$r = 5$ m

b)



$r = 9$ m

16.

a) $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 2^2 \Rightarrow A = 16\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 50\text{'}26 \text{ cm}^2}$

b) $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 32^2 \Rightarrow A = 4096\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 12867\text{'}96 \text{ hm}^2}$

c) $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 9^2 \Rightarrow A = 324\pi \Rightarrow \boxed{\text{A} \cong 1017.88 \text{ dam}^2}$

d) $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 10^2 \Rightarrow A = 400\pi \Rightarrow \boxed{\text{A} \cong 1256\text{'}64 \text{ m}^2}$

17.

a) $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 100\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 314\text{'}16 \text{ m}^2}$

b) $A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 9^2 \Rightarrow A = 162\pi + 81\pi = 243\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 763\text{'}4 \text{ m}^2}$

DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 188

Desafío matemático

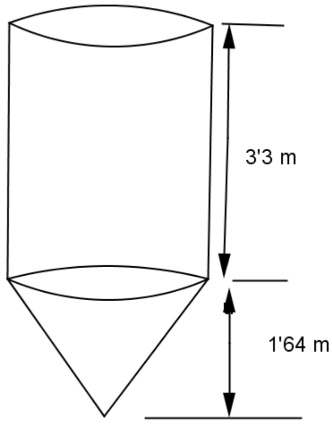
El problema de los silos

Las matemáticas también están presentes en la agricultura. En el año 2010 el campo español ha producido una media de 3 540 kg de cereal por hectárea. Los vecinos de una determinada localidad disponen de 1 200 hectáreas dedicadas al cultivo de trigo. Almacenar el grano es un problema cuya solución no es baladí, pues implica que no debe estropearse durante el tiempo que dure el almacenaje, a salvo de la humedad, incursiones de roedores, aves, etc. Actualmente este problema está resuelto con la elección de silos de almacenamiento de grano. Algunos se hacen de chapa galvanizada y los hay de diversos tamaños. En la cooperativa Virgen del Campo, donde almacenan el grano los vecinos del municipio, existen 20 silos como el de la imagen, de 4'94 metros de altura, teniendo la superficie cilíndrica una longitud de 3'3 metros y la superficie cónica una altura de 1'64 metros.

Si la longitud de la circunferencia exterior es de 5'97 metros:

1. Calcula la capacidad de almacenaje en metros cúbicos de cada silo. Aproxima los resultados con dos cifras decimales.
2. Si la cooperativa posee 25 silos, calcula la capacidad de almacenaje de la cooperativa. Aproxima los resultados con dos cifras decimales.
3. Suponiendo que cada metro cúbico supone 734 kg de trigo, calcula las toneladas métricas de trigo que puede almacenar la cooperativa actualmente.
4. Dados los resultados de la cosecha de 2010, ¿crees que la cooperativa tendrá silos suficientes para almacenar todo el cereal?
5. En caso de que necesitasen adquirir nuevos silos, ¿cuántos comprarían?
6. Si cada uno de los silos tiene un precio de venta al público de 1 086 euros, ¿qué inversión sería necesaria para poder acometer la obra?
7. Teniendo en cuenta que el precio del trigo panificable en la lonja de Salamanca se pagaba a 243 euros la tonelada métrica el 18 de enero de 2011, ¿qué ingresos obtuvo por este concepto un campesino que cultivó 33 hectáreas?
8. ¿Por qué crees que se construyeron los hórreos? Calcula el volumen de un hórreo de medidas: 4 m de largo, 2'3 metros de ancho y 1'5 de alto.
9. Si cada metro cúbico de maíz suponen 780 kg, ¿cuántas toneladas de maíz se pueden guardar en el hórreo anterior? Suponiendo que el precio del maíz es de 235 euros la tonelada, ¿qué valor tiene el maíz guardado en el hórreo si está lleno? (solo contamos la parte no abuhardillada).

1.



Para calcular el volumen del silo, tenemos que sumar el volumen del cilindro y el del cono.

- Altura del cilindro $= 4'94\text{ m} - 1'64\text{ m} = 3'3\text{ m}$
- Longitud circunferencia $= 5'97 \Rightarrow 2\pi r = 5'97 \Rightarrow r = \frac{5'97}{2\pi}$
- Volumen cilindro $= \pi r^2 g = \pi \left(\frac{5'97}{2\pi}\right)^2 3'3 \cong 9'36\text{ m}^3$
- Volumen cono $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5'97}{2\pi}\right)^2 1'64 \cong 1'55\text{ m}^3$
- Volumen del silo $= 9'36 + 1'55 = 10'91\text{ m}^3$

2. Capacidad almacenaje $= 1091 \cdot 25 = 27275\text{ m}^3$

3. Se pueden almacenar $27275 \cdot 734 = 2001985$ kg $= 2001985$ toneladas métricas .

4. Se han producido 3540 kg por hectárea dedicando al cultivo de trigo 1200 hectáreas, con lo que la cooperativa tiene que almacenar .

$3540 \cdot 1200 = 4248000$ kg de trigo.

Restamos la capacidad de almacenaje de la cooperativa del volumen de trigo cosechado, $2001985 - 4248000 = -4047801.5$

Observamos que la capacidad de almacenaje es menor que la cosecha, quedándose 4047801'5 kg sin almacenar.

5. Dividiendo la cantidad de kilos que quedan por almacenar, entre los 734 kg que pesa un metro cúbico, obtenemos los metros cúbicos de silo que hay que adquirir.

$\frac{40478015}{734} = 551472$ metros cúbicos hay que adquirir.

Cada silo tiene una capacidad de 10'91 metros cúbicos. Dividiendo los metros cúbicos que hay que adquirir entre los metros cúbicos que almacena cada silo obtenemos el número de silos.

$\frac{551472}{1091} = 50548 \Rightarrow$ necesitan comprar 506 nuevos silos.

6. La inversión necesaria es de $1086 \cdot 506 = 549516$ €

7. Suponiendo que la producción por hectárea en 2011 fuera la misma que en 2010, el que cultivó 33 hectáreas obtuvo $33 \cdot 3540 = 116820$ kg $= 11682$ toneladas métricas.
El campesino que cultivó 33 ha, obtuvo unos ingresos de $243 \cdot 11682 = 2838726$

8. Los hórreos se construyeron para aislar el cereal de la humedad y proteger la cosecha de los roedores.
El volumen es $4 \cdot 23 \cdot 15 = 138\ \text{m}^3$

9. $138 \cdot 780 = 10764$ kg $= 10764$ toneladas métricas de maíz se pueden guardar en el hórreo anterior.
El valor del maíz almacenado en el hórreo es de $235 \cdot 10764 = 252954$

ACTIVIDADES FINALES PAG. 190

EJERCICIOS

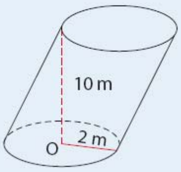
Cilindro

○ **18.** Un cilindro tiene 4 cm de radio de la base y su área total es de 376'99 cm^2. ¿Cuánto mide su generatriz?

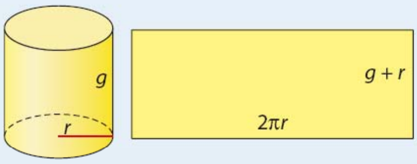
○ **19.** Calcula el volumen de un cilindro de 6 m de altura y 3 m de radio.

○ **20.** Calcula el área total y el volumen de un cilindro de 5 cm de radio y 20 cm de altura.

○ **21.** Calcula el volumen del siguiente cilindro:

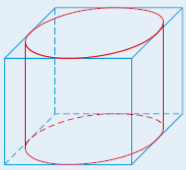


● **22.** Comprueba que el área del cilindro de la figura coincide con el área del rectángulo dado.



● **23.** Si en el problema del ejercicio anterior inscribimos en el cilindro dado un prisma de base triangular, siendo dicha base un triángulo equilátero, calcula el volumen de dicho prisma.

◐ **24.** Calcula el volumen de un cilindro inscrito en un cubo de lado *a*, en función de la arista del cubo.



○ **25.** Calcula el volumen de un cilindro de 1'1 cm de alto y cuya área lateral es de 0'2512 cm^2. (Elige 3'14 como valor aproximado de π).

◐ **26.** Consideramos un cilindro de 5 cm de altura. Calcula su volumen sabiendo que el triángulo equilátero circunscrito en la circunferencia de la base mide $4\sqrt{3}$ cm de lado.

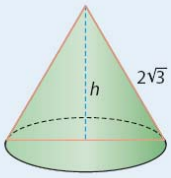
○ **27.** ¿Qué superficie engendra un segmento *AB* al girar alrededor de una recta situada en el mismo plano, si es paralela al eje de giro?

Cono

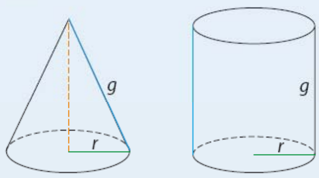
○ **28.** Calcula el área lateral de un cono de 13 cm de generatriz, tal que la longitud de la circunferencia básica es de 31'416 cm. Dibuja su desarrollo.

○ **29.** Calcula el volumen del cono anterior.

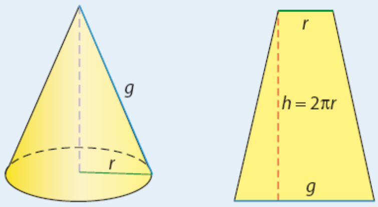
◐ **30.** Consideramos un triángulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ cm. Al girar dicho triángulo sobre su altura obtenemos un cono de revolución. Calcula la altura, el radio de la base y el área total de dicho cono.



● **31.** Comprueba que el área de un cilindro es el doble que el área de un cono de igual radio de la base e igual generatriz.



● **32.** Comprueba que el área total de un cono con una base de radio *r* y generatriz *g* coincide con el del trapecio cuyas medidas están indicadas en la figura.



○ **33.** Calcula el volumen de un cono tal que el radio de su base coincide con su altura. Expresa el resultado en función del radio.

◐ **34.** En las mismas condiciones del problema anterior, calcula el volumen del cono sabiendo que su generatriz mide $\sqrt{8}$ cm.

◐ **35.** Calcula el área total de un cono de 24 cm de altura sabiendo que su volumen es de 800π cm^3.

190 UNIDAD 10

18. $2\cdot\pi\cdot 4^2 + 2\cdot\pi\cdot 4\cdot g = 376'99 \Rightarrow \boxed{g = 11 \text{ cm}}$

19. $V = \pi\cdot 3^2\cdot 6 \Rightarrow V = 54\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 169'65 \text{ m}^3}$

20. $A = 2\pi\cdot 5^2 + 2\cdot\pi\cdot 5\cdot 20 \Rightarrow A = 250\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 785'4 \text{ cm}^2}$

$V = \pi\cdot 5^2\cdot 20 \Rightarrow V = 500\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 1570'8 \text{ cm}^3}$

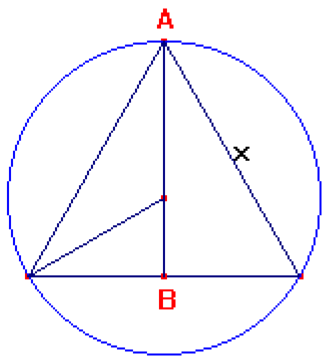
21. $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 10 \Rightarrow V = 40\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 125'67 \text{ m}^3}$

22.

$A_T = A_L + 2\, A_B = 2\pi rg + 2\pi\, r^2 = 2\pi\, r\,(\, g + r\,)$

Área del rectángulo = $2\pi\, r\,(\, g + r\,)$

23.



Observamos que el centro de la circunferencia coincide con el baricentro del triángulo.

Radio base = $\frac{2}{3}AB$

$x^2 = \frac{x^2}{4} + AB \Rightarrow \text{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow \text{Radio base} = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$A_{\text{base}} = \pi\, R^2 = \pi\, \frac{x^2}{3}$

$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot g = \frac{\pi}{3}x^2 g$

24. $V = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a \Rightarrow V = \frac{\pi}{4}a^3$

25.

$A_L = 0'2512 \Rightarrow 2 \cdot 3'14 \cdot r \cdot 1'1 = 0'2512 \Rightarrow r = 0'036$

$V = \pi \cdot 0'036^2 \cdot 1'1 \Rightarrow \boxed{V \cong 0'0044 \text{ cm}^3}$

26.

Aplicando ejercicio 23: $V = \frac{\pi}{3}x^2 g \;= \frac{\pi}{3}(4\sqrt{3}\,)^2\, 5 = 80\pi \approx 251'3 \text{ cm}^3$

Si repetimos el proceso :

Radio de la base = $\frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4 \text{ cm}$

$V = A_{\text{base}} \cdot 5 = 16\pi \cdot 5 = 80\,\pi \text{ cm}^3 \cong 251'33 \text{ cm}^3$

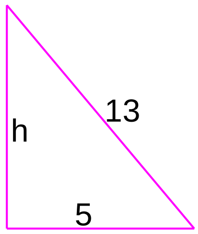
27. La de un cilindro de revolución, siendo el segmento AB su generatriz.

28.

$$2\pi r = 31'416 \Rightarrow r = 5$$

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g \Rightarrow A_L = \pi \cdot 5 \cdot 13 \Rightarrow A_L = 65\pi \Rightarrow \boxed{A_L \cong 204'2\ \text{cm}^2}$$

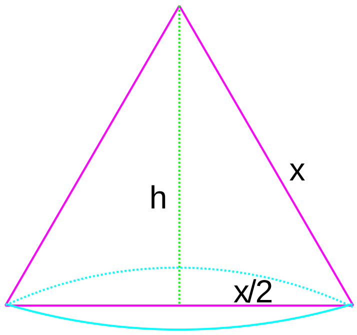
29.



$$13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 \Rightarrow V = 100\pi \Rightarrow \boxed{V = 314'16\ \text{cm}^3}$$

30.



$$x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Como $x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{h = 3\ \text{cm}}$

$$r = \frac{x}{2} \Rightarrow r = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{r = 1'7\ \text{cm}}$$

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow A_L = 6\pi \Rightarrow \boxed{A_L \cong 18'85\ \text{cm}^2}$$

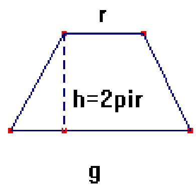
$$A_T = A_L + \pi \cdot r^2 \Rightarrow A_T = 6\pi + 3\pi \Rightarrow A_T = 9\pi \Rightarrow \boxed{A_T \cong 28'27\ \text{cm}^2}$$

31.

$A_{\text{cono}} = A_{\text{base}} + \pi rg = \pi r^2 + \pi rg = \pi r\,(r + g)$

$A_{\text{cilindro}} = 2\,A_{\text{base}} + 2\pi rg = 2\pi r^2 + 2\pi rg = 2 \cdot \pi r\,(r + g) = 2\,A_{\text{cono}}$

32. A $_{\text{cono}}$ = πr (r + g)

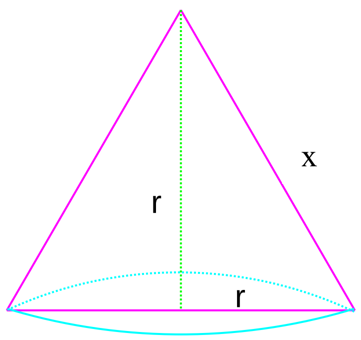


$$A_{\text{trapecio}} = \frac{(B+b)\cdot altura}{2} = \frac{(g+r)\cdot 2\pi r}{2} = \pi r\cdot(g+r)$$

33.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot r \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{3}\pi\cdot r^3}$$

34.



Sea x el valor de la generatriz.

$$x^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{x^2}{2}$$

Como $x = \sqrt{8} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

$$V = \frac{\pi\cdot r^3}{3} = \frac{8\cdot\pi}{3} \Rightarrow \boxed{V \cong 8'37 \text{ cm}^3}$$

35.

$$V = 800\pi \Rightarrow \frac{\pi r^2}{3}\cdot 24 = 800\pi \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$$

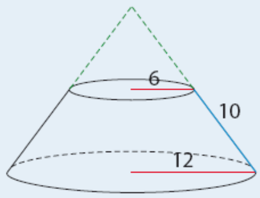
$$g^2 = 24^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 576 + 100 \Rightarrow g = 26$$

$$A_T = \pi\cdot 10\cdot 26 + \pi\cdot 100 \Rightarrow A_T = 360\pi \Rightarrow \boxed{A_T \cong 1130'97 \text{ cm}^2}$$

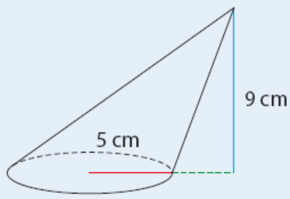
36. El área lateral de un cono de 15 cm de generatriz es de 423'9 cm^2. Calcula el volumen de dicho cono (usa 3'14 como valor aproximado de π).

37. Calcula el área total de un cono sabiendo que el radio de la base mide 4 cm y el ángulo del sector circular obtenido al desarrollar dicho cono es de 72°.

38. Calcula el volumen de un tronco de cono cuya generatriz mide 10 cm y los radios de sus bases 6 y 12 cm.



39. Calcula el volumen del cono de la figura siguiente:



40. ¿Qué superficie engendra un segmento $\overline{AB}$ al girar alrededor de una recta, si no es paralelo al eje de giro pero tiene un punto sobre dicho eje?

41. ¿Qué superficie engendra un segmento $\overline{AB}$ al girar alrededor de una recta, si no es paralelo al eje de giro y no tiene ningún punto sobre dicho eje?

Esfera

42. Calcula el área y el volumen de una esfera de 10 cm de radio.

43. Comprueba que el volumen de una esfera de radio R es el doble que el de un cono de radio R y altura $2R$.

44. Calcula el área de una superficie esférica sabiendo que el volumen de la esfera asociada es de 288π cm^3.

45. Calcula el volumen de una esfera de 3 m de radio.

46. Calcula el área de la superficie esférica del ejercicio anterior.

Globo terráqueo

47. Cuando en Badajoz son las 6 de la tarde, ¿qué hora es en Nueva York?

48. Calcula la hora que será en Sidney cuando en Lisboa son las 15:00 h.

49. Cuando en Greenwich son las 14:00 h, ¿qué hora será en el punto que se encuentra a 75° al oeste y 30° al norte?

50. La diferencia horaria entre dos puntos del Ecuador es de 3 h y 15 min. Sabiendo que la Tierra tiene una circunferencia máxima de 40 000 km, calcula la distancia entre ambos puntos.

51. Si suponemos que el radio de la Tierra es de 6 400 km, ¿cuál será el área de la superficie terrestre?

PROBLEMAS

52. Queremos construir un depósito de agua de forma cilíndrica, que podamos cerrar herméticamente, de 3 m de altura y una base de 1 m de radio. Si vamos a emplear acero en su construcción, ¿cuántos metros cuadrados de acero necesitaremos para construirlo?

53. ¿Cuántos litros de agua cabrán en el depósito del ejercicio anterior?

54. Queremos construir una tubería de 3 cm de sección y 25 m de largo. ¿Qué cantidad de material necesitaremos en su construcción?

55. Calcula la cantidad de cerveza que hay en un recipiente de forma cilíndrica de 12 cm de alto y 2'972 cm de radio de la base.

56. Un camión cisterna tiene un remolque en forma de cilindro de 2 m de radio y 15 m de largo. Calcula la cantidad de líquido que puede transportar.

57. Calcula el volumen de madera que podemos obtener de un árbol de 10 m de alto y 10'99 m de circunferencia.

36.

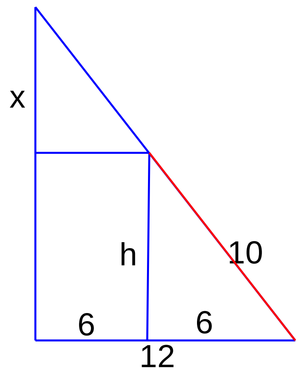
$$A_L = \pi \cdot r \cdot g \Rightarrow 423'9 = 3'14 \cdot r \cdot 15 \Rightarrow r = 9$$

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 225 - 81 \Rightarrow h = 12$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 \Rightarrow V = 324\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 1017'87 \text{ cm}^3}$$

37. $A_T = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} + \pi \cdot r^2 = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 72}{360} + \pi \cdot 4^2 \cong \boxed{60'31 \text{ cm}^2}$

38.



$$10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = 8$$

$$\frac{8+x}{12} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 8$$

$$V_{Tronco\ de\ cono} = V_{cono\ mayor} - V_{cono\ menor} = \frac{\pi}{3}\left(12^2 \cdot 16 - 6^2 \cdot 8\right) = \frac{2016\pi}{3}$$

$$\boxed{V_{Tronco\ de\ cono} \cong 2111'15 \text{ cm}^3}$$

39. $V = \dfrac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot h = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{3} \cdot 9 \Rightarrow V = 75\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 235'62 \text{ cm}^3}$

40. La de un cono de revolución, siendo el segmento AB su generatriz.

41. La de un tronco de cono de revolución, siendo el segmento AB su generatriz.

42.

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 1256'63 \text{ cm}^2}$$

$$\text{V} = \frac{4\pi \cdot r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 10^3}{3} = \frac{4000\pi}{3} \cong \boxed{4188'8 \text{ cm}^3}$$

43.

$$\text{V}_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot altura = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot (2R) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$\text{V}_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \text{V}_{\text{cono}}$$

44. $V = 288\pi \Rightarrow \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 288\pi \Rightarrow r = 6$

45. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 113'1\text{ m}^3}$

46. $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 113'1\text{ m}^2}$

47. 12 del mediodía

48. Las 5:00 de la mañana

49. 9:00 de la mañana

50. 5416’6 km

51. $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 6400^2 = 163840000\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 514.718.540\text{ km}^2}$

52. Se trata de calcular el área total del cilindro.

$$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 \Rightarrow \boxed{A_B = \pi\text{ m}^2}$$

$$A_L = 2\pi \cdot r \cdot g = 2\pi \cdot 1 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{A_L = 6\pi\text{ m}^2}$$

$$A_T = A_L + 2A_B = 6\pi + 2\pi \Rightarrow A_T = 8\pi\text{ m}^2 \Rightarrow \boxed{A_T \cong 25'13\text{ m}^2}$$

53. $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 3\pi \Rightarrow V \cong 9'42477\text{ m}^3 \Rightarrow \boxed{V \cong 9424'77\text{ litros}}$

54. Se trata de calcular el área lateral de un cilindro de 1’5 cm de radio y 2500 cm de largo.

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot g = 2 \cdot \pi \cdot 1'5 \cdot 2500 = 7500\pi \Rightarrow \boxed{A_L \cong 23561'94\text{ cm}^2}$$

55. $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2'972^2 \cdot 12 \Rightarrow V \cong 332'9881\text{ cm}^3 \Rightarrow V \cong 333\text{ cm}^3 \Rightarrow \boxed{V \cong 33\text{ cl}}$

56. $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 15 = 60\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 188'5\text{ m}^3}$

57.

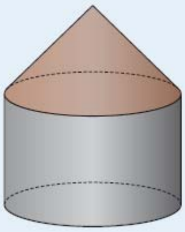
$$2\pi r = 10'99 \Rightarrow r = \frac{5'495}{\pi}$$

Si tomamos $\pi = 3'14 \Rightarrow r = 1'75$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{5'495^2}{\pi^2} \cdot 10 \cong 96'11 \Rightarrow \boxed{V \cong 96'11\text{ m}^3}$$

◐ **58.** Los tejados de las antiguas pallozas romanas, existentes aún en Asturias y León (parque natural de Los Ancares), tienen forma cónica. Calcula la superficie de una de ellas si la longitud de la circunferencia de la base es de 9’42 m y su altura es de 2 m.

○ **59.** Calcula el área lateral de la palloza del ejercicio anterior si su altura total es de 5 m. Dibuja su desarrollo.

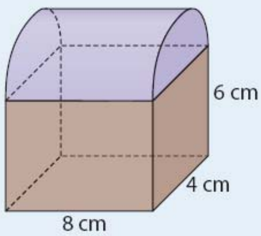


○ **60.** Calcula el volumen de la palloza del ejercicio anterior.

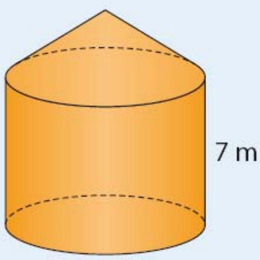
◐ **61.** Queremos saber la cantidad de tela que necesitaremos para construir una tienda de campaña de forma cónica, de 3 m de alto y que ocupe en el suelo el espacio delimitado por una circunferencia de 7’86 m de longitud. Ten en cuenta que el suelo de la tienda también es de tela.

◐ **62.** Una pelota de tenis tiene una circunferencia máxima de 27’02 cm. Calcula la cantidad de tela necesaria para fabricarla.

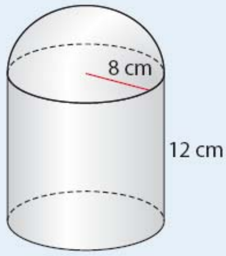
○ **63.** Calcula el área total y el volumen de un joyero como el de la figura:



◐ **64.** Queremos pintar un silo como el de la figura, de 10 m de altura y que ocupe una parcela de 25π m^2. Calcula los metros cuadrados de superficie que hay que pintar y el volumen del silo.

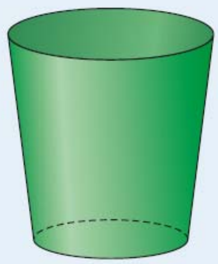


◐ **65.** Queremos construir un observatorio astronómico como el de la figura. Calcula el volumen que tendrá y su área total.

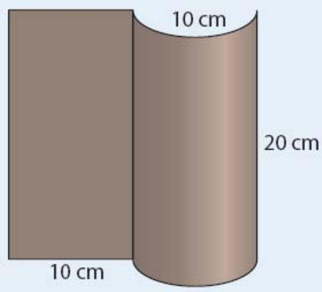


◐ **66.** Queremos construir un nuevo casco en forma de semiesfera, más ligero y resistente que los actuales, para usarlo en la construcción. Si la longitud estándar de la cabeza de un hombre adulto es de 57 cm y nosotros queremos dar una holgura de 3 cm más, calcula la superficie de material que necesitaremos para construir un casco nuevo.

● **67.** Calcula los litros de agua que pueden caber en un cubo como el de la figura, sabiendo que mide 40 cm de alto, la circunferencia de la base mide 40π cm y el radio superior mide 30 cm.



◐ **68.** Queremos construir una teja como la de la figura.

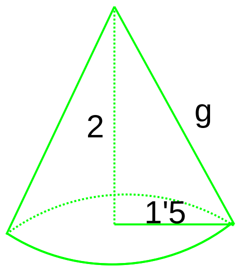


Sabiendo que la parte curva ocupa la superficie de medio cilindro, calcula la superficie de la teja. Calcula la cantidad de tejas que son necesarias para construir un tejado de 150 m^2.

◐ **69.** Calcula el volumen que encierra una rueda de automóvil que mide 50 cm de altura y tiene una rodada de 20 cm de ancho.

58.

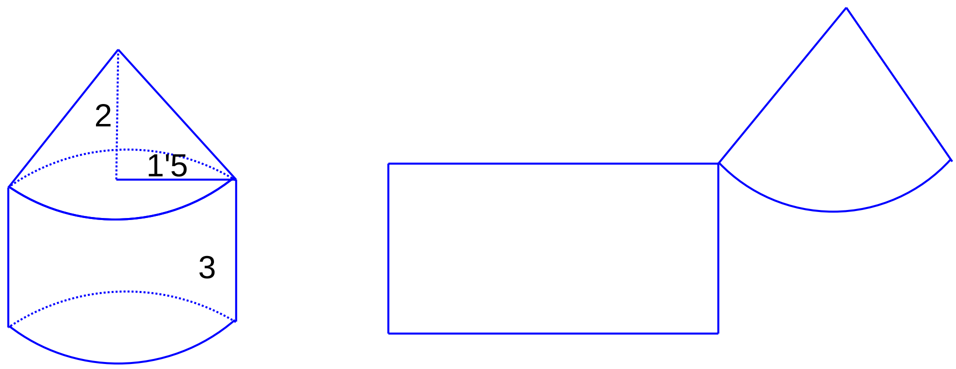
$$2\pi r = 9'42 \Rightarrow r \cong 1'5 \text{ m}$$



$$g^2 = 2^2 + 1'5^2 \Rightarrow g = 2'5$$

$$A_{Tejado} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 1'5 \cdot 2'5 = 3'75\pi \Rightarrow \boxed{A_{Tejado} \cong 11'78 \text{ m}^2}$$

59.



$$A_L = 2\pi rg = 2\pi \cdot 1'5 \cdot 3 = 9\pi \Rightarrow \boxed{A_L \cong 28'27 \text{ m}^2}$$

$$A_T \cong 11'78 + 28'27 \Rightarrow \boxed{A_T \cong 40'05 \text{ m}^2}$$

60. $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 1'5^2 \cdot 2 + \pi \cdot 1'5^2 \cdot 3 = 8'25\pi \Rightarrow \boxed{V = 25'91 \text{ m}^3}$

61.

$$2\pi r = 7'86 \Rightarrow r \cong 1'25$$

$$g^2 = 3^2 + 1'25^2 \Rightarrow g = 3'25$$

$$A_L = \pi rg = \pi \cdot 1'25 \cdot 3'25 = 4'0625\pi \Rightarrow A_L \cong 12'76 \text{ m}^2$$

$$A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1'25^2 = 1'5625\pi \Rightarrow A_B \cong 4'9 \text{ m}^2$$

$$A_T \cong 12'76 + 4'9 \Rightarrow \boxed{A_T \cong 17'66 \text{ m}^2}$$

62.

$$2\pi r = 27'02 \Rightarrow r \cong 4'3 \text{ cm}$$

$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow A = 4\pi \cdot 4'3^2 \Rightarrow A = 73'96\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 232'35 \text{ cm}^2}$$

63. El cofre es un paralelepípedo y la tapa es medio cilindro.

$$A_{cofre} = 2 \cdot 8 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 8 \cdot 4 \Rightarrow A_{cofre} = 176 \text{ cm}^2$$
$$A_{Tapa} = \pi r^2 + \pi r g = \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2 \cdot 8 = 20\pi \Rightarrow \boxed{A_{Tapa} \cong 62'83 \text{ cm}^2}$$
$$A_T = 176 + 62'83 \Rightarrow \boxed{A_T = 238'83 \text{ cm}^2}$$

$$V_{cofre} = 8 \cdot 4 \cdot 6 \Rightarrow 192 \text{ cm}^3$$
$$V_{Tapa} = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 16\pi \Rightarrow V_{Tapa} \cong 50'26 \text{ cm}^3$$
$$V_{Total} = 192 + 50'26 \Rightarrow \boxed{V_{Total} = 242'26 \text{ cm}^3}$$

64.

$$\pi r^2 = 25\pi \Rightarrow r = 5$$

$$A_{superficie\ cilíndrica} = 2\pi r g = 2\pi \cdot 5 \cdot 7 = 70\pi \Rightarrow$$
$$A_{superficie\ cilíndrica} \cong 219'9 \text{ m}^2$$

Para calcular la generatriz de la superficie cónica aplicamos el teorema de Pitágoras: $g^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5'8$

$$A_{superficie\ cónica} = \pi r g = \pi \cdot 5 \cdot 5'8 = 29\pi \Rightarrow$$

$$A_{superficie\ cónica} \cong 91'1\ m^2$$

$$A_T \cong 219'9 + 91'1 \Rightarrow A_T \cong 311 \text{ m}^2$$

65.

$$A_{superficie\ cilíndrica} = 2\pi r g = 2\pi \cdot 8 \cdot 12 = 192\pi \Rightarrow A_{superficie\ cilíndrica} \cong 603'18 \text{ cm}^2$$
$$A_{superficie\ esférica} = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 8^2 = 128\pi \Rightarrow A_{superficie\ esférica} \cong 402'12 \text{ cm}^2$$
$$A_T = 192\pi + 128\pi = 320\pi \Rightarrow \boxed{A_T \cong 1005'3 \text{ cm}^2}$$

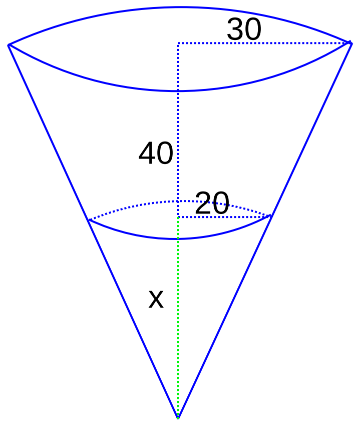
$$V_{cuerpo\ esférico} = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 8^3 \Rightarrow V_{cuerpo\ esférico} \cong 1072'33 \text{ cm}^3$$
$$V_{cuerpo\ cilíndrico} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 768\pi \Rightarrow V_{cuerpo\ cilíndrico} \cong 2412'74\ cm^3$$
$$\boxed{V_T \cong 3485'07 \text{ cm}^3}$$

66.

$$2\pi r = 60 \Rightarrow r \cong 9'5$$
$$A = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 9'5^2 \Rightarrow \boxed{A \cong 567 \text{ cm}^2}$$

67.

$2\pi r = 40\pi \Rightarrow r = 20$



$\frac{40+x}{30} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 80$

$V_{Tronco\ de\ cono} = V_{cono\ mayor} - V_{cono\ menor} = \frac{\pi}{3}\left(30^2 \cdot 120 - 20^2 \cdot 80\right)$

$V_{Tronco\ de\ cono} \cong 79587\ \text{cm}^3$

El cubo tiene aproximadamente una capacidad de 79’6 litros

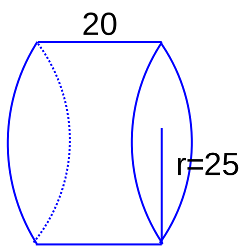
68.

$A = 10 \cdot 20 + \pi \cdot 5 \cdot 20 = 200 + 100\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 514'16\ \text{cm}^2}$

El tejado debe quedar cubierto por la parte cilíndrica de la teja, quedando la parte plana debajo, por lo que para construir el tejado son necesarias:

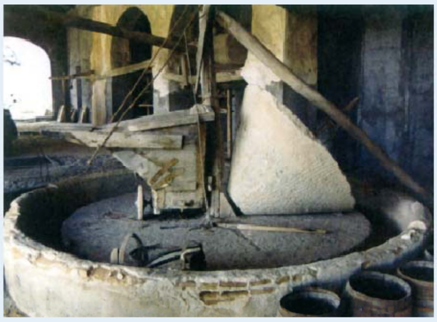
$\frac{150}{0'02} = 7500$ tejas

69. Se trata del volumen de un cilindro de r = 25 cm y altura =20 cm

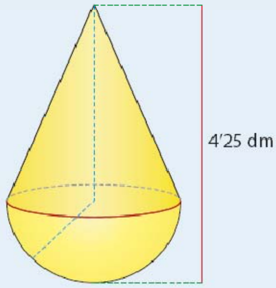


$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 25^2 \cdot 20 = 12500\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 39267\ \text{cm}^3}$

70. Una piedra de molino tiene forma cónica de 0'5 m de radio y 2 m de generatriz. ¿Cuántas vueltas ha de dar la piedra para cubrir toda la superficie del círculo? (El radio del círculo es la generatriz del cono).



71. Calcula el área del siguiente tentetieso sabiendo que su altura total es de 4'25 dm y la longitud de la circunferencia de la base del cono es de 7'85 dm. Para calcular el radio haz una aproximación a las centésimas.



72. Calcula el volumen del tentetieso del ejercicio anterior.

70.

El área lateral del cono es $\pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 0'5 \cdot 2 = \pi \Rightarrow A_L = \pi \text{ m}^2$

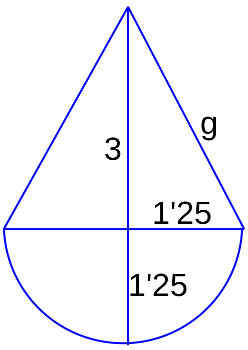
El área del círculo sobre el cual gira la piedra es $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$

Ha de dar $\dfrac{4\pi}{\pi} = 4$ vueltas

71.

$A = A_{lateral\ cono} + A_{semiesfera}$

$2\pi r = 7'85 \Rightarrow r = 1'25 \text{ dm}$



Sea h la altura del cono: h = 4'25 - 1'25 = 3 dm

$g^2 = 3^2 + 1'25^2 \Rightarrow g = 3'25 \text{ dm}$

$A = \pi r g + 2\pi r^2 = \pi \cdot 1'25 \cdot 3'25 + 2\pi \cdot 1'25^2 \Rightarrow A = 7'1875\pi \Rightarrow \boxed{A \cong 22'58 \text{ dm}^2}$

72.

$$V = \frac{1}{2}V_{esfera} + V_{cono} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 (2r + h) = \frac{1}{3}\pi \cdot 1'25^2 \cdot (2 \cdot 1'25 + 3)$$

$\boxed{V \cong 9 \text{ dm}^3}$

AUTOEVALUACIÓN PAG. 193

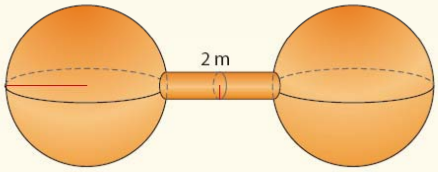
AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula la cantidad de agua que cabe en un vaso de 9 cm de altura y 7 cm de diámetro de base.

2. Calcula la superficie del vaso del ejercicio anterior.

3. Dado un rectángulo cuyos lados miden 2 y 4 cm respectivamente, dibuja los cilindros que surgen al girarlo sobre cada uno de sus lados y calcula el área total de cada uno de ellos.

4. Calcula el volumen de la siguiente figura, sabiendo que el radio de las esferas es de 1'5 m y la sección de la barra es de 50 cm.

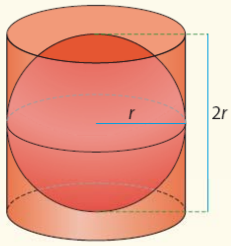


5. Calcula la superficie de la figura del ejercicio anterior.

6. Tenemos un recipiente de forma cilíndrica, de 3 cm de radio básico y 10 cm de altura, en cuyo interior introducimos un cono de 8 cm de altura y mismo radio que el de la base. En estas condiciones, calcula el volumen de agua que podemos introducir en el recipiente.

7. Tenemos un sombrero cónico de 1'8 m de alto y 2'12 m de generatriz. Calcula la cantidad de tela que necesitamos para forrarlo.

8. Demuestra que si introducimos una esfera de radio r en el cilindro mínimo que la contiene, el volumen del espacio que queda libre se corresponde con el volumen de la mitad de la esfera.



9. Dos barcos se encuentran en el mismo meridiano. Uno está a 50° de latitud norte y el otro a 25° de latitud sur. Calcula la distancia que les separa tomando como radio de la Tierra 6 500 km y como valor aproximado de π 3'14.

10. Un montón de arena tiene forma cónica. Si la longitud de la circunferencia de la base es de 31'4 m, calcula los metros cúbicos de arena que tenemos si el montón alcanza 4 m de altura. (Considerar 3'14 como valor aproximado de π).

Cuerpos de revolución 193

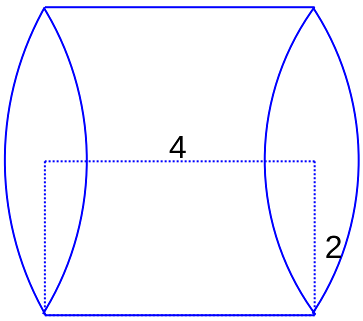
1. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3'5^2 \cdot 9 = 110'25\pi \implies V \cong 346'36\ \text{cm}^3$

2. La superficie de cristal necesaria para fabricar el vaso es la de un cilindro al que le falta la base de arriba.

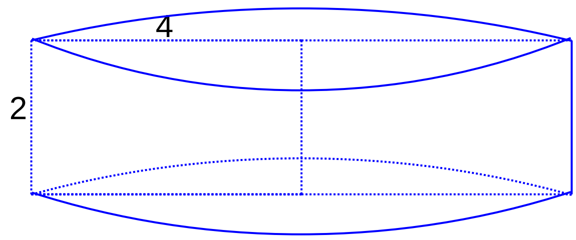
$$A = \pi \cdot r^2 + 2\pi r g = \pi \cdot 3'5^2 + 2\pi \cdot 3'5 \cdot 9 = 12'25\pi + 63\,\pi = 75'25\,\pi\ \text{cm}^2$$

$$\boxed{A \cong 236'4\ \text{cm}^2}$$

3.



$$A_T = 2\pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi + 16\pi = 24\pi \Rightarrow \boxed{A_T \cong 75'4\ \text{cm}^2}$$



$$A_T = 2\pi\cdot 4^2 + 2\pi\cdot 4\cdot 2 = 32\pi + 16\pi = 48\pi \Rightarrow \boxed{A_T \cong 150'8 \text{ cm}^2}$$

4.

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 1'5^3 = 4'5\pi \text{ m}^3$$

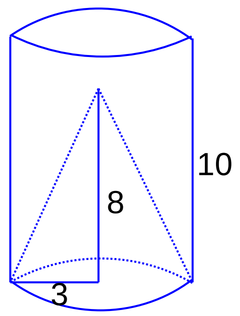
$$V_{barra} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0'25^2 \cdot 2 = \frac{\pi}{8} \text{ m}^3$$

$$V_{Total} = 2 \cdot V_{esfera} + V_{barra} = 9\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{73}{8}\pi \cong 28'667 \text{ m}^3$$

5.

$$A = 2 \cdot 4\pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi r g = 8\pi \cdot 1'5^2 + 2\pi \cdot 0'25 \cdot 2 = 19\pi \cong 59.69 \text{ m}^2$$

6.



$$V_{Total} = V_{cilindro} - V_{cono}$$

$$V_{cilindro} - V_{cono} = \pi\cdot r^2\cdot altura\ cilindro - \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot altura\ cono \Rightarrow$$

$$V_{Total} = \pi\cdot 3^2\cdot 10 - \frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 8 = 90\pi - 24\pi = 66\pi \Rightarrow \boxed{V \cong 207'34 \text{ cm}^3}$$

7. Sólo nos interesa calcular el área lateral del cono.

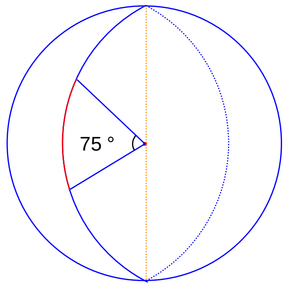
$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r^2 = g^2 - h^2 \Rightarrow r^2 = 2'12^2 - 1'8^2 \Rightarrow r = 1'2544$$

$$A_L = \pi\cdot r\cdot g = \pi\cdot 1'2544\cdot 2'12 \Rightarrow \boxed{A_L \cong 8'35 \text{ m}^2}$$

Necesitamos 8’35 m^2 de tela.

8. $V = V_{cilindro} - V_{esfera} = \pi\cdot r^2\cdot 2r - \frac{4}{3}\pi\cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi\cdot r^3 = V_{media\ esfera}$

9.



$$L = \frac{2\pi R n}{360} = \frac{2\pi \cdot 6500 \cdot 75}{360} = \frac{8125\pi}{3} \cong 8504.17 \text{ km}$$

10.

$$2\pi \cdot r = 31'4 \Rightarrow r = 5$$

$$V = \frac{1}{3}\,\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\,\pi \cdot 5^2 \cdot 4 = \frac{100\,\pi}{3} \Longrightarrow$$

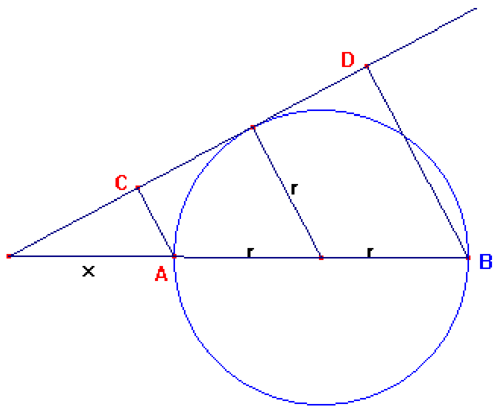
$$\boxed{V \;\cong 104'72\; m^3 \text{ de arena}}$$

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 195

Olimpiada matemática

1. Comprueba que la suma de distancias de los dos extremos del diámetro de una circunferencia a una tangente cualquiera de la circunferencia es constante.
2. Demuestra que en cualquier triángulo su perímetro *P*, su área *A* y el radio *r* del círculo inscrito satisfacen la relación: $r \cdot P = 2A$.

1. Primera solución:

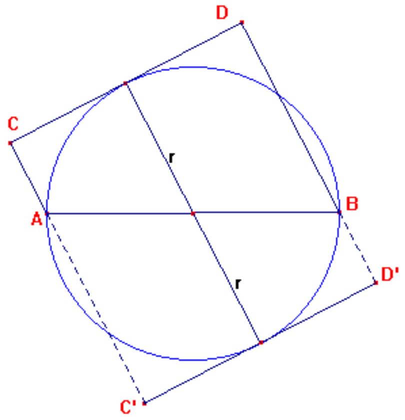


Por el teorema de Tales:

$$\frac{x}{CA} = \frac{x+r}{r} = \frac{x+2r}{DB} \Rightarrow \frac{x}{CA} = \frac{x+r}{r} = \frac{x+2r}{DB} = \frac{2x+2r}{CA+DB}$$

$$CA + DB = \frac{2(x+r)}{(x+r)} \cdot r \Rightarrow CA + DB = 2r$$

Segunda solución, solución geométrica:

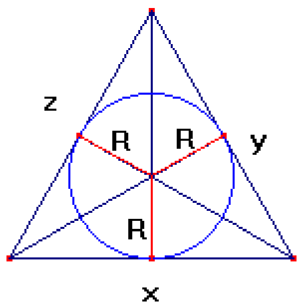


Dibujando los simétricos respecto del origen tenemos:

$$AC' = DB,\ AC = BD'$$

$$AC + AC' = AC + DB = 2r$$

2.



$$A = \frac{1}{2}xr + \frac{1}{2}yr + \frac{1}{2}zr = \frac{r}{2}(x + y + z) = \frac{r}{2}\cdot P \Rightarrow 2A = r \cdot P$$

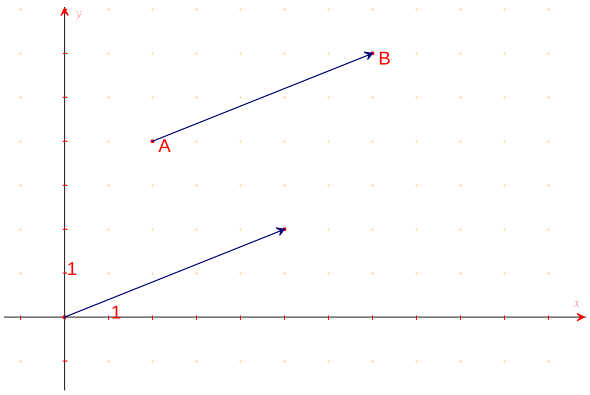
ACTIVIDADES PAG. 198

ACTIVIDADES

1. Dados los puntos $A(2, 4)$ y $B(7, 6)$, calcula las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.
2. Dibuja en los ejes de coordenadas el vector $\overrightarrow{AB}$ del ejercicio anterior.
3. Sean $\vec{u} = (-2, 0)$ y $\vec{v} = (1, 4)$. Calcula las componentes de $\vec{u} + \vec{v}$.
4. Calcula las coordenadas del punto B siendo $A(3, 1)$ y $\overrightarrow{AB} = (5, 8)$.

1. $\overrightarrow{AB} = (7-2, 6-4) = (5,2)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$

2.



3. $\vec{u} + \vec{v} = (-2,0) + (1,4) = (-1,4)$

4. Sea $B = (x,y) \Rightarrow (x-3, y-1) = (5,8) \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow B = (8,9)$

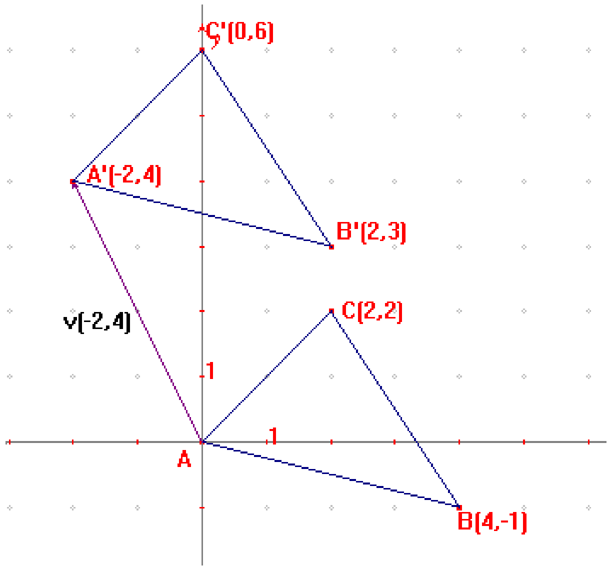
ACTIVIDADES PAG. 199

ACTIVIDADES

5. Consideramos el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, -1)$ y $C(2, 2)$. Traslada dicho triángulo según el vector $(-2, 4)$. Dibuja ambos triángulos.
6. Calcula las coordenadas del cuadrado que resulta de trasladar el cuadrado de vértices $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ y $D(0, 1)$ según el vector $\vec{u}(-3, 2)$. Dibuja ambos cuadrados.

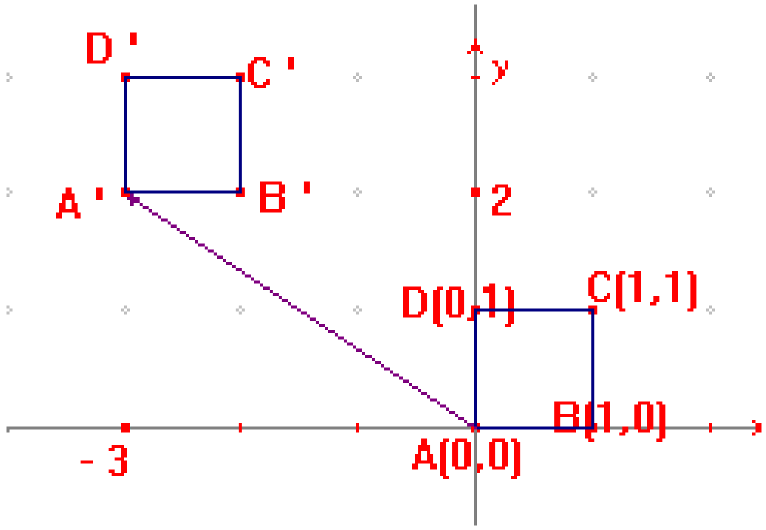
5.

$$A' = (0-2, 0+4) = (-2,4)$$
$$B' = (4-2, -1+4) = (2,3)$$
$$C' = (2-2, 2+4) = (0,6)$$



6.

$$A' = (0-3, 0+2) = (-3, 2)$$
$$B' = (1-3, 0+2) = (-2, 2)$$
$$C' = (1-3, 1+2) = (-2, 3)$$
$$D' = (0-3, 1+2) = (-3, 3)$$

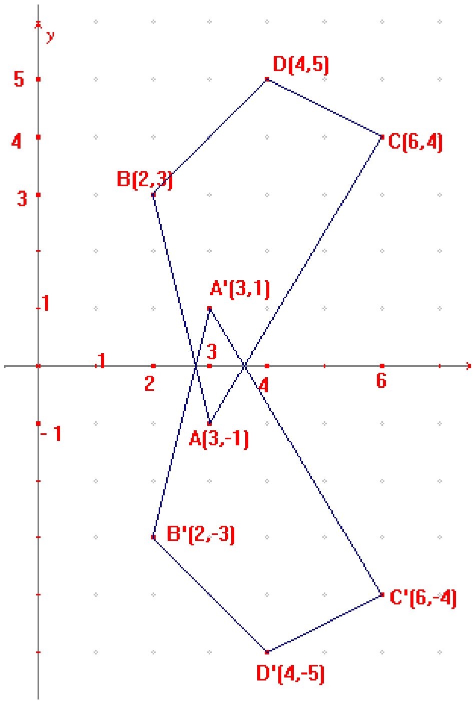


ACTIVIDADES PAG. 200

ACTIVIDADES

7. Consideramos el cuadrilátero de vértices $A(3, -1)$, $B(2, 3)$, $C(6, 4)$ y $D(4, 5)$. Calcula las coordenadas de su simétrico respecto del eje de abscisas y dibuja la figura resultante.

7. $A' = (3,1)$, $B' = (2,-3)$, $C' = (6,-4)$, $D' = (4,-5)$



ACTIVIDADES PAG. 201

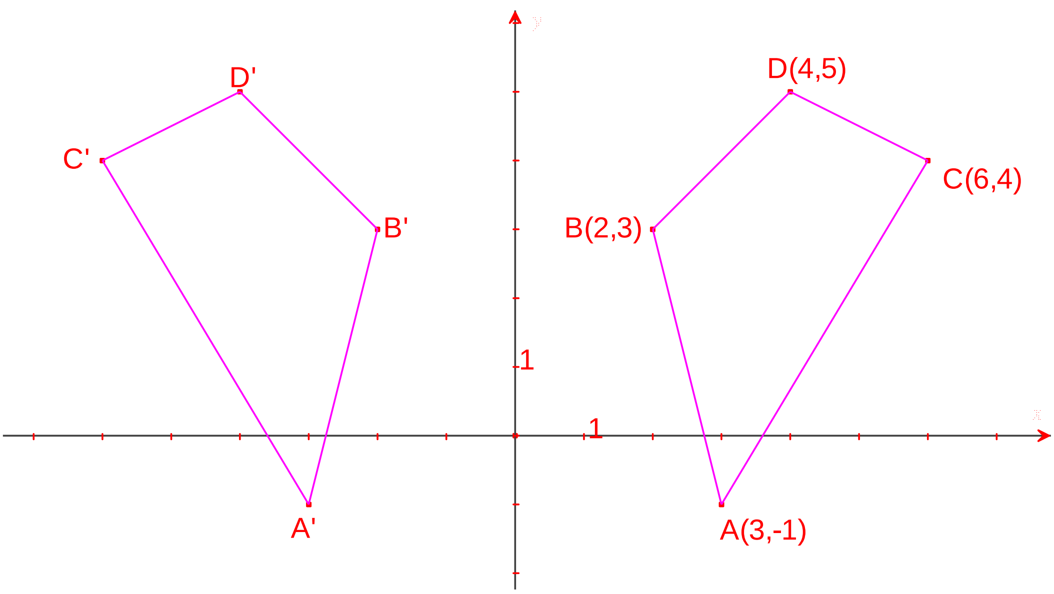
ACTIVIDADES

8. Sea el cuadrilátero de vértices $A(3, -1)$, $B(2, 3)$, $C(6, 4)$ y $D(4, 5)$. Calcula las coordenadas de su simétrico respecto del eje de ordenadas y dibújalo.

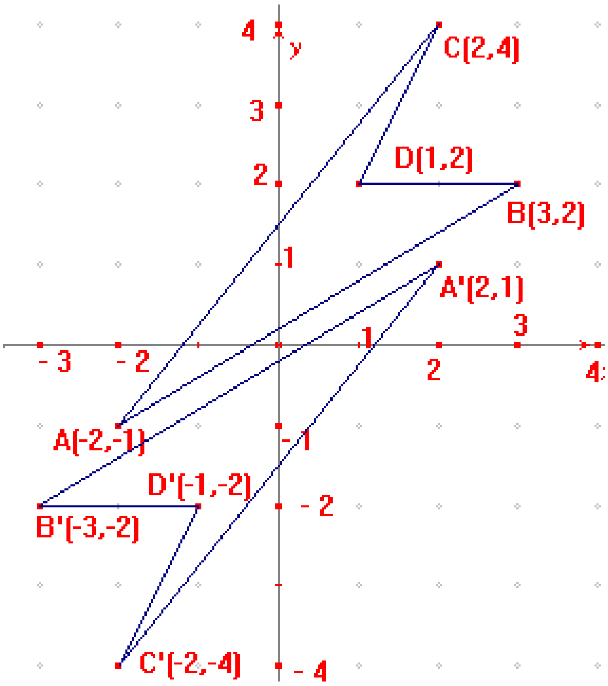
9. Consideramos el cuadrilátero de coordenadas $A(-2, -1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 2)$. Calcula su simétrico respecto del origen de coordenadas y dibuja ambas figuras.

10. Consideremos el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(1, 4)$ y $C(3, 1)$. Calcula su simétrico respecto del origen. Dibuja ambos triángulos.

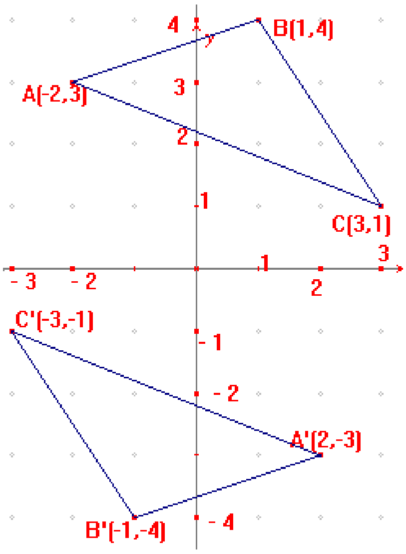
8. $A'=(-3,-1)$, $B'=(-2,3)$, $C'=(-6,4)$, $D'=(-4,5)$



9. $A' = (2,1)$, $B' = (-3,-2)$, $C' = (-2,-4)$, $D' = (-1,-2)$



10. $A' = (2,-3)$, $B' = (-1,-4)$, $C' = (-3,-1)$



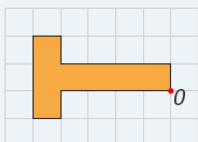
ACTIVIDADES PAG. 202

ACTIVIDADES

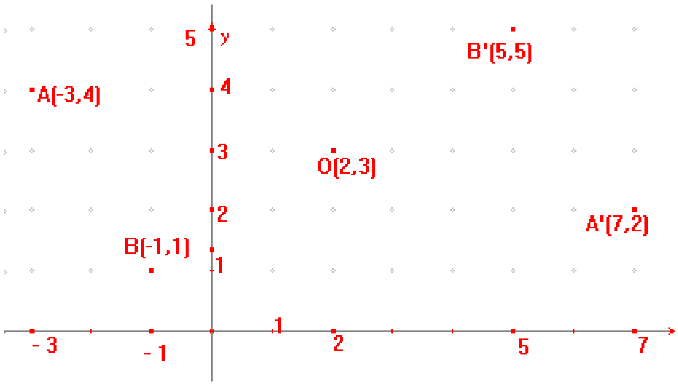
11. Transforma los puntos (–3, 4) y (–1, 1) mediante un giro de 180° con centro en el punto (2, 3).

12. Haz la transformación de la figura aplicando un giro de 90° con centro en *O*.

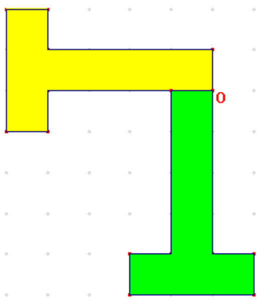
13. Haz la transformación de la figura aplicando un giro de 180° con el mismo centro.



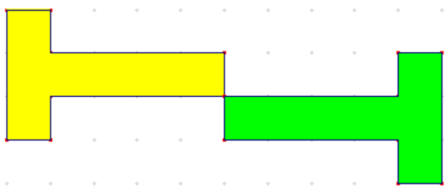
11.



12.



13.



ACTIVIDADES PAG. 203

ACTIVIDADES

14. El mosaico que aparece es de Escher. ¿Cuál es la figura básica?

Explica qué tipo de isometría nos permite teselar el plano.

14. Cuadrado. Traslación.

DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 204

Desafío matemático

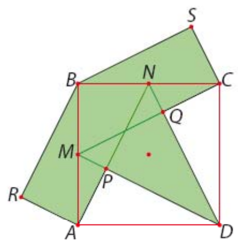
La construcción de un mosaico

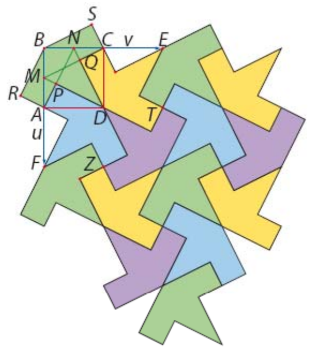
La construcción de mosaicos es una actividad que el hombre realiza desde antiguo. Embaldosar un suelo implica la creación de un mosaico. Un mosaico está formado por piezas muy pequeñas, llamadas teselas, que unidas convenientemente cubren una superficie. Solamente el triángulo, cuadrado y hexágono teselan el plano.

La forma preferida por las abejas para teselar el panal es el hexágono. No obstante, partiendo de estas figuras básicas, se pueden realizar teselas muy diversas, según el principio de añadir justamente en un lado, lo que eliminas de otro.

Los griegos y romanos realizaron grandes mosaicos. Posteriormente los árabes decoraron sus palacios con numerosos mosaicos. Observa el clavo nazarí, que aparece recurrentemente en la Alhambra de Granada.

Su construcción es sencilla, dado un cuadrado *ABCD*, en el que señalamos los puntos medios *M* del lado $\overline{AB}$ y *N* del lado $\overline{BC}$, obtenemos los puntos *P* y *Q* como las siguientes intersecciones: $P = \overline{AN} \cap \overline{MD}$ y $Q = \overline{AN} \cap \overline{MD}$.





1. Gira el triángulo $\widehat{APD}$, con un ángulo de 90° y siendo el centro de giro el punto *A*, para obtener el punto *R*.
2. Gira el triángulo $\widehat{DQC}$, con un ángulo de 90° y siendo el centro de giro el punto *C*, para obtener el punto *S*.
3. Dibuja el polígono *APDQCSBRA*, que constituye el clavo.
4. Colorea el clavo obtenido de color verde.
5. Realiza un giro de 90° del clavo de color verde alrededor de *C*, con lo que obtendremos otro clavo.
6. Colorea el clavo obtenido de color amarillo.
7. Señala el homólogo del punto *A*, según el giro anterior, como *T*.
8. Realiza un giro de 90° del clavo amarillo, con centro de giro el punto *T*.
9. Colorea el clavo obtenido mediante el giro anterior de color rosa.
10. Señala el homólogo del punto *C* según el giro como *Z*.
11. Realiza un giro de 90° del clavo rosa, con centro de giro el punto *Z*.
12. Colorea el clavo obtenido de color azul.

Observa que con tres giros de 90° consecutivos del motivo inicial (el clavo) hemos llenado 360°, con lo que cerramos un círculo. Ahora:

13. Dibuja el vector $\vec{u} = BF$.
14. Dibuja el vector $\vec{v} = BE$.
15. Realiza translaciones de los diferentes clavos, según los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para teselar el plano.

Basta con seguir los pasos indicados en el enunciado.

EJERCICIOS

Vectores

15. Calcula las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ siendo $A(6, 1)$ y $B(3, -2)$.

16. Dibuja en los ejes de coordenadas los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, y $\overrightarrow{BC}$, siendo $A(5, 3)$, $B(-2, 4)$ y $C(2, 2)$.

17. Consideremos los puntos:

$A(0, 0)$ $C(5, 1)$ $E(0, -3)$

$B(2, 2)$ $D(7, 3)$ $F(2, -1)$

a) Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{FC}$.

b) ¿Qué vectores de los anteriores son equipolentes?

18. Dados los puntos $A(4, 4)$ y $B(3, 5)$, ¿cuáles son las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$? ¿Y las componentes del vector $\overrightarrow{BA}$?

19. Si el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como componentes $(-1, 7)$ y las coordenadas del punto A son $(3, 5)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto B?

20. El vector $\overrightarrow{CD}$ tiene como componentes $(3, -4)$ y el punto D tiene como coordenadas $(-2, 1)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto C?

21. Dibuja en tu cuaderno los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ sabiendo que las abscisas de los puntos A, B y C son 4, 5 y 6 respectivamente y las ordenadas son 3 en todos los casos.

22. Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DE}$ sabiendo que las coordenadas de los puntos son:

$A(-3, 1)$ $C(-1, 0)$ $E(3, -4)$

$B(-1, 7)$ $D(2, 5)$ $F(5, 3)$

23. Consideramos los puntos:

$A(-3, 1)$ $C(-1, 1)$ $E(5, 1)$

$B(-2, 3)$ $D(0, 3)$ $F(6, 3)$

Dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$. ¿Cómo son estos vectores?

24. El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como componentes $(3, 7)$ y las coordenadas del punto A son $(-1, 5)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B?

25. El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como componentes $(-3, 6)$ y las coordenadas del punto B son $(3, 5)$. Calcula las coordenadas del punto A.

26. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 7)$, $\vec{v} = (-5, 6)$ y $\vec{w} = (-2, -3)$:

a) Calcula las componentes de los siguientes vectores:

- $\vec{u} + \vec{v}$
- $\vec{u} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b) Representa gráficamente la suma de los vectores anteriores.

27. Calcula las componentes de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{v} + \vec{w}$ siendo:

$\vec{u} = (3, 7)$ $\vec{v} = (-2, 5)$ $\vec{w} = (5, 1)$

Traslaciones

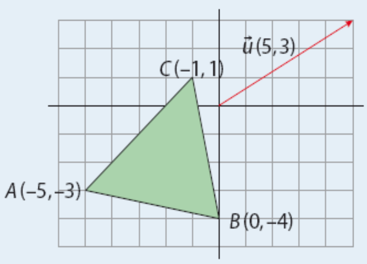
28. Realiza una traslación del punto $A(4, 1)$ según el vector $\vec{u} = (3, 2)$.

29. Calcula las componentes del vector de traslación que transforma el punto $A(2, -2)$ en $A'(6, 4)$.

30. El punto $A'(4, 2)$ es el homólogo según el vector de traslación $\vec{u}$ del punto $A(-3, 4)$. Calcula las componentes del vector de traslación.

PROBLEMAS

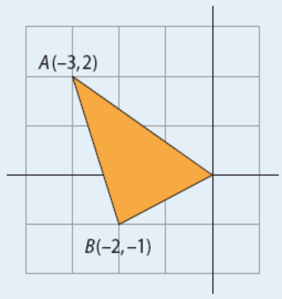
31. Observa el triángulo y el vector de la figura. Indica las coordenadas de los puntos A', B' y C' producto de trasladar el triángulo según el vector $\vec{u}$. Dibuja el triángulo que resulta de aplicar dicha traslación.



32. Representa en unos ejes de coordenadas el vector $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(1, 1)$ y $B(5, 3)$. Aplica a dicho vector una traslación según el vector $\vec{u} = (4, 2)$.

33. Calcula las coordenadas del punto A' resultante de aplicar al punto $A(-1, 2)$ un giro de 90° con centro en el origen de coordenadas.

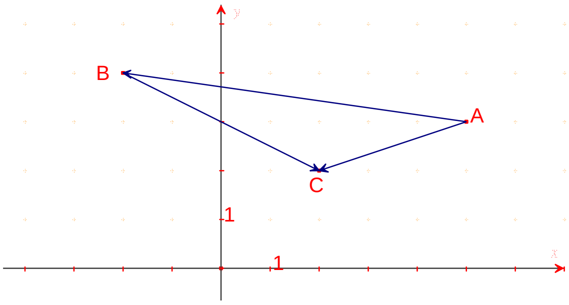
34. Observa el triángulo de la figura. Representa el triángulo homólogo al aplicarle un giro de −90° con centro en el origen de coordenadas.

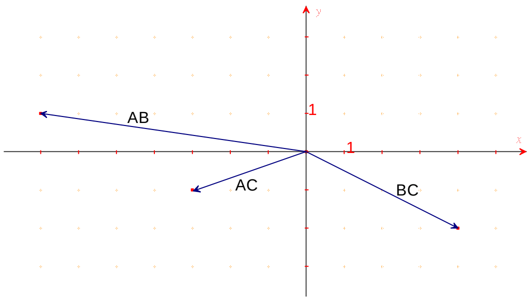


206 UNIDAD 11

15. $\overrightarrow{AB} = (3-6, -2-1) = (-3, -3)$

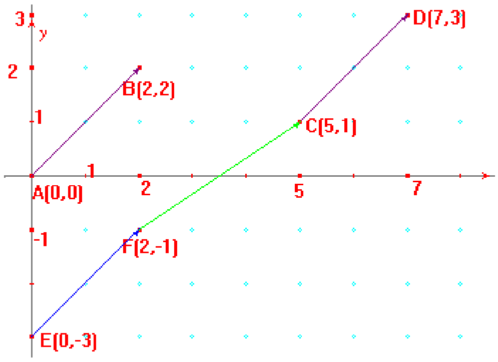
16. $\overrightarrow{AB} = (-7,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3,-1)$, $\overrightarrow{BC} = (4,-2)$





17.

a)



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} = (2,2) \quad , \quad \overrightarrow{FC} = (3,2)$$

b) Son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CD}$

18.

$$\overrightarrow{AB} = (3-4, 5-4) = (-1,1)$$
$$\overrightarrow{BA} = (4-3, 4-5) = (1,-1)$$

19.

Sean (x, y) las coordenadas del punto B

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (x-3, y-5) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,7) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x-3=-1 \Rightarrow x=2 \\ y-5=7 \Rightarrow y=12 \end{cases}$$

Así que las coordenadas de B son (2, 12).

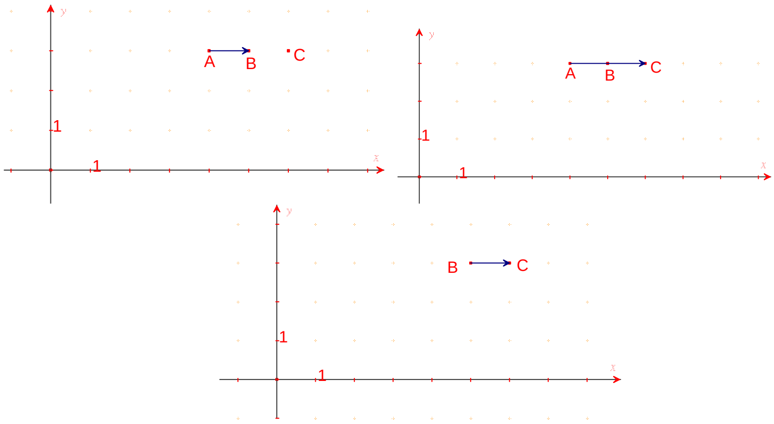
20.

Sean (x, y) las coordenadas del punto C.

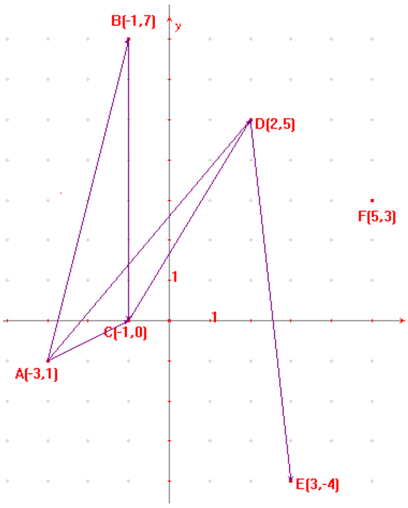
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CD} = (-2-x, 1-y) \\ \overrightarrow{CD} = (3,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -2-x=3 \Rightarrow x=-5 \\ 1-y=-4 \Rightarrow y=5 \end{cases}$$

Así que las coordenadas de B son (-5, 5).

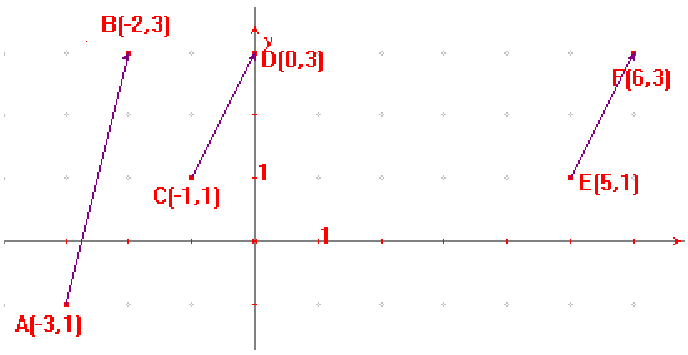
21.



22.



23.



$\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son equipolentes.

24. Sean (x, y) las coordenadas del punto B

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(x+1, y-5) \\ \overrightarrow{AB}=(3,7)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x+1=3 \Rightarrow x=2 \\ y-5=7 \Rightarrow y=12\end{array}\right.$$

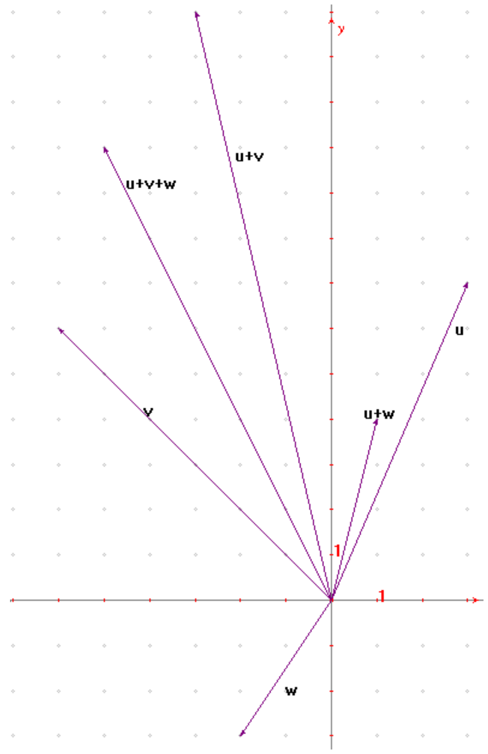
Las coordenadas de B son (2, 12)

25. Sean (x, y) las coordenadas del punto B:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3-x,5-y)\\ \overrightarrow{AB}=(-3,6)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}3-x=-3\Rightarrow x=6\\ 5-y=6\Rightarrow y=-1\end{cases}$$

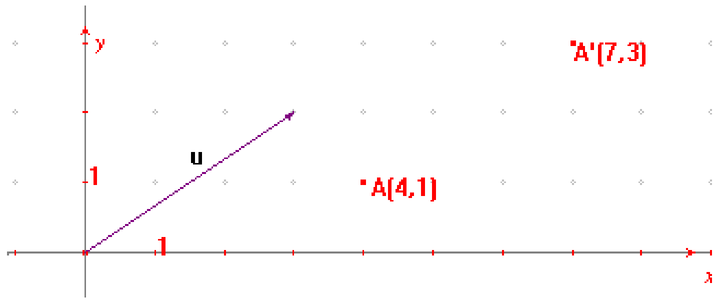
Las coordenadas de B son (6, -1).

26. $\vec{u}+\vec{v}=(-2,13)$, $\vec{u}+\vec{w}=(1,4)$, $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(-4,10)$



27. $\vec{u}+\vec{v}=(1,12)$, $\vec{u}+\vec{w}=(8,8)$, $\vec{v}+\vec{w}=(3,6)$

28. $A'=(4+3,1+2)=(7,3)$



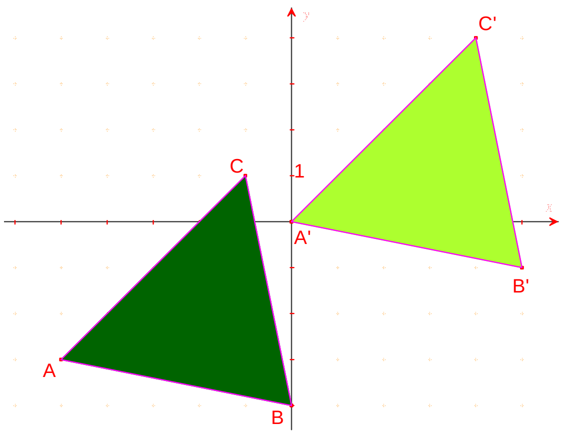
29. $\vec{u}=(2+x,-2+y)=(6,4)\Rightarrow\vec{u}=(x,y)=(4,6)$

30. Sea $\vec{u}=(x,y)$

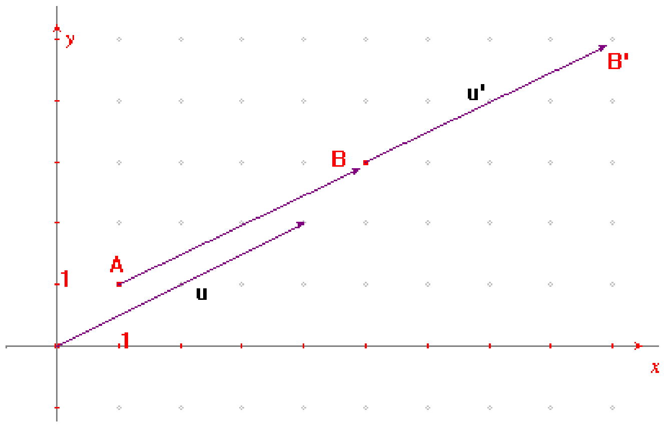
$$(-3+x,4+y)=(4,2)\Rightarrow\vec{u}=(x,y)=(7,-2)$$

31.

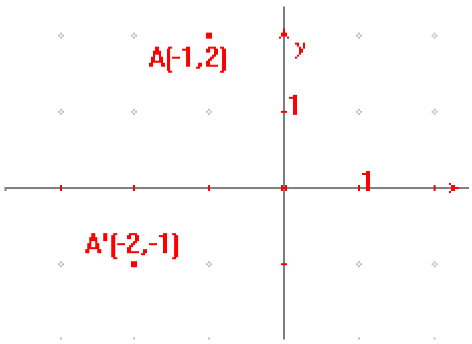
$$A' = (-5+5,-3+3) = (0,0)$$
$$B' = (0+5,-4+3) = (5,-1)$$
$$C' = (-1+5,1+3) = (4,4)$$



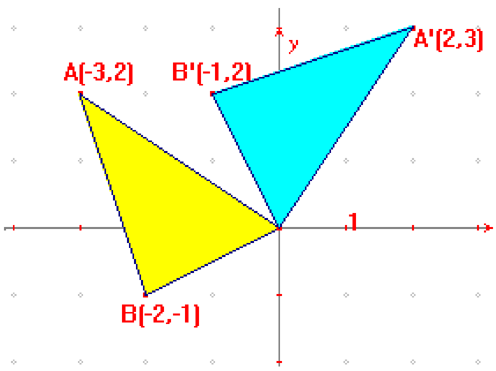
32.



33.



34.



35. Dado el punto $A(-2, 3)$, aplícale una traslación según el vector $\vec{u}(1, -2)$ y, a continuación, otra traslación según el vector $\vec{v}(-2, 5)$. ¿Qué punto obtienes?

Calcula ahora las componentes del vector que une el punto A al punto que acabas de obtener tras las dos traslaciones sucesivas.

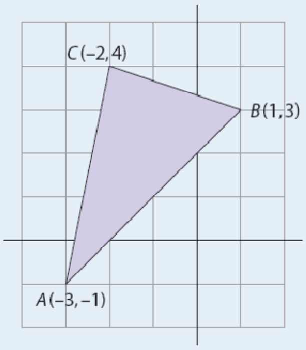
36. Calcula el simétrico del punto $A(4, 1)$:

a) Respecto del eje de ordenadas.

b) Respecto del eje de abscisas.

c) Respecto del origen de coordenadas.

37. Observa el triángulo de la figura:



Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo obtenido al aplicar al triángulo anterior una simetría respecto:

a) Del eje de abscisas.

b) Del eje de ordenadas.

c) Del origen de coordenadas.

38. Dibuja los triángulos resultantes de aplicar las simetrías del ejercicio anterior al triángulo dado.

39. Consideremos el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ y $C(2, 3)$. Realiza una traslación del triángulo según el vector $\vec{u} = (2, 0)$. Representa ambos triángulos.

40. Representa el cuadrilátero de vértices $A(-2, -2)$, $B(2, -1)$, $C(2, 1)$ y $D(-4, 2)$. Traslada dicho cuadrilátero según el vector de traslación $\vec{u} = (2, 1)$. Representa el nuevo cuadrilátero.

41. Dado el triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(0, 4)$ y $C(-1, 1)$, calcula los vértices de su simétrico respecto del eje formado por los puntos $(3, 5)$ y $(3, -5)$.

42. Consideremos el triángulo de vértices $A(2, 0)$, $B(-1, 1)$ y $C(0, 4)$. Representa su simétrico respecto del eje formado por los puntos $(3, 5)$ y $(3, -5)$. A la vista del dibujo, ¿cuáles son los vértices del triángulo simétrico?

43. Sea el cuadrilátero de vértices $A(1, 1)$, $B(4, 3)$, $C(8, 1)$ y $D(4, -3)$ y el vector $\vec{v}(-2, -3)$.

a) Representa gráficamente dicho cuadrilátero.

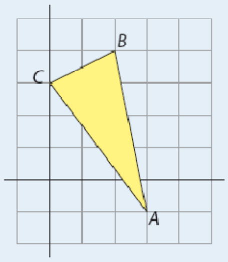
b) Aplica al cuadrilátero anterior una traslación según el vector $\vec{v}$.

44. Sea la circunferencia con centro en $(3, 2)$ y de radio 2 que pasa por los puntos $A(3, 0)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$ y $E(1, 2)$. Dibuja la circunferencia simétrica a la dada respecto del eje de ordenadas (calcula los homólogos de los puntos dados).

45. Calcula el simétrico respecto del origen de coordenadas del cuadrilátero de vértices $A(2, 1)$, $B(6, 2)$, $C(2, 5)$ y $D(1, 3)$.

46. Considerando el cuadrilátero del ejercicio anterior, calcula su simétrico respecto del eje de abscisas.

47. Dado el triángulo $\widehat{ABC}$ de la figura, aplícale primero una traslación según el vector $\vec{u}(1, 3)$ y después otra traslación según el vector $\vec{v}(2, -1)$.

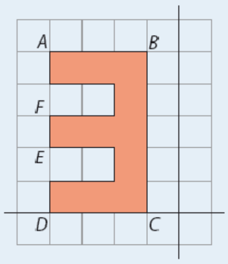


Aplica al triángulo de la figura anterior una única traslación según el vector $u + v = \vec{u} + \vec{v}$.

48. Señala los ejes de simetría de un triángulo equilátero.

49. Señala los ejes de simetría de un hexágono regular.

50. Dibuja el simétrico de la figura respecto del origen de coordenadas.



51. Calcula el simétrico de la figura de la actividad anterior respecto de cada eje de coordenadas.

35.

$$A' = (-2+1, 3-2) = (-1, 1)$$

$$A'' = (-1-2, 1+5) = (-3, 6)$$

$$\overrightarrow{AA''} = (-3+2, 6-3) = (-1, 3)$$

36.

a) $A' = (-4,1)$

b) A’’= (4,-1)

c) A’’’= (- 4,-1)

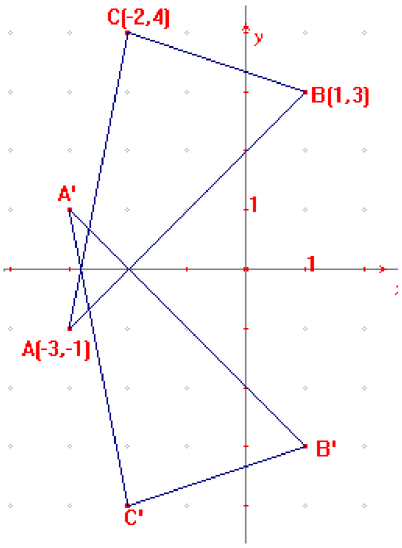
37.

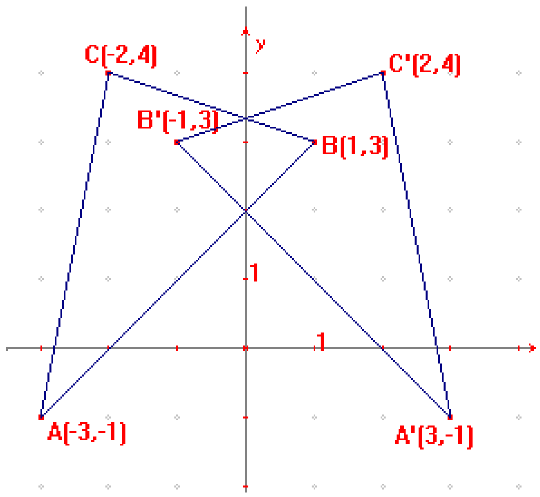
a) A’(- 3 , 1) , B’(1, - 3), C’(- 2 , - 4)

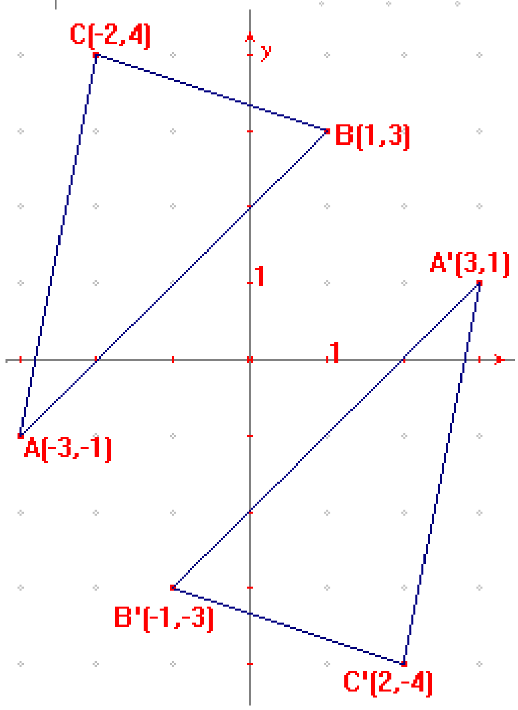
b) A’ (3 , - 1) , B’(- 1 , 3) , C’(2 ,4)

c) A’(3 , 1), B’(- 1 , - 3) , C’(2 , - 4)

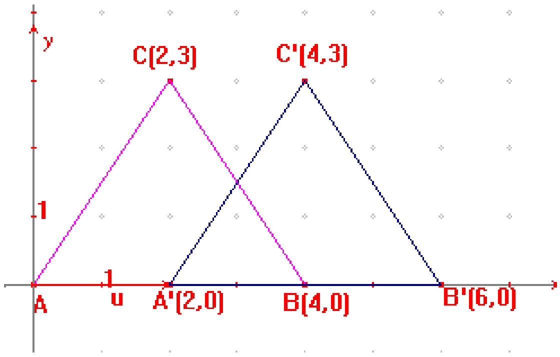
38.





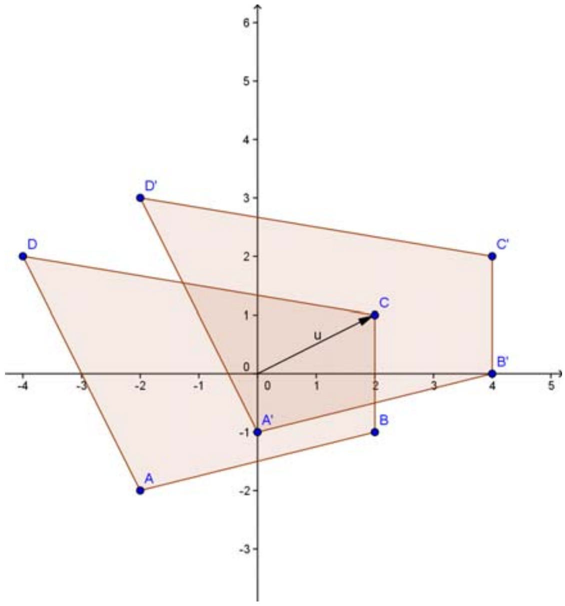


39.



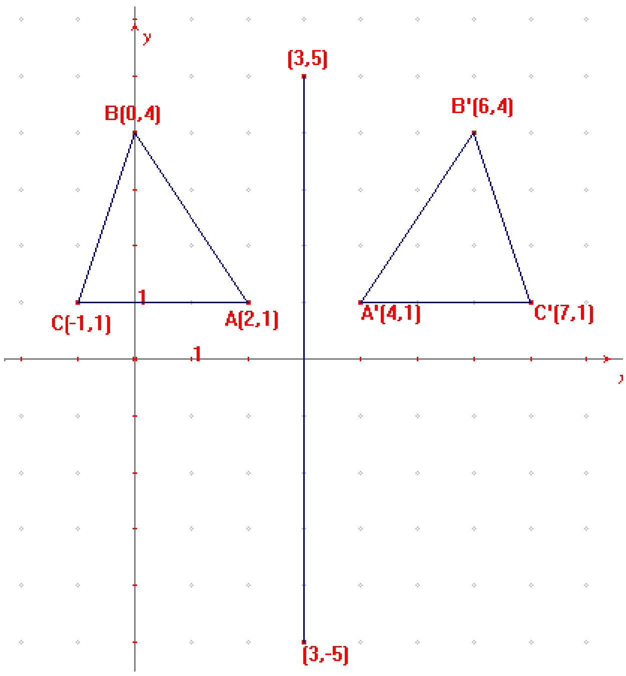
y
C(2,3)
C'(4,3)
1
1
A
u
A'(2,0)
B(4,0)
B'(6,0)

40.



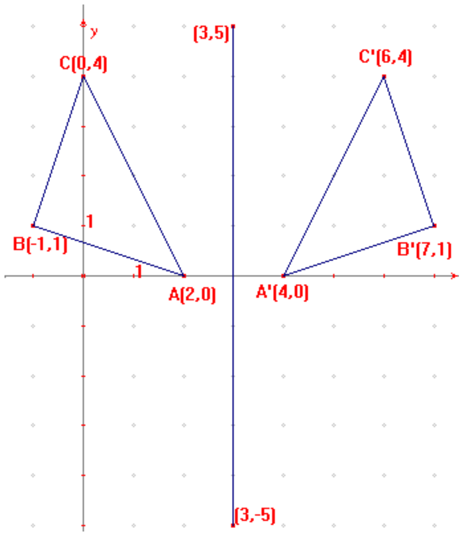
D'
D
C'
C
u
B'
A'
B
A

41.

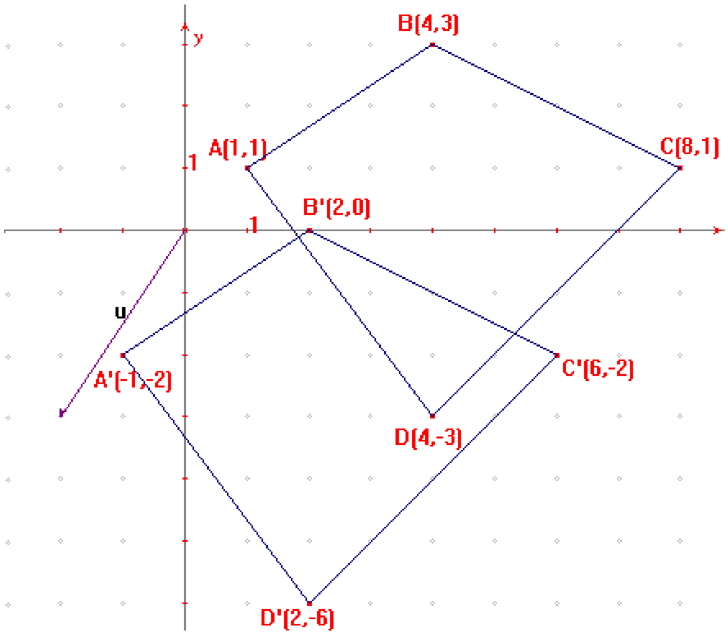


y
(3,5)
B(0,4)
B'(6,4)
C(-1,1)
A(2,1)
A'(4,1)
C'(7,1)
1
1
(3,-5)

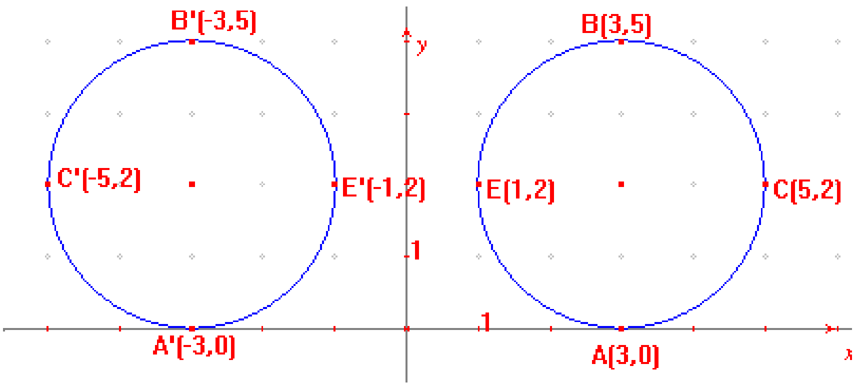
42.


y
(3,5)
C(0,4)
C'(6,4)
1
B(-1,1)
B'(7,1)
1
A(2,0)
A'(4,0)
(3,-5)

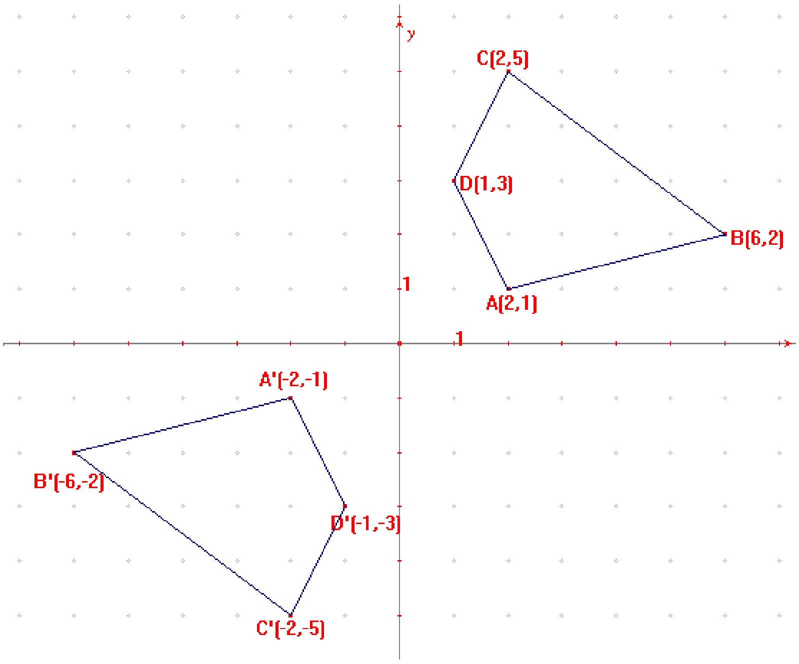
43.


y
B(4,3)
A(1,1)
C(8,1)
1
B'(2,0)
1
u
A'(-1,-2)
C'(6,-2)
D(4,-3)
D'(2,-6)

44.

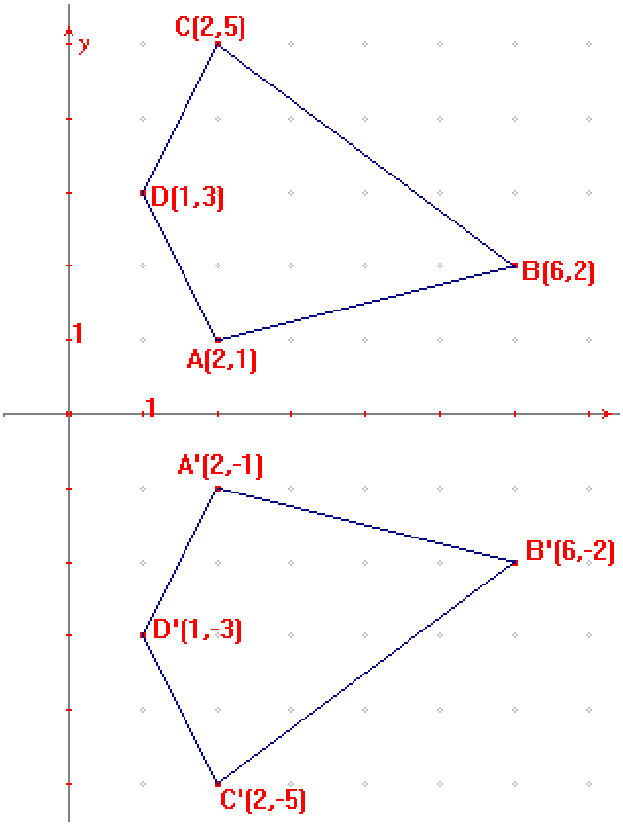

B'(-3,5)
y
B(3,5)
C'(-5,2)
E'(-1,2)
E(1,2)
C(5,2)
1
1
A'(-3,0)
A(3,0)
x

45.



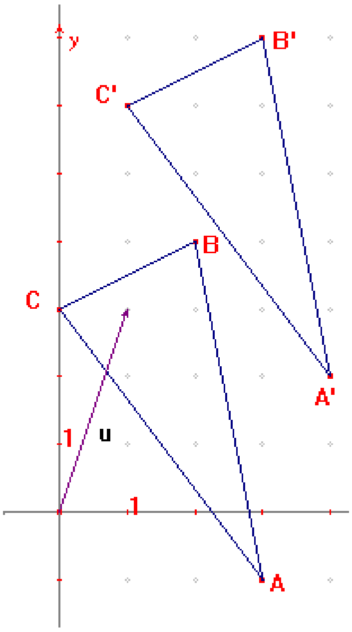
y
C(2,5)
D(1,3)
B(6,2)
1
A(2,1)
1
A'(-2,-1)
B'(-6,-2)
D'(-1,-3)
C'(-2,-5)

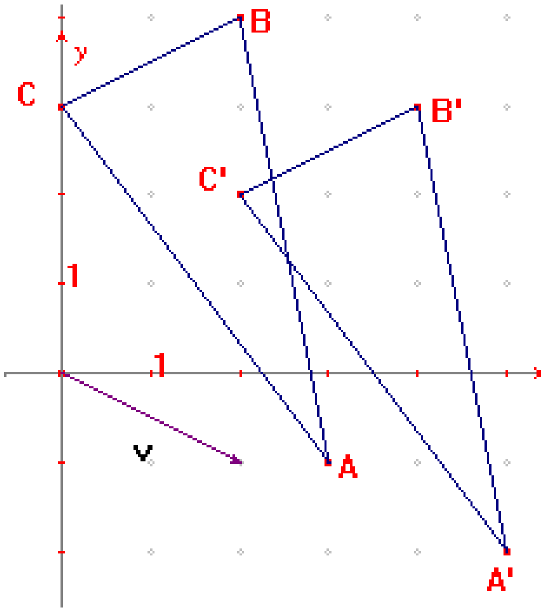
46.

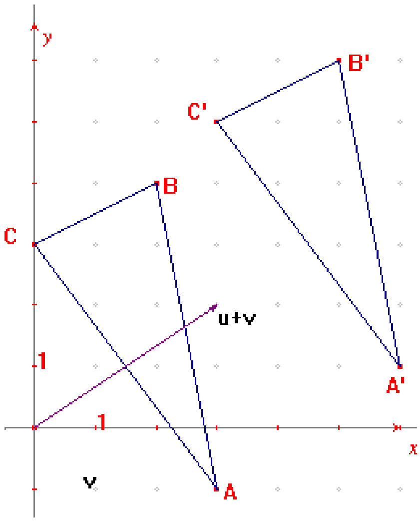


y
C(2,5)
D(1,3)
B(6,2)
1
A(2,1)
1
A'(2,-1)
B'(6,-2)
D'(1,-3)
C'(2,-5)

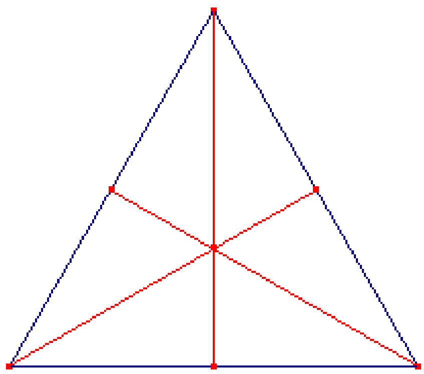
47.



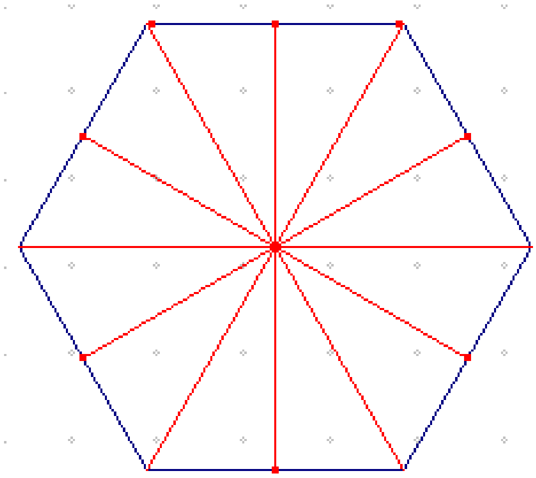




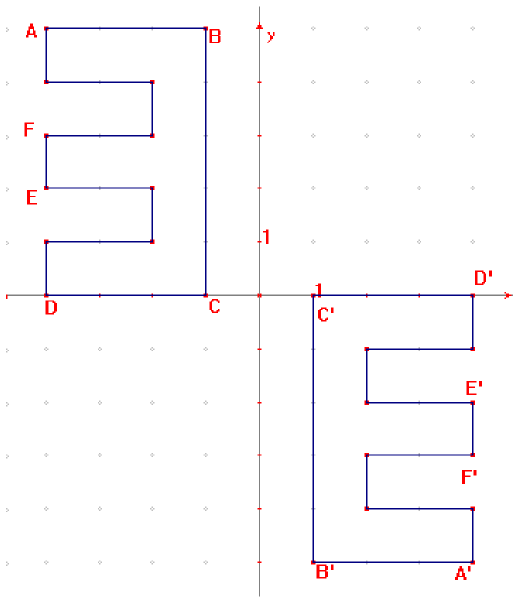
48.



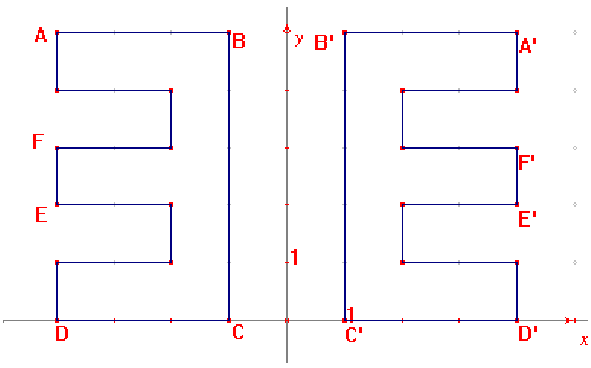
49.



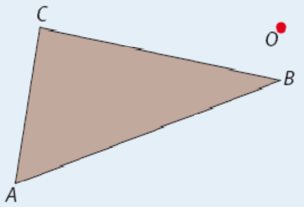
50.



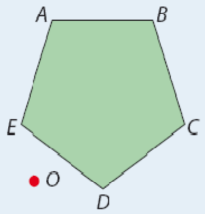
51.



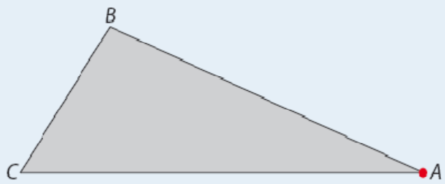
◐ **52.** Transforma el siguiente triángulo mediante un giro de 90° con centro en *O*.



◐ **53.** Transforma el siguiente pentágono mediante un giro de 180° alrededor del punto *O*.

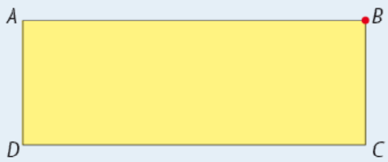


◐ **54.** Dado el triángulo de la figura, dibuja en tu cuaderno su simétrico respecto del punto *A*.



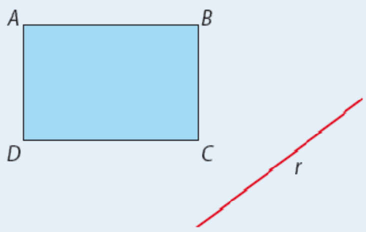
○ **55.** Dibuja en tu cuaderno el simétrico del triángulo del problema anterior respecto del lado $\overline{AB}$.

◐ **56.** Dibuja en tu cuaderno el simétrico del rectángulo de la figura respecto del punto *B*.

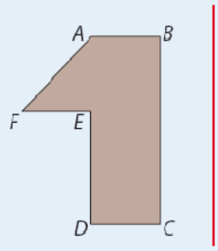


○ **57.** Dibuja en tu cuaderno el simétrico del rectángulo del problema anterior respecto del lado $\overline{BC}$.

◐ **58.** Calcula el simétrico del rectángulo dado respecto de la recta *r*.

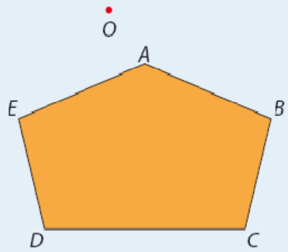


○ **59.** Obtén el simétrico de la figura con respecto al eje dado.



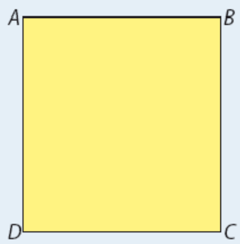
◐ **60.** Obtén la figura transformada del ejercicio anterior por un giro con centro en el origen de coordenadas y de 90° de ángulo de giro.

◐ **61.** Dibuja en tu cuaderno el simétrico del pentágono de la figura respecto del punto exterior *O*.



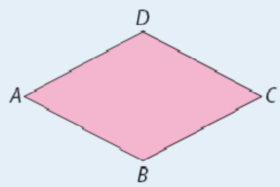
○ **62.** Dibuja el trapecio cuyas coordenadas son $A(-2, -4)$, $B(-1, 0)$, $C(-2, 4)$ y $D(-1, 3)$. Calcula las coordenadas de su simétrico respecto del eje de ordenadas y dibuja la figura resultante.

○ **63.** Indica los ejes de simetría del cuadrado de la figura.

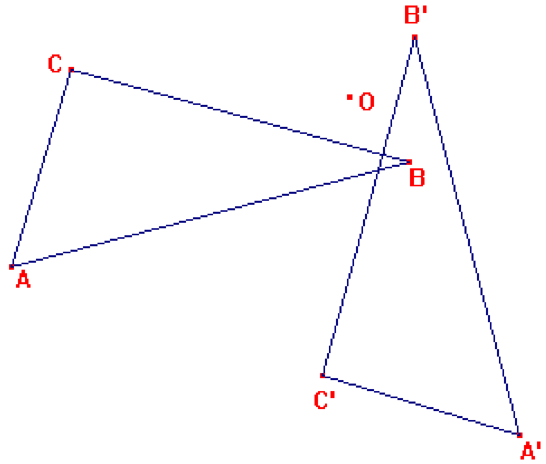


○ **64.** Calcula los ejes de simetría del rectángulo de la figura.

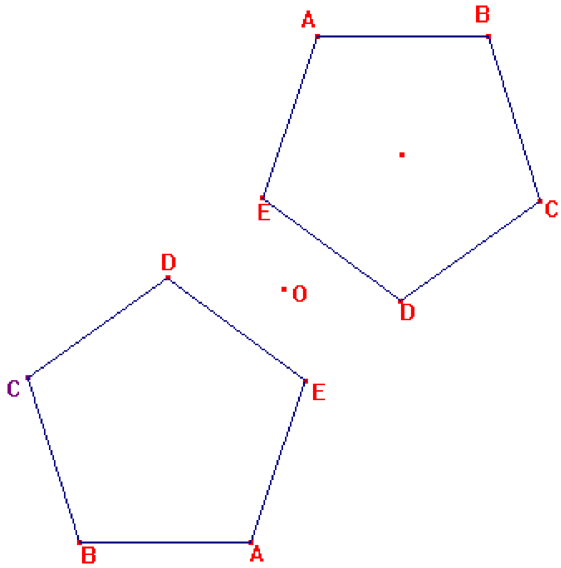
○ **65.** Dado el rombo de la figura, señala sus ejes de simetría.



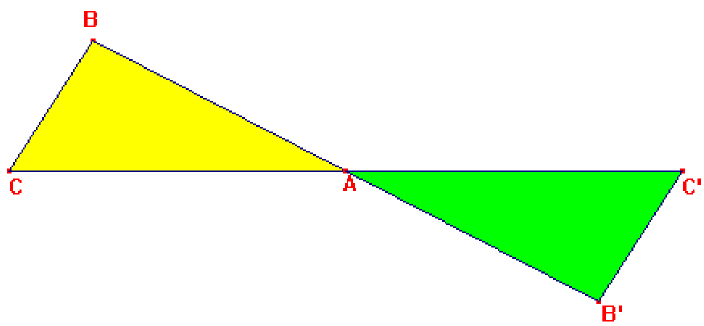
52.



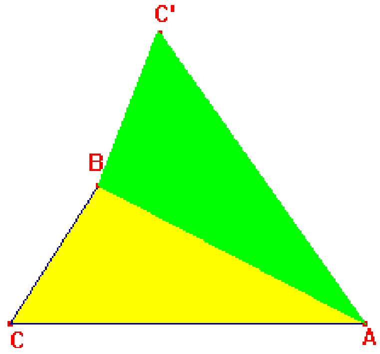
53.



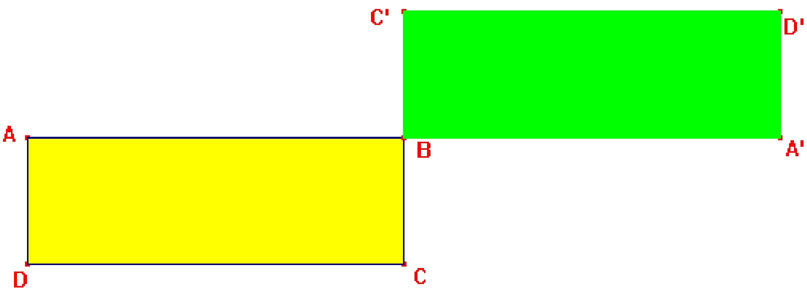
54.



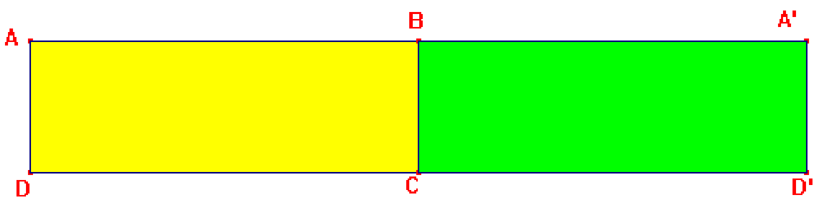
55.



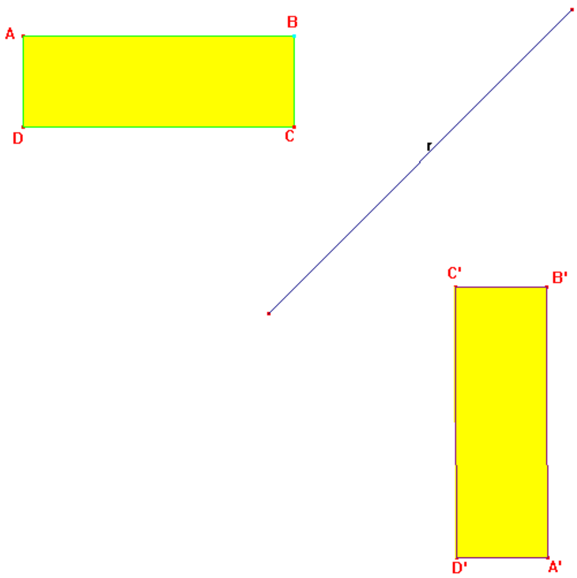
56.



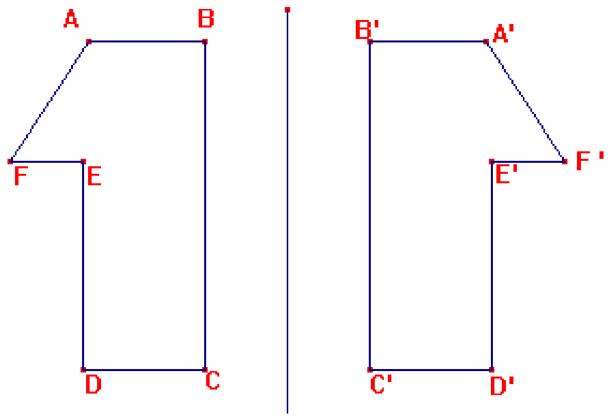
57.



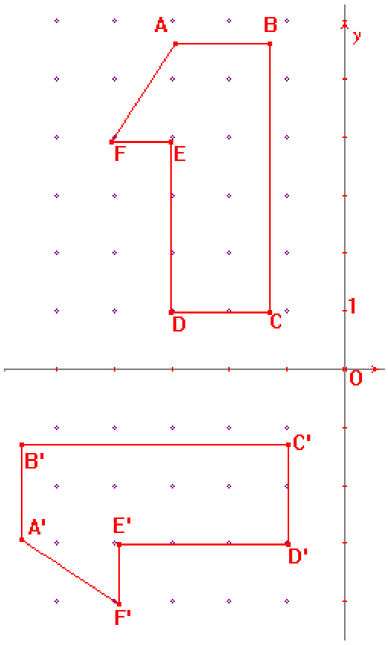
58.



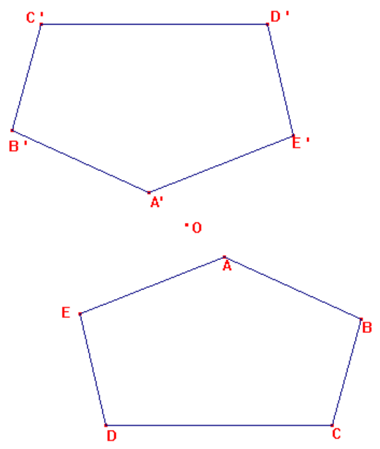
59.



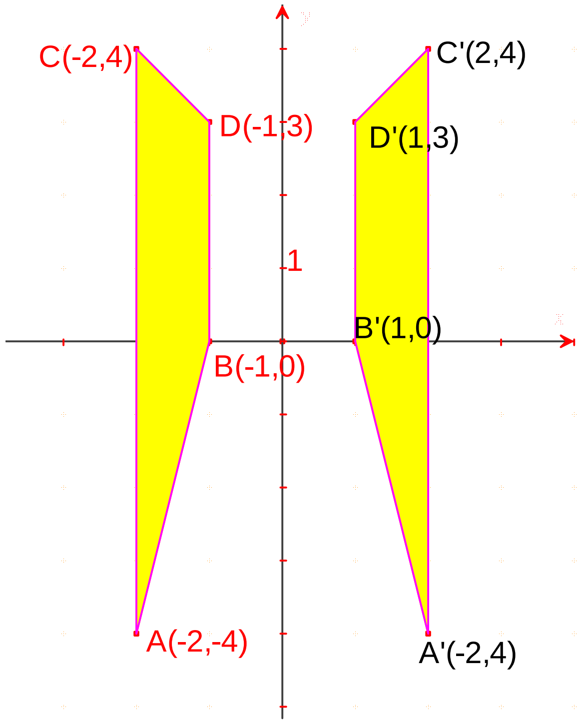
60.



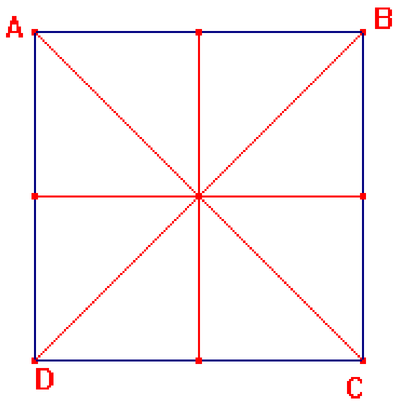
61.



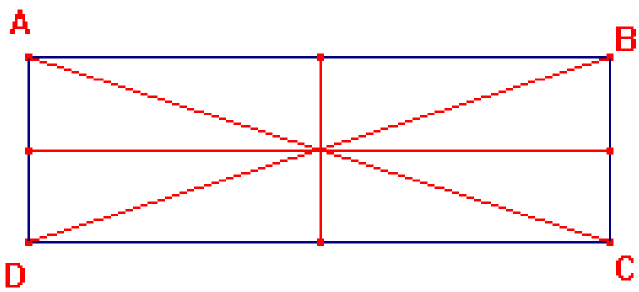
62.



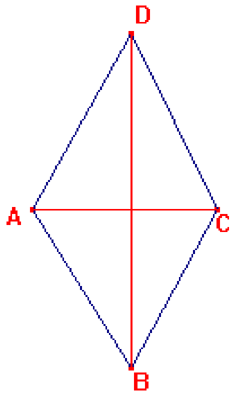
63.



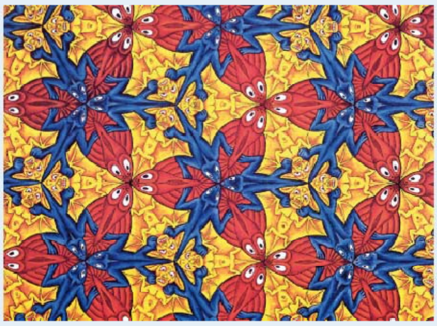
64.



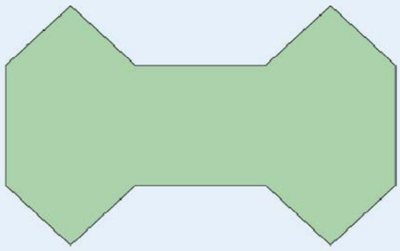
65.



○**66.** Identifica la figura básica y sus movimientos correspondientes en el siguiente mosaico.

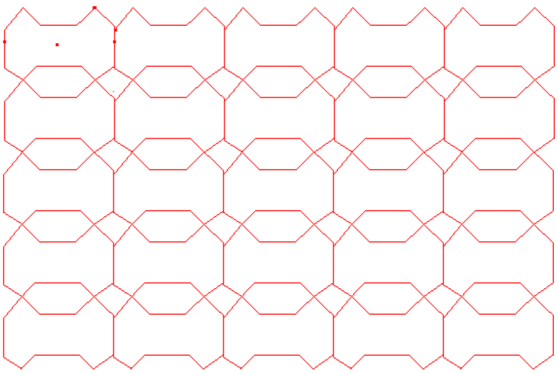


◐**67.** La siguiente figura es el multihueso que aparece en los Reales Alcázares de Sevilla. Intenta construir un mosaico con él.



66. Hexágono

67.



AUTOEVALUACIÓN PAG. 209

AUTOEVALUACIÓN

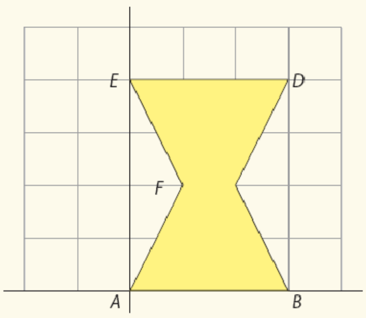
1. Dado el vector $\overrightarrow{AB}$, calcula sus componentes y su módulo siendo $A(3, 0)$ y $B(4, 2)$.

2. Sean los vectores $\vec{u} = (-4, 3)$ y $\vec{v} = (2, -1)$. Calcula $\vec{u} + \vec{v}$ y representa dicha suma.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v}(4, 2)$ y $\vec{w}(-1, 4)$, calcula $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ y $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$. Representa gráficamente ambas sumas de vectores.

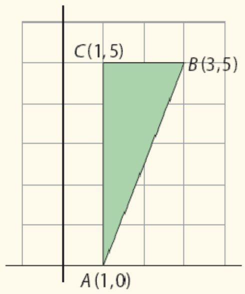
4. Sea el cuadrilátero de vértices $A(1, 0)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 1)$ y $D(3, 4)$. Representa el cuadrilátero que resulta de aplicar al cuadrilátero dado una traslación según el vector $\vec{u} = (5, -4)$.

5. Representa el simétrico respecto del eje de abscisas del polígono formado por los vértices $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(2, 2)$, $D(3, 4)$, $E(0, 4)$ y $F(1, 2)$.

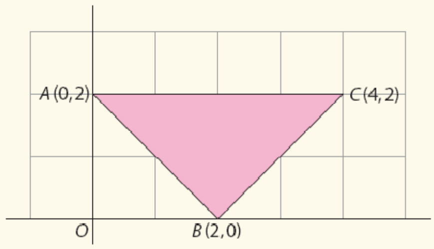


6. Representa el simétrico respecto del eje de ordenadas del polígono del ejercicio anterior.

7. Dado el triángulo de la figura, representa su simétrico respecto del origen de coordenadas.



8. Calcula el simétrico del siguiente triángulo respecto del origen O de coordenadas.



9. Calcula las coordenadas del transformado del triángulo de vértices $A(-1, -3)$, $B(2, -1)$ y $C(3, 3)$ mediante un giro de 90° con centro en $O(4, 1)$.

10. Construye un friso a partir de una figura básica.

Movimientos en el plano 209

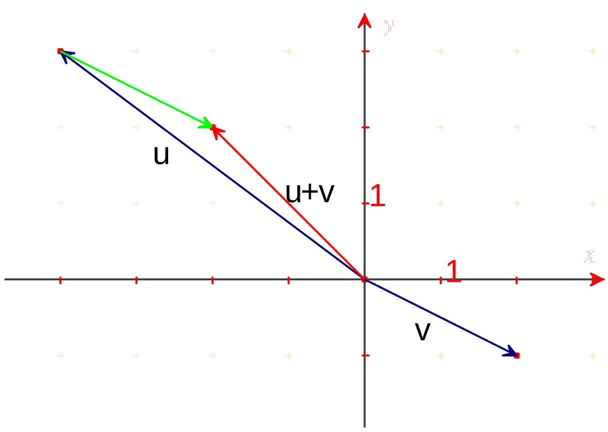
1.

$$\overrightarrow{AB} = (4-3, 2-0) = (1, 2)$$

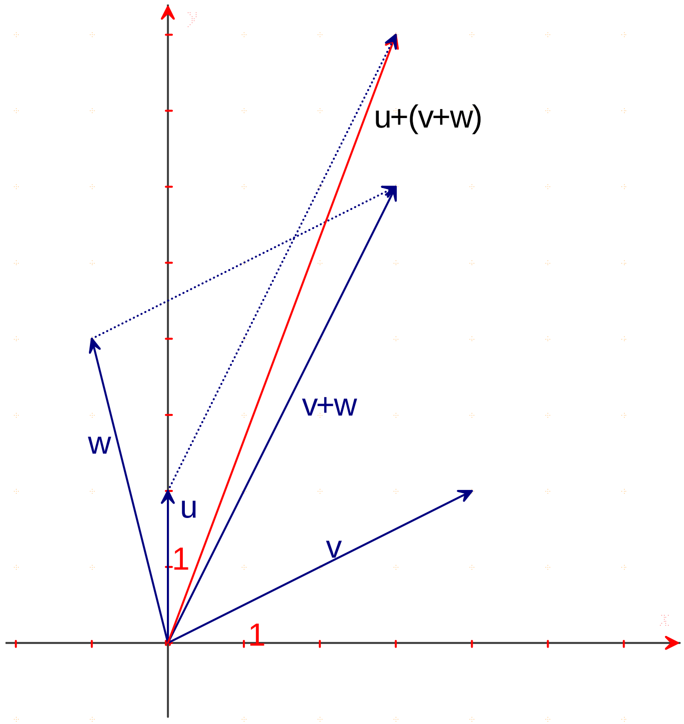
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

2.

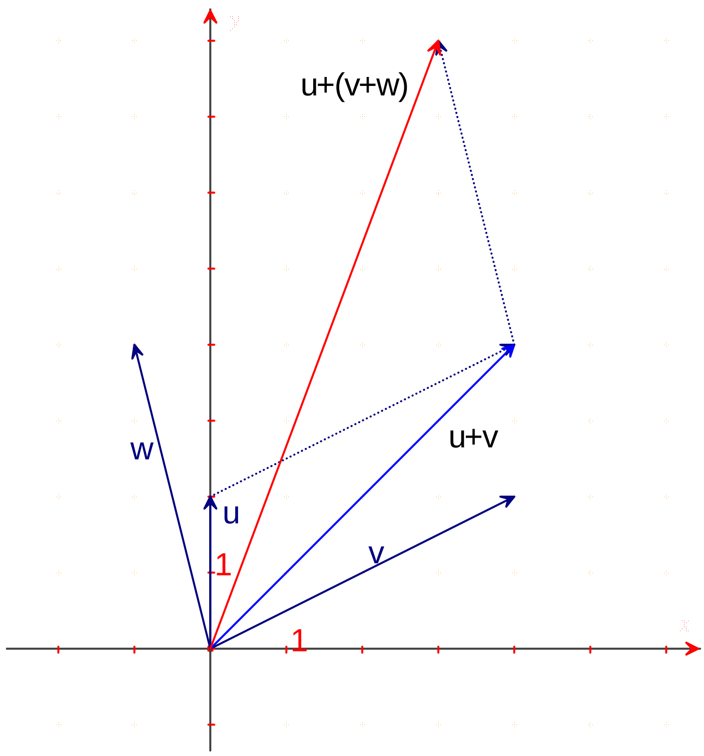
$$\vec{u} + \vec{v} = (-4+2, 3-1) = (-2, 2)$$



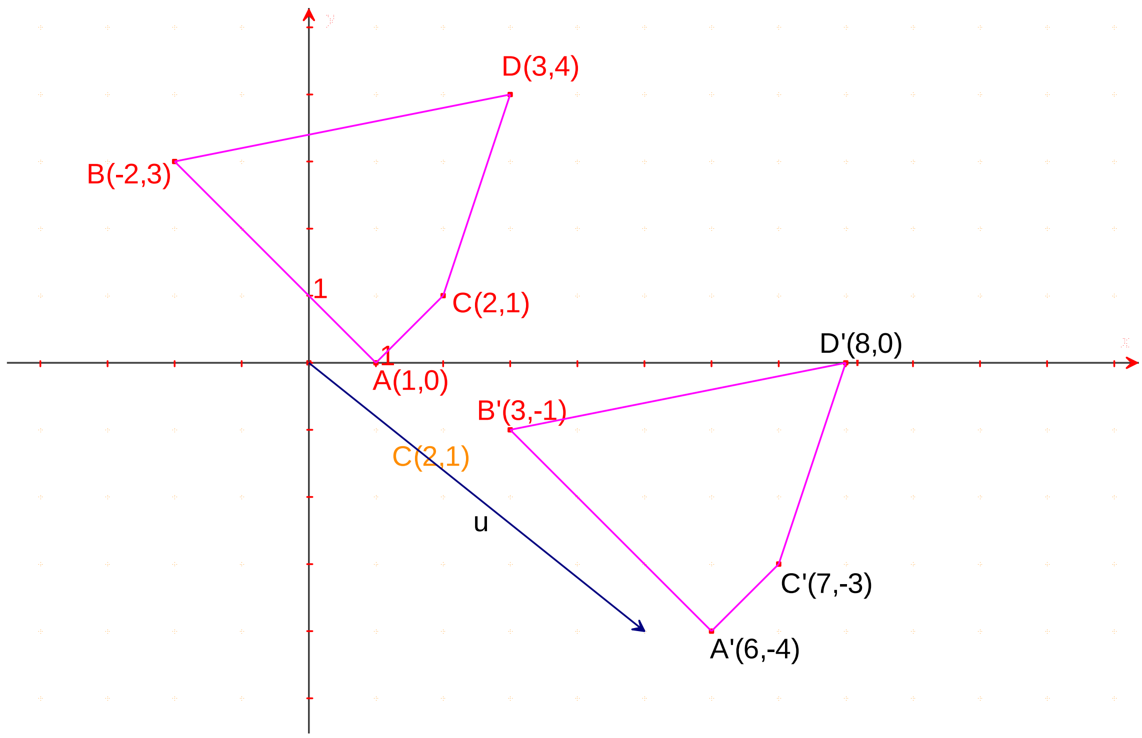
3. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(0,2)+(4-1,2+4)=(0,2)+(3,6)=(3,8)$



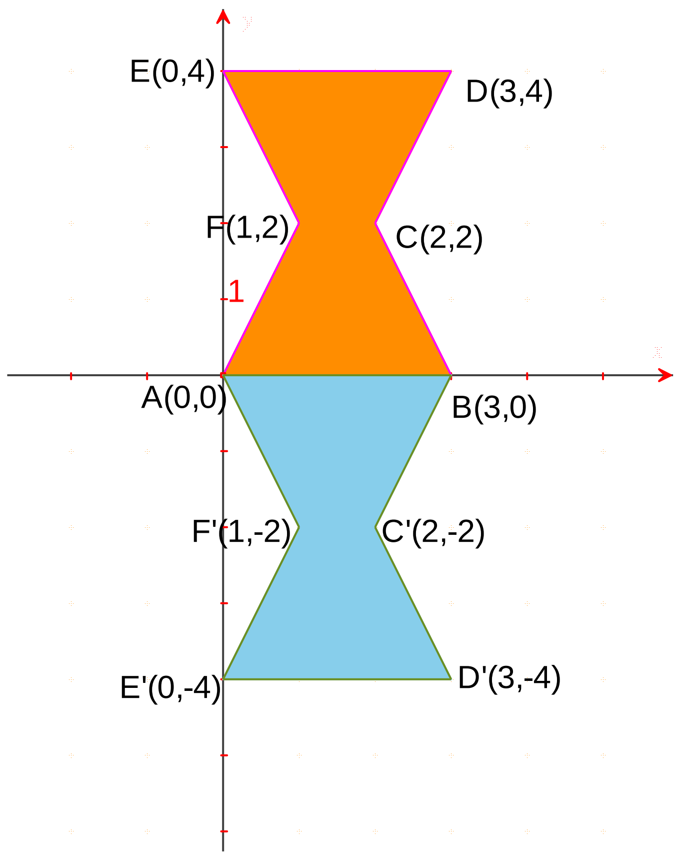
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=(0+4,2+2)+(-1,4)=(4,4)+(-1,4)=(3,8)$$



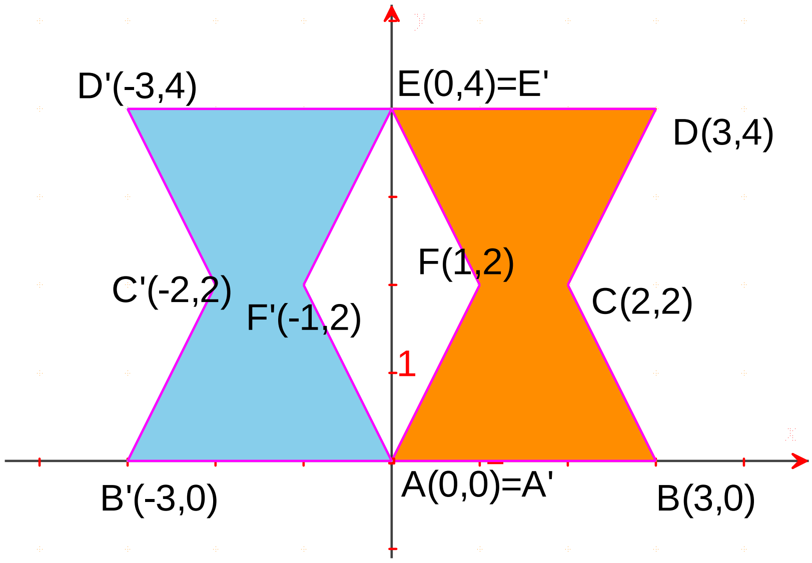
4.


D(3,4)
B(-2,3)
1
C(2,1)
1
A(1,0)
D'(8,0)
B'(3,-1)
C(2,1)
u
C'(7,-3)
A'(6,-4)

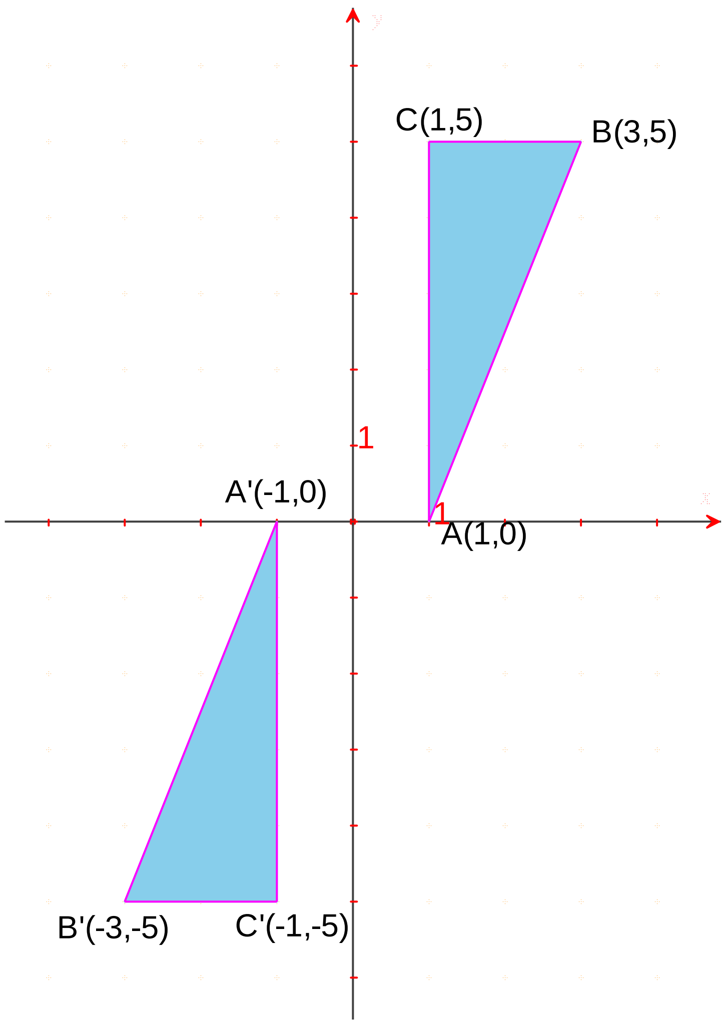
5.


E(0,4)
D(3,4)
F(1,2)
C(2,2)
1
A(0,0)
B(3,0)
F'(1,-2)
C'(2,-2)
E'(0,-4)
D'(3,-4)

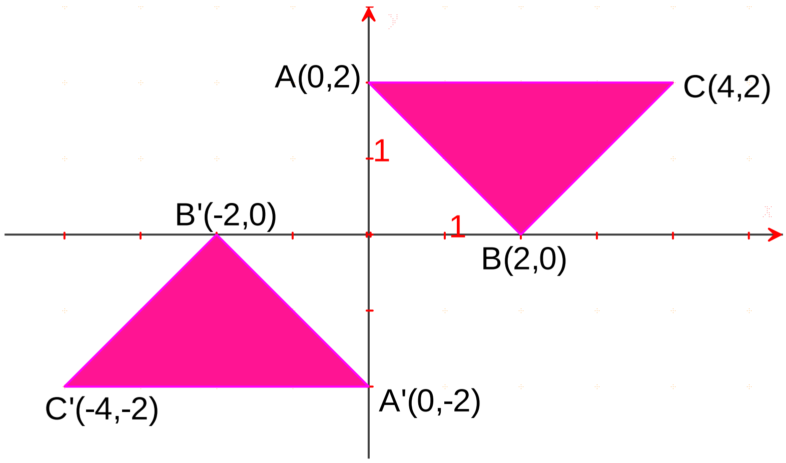
6.


D'(-3,4)
E(0,4)=E'
D(3,4)
F(1,2)
C'(-2,2)
F'(-1,2)
C(2,2)
1
B'(-3,0)
A(0,0)=A'
B(3,0)

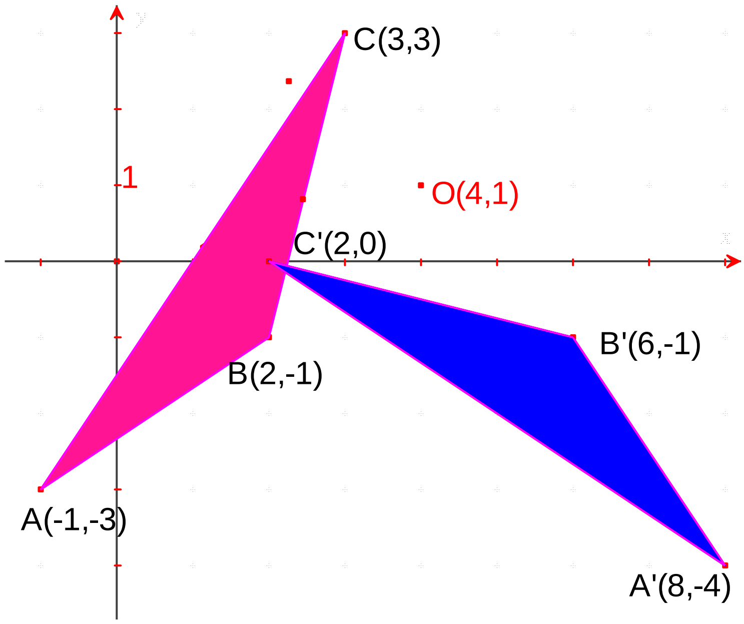
7.


C(1,5)
B(3,5)
1
A'(-1,0)
1
A(1,0)
B'(-3,-5)
C'(-1,-5)

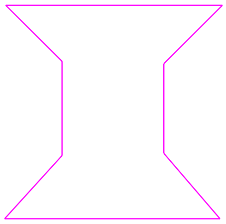
8.



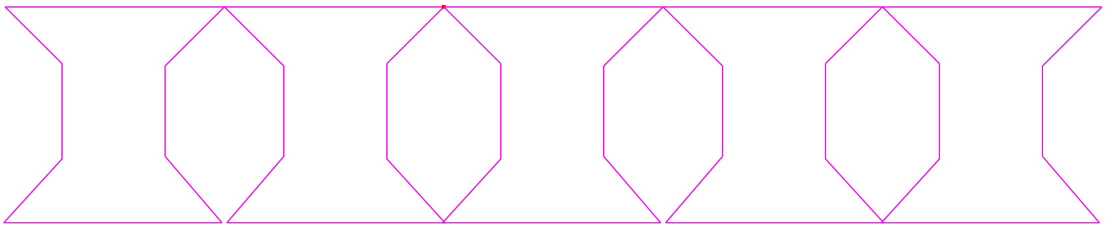
9.



10.
Sea la figura básica:



A continuación construimos el siguiente friso:



Olimpiada matemática

1. Calcula los números p y q tales que las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ sean D y $1 - D$, siendo D el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

2. Un número positivo x verifica la relación $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Demuestra que $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ es un número entero y calcula su valor.

1. $S = -\dfrac{b}{1} = -b \Rightarrow D + 1 - D = -p \Rightarrow p = -1$

$P = \dfrac{c}{a} = c \Rightarrow D(1-D) = q \Rightarrow q = D - D^2$

Ahora bien, $D = p^2 - 4q = 1 - 4q = 1 - 4(D - D^2)$

$4D^2 - 5D + 1 = 0 \Rightarrow D = 1,\ D = \dfrac{1}{4}$

$D = 1 \Rightarrow q = 1 - 1^2 = 0 \Rightarrow (p, q) = (-1, 0)$

D = $D = \dfrac{1}{4} \Rightarrow q = \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{16} \Rightarrow (p, q) = \left(-1, \dfrac{3}{16}\right)$

2. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9 \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 3$

$3 \cdot 9 = 27 = 3^3 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x} + 3x \cdot \dfrac{1}{x^2} = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3x + \dfrac{3}{x} =$

$= x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3 \cdot 3 \Rightarrow x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 27 - 9 \Rightarrow x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 18$

$7 \cdot 18 = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) = x^5 + \dfrac{1}{x^5} + x + \dfrac{1}{x} = 3 + x^5 + \dfrac{1}{x^5} \Rightarrow x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 123$

ACTIVIDADES PAG. 214

ACTIVIDADES

1. Expresa algebraicamente una función que a todo número entero le haga corresponder su doble más 5 unidades. Calcula la imagen de 3 y la antiimagen de 7 por dicha función.

2. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcula Im(f).

1. $f(x) = 2x + 5$; $f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$; $f(x) = 2x + 5 = 7 \Rightarrow 2x + 5 = 7 \Rightarrow x = 1$

2. $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ACTIVIDADES PAG. 215

ACTIVIDADES

3. Sea el intervalo [2, 6). Indica si los siguientes números pertenecen al intervalo:

a) 3 b) 7 c) π d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{5}$ f) 5'9 g) 6'01 h) 6 i) 0 j) −6

4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x-3}$ b) $g(x) = \frac{2x+1}{2x-4}$ c) $h(x) = 3x^2 + 5x - 2$ d) $l(x) = \sqrt[3]{x}$

3.
a) Si
b) No
c) Si
d) No
e) Si
f) Si
g) No
h) No
i) No
j) No

4.
a) $\text{Dom}(f) = \{x \in \Re | x \geq 3\}$
b) $\text{Dom}(g) = \{x \in \Re | 2x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
c) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$
d) $\text{Dom}(l) = \mathbb{R}$

ACTIVIDADES PAG. 216

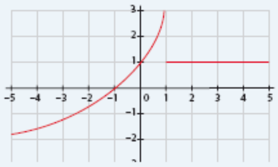
ACTIVIDADES

5. Construye una tabla con las imagénes de $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 2, 1, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ mediante la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Representa gráficamente la imagen de dichos puntos y únelos.

6. Representa gráficamente la función $f(x) = 3x + 1$.

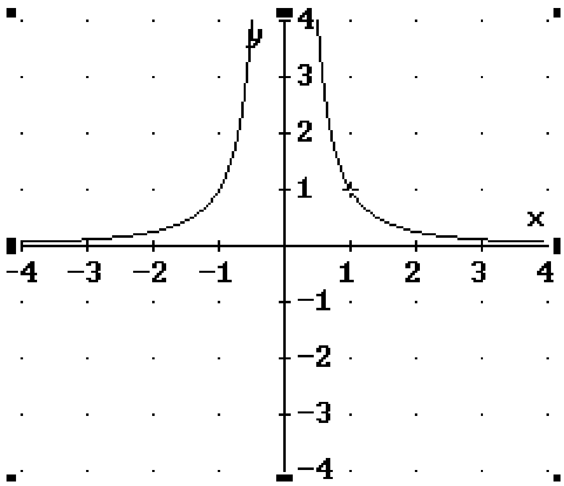
7. Calcula el corte con los ejes de la función $3x - 2y = 6$.

8. Indica si la función del dibujo es continua y señala, en el caso que existan, sus puntos de discontinuidad.

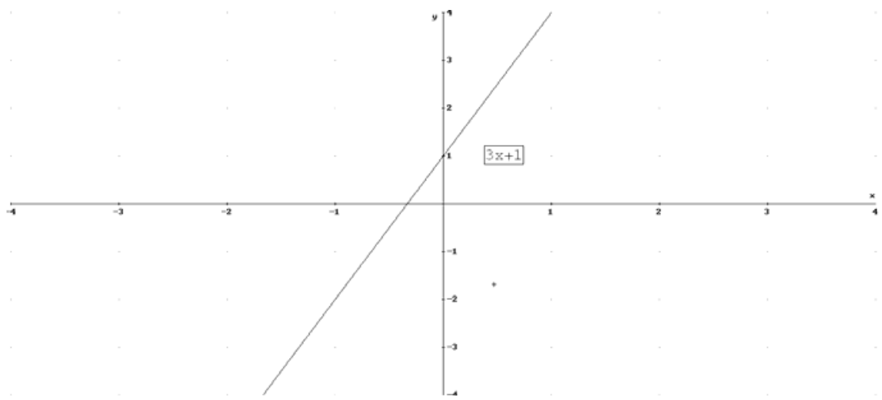


5.

x	$f(x)$
-2	$1/(-2)^2$= 0'25
-1	$1/(-1)^2 = 1$
- 1/2	$1/(-1/2)^2 = 4$
- 1/3	$1/(-1/3)^2 = 9$
1/3	$1/(1/3)^2 = 9$
1/2	$1/(1/2)^2 = 4$
1	$1/1^2 = 1$
2	$1/2^2$ = ¼



6. Gráfica de la función $f(x) = 3x + 1$



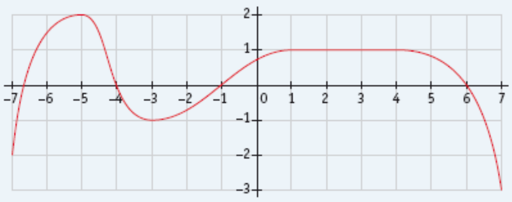
7. $x = 0 \Rightarrow -2y = 6 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A(0, -3)$
$y = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2,0)$

8. La función es discontinua en el punto x = 1

ACTIVIDADES PAG. 217

ACTIVIDADES

9. Indica dónde es creciente y decreciente la siguiente función, y sus máximos y mínimos relativos:



9.
La función es creciente en: $(-\infty, -5) \cup (-3, 1)$; es decreciente en: $(-5, -3) \cup (4'5, \infty)$.
Tiene un máximo relativo en el punto (-5 , 2) y un mínimo relativo en el punto (-3 , -1)

ACTIVIDADES PAG. 218

ACTIVIDADES

10. Indica la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $g(x) = x^2 + 1$ c) $h(x) = 2$

10.
a) $f(-x) = 1/(-x) = -1/x = -f(x) \Rightarrow$ Impar
b) $g(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = g(x) \Rightarrow$ Par
c) $h(-x) = 2 = h(x) \Rightarrow$ Par

ACTIVIDADES PAG. 219

ACTIVIDADES

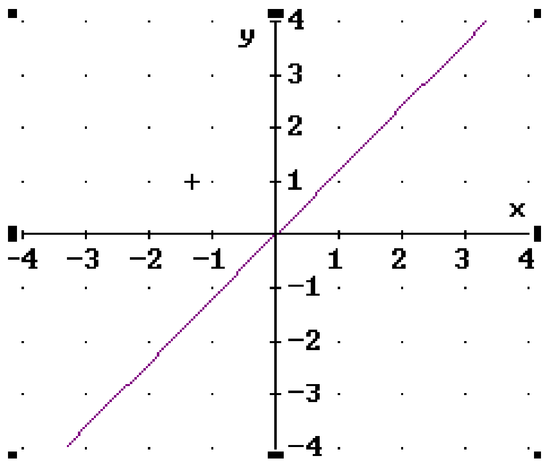
11. Indica la pendiente de las siguientes funciones lineales:

a) $y = 3x$ b) $f(x) = 2x$ c) $g(x) = 0'1x$

12. Un kilo de tomates cuesta 1'2 €/kg. ¿Cuánto costarán 3 kg? Escribe una función que exprese la relación anterior y represéntala gráficamente situando en el eje de abscisas los kilos y en el eje de ordenadas su coste en euros.

11.
a) m = 3
b) m = 2
c) m = 0'1

12. Tres kilos cuestan 3 · 1’2 = 3’6 € . La expresión analítica será: *f(x)* = 1’2*x*



ACTIVIDADES PAG. 220

ACTIVIDADES

13. Indica cuáles de las siguientes rectas son paralelas entre sí:

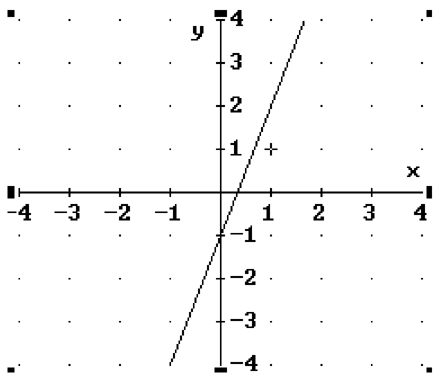
a) $f(x) = 3x - 1$ b) $g(x) = 3x - 2$ c) $h(x) = x + 2$

14. Representa gráficamente las funciones anteriores.

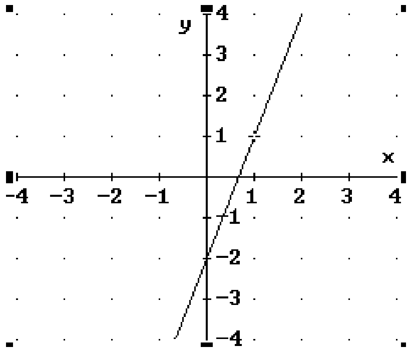
13. Las rectas que son paralelas son las del apartado a) y b) ya que su pendiente es la misma.

14.

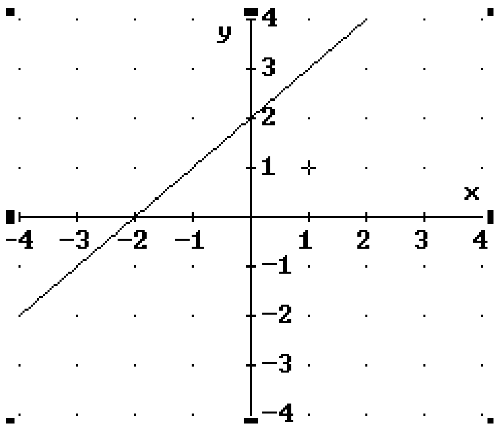
a) $f(x) = 3x - 1$



b) $g(x) = 3x - 2$



c) $h(x) = x + 2$



ACTIVIDADES PAG. 221

ACTIVIDADES

15. Expresa en forma general y en punto-pendiente las rectas que pasan por los siguientes puntos:

a) (2, 0) y (3, 1) b) (−2, 12) y (6, 0) c) (−102, −2) y (59, −2)

15.

a) $m = \dfrac{1-0}{3-2} = 1$; $y = 1 + 1\cdot(x - 3) \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow$ Ecuación punto-pendiente

$x - y = 2 \Rightarrow$ Ecuación en forma general

b) $m = \dfrac{0-12}{6-(-2)} = \dfrac{-12}{8} = -\dfrac{3}{2}$; $y = 0 - \dfrac{3}{2}(x-6) \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + 9 \Rightarrow$ Ecuación punto-pendiente

$\dfrac{3}{2}x + y = 9 \Rightarrow$ Ecuación en forma general

c) $m = \dfrac{-2-(-2)}{59-(-102)} = 0$; $y = -2 + 0\cdot(x - 59) \Rightarrow y = -2 \Rightarrow$ Ecuación punto-pendiente = Ecuación en forma general.

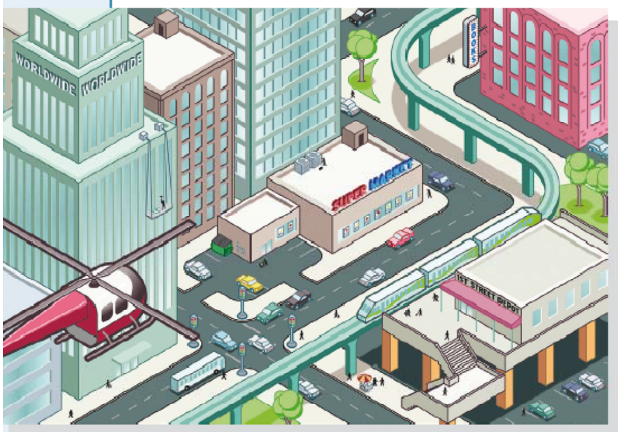
DESAFÍO MATEMÁTICO PAG. 222

Desafío matemático

Movimiento rectilíneo

La aplicación de las funciones en la física es muy importante. La función que expresa un movimiento rectilíneo uniforme (a velocidad constante) es $x(t) = x_0 + v \cdot t$, donde $x(t)$ indica el punto en donde se encuentra en móvil en el tiempo t, x_0 indica la posición inicial del móvil y v la velocidad. A la diferencia entre la posición que ocupa un móvil en un momento t y el momento inicial la denotamos $s = x(t) - x_0$. Esta longitud se llama desplazamiento.

Cuando relacionamos el cambio de velocidad con el tiempo, aparece el concepto de aceleración, que definimos como $a = \frac{v}{t}$. Las ecuaciones que definen un movimiento rectilíneo de aceleración constante son $v = v_0 + a \cdot t$, $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ donde v_0 indica la velocidad inicial, y a la aceleración.



1. Un coche circula a una velocidad constante de 20 m/s. ¿Qué tiempo tardará en recorrer 2 km? Si $s = x(t) - x_0 = 2000$ metros, sustituye este valor en la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme y obtendrás el tiempo en segundos.

2. Un tren que circula a una velocidad de 25 m/s aumenta su velocidad con una aceleración de $2\frac{m}{s^2}$, recorriendo en estas condiciones 500 m. Calcula el tiempo transcurrido en realizar el recorrido y la velocidad final que alcanza. Expresa los datos en términos físico-matemáticos:

   $s = x(t) - x_0 = 500$ metros, $v_0 = 25$ m/s, $a = 2\frac{m}{s^2}$

3. Sustituye los datos en las dos ecuaciones que definen el movimiento rectilíneo de aceleración constante. Obtendrás una ecuación de segundo grado en t. Con la que podrás calcular el tiempo en segundos. Sustituye este resultado en la ecuación que indica la velocidad y habrás resuelto el problema.

Crecimiento bacteriano

Las funciones matemáticas nos ayudan en el estudio demográfico de las poblaciones bacterianas. Las poblaciones de bacterias en ocasiones presentan un crecimiento exponencial, con lo que en un tiempo muy reducido se concentra un número muy elevado de ellas.

El modelo matemático del crecimiento de las bacterias es una progresión geométrica, dada por la siguiente función $x = x_0 \cdot 2^n$. En esta ecuación x representa el número total de individuos, x_0 el número de bacterias en el momento inicial, n el número de generaciones transcurridas. Llamaremos tiempo de generación (g) al tiempo transcurre para que el número de bacterias se duplique. El número de generaciones viene dado por la expresión $n = \frac{t}{g}$, donde t indica el tiempo transcurrido.

1. Calcula el número de bacterias que pueden generar cinco células iniciales, con un tiempo de generación $g = 20$ minutos, al cabo de 1 día.

2. Expresa el resultado obtenido en expresión científica.

Movimiento rectilíneo

1.

$x(t) - x_0 = 2000 \Rightarrow v \cdot t = 2000 \Rightarrow 20 \cdot t = 2000 \Rightarrow t = 100$ segundos

Tardará 1 minuto y 40 segundos en recorrer 2 km

2. $s = x(t) - x_0 = 500\ \text{m}$

$v_0 = 25\ \text{m}/\text{s}$

$a = 2\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow x(t) - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$500 = 25 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2\, t^2 \Rightarrow t^2 + 25\, t - 500 = 0 \Rightarrow \boxed{t \cong 1311\ \text{s}}$$

$$v = v_0 + a \cdot t \Rightarrow v = 25 + 2 \cdot 1311 \Rightarrow \boxed{v \cong 5122\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Crecimiento bacteriano

1. $x = x_0 \cdot 2^n\ ,\ n = \frac{t}{g}$

$x_0 = 5\ ,\ g = 20$ minutos $,\ t = 1$ día $= 24$ horas $= 1440$ minutos

$$n = \frac{t}{g} = \frac{1440}{20} = 72$$

$$x = x_0 \cdot 2^n \Rightarrow x = 5 \cdot 2^{72} \Rightarrow$$

$x = 23611832414348226068480$ bacterias generadas al cabo de un día

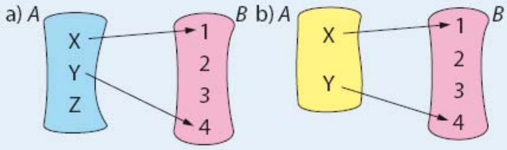
2.

$23611832414348226068480 = 2{\acute{}}3611832414348226068480 \cdot 10^{22}$ bacterias

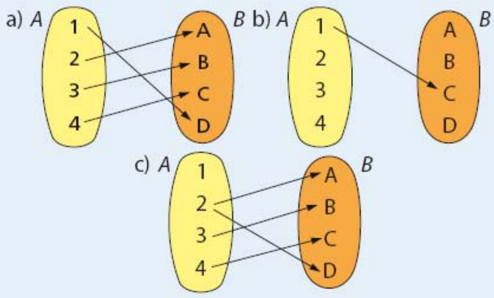
EJERCICIOS

Concepto de función

○ **16.** Observa las siguientes relaciones entre los conjuntos *A* y *B*. Razona si son funciones o no:



○ **17.** ¿Cuál de las siguientes expresiones indica una función y cuál de ellas indica una correspondencia?



○ **18.** Indica cuál de las siguientes expresiones es una función:

a) El coste de la fruta y los kilos comprados.

b) Que tengamos un buen día de playa y capturemos muchos peces.

c) La relación entre la hora del día y la luminosidad existente.

d) Que salga un seis en el juego de los dados y el número obtenido anteriormente.

e) Construir el cuádruple de un número dado.

○ **19.** Escribe la función que asigna a cada número su triple menos 5. Calcula la imagen de 1 por esta función. Calcula la antiimagen de –4 por la función dada.

○ **20.** Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, calcula la imagen mediante *f* de –1, 2, 0 y 3.

◐ **21.** Expresa algebraicamente la función que hace corresponder a cada número su cuadrado menos una unidad. Calcula las imágenes de 1, 3 y la antiimagen de 8 por esta función.

Intervalos

○ **22.** Indica a cuál de los siguientes intervalos pertenece el número 2:

a) [2, 3) c) (2, 3) e) (–1, 2) g) [–1, 2]

b) (2, 3] d) [2, 3] f) (–1, 2] h) [–1, 2)

○ **23.** Indica a qué intervalos de los dados pertenece π, tomando 3'1416 como valor de π:

a) [2, 3'1416] c) [3'14, 3'1417)

b) [2, 3'14) d) [2, 3'5)

○ **24.** Indica qué números de los siguientes pertenecen al intervalo (–5,0]:

a) $\sqrt{2}$ b) 5 c) π d) 0 e) –5 f) $\frac{1}{2}$ g) $-\frac{1}{2}$

Dominio y recorrido de una función

◐ **25.** Dada la siguiente función $f(x) = x^2\sqrt{-9}$, calcula su dominio y su imagen o recorrido.

◐ **26.** Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ c) $h(x) = \dfrac{x}{3}$

b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ d) $i(x) = \sqrt{x}$

◐ **27.** Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

◐ **28.** Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+2x+1}$ b) $g(x) = \dfrac{9}{x^2-9}$

◐ **29.** Calcula el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

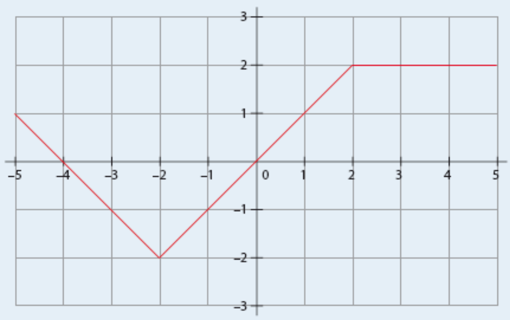
a) $f(x) = 5x^2 - 3$ c) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $g(x) = \sqrt{x-4}$ d) $i(x) = x^2$

◐ **30.** Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x-9}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2+16}$

○ **31.** Indica cuál es el recorrido de la siguiente función.



16.

a) No es función ya que no existe la imagen del elemento z.

b) Si es función.

17.
a) Función; b) y c) son correspondencia.

18.
a) Función b) No es función c) Función d) No es función e) Función

19. $f(x) = 3x - 5$; $f(1) = 3\cdot1 - 5 = -2$; $3x - 5 = -4 \Rightarrow x = 1/3$

20.
$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$
$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$
$$f(0) = 1$$
$$f(2) = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$
$$f(3) = 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$$

21. $f(x) = x^2 - 1$;
$f(1) = 1^2 - 1 = 0$
$f(3) = 3^2 - 1 = 8$
$x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm3$

22. Los intervalos a los que pertenece el número 2 son: a), d), f) y g).

23. Los intervalos a los que pertenece el número π son: a), c) y d).

24. Pertenecen los números de los apartados: d) y g).

25. Dom(f) = $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, ya que debe verificar: $x^2 - 9 \geq 0$; Im(f) = $[-9, +\infty)$

26.
a) Dom(f) = $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$
b) Dom(g) = $\mathbb{R}$ ya que $x^2 + 1 \neq 0$ para todo x en$\mathbb{R}$
c) Dom(h) = $\mathbb{R}$
d) Dom(i) = $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = [0, +\infty)$

27.
a) Dom(f) = $\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$
b) Dom(g) = $\mathbb{R}$

28.
a) Dom(f) = $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
b) Dom(g) = $\mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$

29.
a) Dom(f) = $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica. Im(f) = $[-3, +\infty)$
b) Dom(g) = $[4, +\infty)$ Im(g) = $[0, +\infty)$
c) Dom(h) = $\mathbb{R}$ Im(h) = $\mathbb{R}$
d) Dom(i) = $\mathbb{R}$ Im(i) = $[0, +\infty)$

30.
a) Dom(f) = $[9, +\infty)$
b) Dom(g) = $\mathbb{R}$

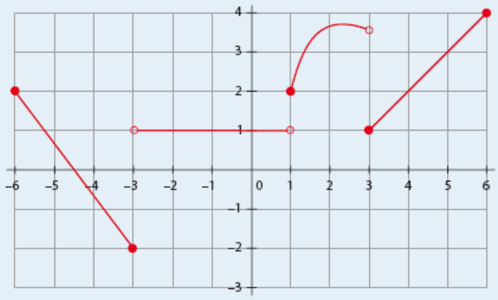
31. $\text{Im}(f) = [-2, 2]$

◐**32.** Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Calcula su dominio y su recorrido.

○**33.** Representa gráficamente la función $f(x) = 2x - 4$ e indica su dominio y su recorrido. ¿Cuál es su pendiente?

Continuidad

○**34.** Indica los puntos de discontinuidad de la siguiente función, su dominio y su recorrido:



◐**35.** Hemos tomado la temperatura en nuestra ciudad durante cierto día obteniendo la siguiente gráfica:

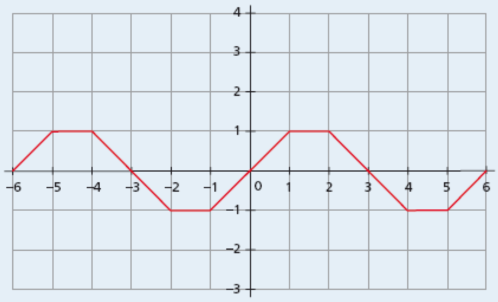
a) Indica las horas del día en que se alcanzan las temperaturas máxima y mínima, señalando ambos valores.

b) ¿Se trata de una función continua?

c) Indica los intervalos en los que la función es creciente.

d) Señala las horas, en forma de intervalo, en las que la temperatura disminuyó.

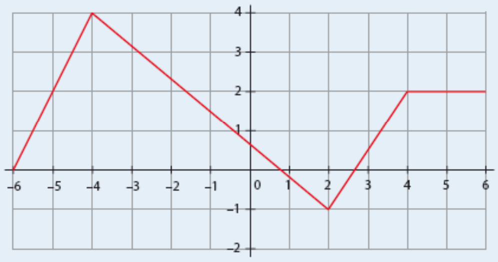
◐**36.** Di si la siguiente función es periódica y, en caso afirmativo, indica cuál es su periodo:



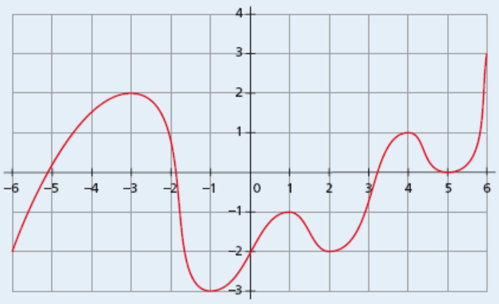
Crecimiento y extremos de una función

○**37.** Dada la función $f(x) = x + 1$, calcula la imagen de 3 y de 5 y deduce si es creciente o decreciente. ¿Es una función continua?

○**38.** Indica en qué puntos la siguiente función es creciente, en qué puntos es decreciente y dónde alcanza sus valores máximo y mínimo:



○**39.** Señala, en la función siguiente, los puntos en los que existen máximos o mínimos locales y absolutos.



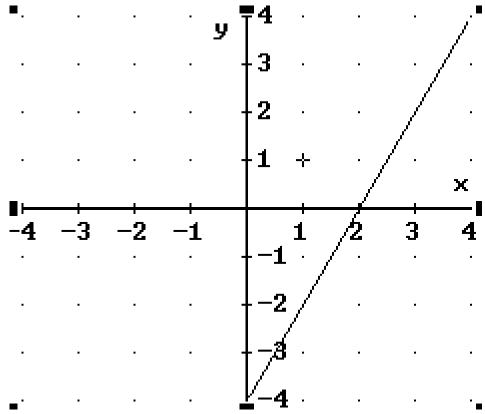
Simetrías y periodicidad

◐**40.** Considera la función del ejercicio 32 y estudia su paridad.

◐**41.** Estudia si $f(x) = x^5 + x$ es par o impar.

32. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad \text{Im}(f) = [0, +\infty)$

33. $f(x) = 2x - 4$



Dom(f) = $\mathbb{R}$ Im(f) = $\mathbb{R}$

La pendiente es 2

34. Los puntos de discontinuidad son: $x = -3$; $x = 1$; $x = 3$
Dom(f) = $\mathbb{R}$; Im(f) = $[-2 , +\infty)$

35.
a) La temperatura máxima se alcanza a las 14 horas y es de 9ºC, la temperatura mínima se alcanza a las 6 de la madrugada y es de -3ºC.
b) Si, su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.
c) La función es creciente en el intervalo: (6, 14)
d) La temperatura ha disminuido en los intervalos: $(0, 2) \cup (4, 6) \cup (14, 24)$

36. Es una función periódica, siendo su periodo T = 6

37.

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 3 + 1 = 4 \\ f(5) = 5 \cdot 1 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3) < f(5) \Rightarrow \text{la función es creciente.}$$

Es una función continua por ser una función polinómica.

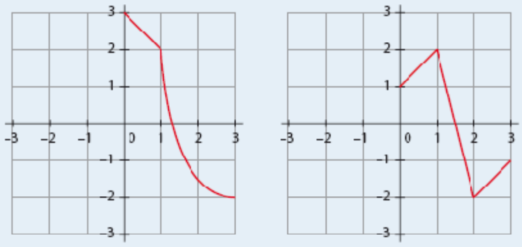
38.
La función es creciente en: $(-6,-4) \cup (2,4)$
La función es decreciente en: (-4,2)
La función alcanza su valor máximo en el punto:(-4, 4) y su valor mínimo en el punto: (2,-1)

39.
Máximos: (- 3 , 2) , (1 , - 1) , (4 , 1)
Mínimos: (- 1 , - 3) , (2 , -2) , (5 , 0)

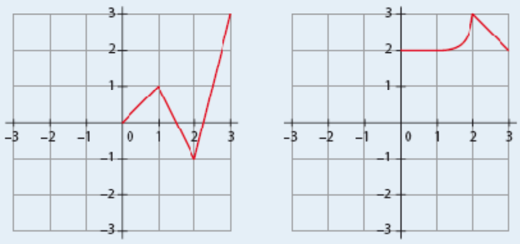
40.
$f(-x) = \frac{1}{(-x^2)} = \frac{1}{x^2} = f(x)) \Rightarrow f$ es un función par.

41. $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ es una función impar

○**42.** Completa las siguientes funciones sabiendo que tienen simetría par:



○**43.** Completa las siguientes funciones sabiendo que tienen simetría impar:



●**44.** Consideramos una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la expresión $f(x) = (\text{Ent } (x))^2$, siendo Ent($x$) la parte entera de x. Calcula:

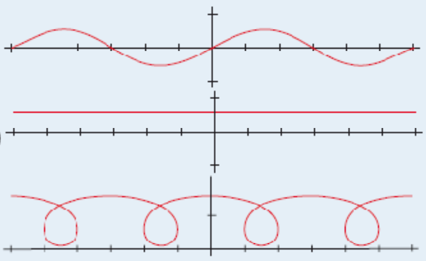
a) $f(0)$
b) $f(-5'232)$
c) $f(9'21)$
d) $f(\pi)$
e) $f([0, 1))$
f) $f([1, 2))$
g) $f([2, 3))$
h) $f([3, 4))$
i) $f([4, 5))$
j) $f(a'234)$ siendo a un número entero

Dibuja la gráfica de f. A la vista de su representación indica si la función es par o impar.

Gráficas de funciones lineales

○**45.** Indica cuál de las siguientes gráficas es de una función:

a)
b)
c)



○**46.** Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3$ b) $h(x) = -1$ c) $g(x) = -x$

◐**47.** La función $f(x) = 5x$ indica el consumo óptimo de fruta y verdura por persona y día. Represéntala gráficamente e indica el número de piezas de fruta o verdura que se deberían consumir en un hogar formado por los padres y 3 hijos.

○**48.** Representa las siguientes funciones e indica cuál es lineal y cuál es afín:

a) $f(x) = 2x$ b) $g(x) = x + 3$ c) $h(x) = 9x - 2$

Pendiente y ecuación de la recta

○**49.** Indica cuál es la pendiente de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x$ c) $h(x) = \frac{1}{7}x - 2$ e) $j(x) = -x$

b) $g(x) = x - 1$ d) $i(x) = 2x - 3$ f) $k(x) = 3$

○**50.** Indica cuáles de las siguientes rectas son paralelas entre sí e indica por qué:

$f(x) = 3x - 2$ $g(x) = 2x + 1$ $h(x) = 2x + 3$

○**51.** Indica cuáles de las siguientes rectas son paralelas entre sí:

$f(x) = 3x + 7$ $h(x) = 6x + 17$

$g(x) = 7x + 3$ $j(x) = 3x + 17$

◐**52.** Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(-1, -7)$ con pendientes $m = 3$ y $m' = -0'5$.

●**53.** Escribe en forma general las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

a) $(1, 5)$ y $(-1, -5)$ c) $(2, 1)$ y $(-2, -1)$

b) $(0, 0)$ y $(2, 10)$ d) $(3, 4)$ y $(-11, 4)$

●**54.** Pasa las siguientes rectas de la forma general a la forma punto-pendiente:

a) $2x + 5y = -1$ b) $-x - \frac{y}{2} = 1$

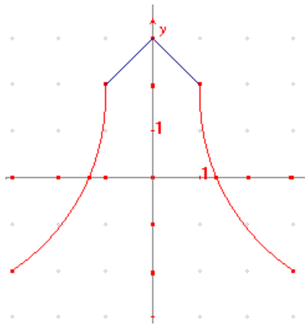
PROBLEMAS

●**55.** Sabemos que en determinado barrio el crecimiento del precio de la vivienda ha sido del 15% anual. Si compramos hace 5 años una casa por valor de 90 000 €, ¿qué precio tendrá actualmente? Representa con una función el crecimiento anual en euros del valor de la casa.

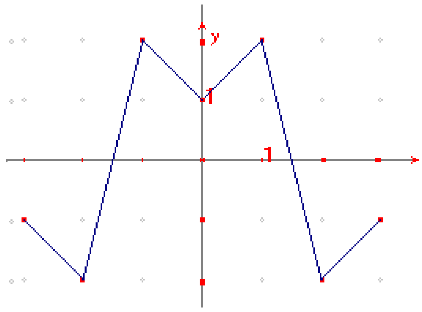
○**56.** Si circulamos en un coche a una velocidad de 80 km/h, ¿cuántos kilómetros recorreremos al cabo de 5 h? Representa el movimiento realizado mediante una gráfica, escribiendo los kilómetros en el eje de abscisas y el tiempo en el eje de ordenadas.

42.

a)

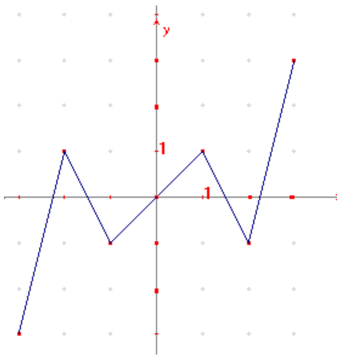


b)

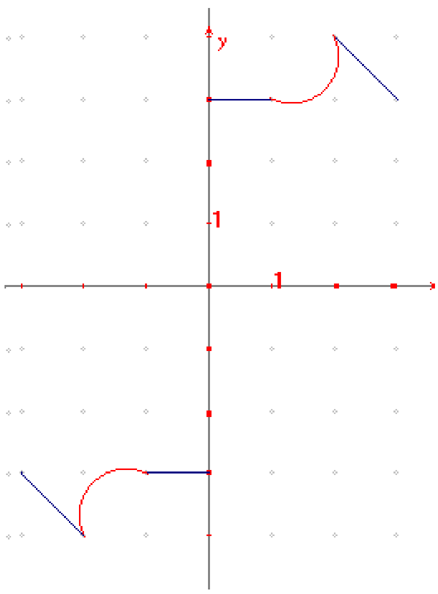


43.

a)



b)



44.

a) $f(0)=0$

b) $f(-5'232)=25$

c) $f(9'21)=81$

d) $f(\pi)=9$

e) $f([0,1))=0$

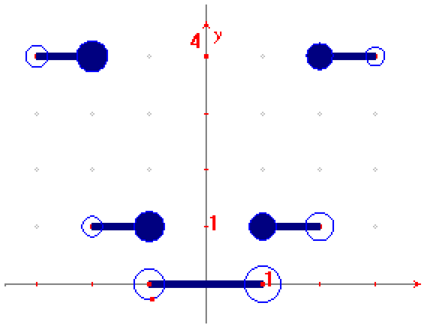
f) $f([1,2))=1$

g) $f([2,3))=4$

h) $f([3,4))=9$

i) $f([4,5))=16$

j) $f(a'234)=a^2$

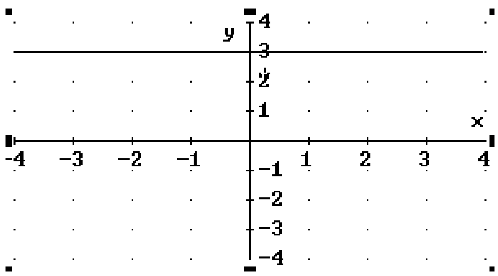


La función $f(x)=\left(Ent(x)\right)^2$ es una función par.

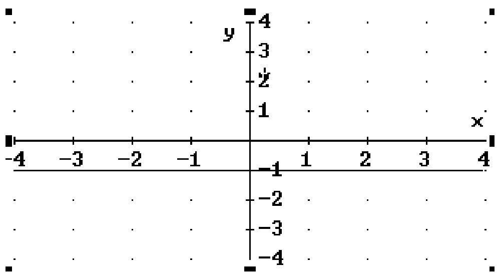
45. Son funciones los apartados a) y b).

46.

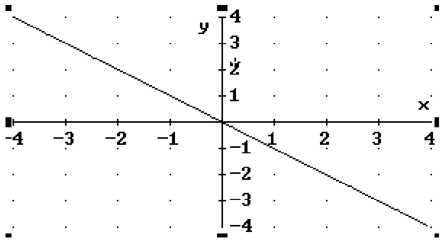
a)



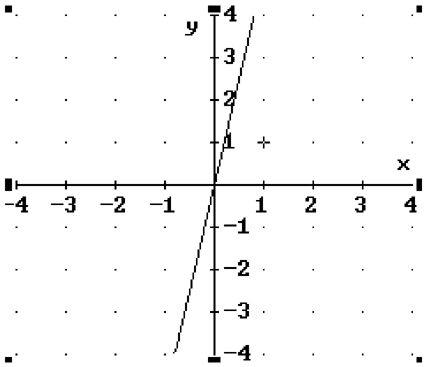
b)



c)



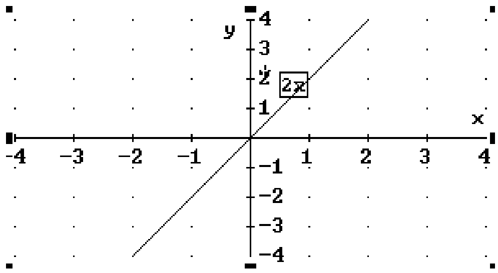
47. $f(x) = 5x$



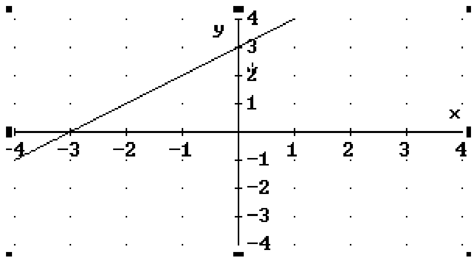
En un hogar con 5 miembros se deberían consumir f(5) = 5 · 5 = 25 piezas de fruta por día.

48.

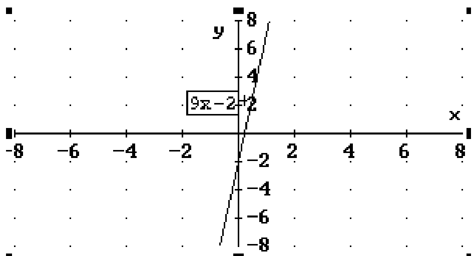
a) Función lineal



b) Función afín.



c) Función afín.



49.

a) m = 3

b) m = 1

c) $m=\frac{1}{7}$

d) m = 2

e) m = - 1

f) m = 0

50. g(x) y h(x) son paralelas ya que tienen la misma pendiente.

51. *f(x)* y *j(x)*

52.

a) $y+7=3(x+1)$

b) $y+7=-0'5(x+1)$

53.

a) $m=\frac{-5-5}{-1-1}\Rightarrow m=5\Rightarrow\ y-5=5(x-1)\Rightarrow\ 5x-y=0$

b) $m=\frac{10-0}{2-0}\Rightarrow m=5\Rightarrow\ y-0=5(x-0)\Rightarrow\ 5x-y=0$

c) $m=\frac{-1-1}{-2-2}=\frac{-2}{-4}\Rightarrow m=\frac{1}{2}\Rightarrow\ y-1=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow\ x-2y=0$

d) $m=\frac{4-4}{-11-3}=0\Rightarrow m=0\Rightarrow\ y-4=0$

54.

a) $y=-\frac{2x}{5}-\frac{1}{5}$

b) y = - 2 x - 2

55.

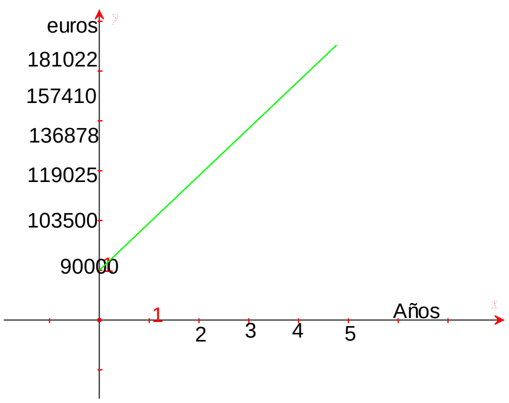
Al cabo de un año la vivienda cuesta 1’15 · 90000 = 103500 €

Al término del segundo año su valor es de 1’15 ·103500 = 119025 €

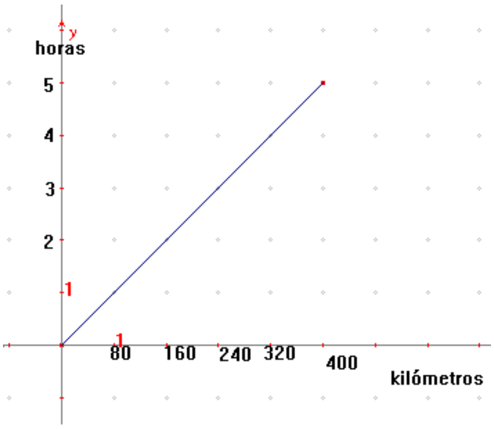
En el año tercero la vivienda tiene un valor de 1’15 · 119025 = 136878’75 €

El año cuarto la vivienda vale 1’15 · 136878’75 = 157410’ 5625 €

El quinto año el valor de la vivienda es 1’15 · 157410’ 5625 =181022’1468 €



56. Al cabo de 5 horas hemos recorrido 80 · 5 = 400 km



○**57.** Una planta crece 30 cm cada año. Expresa el crecimiento de dicha planta con una función. Realiza una tabla de dicha función durante los 4 primeros años, tomando el tiempo en años y el crecimiento en centímetros. Representa la función gráficamente. En la función anterior, ¿tiene sentido calcular su valor en $x = -1$? ¿Por qué?

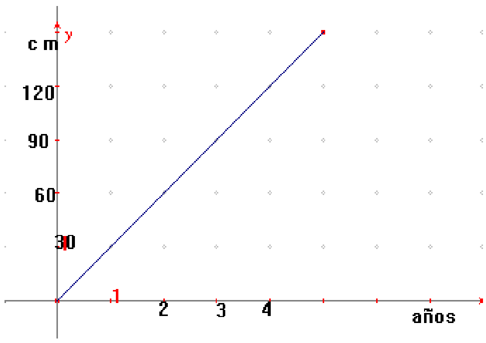
○**58.** Un grifo vierte 7 L de agua por minuto. Representa, mediante una función del tiempo, la cantidad total de agua que vierte el grifo. Calcula los litros totales que va vertiendo cada minuto durante los 5 primeros minutos.

○**59.** Un ascensor tarda 5 segundos en subir de un piso a otro. ¿Cuánto tardará en subir del bajo al 6º piso? ¿Y en subir del 4º al 6º? Representa en una gráfica el movimiento del ascensor en ambos casos, escribiendo en el eje de abscisas el tiempo en segundos y en el eje de ordenadas los pisos.

◐**60.** Un gimnasio cobra a sus socios 20 € de matrícula y una mensualidad de 35 €. Escribe una función que indique el dinero que paga un socio al gimnasio en función del tiempo (medido en meses). Si Lorena se matricula en marzo, ¿cuánto habrá pagado al finalizar el año? Representa gráficamente dicha función.

57. $f(x) = 30x$

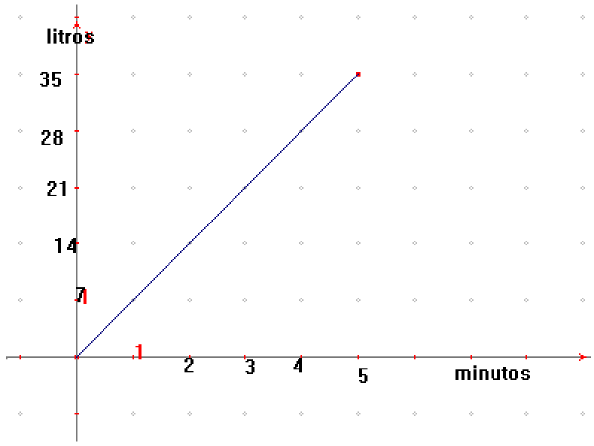
años	centímetros
1	30
2	60
3	90
4	120



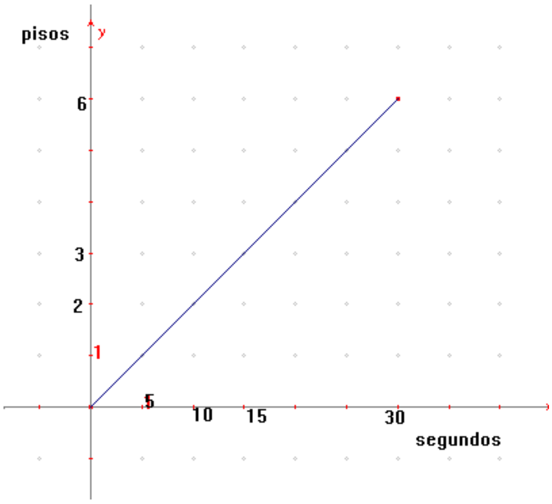
No tiene sentido calcular su valor para x = - 1, ya que x mide el tiempo.

58. $f(x) = 7x$

x	$f(x)$
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35

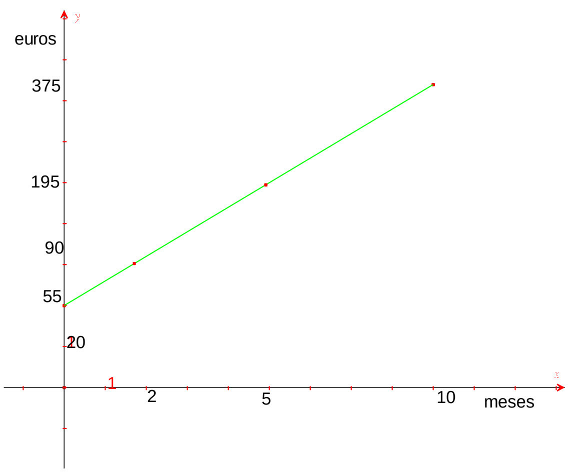


59. 30 segundos; 10 segundos



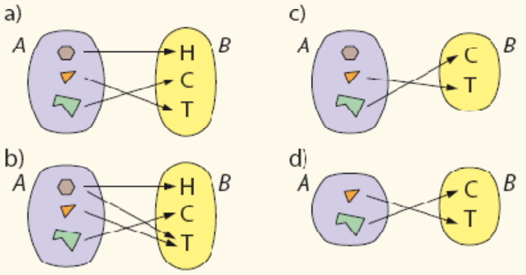
60. Sea x el tiempo medido en meses de permanencia en el gimnasio. La función es: $f(x) = 20 + 35x$

Si Lorena se matricula en marzo, a final de año habrá abonado 10 mensualidades, es decir, habrá pagado $f(10) = 20 + 35 \cdot 10 = 370$ €



AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuáles de las siguientes relaciones entre conjuntos son funciones y cuáles son correspondencias:



2. Expresa algebraicamente una función que a cada número real le hace corresponder su triple menos 2. Calcula la imagen de 2 y la antiimagen de 7 por dicha función.

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 4$ c) $h(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x-4}$ d) $i(x) = \sqrt{x+9}$

4. Indica qué tipo de función es $f(x) = 7x$. ¿Cuál es su pendiente?

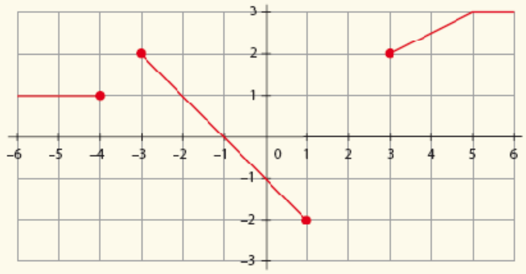
5. Indica qué números pertenecen al intervalo $(0, 7]$:

a) -3 c) 0 e) $\sqrt[3]{8}$ g) 6 i) 17

b) $-\pi$ d) $\sqrt{2}$ f) 2π h) 7 j) $0'001$

6. Expresa algebraicamente el área de un cuadrado en función de la longitud de su base.

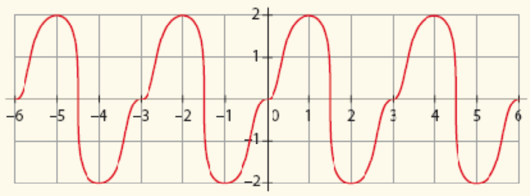
7. Indica los puntos de discontinuidad, el dominio y el recorrido de la siguiente función.



8. Indica qué rectas son paralelas entre sí y dibújalas:

$f(x) = 3x - 4$ $g(x) = x + 4$ $h(x) = 3x + 1$

9. Estudia si la siguiente función es periódica y, en caso afirmativo, indica su periodo:



10. Señala si la función $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x}$ es simétrica y, en su caso, indica por qué.

Funciones 227

1.
a) Función
b) Correspondencia
c) correspondencia
d) Función

2.

$$f(x) = 3x - 2$$
$$f(2) = 3 \cdot 2 - 2 \Rightarrow f(2) = 4$$

$$f^{-1}(7) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 7\} = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 = 7\} = \{3\}$$

3.
a) $Dom\ f = \mathbb{R}$
b) $Dom\ g = \{x \epsilon\, \mathbb{R} : x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{4\}$
c) $Dom\ h = \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0\} = \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$
d) $Dom\ i = \{x \in \mathbb{R} : x + 9 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -9\} = [-9, +\infty)$

4. Se trata de una función lineal. Su pendiente es m = 7

5.

a) $-3 \notin (0,7]$

b) $-\pi \notin (0,7]$

c) $0 \notin (0,7]$

d) $\sqrt{2} \in (0,7]$

e) $\sqrt[3]{8} \in (0,7]$

f) $2\pi \in (0,7]$

g) $6 \in (0,7]$

h) $7 \in (0,7]$

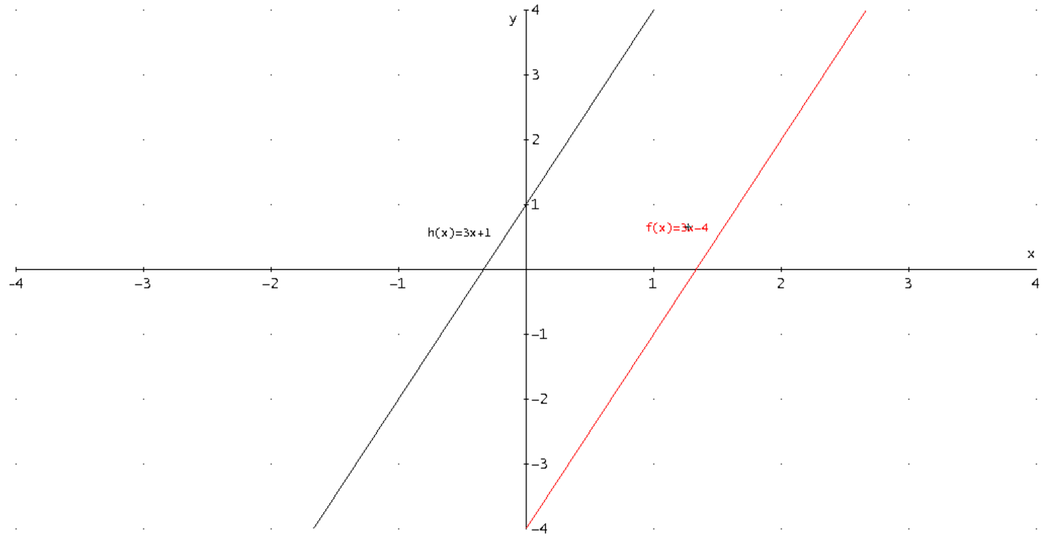
i) $17 \notin (0,7]$

j) $0'001 \in (0,7]$

6. $f(x) = x^2$, siendo *x* la longitud de la base

7.
Puntos de discontinuidad: - 4, - 3, 1, 3
Dominio: $[-6,-4] \cup [-3,1] \cup [3,6]$
Recorrido: $[-2,3]$

8. Son paralelas entre sí las rectas $f(x) = 3x - 4$, $h(x) = 3x + 1$



9. Se trata de una función periódica, siendo T = 3

10. $f(-x) = (-x)^3 + \dfrac{2}{(-x)} = -x^3 - \dfrac{2}{x} = -\left(x^3 + \dfrac{2}{x}\right) = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ presenta una simetría impar $\Longrightarrow$ *f* es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Olimpiada matemática

1. Calcula los números reales no nulos a y b que verifican la siguiente igualdad: $\dfrac{a^2b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$

2. Encuentra, razonadamente, todos los valores tomados por la siguiente expresión: $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

1. $\dfrac{a^2b^2}{a^4 - 2b^4} = 1 \Rightarrow a^4 - b^2a^2 - 2b^4 = 1$

$$a^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 + 8b^4}}{2} = \begin{cases} a_1 = 2b^2 \\ a_2 = -b^2 \end{cases}$$

$a^2 = -b^2 \Rightarrow a = b = 0,$ ya que el enunciado indica que a y b son no nulos

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2b^2 - b^2}{2b^2 + b^2} = \frac{1}{3}$$

2. Observemos que el numerador es menor o igual que el denominador, por tanto:

$$\left|a^2 - b^2\right| \le \left|a^2 + b^2\right| \Leftrightarrow \left|\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right| \le 1$$

$$-1 \le \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \le 1$$

Además, la expresión toma los valores 1 (para $a = 0$) y –1 (para $b = 0$). Por tanto, dado que, salvo en el punto (0, 0), la expresión es una función continua, tomará todos los valores del intervalo [–1, 1].

UNIDAD 13. Estadística

ACTIVIDADES PAG. 232

1. Queremos hacer un estudio sobre la estatura de los alumnos del instituto. Para ello se anotan los datos en la siguiente tabla:

TALLA EN CENTÍMETROS	NÚMERO DE ALUMNOS
Entre 140 y 150 cm	40
Entre 150 y 160 cm	60
Entre 160 y 170 cm	157
Entre 170 y 180 cm	170
Entre 180 y 190 cm	60
Más de 190 cm	25

Di cuál es la población e indica tres muestras de distintos tamaños.

1.

- Población: todos los alumnos del instituto.
- Muestra 1: todos los alumnos de todos los cursos cuyo primer apellido comience por cualquiera de las 10 primeras letras del abecedario.
- Muestra 2: los cinco últimos alumnos de la lista de cada clase.
- Muestra 3: elegimos aleatoriamente 3 alumnos de cada clase.

ACTIVIDADES PAG. 233

2. Queremos conocer el número de goles que marcó el equipo de nuestra clase en la liga del instituto durante este año y el color de ojos de los componentes del mismo. ¿De qué tipo son estas variables estadísticas?

3. Clasifica las siguientes variables estadísticas:

a) Altura de mis compañeros.
b) Última película vista en el cine.
c) Peso de los chicos de la clase de al lado.
d) Color del pelo.

2.
Número de goles: cuantitativa
Color de ojos: cualitativa

3.
a) Altura de mis compañeros: cuantitativa.
b) Última película vista en el cine: cualitativa.
c) Peso de los chicos de la clase de al lado: cuantitativa.
d) Color del pelo: cualitativa.

ACTIVIDADES PAG. 234

ACTIVIDADES

4. El número de suspensos por alumno en una clase de 24 alumnos es:

1	3	2	1	0	2	1	2	0	1	0	0
0	5	0	1	2	3	4	4	2	1	0	3

Elabora una tabla con las frecuencias absolutas, relativas y los tantos por ciento.

5. Se miden los compañeros de clase y obtienen las siguientes longitudes en centímetros:

153, 189, 192, 195, 176, 156, 167, 168, 187, 178, 177, 177, 183, 175, 184, 165, 164, 179, 173, 165, 154, 160, 163, 186, 169

Construye la tabla de frecuencias, indicando la marca de clase en cada intervalo.

4.

Variable estadística x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentajes %
0	7	7/24 = 0‘29	29 %
1	6	6 / 24 = 0‘25	25 %
2	5	5 / 24 = 0‘21	21 %
3	3	3 / 24 = 0‘13	13 %
4	2	2 / 24 = 0‘08	8 %
5	1	1 / 24 = 0‘04	4 %
Suma	24	1	100 %

5.

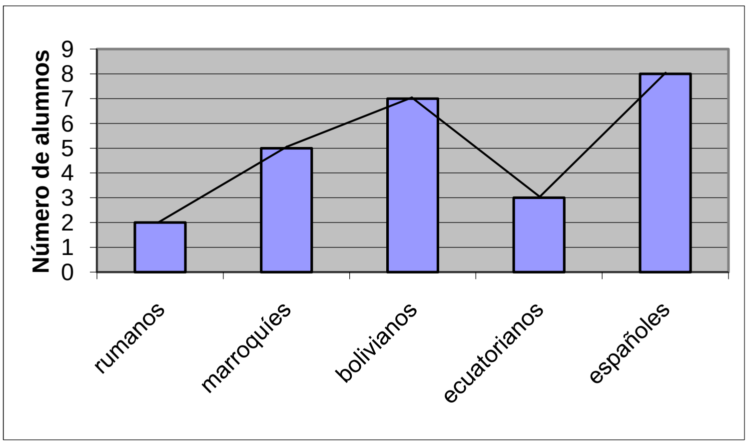
Intervalo de clase	Marca de clase X_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentajes %
[150 , 160)	155	3	3/25 = 0’12	12 %
[160 , 170)	165	8	8/25 = 0’32	32 %
[170 , 180)	175	7	7/25 = 0’28	28 %
[180 , 190)	185	5	5/25 = 0’2	20 %
[190 , 200)	195	2	2/25 = 0’08	8 %
		25	1	100 %

ACTIVIDADES PAG. 235

ACTIVIDADES

6. En una clase de 25 alumnos 2 son rumanos, 5 marroquíes, 7 bolivianos, 3 ecuatorianos y 8 son españoles. Representa el diagrama de barras correspondiente y el polígono de frecuencias asociado.

6.



ACTIVIDADES PAG. 236

ACTIVIDADES

7. El peso de los compañeros de clase en kilogramos es:

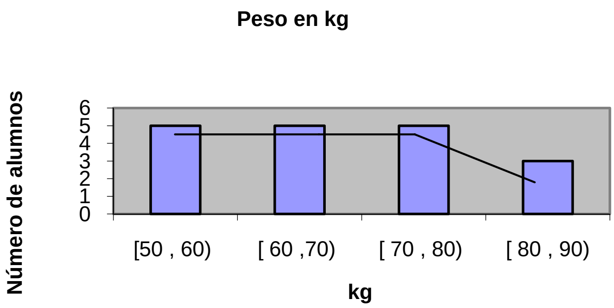
57	65'2	70'3	53'4	55'7	67'4	85'2	60'9	64'8
77'9	78'2	58'4	59'2	68'3	75	74'7	81'5	82'9

Realiza una tabla de frecuencias tomando intervalos y representa los datos mediante un histograma y su correspondiente polígono de frecuencias.

7. Tabla de frecuencias:

Intervalo de clase	Marca de clase Xi	Frecuencia Absoluta fi	Frecuencia relativa hi	Porcentajes %
[50 , 60)	55	5	5/18 = 0'28	28
[60 , 70)	65	5	5/18 = 0'28	28
[70 , 80)	75	5	5/18 = 0'28	28
[80 , 90)	85	3	3/18 = 0'16	16
		18	1	100 %

Histograma y polígono de frecuencias:



ACTIVIDADES PAG. 237

ACTIVIDADES

8. Calcula la media aritmética, la moda, la mediana y los cuartiles de los siguientes datos: 2 4 4 6 2 7 8 9 3 1 5 4 4 9 0 2 4 9 4 1 2 4

8.

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 7 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 + 7\cdot 1 + 8\cdot 1 + 9\cdot 3}{22} = 4'27$$

Mo = 4

Me = 4

primer cuartil = 2 , segundo cuartil = 4 , tercer cuartil = 5'75

ACTIVIDADES PAG. 238

ACTIVIDADES

9. El número de bolígrafos que llevan los alumnos a clase es:

2, 4, 3, 5, 1, 3, 6, 4, 5, 3, 2, 4, 2, 3, 5, 4, 1, 5, 7, 4, 2, 1, 3, 5, 2

Realiza una tabla de frecuencias como la del ejemplo y calcula la media de bolígrafos que llevan los alumnos a clase, su desviación media, la varianza, la desviación típica y la moda.

9.

x_i	f_i
1	3
2	5
3	5
4	5
5	5
6	1
7	1

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 5 + 4\cdot 5 + 5\cdot 5 + 6\cdot 1 + 7\cdot 1}{25} = 3'44\ ,$$

$$DM = \frac{|1-3'44|\cdot 3 + |2-3'44|\cdot 5 + |3-3'44|\cdot 5 + |4-3'44|\cdot 5 + |5-3'44|\cdot 5 + |6-3'44|\cdot 1 + |7-3'44|\cdot 1}{25} = 1'3376\ ,$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3'44)^2\cdot 3 + (2-3'44)^2\cdot 5 + (3-3'44)^2\cdot 5 + (4-3'44)^2\cdot 5 + (5-3'44)^2\cdot 5 + (6-3'44)^2\cdot 1 + (7-3'44)^2\cdot 1}{25} = 2'48,$$

$\sigma = \sqrt{2'48} = 1'57$

Mo = 2, 3, 4 y 5

ACTIVIDADES PAG. 239

10. La siguiente lista indica los goles que ha marcado un futbolista en los 10 partidos de un campeonato:

1 0 3 2 1 4 0 1 1 5

Estudia si es un jugador regular y calcula la media, la moda, la mediana, la desviación media y la desviación típica. Comprueba con la calculadora los resultados que te han salido de la media y la desviación típica.

11. El señor Fernández se ha gastado en la lotería, en las últimas 10 semanas, los euros que vienen en la lista dada:

30 20 40 120 200

50 68 24 50 30

Calcula la media, la moda, la mediana, la desviación media y la desviación típica. Comprueba con la calculadora los resultados que te han salido de la media y la desviación típica.

12. En la siguiente lista aparece el número de hermanos que tienen los alumnos de la clase de 3º de ESO.

1 3 0 5 0 1 1 2 0 3

0 1 2 2 0 1 9 0 3 1

0 0 1 0 2 1 3 2 0 1

Construye una tabla de frecuencias con los datos dados. Calcula la media, la moda, la mediana, la desviación media y la desviación típica. Comprueba con la calculadora la desviación típica obtenida.

ACTIVIDADES

10.

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{10} = 1'8$$

Moda = 1

Mediana = 1

El jugador no es muy regular

$$DM = \frac{|0-1'8| \cdot 2 + |1-1'8| \cdot 4 + |2-1'8| \cdot 1 + |3-1'8| \cdot 1 + |4-1'8| \cdot 1 + |5-1'8| \cdot 1}{10} = 1'22$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-1'8)^2 \cdot 2 + (1-1'8)^2 \cdot 4 + (2-1'8)^2 \cdot 1 + (3-1'8)^2 \cdot 1 + (4-1'8)^2 \cdot 1 + (5-1'8)^2 \cdot 1}{10} = 2'56$$

$$\sigma = \sqrt{2'56} = 1'6$$

11.

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 1 + 24 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 1 + 50 \cdot 2 + 68 \cdot 1 + 120 \cdot 1 + 200 \cdot 1}{10} = 63'2$$

Mo = 30 y 50

Mediana = 45

$$DM = \frac{|20-63'2| \cdot 1 + |24-63'2| \cdot 1 + |30-63'2| \cdot 2 + |40-63'2| \cdot 1 + |50-63'2| \cdot 2 + |68-63'2| \cdot 1 + |120-63'2| \cdot 1 + |200-63'2| \cdot 1}{10}$$

DM = 39’68

$$\sigma^2 = \frac{(20-63'2)^2 \cdot 1 + (24-63'2)^2 \cdot 1 + (30-63'2)^2 \cdot 2 + (40-63'2)^2 \cdot 1 + (50-63'2)^2 \cdot 2 + (68-63'2)^2 \cdot 1 + (120-63'2)^2 \cdot 1}{10} + \frac{(200-63'2)^2 \cdot 1}{10}$$

$\sigma^2 = 2845'76$

$$\sigma = \sqrt{2845'76} = 53'34$$

12.

Variable aleatoria x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentaje %
0	10	10/30 = 0’33	33 %
1	9	9/30 = 0’3	30 %
2	5	5/30 = 0’17	17 %
3	4	4/30 = 0’14	14 %
5	1	1/30 = 0’03	3 %
9	1	1/30 = 0’03	3 %
	30	1	100 %

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{30} = 1'5$$

Mo = 0

Mediana = 1

$$\text{Desviación media} = \frac{|0-1'5| \cdot 10 + |1-1'5| \cdot 9 + |2-1'5| \cdot 5 + |3-1'5| \cdot 4 + |5-1'5| \cdot 1 + |9-1'5| \cdot 1}{30} = 1'3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0-1'5)^2 \cdot 10 + (1-1'5)^2 \cdot 9 + (2-1'5)^2 \cdot 5 + (3-1'5) 4 + (5-1'5)^2 \cdot 1 + (9-1'5)^2 \cdot 1}{30}} = 1'86$$

Desafío matemático

La bolsa

En la bolsa de Madrid, las fluctuaciones del valor de las acciones de un banco en un día concreto vienen dadas por la siguiente tabla:

HORA	BANCO A	BANCO B
10:00	6'90 €	9'80 €
11:00	7'57 €	8'10 €
12:00	8'94 €	7'25 €
13:00	8'92 €	7 €
14:00	9'05 €	6'56 €
15:00	9,12 €	5'67 €
16:00	9'02 €	6 €
17:00	9'04 €	5'25 €
18:00	8'95 €	4'40 €

1. Calcula el rango de las acciones de cada banco en el día.
2. Calcula el valor medio de las acciones de cada banco en el día.
3. Calcula la desviación típica de las acciones de cada banco.
4. Calcula el coeficiente de variación y responde: ¿qué banco presenta una mayor dispersión en la cotización de sus acciones en el día?

Servicio de urgencias

La asistencia al servicio de urgencias del centro de salud del pueblo A y del pueblo B, en una semana, viene dada por la siguiente tabla:

DÍAS	A	B
Lunes	31	47
Martes	34	50
Miércoles	28	48
Jueves	25	45
Viernes	98	42
Sábado	110	46
Domingo	130	52

1. Representa los datos de asistencia de los dos centros de salud mediante el correspondiente diagrama de barras.
2. Calcula la media de asistencias diaria.
3. Calcula el coeficiente de variación de cada conjunto de datos.
4. Calcula la varianza. ¿En qué ambulatorio la afluencia de enfermos es más regular?

Las naranjas

Los cítricos contienen un alto porcentaje de vitamina C. La naranja con sus muchas variedades representa un importante sector económico en la Comunidad Valenciana. El precio de la naranja queda determinado por muchas variables: color, brillo, tipo de piel y tamaño. Cuando se comercializan, se clasifican por calibres, siendo muy importante que sean lo más homogéneos posibles, evitando la dispersión de los mismos. Los calibres que se salen de lo normal, bien por ser muy grandes, bien por ser muy pequeños, o no se comercializan, o bien, salen al mercado a un precio inferior.

INJERTO	NAVELINA	MANDARINA
Naranjo 1	10 cm	5'25 cm
Naranjo 2	6 cm	5 cm
Naranjo 3	6'15 cm	4'75 cm
Naranjo 4	9'85 cm	4'95 cm
Naranjo 5	5'90 cm	5'10 cm
Naranjo 6	10'20 cm	4'90 cm

En el centro de investigación Cítricos Levantinos se han plantado cinco naranjos que son nuevos injertos de las variedades Navelina y Mandarina. El objeto es estudiar la homogeneidad del tamaño de la fruta. Al cabo de un tiempo hacen una medición del tamaño de los frutos obteniendo una media cuyos resultados se reflejan en la tabla.

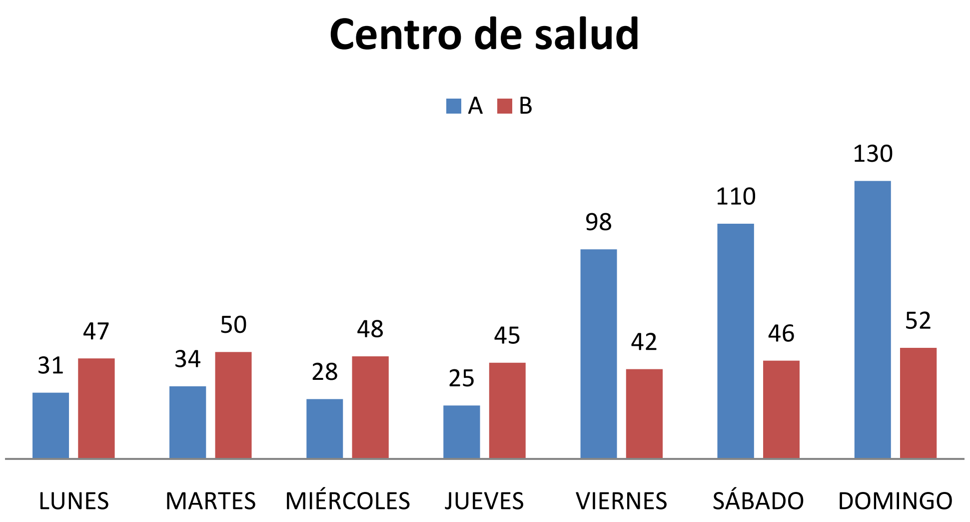
1. Indica cual de los dos injertos interesa comercializar, siendo el criterio de elección la homogeneidad en su tamaño.

La bolsa

	BANCO A				BANCO B		
DATOS	6´9	7´57	8´94	**DATOS**	9´8	8´1	7´25
	8´92	9´05	9´12		7	6´56	5´67
	9´02	9´04	8´95		6	5´25	4´4
RANGO		2´220		**RANGO**		5´400	
MEDIA		8´612		**MEDIA**		6´670	
DESVIACIÓN TÍPICA		0´755		**DESVIACIÓN TÍPICA**		1´525	
COFICIENTE DE VARIACIÓN		0´088		**COFICIENTE DE VARIACIÓN**		0´229	

El Banco B presenta mayor dispersión en la cotización de sus acciones en el día (su coeficiente de variación es mayor).

Servicio de urgencias



CENTRO SALUD	A	B
MEDIA	65´14	47´14
DESVIACIÓN TÍPICA	42´13	3´04
COEFICIENTE DE VARIACIÓN	0´65	0´06
VARIANZA	1774´98	9´27

En el centro de salud B la afluencia de enfermos es más regular (su coeficiente de variación es menor).

Las naranjas

	NAVELINA	MANDARINA
MEDIA	8´017	4´992
DESVIACIÓN TÍPICA	2´00	0´16
COEFICIENTE DE VARIACIÓN	0´250	0´031

Interesa comercializar el nuevo injerto de mandarina, siendo la homogeneidad del tamaño el criterio de elección, dado que su coeficiente de variación es menor.

PROBLEMAS

○ **13.** De las siguientes variables estadísticas, consideradas en un hospital en un día concreto, indica cuáles son discretas y cuáles son continuas:

a) Peso de los niños que nacen.

b) Número de niños que nacen.

c) Talla de los niños.

d) Número de madres que dan a luz.

○ **14.** Queremos saber el número de panes que se comen por hogar entre los alumnos del instituto. Para ello encuesta a los 5 primeros alumnos de cada una de las 15 clases que hay en el centro. ¿Cuál es la población objeto del estudio? ¿Quiénes constituyen la muestra? ¿Cuál es el tamaño de la muestra? ¿Cuál es la variable estadística? ¿De qué tipo es esta variable?

◐ **15.** Un empresario quiere abrir un cine en un barrio de la ciudad. Para ello realiza una encuesta entre 500 personas de la zona, con edades comprendidas entre 5 y 30 años, acerca del tipo de películas que prefieren. Se obtienen los siguientes resultados:

Infantil: 120 Acción: 230 Románticas: 150

a) Indica la población y el tamaño de la muestra.

b) Realiza una tabla de distribución de frecuencias y represéntala gráficamente.

◐ **16.** En una comunidad de vecinos la compañía de gas realiza una encuesta para averiguar cuántos vecinos quieren contratar sus servicios. Observa que 75 vecinos sí quieren contratar los servicios de la compañía, 10 no quieren y 15 son indiferentes.

a) ¿Qué tipo de variable estadística estamos tratando?

b) Haz una tabla de distribución de frecuencias.

◐ **17.** En la siguiente tabla queda recogido el número de faltas a la clase de Matemáticas de los alumnos de 3° de ESO.

FALTAS A CLASE	0	1	2	3	4	5	6
FRECUENCIA	7	4	6	5	3	1	2

Calcula la media, la moda, la mediana la desviación típica y el primer cuartil.

◐ **18.** El gasto en la cafetería del instituto que hacen 30 alumnos de una clase en el recreo, en euros, ha sido:

3'30	2'10	1'34	3'25	2'25	4'15
0'5	2'75	3'27	4'23	5'32	2'48
3'45	6'9	5'76	3'98	6'7	1'23
0'78	6'2	2'34	4	2'1	3'30
1'2	4'8	4'5	6'7	3'2	1'9

Construye una tabla de frecuencias absoluta y relativa, indicando la marca de clase en cada intervalo. Considera intervalos de amplitud 1'5.

◐ **19.** Elige el tipo de gráfico que puede representar mejor los datos del problema 18 y dibújalo.

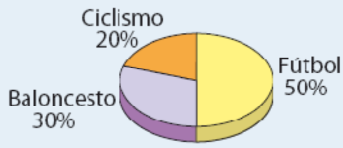
◐ **20.** En el mes de agosto se han registrado en la ciudad de Cádiz las siguientes temperaturas máximas:

		25	27	30	29	28
27	25	26	29	32	30	32
28	33	34	31	29	27	28
33	35	34	33	34	31	29
28	27	28	29	27		

a) Construye la correspondiente tabla de frecuencias.

b) Representa gráficamente dicha tabla.

◐ **21.** En una clase de 30 alumnos los que practican fútbol, baloncesto o ciclismo vienen dados por el siguiente diagrama de sectores. Transforma este diagrama en un diagrama de barras.



● **22.** En un edificio el número de personas por hogar es:

2	1	3	4	6	4	5	2
6	3	1	2	3	4	1	6
5	3	3	4	5	2	6	3
7	10	12	8	9	6	3	1

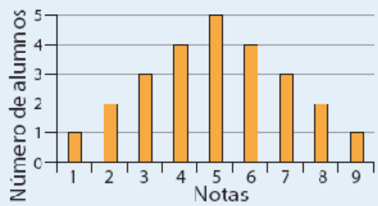
a) Haz la tabla de frecuencias y representa gráficamente los datos dados.

b) Calcula la media, la mediana y la moda.

c) Calcula la desviación típica.

◐ **23.** Hemos anotado el tipo de almuerzo que toman en el recreo los alumnos de una clase de 30 alumnos. Un 40% come bollería industrial, un 25% se trae un bocadillo de casa, otro 15% come chucherías y el resto no toma nada. Representa mediante un diagrama de sectores los datos dados.

◐ **24.** El siguiente gráfico indica las notas obtenidas por los alumnos de un curso de 3º de ESO:



Calcula su media y desviación típica.

13.

a) Peso de los niños que nacen: continua.
b) Número de niños que nacen: discreta.
c) Talla de los niños: continua.
d) Número de madres que dan a luz: discreta.

14.

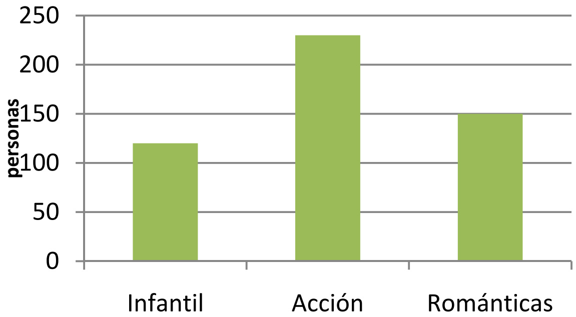
Población: todos los alumnos del instituto.
Muestra: los cinco primeros alumnos de cada clase.
Tamaño de la muestra: 75 alumnos.
Variable: número de panes que consumen por hogar.
Tipo de variable: discreta.

15.

a) **Población:** los habitantes del barrio.
Tamaño de la muestra: 500

b)

Variable aleatoria x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentaje %
Infantil	120	120/500 = 0’24	24 %
Acción	230	230/500 = 0’46	46 %
Románticas	150	150/500 = 0’3	30 %
	500	1	100 %

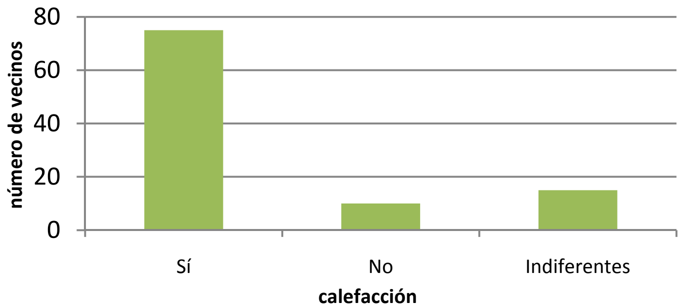


16.

a) Discreta

b)

Variable aleatoria x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentaje %
Si	75	75/100 = 0’75	75 %
No	10	10/100 = 0’1	10 %
Indiferentes	15	15/100 = 0’15	15 %
	100	1	100 %



17.

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 7 + 1\cdot 4 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2}{28} = 2'14$$

Mo = 0

Mediana = 2

$$\sigma^2 = \frac{(0-2'14)^2\cdot 7 + (1-2'14)^2\cdot 4 + (2-2'14)^2\cdot 6 + (3-2'14)^2\cdot 5 + (4-2'14)^2\cdot 3 + (5-2'14)^2\cdot 1 + (6-2'14)^2\cdot 2}{28} = 3'19$$

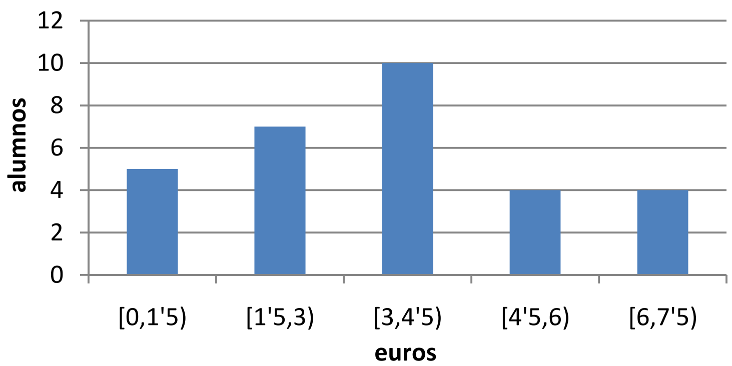
$\sigma = \sqrt{3'19} = 1'78$

Primer cuartil = 0

18.

Intervalo	Marca de clase x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i
[0 , 1'5)	0'75	5	5/30 = 0'17
[1'5 , 3)	2'25	7	7/30 =0'23
[3 , 4'5)	3'75	10	10/30 = 0'34
[4'5 , 6)	5'25	4	4/30 = 0'13
[6 , 7'5)	6'75	4	4/30 = 0'13
		30	1

19.

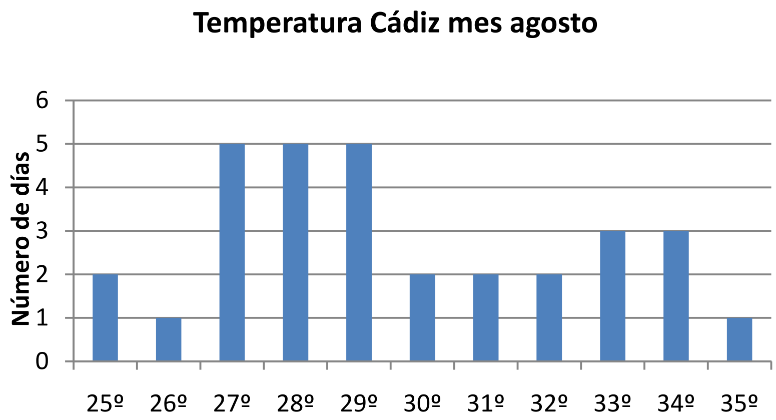


20.

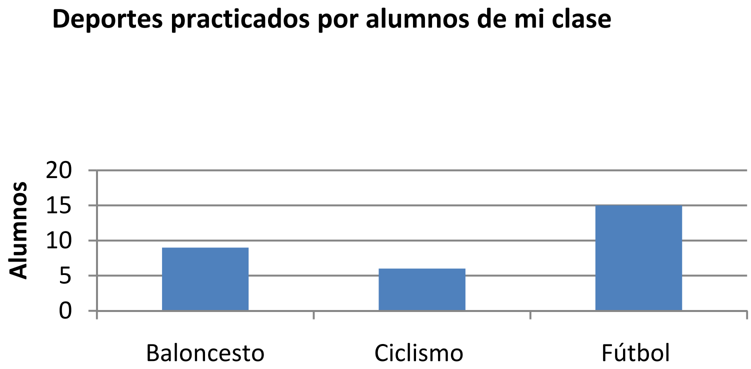
a)

x_i Grados centígrados	f_i Número de días	h_i Frecuencia relativa	% Porcentaje
25º	2	2/31=0'06	6
26º	1	1/31=0'04	4
27º	5	5/31=0'16	16
28º	5	5/31=0'16	16
29º	5	5/31=0'16	16
30º	2	2/31=0'06	6
31º	2	2/31=0'06	6
32º	2	2/31=0'06	6
33º	3	3/31=0'1	10
34º	3	3/31=0'1	10
35º	1	1/31=0'04	4
	31	1	100

b)



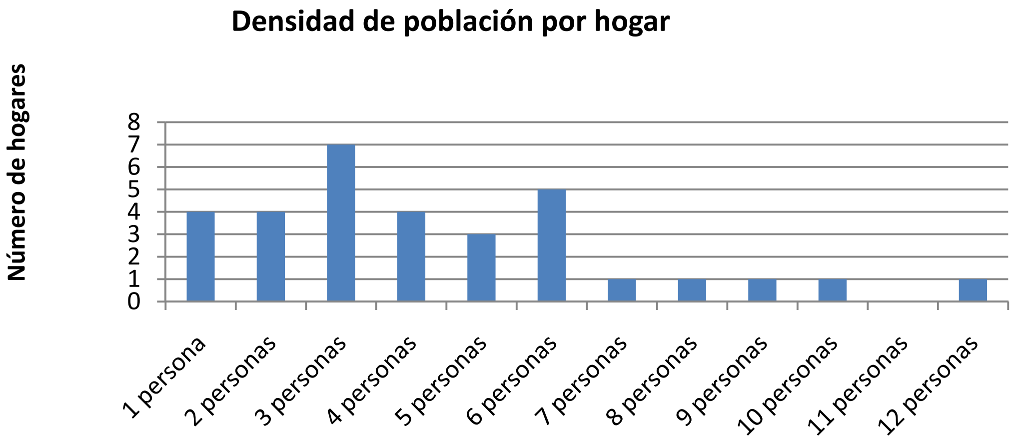
21.
Baloncesto: 30% de 30 = 9; Ciclismo: 20% de 30 = 6; Fútbol: 50% de 30 = 15



22.
a)

Número de personas por hogar x_i	Número de hogares con tantos miembros f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentajes %
1	4	4/32=0’125	12’5
2	4	4/32=0’125	12’5
3	7	7/32=0’219	21’9
4	4	4/32=0’125	12’5
5	3	3/32=0’094	9’4
6	5	5/32=0’157	15’7
7	1	1/32=0’031	3’1
8	1	1/32=0’031	3’1
9	1	1/32=0’031	3’1
10	1	1/32=0’031	3’1
11	0	0	0
12	1	1/32=0’031	3’1
	32	1	100

24.



b) $$\bar{x} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 12 \cdot 1}{32} = 4'375$$

Mediana= 4

M_o= 3

c)

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-4'375)^2 \cdot 4 + (2-4'375)^2 \cdot 4 + (3-4'375)^2 \cdot 7 + (4-4'375) 4 + (5-4'375)^2 \cdot 3 + (6-4'375)^2 \cdot 5}{32}} +$$

$$\sqrt{\frac{(7-4'375)^2 \cdot 1 + (8-4'375)^2 \cdot 1 + (9-4'375)^2 \cdot 1 + (10-4'375)^2 \cdot 1 + (12-4'375)^2 \cdot 1}{32}} = 2'666341126$$

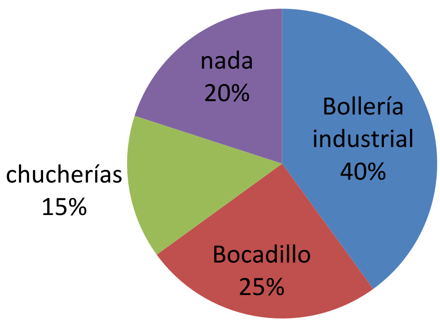
23.

Bollería industrial: 40% de 30 = 12 Amplitud del sector: 360º · 12/30 = 144º

Bocadillo: 25% de 30 = 7'5 Amplitud del sector: 360º · 7'5/30 = 90º

Chucherías: 15% de 30 = 4'5 Amplitud del sector: 360º · 4'5/30 = 54º

Nada: 20% de 30 = 6 Amplitud del sector: 360º · 6/30 = 72º



24.

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1}{25} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-5)^2 \cdot 1 + (2-5)^2 \cdot 2 + (3-5)^2 \cdot 3 + (4-5) 4 + (5-5)^2 \cdot 5 + (6-5)^2 \cdot 4 + (7-5)^2 \cdot 3 + (8-5)^2 \cdot 2 + (9-5)^2 \cdot 1}{25}} = 2$$

25. Se realiza una encuesta en clase sobre el número de litros de leche que se consumen semanalmente en las casas de los 27 alumnos de clase. Los datos vienen dados por la siguiente tabla:

LITROS DE LECHE	1	2	3	4	5	6	7
f_i	1	3	2	5	7	5	4

Calcula la media, la moda, la mediana, la desviación media, la desviación típica y la varianza de los datos dados. Representa los datos mediante un diagrama de sectores, un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.

26. Los notas de Andrés en Filosofía son las siguientes:

4, 6, 5, 7, 2, 9, 3, 8

Calcula el rango, la moda, la media, la mediana, la desviación media, la varianza y la desviación típica de los datos dados.

27. Completa la siguiente tabla de distribución sabiendo que su media es 2'8.

x_i	1	2	3	4
f_i	4	5	a	8

28. Un alumno ha sacado 4'5 de nota media en cuatro controles. Si queda un quinto control y la nota de la evaluación es la media de los cinco controles, ¿qué nota tiene que sacar el alumno en este control para aprobar la asignatura?

29. En un taller de coches trabajan 15 mecánicos, el médico y un director. El sueldo medio de los trabajadores del taller es de 2 000 €/mes. Si los mecánicos cobran un sueldo medio de 1 800 €/mes, ¿cuál será el sueldo medio de los otros dos trabajadores? Si el director cobra 600 € más que el médico, ¿cuánto cobra el director? ¿Y el médico?

30. En la siguiente tabla quedan reflejados los goles marcados por dos jugadores en los últimos 10 partidos:

JUGADOR A	1	0	5	0	2	0	0	1	4	2
JUGADOR B	1	2	1	2	1	3	1	1	2	1

Si el equipo de fútbol local pretende contratar al jugador más regular, ¿a cuál de los dos contratará?

Representa mediante un gráfico los datos de los dos jugadores. Calcula su moda, mediana, media, rango, desviación media, varianza y desviación típica.

25.

$$\bar{x} = \frac{1\cdot1 + 2\cdot3 + 3\cdot2 + 4\cdot5 + 5\cdot7 + 6\cdot5 + 7\cdot4}{27} = 4'\widehat{6}$$

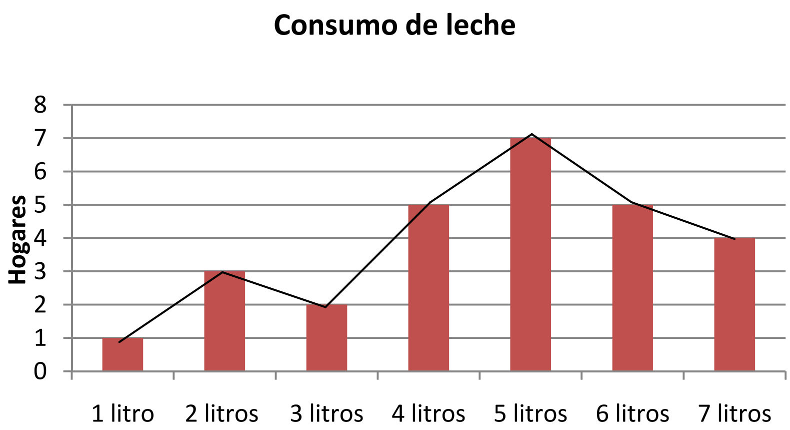
Mediana = 5

Moda = 5

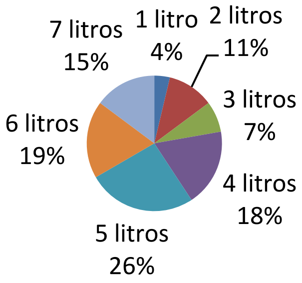
$$DM = \frac{|1-4'63|\cdot1 + |2-4'63|\cdot3 + |3-4'63|\cdot2 + |4-4'63|\cdot5 + |5-4'63|\cdot7 + |6-4'63|\cdot5 + |7-4'63|\cdot4}{27} = 1'36$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-4'63)^2\cdot1 + (2-4'63)^2\cdot3 + (3-4'63)^2\cdot2 + (4-4'63)^2\cdot5 + (5-4'63)^2\cdot7 + (6-4'63)^2\cdot5 + (7-4'63)^2\cdot4}{27} = 2'74$$

$$\sigma = \sqrt{2'74} = 1'65$$



Consumo de leche / hogar



26.
Rango = 7
No tiene moda
Mediana = 5'5

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6+7+8+9}{8} = 5'5$$

$$DM = \frac{|2-5'5|\cdot 1+|3-5'5|\cdot 1+|4-5'5|\cdot 1+|5-5'5|\cdot 1+|6-5'5|\cdot 1+|7-5'5|\cdot 1+|8-5'5|\cdot 1+|9-5'5|\cdot 1}{8} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5'5)^2+(3-5'5)^2+(4-5'5)^2+(5-5'5)^2+(6-5'5)^2+(7-5'5)^2+(8-5'5)^2+(9-5'5)^2}{8} = 5'25$$

$$\sigma = \sqrt{5'25} = 2'29$$

27.

$$2'8 = \frac{1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot a+4\cdot 8}{17+a}$$

$$2'8\cdot(17+a) = 46+3a \Longrightarrow 47'6+2'8a = 46+3a \Longrightarrow 1'6 = 0'2\,a \Longrightarrow \boxed{a = 8}$$

28.

$$\frac{Suma}{4} = 4'5$$

Suma de las notas de los cuatro controles = 18
Sea *x* la nota del quinto control

$$\frac{18+x}{5} = 5 \Rightarrow x = 7$$

29.
Sueldo de los mecánicos = 1800 · 15 = 27000
Sea *x* el sueldo del médico y del director.

$$\frac{27000+x}{17} = 2000 \Rightarrow x = 7000$$

Luego el sueldo medio del médico y del director será: 3500 €

Sea y el sueldo del médico. Como el director cobra 600 € más que el médico:

$$2y + 600 = 7000 \Longrightarrow y = 3200$$

Por tanto el médico cobra 3200 € y el director cobra 3800 €.

30.
Datos del jugador A:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{10} = 1'5$$

Mediana = 1
Moda = 0
Rango = 5

$$DM = \frac{|0-1'5| \cdot 4 + |1-1'5| \cdot 2 + |2-1'5| \cdot 2 + |4-1'5| \cdot 1 + |5-1'5| \cdot 1}{10} = 1'4$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-1'5)^2 \cdot 4 + (1-1'5)^2 \cdot 2 + (2-1'5)^2 \cdot 2 + (4-1'5)^2 \cdot 1 + (5-1'5)^2 \cdot 1}{10} = 2'85$$

$$\sigma = \sqrt{2'85} = 1'68$$

Datos del jugador B:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{10} = 1'5$$

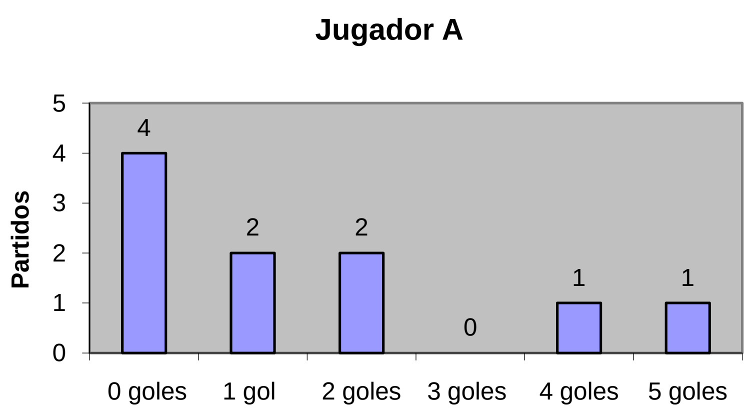
Mediana = 1
Moda = 1
Rango = 2 ,

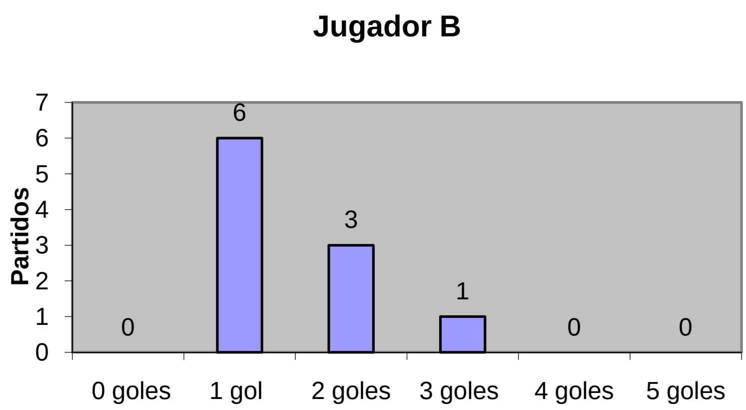
$$DM = \frac{|1-1'5| \cdot 6 + |2-1'5| \cdot 3 + |3-1'5| \cdot 1}{10} = 0'6$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-1'5)^2 \cdot 6 + (2-1'5)^2 \cdot 3 + (3-1'5)^2 \cdot 1}{10} = 0'45$$

$$\sigma = \sqrt{0'45} = 0'67$$

Contratará al jugador B





AUTOEVALUACIÓN PAG. 243

AUTOEVALUACIÓN

1. De las siguientes variables estadísticas, indica cuáles son cualitativas y cuáles son cuantitativas:
   a) Número de hermanos.
   b) Velocidad media de los corredores de la Vuelta Ciclista a España.
   c) Color del pelo.
   d) Número de pie.
   e) Número de ordenadores por domicilio.
   f) Color del coche.
   g) Cantidad de camiones que circulan por una población.
   h) Marca del coche que me gusta.
   i) Nombre del refresco que tomo los domingos.
   j) Talla de camisa que uso.
2. Indica cuál de las variables cuantitativas del ejercicio anterior son discretas y cuáles son continuas.
3. El número de animales domésticos que tienen en su casa los alumnos de la clase de 2º son los siguientes:

   0 2 1 0 4 2 2
   3 1 2 1 3 0 0
   0 2 1 0 2 1 1
   2 2 1 3 1 0 0

   Ordena los datos en una tabla de frecuencias relativas, frecencias absolutas y porcentajes.
4. Representa los datos anteriores mediante un diagrama de barras y dibuja el polígono de frecuencias correspondiente.
5. Calcula la moda, la media y la mediana de los datos anteriores.
6. Calcula la desviación media, la desviación típica y la varianza de los datos del ejercicio 3.
7. En la clase de Laura al 45% de sus compañeros le gusta el fútbol, al 30% le gusta el baloncesto, al 15% le gusta el judo y al 10% le gusta el ciclismo. ¿Cuál es el deporte de moda en su clase? Representa los datos mediante un diagrama de sectores.
8. Las edades de las personas que asisten a una exposición en un día vienen dadas por la siguiente tabla:

EDADES	[15, 21)	[21, 27)	[27, 33)	[33, 39)	[39, 45)
NÚMERO DE PERSONAS	15	56	46	25	22

   Representa los datos mediante un polígono de frecuencias.
9. Indica cuál es la clase modal y la moda en los datos de la tabla anterior.
10. Calcula el rango, la media, la varianza y la desviación típica de los datos del ejercicio 8.

Estadística 243

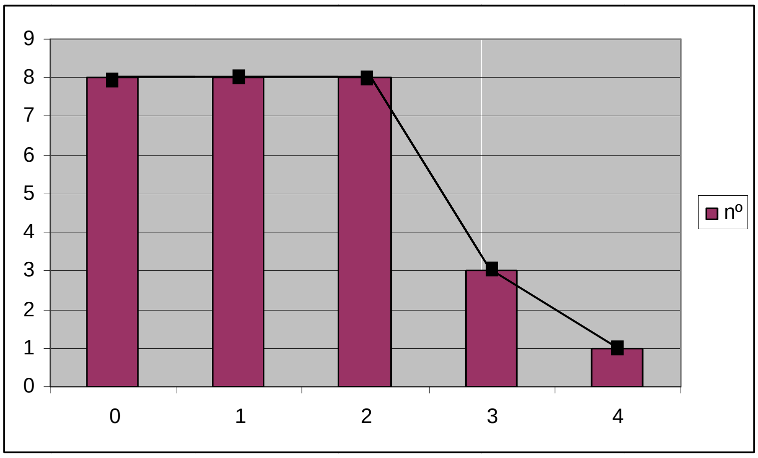
1. Cuantitativas: a, b, d, e, g, j
Cualitativas: c, f, h, i

2. Discretas: a, d, e, g, j
Continua: b

3.

Variable aleatoria x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentaje %
0	8	8/28=0’29	29
1	8	8/28=0’29	29
2	8	8/28=0’29	29
3	3	3/28=0’1	10
4	1	1/28=0’03	3
	28	1	100

4.



5.

Mo = { 0, 1, 2 }
Mediana: 1

6.

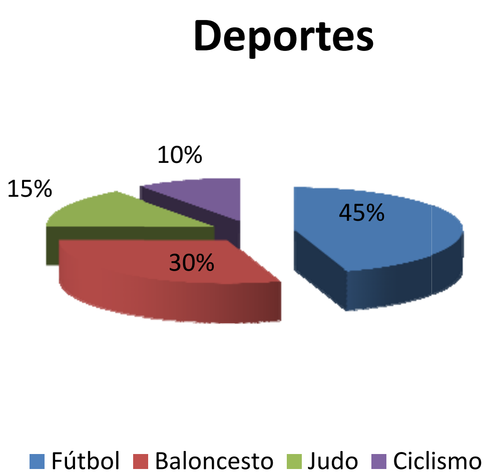
$$DM = \frac{|0-1'32|\cdot 8+|1-1'32|\cdot 8+|2-1'32|\cdot 8+|3-1'32|\cdot 3+|4-1'32|\cdot 1}{28} = 0'94$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-1'32)^2\cdot 8+(1-1'32)^2\cdot 8+(2-1'32)^2\cdot 8+(3-1'32)^2\cdot 3+(4-1'32)^2\cdot 1}{28} = 1'224$$

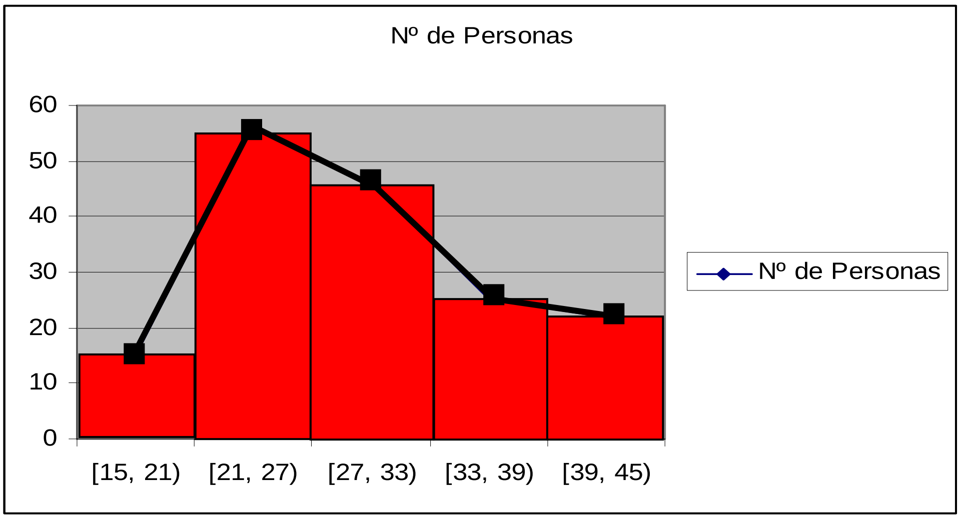
$$\sigma = \sqrt{1'224} = 1'106$$

7. El deporte de moda es el fútbol

	%	h_i	Amplitud
Fútbol	45	0’45	162º
Baloncesto	30	0’30	108º
Judo	15	0’15	54º
Ciclismo	10	0’10	36º



8. Polígono de frecuencias:



9. La clase modal es: 18, 24, 30, 36, 42
Mo = 24

10.
Rango: 30

$$\bar{x} = \frac{18\cdot15 + 24\cdot56 + 30\cdot46 + 36\cdot25 + 42\cdot22}{164} = 29'38$$

$$\sigma^2 = \frac{(18-29'38)^2\cdot15 + (24-29'38)^2\cdot56 + (30-29'38)^2\cdot46 + (36-29'38)^2\cdot25 + (42-29'38)^2\cdot22}{164} = 49'88$$

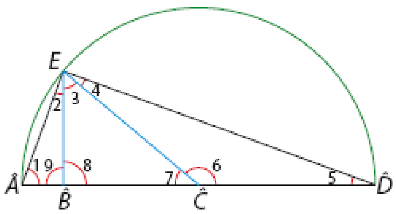
$$\sigma = \sqrt{49'88} = 7'06$$

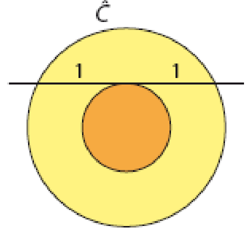
OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 245

Olimpiada matemática

1. Calcula el valor de todos los ángulos de la figura sabiendo que el ángulo $\hat{A}$ vale 70°.

2. Sean dos circunferencias concéntricas. Trazamos una tangente a la interior que, naturalmente, cortará a la exterior en dos puntos. La distancia entre cualquiera de estos puntos y el punto de tangencia es 1 m. Halla el área de la corona circular que determinan las dos circunferencias.





1. Por ser isósceles $\hat{4} = \hat{5}$

$\hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 90$ (inscrito en semicircunferencia)

$$\hat{4} + \hat{5} + \hat{6} = 180 \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot\hat{4} + \hat{6} = 180 \\ \hat{6} + \hat{7} = 180 \end{cases}$$

$\hat{2} = \hat{5}$, $\hat{4} = \hat{5}$

$\hat{1} + (\hat{2} + \hat{3} + \hat{4}) + \hat{5} = 180 \Rightarrow \hat{1} + \hat{5} = 90$

$\hat{5} = \hat{2} = \hat{4} = 20$, $\hat{6} = 140$, $\hat{7} = 40$, $\hat{3} = 50$, $\hat{8} = \hat{9} = 90$

2. Área = $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi R^2 - \pi(R^2 - 1) = \pi$ m^2

UNIDAD 14. Probabilidad

ACTIVIDADES PAG. 248

ACTIVIDADES

1. De los siguientes sucesos indica cuál es determinista y cuál es aleatorio:

a) Ver por dónde sale el sol.

b) Medir el peso de una naranja.

c) Extraer una carta de la baraja española.

d) Contar el número de páginas de este libro.

2. En una urna tenemos 9 bolas numeradas del uno al nueve y sacamos una al azar. Indica cuál es su espacio muestral. Escribe los siguientes sucesos:

a) A = {Sacar un número par} y $\overline{A}$.

b) C = {Sacar un número primo} y $\overline{C}$.

1.
a) Determinista
b) Aleatorio
c) Aleatorio
d) Determinista

2. E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
a) A = {2, 4, 6, 8}; $\overline{A}$ = {1, 3, 5, 7, 9}
b) C = {1, 2, 3, 5, 7}; $\overline{C}$ = {4, 6, 8, 9}

ACTIVIDADES PAG. 249

ACTIVIDADES

3. En la baraja española consideramos los siguientes sucesos aleatorios:

A = {Extraer una carta múltiplo de 3}
B = {Extraer una carta múltiplo de 4}
C = {Extraer una carta múltiplo de 5}

Calcula las siguientes operaciones de sucesos:

a) $A \cup B$	d) $\overline{B}$	g) $\overline{A} \cup \overline{B}$	j) $A \cup \overline{C}$	m) $A \cap \overline{B}$
b) $A \cap B$	e) $\overline{C}$	h) $A \cup C$	k) $A \cap \overline{C}$	n) $B \cap C$
c) $\overline{A}$	f) $\overline{A} \cup A$	i) $\overline{A} \cap B$	l) $\overline{A} \cap B$	ñ) $B \cup C$

3. Llamamos: o = oros; c = copas; e = espadas; b = bastos:
A = { 3o, 6o, 12o, 3c, 6c, 12c, 3e, 6e, 12e, 3b, 6b, 12b}
B = {4o, 12o, 4c, 12c, 4e, 12e, 4b, 12b}
C = {5o, 10o, 5c, 10c, 5e, 10e, 5b, 10b}

a) A U B = { 3o, 4o, 6o, 12o, 3c, 4c, 6c, 12c, 3e, 4e, 6e, 12e, 3b, 4b, 6b, 12b }

b) A $\cap$ B = {12o, 12c, 12e, 12b}

c) $\overline{A}$ = { 1o, 2o, 4o, 5o, 7o, 10o, 11o, 1c, 2c, 4c, 5c, 7c, 10c, 12c, 1e, 2e, 4e, 5e, 7e, 10e, 12e, 1b, 2b, 4b, 5b, 7b, 10b, 11b}

d) $\overline{B}$ = {1o, 2o, 3o, 5o, 6o, 7o, 10o, 11o, 1c, 2c, 3c, 5c, 6c, 7c, 10c, 11c, 1e, 2e, 3e, 5e, 6e, 7e, 10e, 11e, 1b, 2b, 3b, 5b, 6b, 7b, 10b, 11b}

e) $\overline{C}$ = { 1o, 2o, 3o, 4o, 6o, 7o, 11o, 12o, 1c, 2c, 3c, 4c, 6c, 7c, 11c, 12c, 1e, 2e, 3e, 4e, 6e, 7e, 11e, 12e, 1b, 2b, 3b, 4b, 6b, 7b, 11b, 12b}

f) E

g) E \ {12o, 12c, 12e, 12b}

h) A U C = { 3o, 5o, 6o, 10o, 12o, 3c, 5c, 6c, 10c, 12c, 3e, 5e, 6e, 10e, 12e, 3b, 5b, 6b, 10b, 12b }

i) $\overline{A} \cap B$ = {4o, 4c, 4e, 4b}

j) A U $\overline{C}$ = $\overline{C}$

k) A $\cap$ $\overline{C}$ = A

l) $\overline{A} \cap B = B$

m) A $\cap$ $\overline{B}$ = {3o, 6o, 3c, 6c, 3e, 6e, 3b, 6b}

n) $B \cap C = \phi$

ñ) B U C = { 4o, 5o, 10o, 12o, 4c, 5c, 10c, 12c, 4e, 5e, 10e, 12e, 4b, 5b, 10b, 12b }

ACTIVIDADES PAG. 250

4. Lanza una moneda al aire 100 veces y anota los resultados obtenidos. Expresa en una tabla las frecuencias relativas de los sucesos aleatorios:

A = {Sale cara}

B = {Sale cruz}

5. Lanzamos una moneda 12 veces y obtenemos los siguientes resultados:

c	x	x
x	c	x
c	x	c
x	c	x

Indica cuál es la frecuencia absoluta del suceso A = {Salir cara} y cuál es su frecuencia relativa.

6. Indica la frecuencia relativa del suceso imposible.

7. En una urna tenemos una bola verde, una azul y otra roja. Efectuamos 1 000 extracciones y anotamos el resultado. Si la frecuencia absoluta de sacar la bola verde es 300 y de sacar la bola azul es 250, ¿cuál será la frecuencia relativa de sacar la bola roja?

ACTIVIDADES

4.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Cara	54	54/100 = 0’54
Cruz	46	46/100 = 0’46
	100	1

5. f (A) = 5 h(A) = 5/12

6. f (∅) = 0

7. Sea A = {sacar la bola roja}
f (A) = 450/1000 = 0’45

ACTIVIDADES PAG. 251

ACTIVIDADES

8. En la siguiente tabla quedan reflejadas las frecuencias absolutas obtenidas al lanzar un dado un número determinado de veces. Calcula las frecuencias relativas de cada una de las caras.

RESULTADO	1	2	3	4	5	6
FRECUENCIA	21	23	24	19	22	25

9. Lanza un dado al aire 100 veces y anota la frecuencia relativa del suceso aleatorio {Salir un 5} ¿Se verifica la Ley de los grandes números?

10. Lanzamos una moneda y obtenemos los siguientes resultados:

c	c	x	c	x	c	c
c	c	c	x	c	c	x
x	c	c	x	c	x	x
c	x	x	c	x	c	c
c	c	x	c	c	x	x
c	x	c	c	c	c	c

Calcula la frecuencia relativa de los sucesos A = {Salir cara} y B = {Salir cruz}. Teniendo en cuenta la Ley de los grandes números, ¿qué opinas de los resultados obtenidos?

8.
h(1) = 21/134 = 0’16 h(2) = 23/134 = 0’17 h(3) = 24/134 = 0’18
h(4) = 19/134 = 0’14 h(5) = 22/134 = 0’16 h(6) = 25/134 = 0’19

9. Si

10. h(A) = 27/42 = 0’64 ; h(B) = 15/42 . Se ajustan a la ley de los grandes números.

ACTIVIDADES PAG. 252

ACTIVIDADES

11. Extraemos una carta al azar de la baraja española. Calcula la probabilidad de obtener una espada.

12. En una urna tenemos 3 bolas negras, 5 bolas amarillas y 7 bolas azules. Extraemos una bola al azar.

a) Calcula la probabilidad de que salga negra.

b) Calcula la probabilidad de que salga amarilla.

c) Calcula la probabilidad de que salga azul.

11. Sea A = {sale una espada}

$$P(A) = \frac{10}{40} = 0'25$$

12.

Sean A = {la bola sale negra}; B ={ la bola sale amarilla}; C = {la bola sale azul}

a) $P(A) = \frac{3}{15} = 0'2$

b) $P(B) = \frac{5}{15} = 0'3$

c) $P(C) = \frac{7}{15} = 0'46$

ACTIVIDADES PAG. 253

ACTIVIDADES

13. Extraemos una carta al azar de la baraja española. Calcula la probabilidad de no obtener una espada.

14. Calcula la probabilidad de que no salga un tres al lanzar un dado al aire.

13. Sea A = {sale una espada}

$$P(\overline{A}) = \frac{30}{40} = 0'75$$

14. Sea A = {sale 3}

$$P(\overline{A}) = \frac{5}{6} = 0'83$$

ACTIVIDADES PAG. 254

ACTIVIDADES

15. Un tirador de tiro olímpico tiene una probabilidad de dar en el blanco del 90%. Si dispara dos veces, calcula la probabilidad de:

a) Dar en el blanco las dos veces.

b) Dar en el blanco una sola vez.

c) No dar en el blanco ninguna vez.

d) Dar en el blanco al menos una vez.

16. En una heladería podemos elegir helados de 4 sabores: fresa, nata, chocolate y limón. Si elegimos 3 helados al azar, calcula la probabilidad:

a) De que sean los tres de fresa.

b) De que ninguno de los helados sea de fresa.

15. Sea A = {da en el blanco}, P(A) = 0’9

Si dispara dos veces:

a) P(dar en el blanco las dos veces) = 0’9·0’9 = 0’81

b) P(da en el blanco una sola vez) = 0’9·0’1 + 0’1·0’9 = 0’18

c) P(no dar en el blanco ninguna vez) = 0’1·0’1 = 0’01

d) P(dar en el blanco al menos una vez) = 0’81 + 0’18 = 0’99

16.

a) P(los tres son de fresa) = $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} = 0'0156$

b) P(ninguno es de fresa) = $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64} = 0'4218$

ACTIVIDADES PAG. 255

ACTIVIDADES

17. De una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas negras sacamos una bola y, sin devolverla, extraemos otra. Calcula la probabilidad de que en la primera extracción salga roja y en la segunda extracción salga negra. ¿Y si se vuelve a meter la bola tras la primera extracción?

17. Sea A = la bola sale roja y B = la bola sale negra

$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90} = 0'23$

$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100} = 0'21$

Desafío matemático

La lotería

Tradicionalmente se juega a la lotería en Navidad. En dicho juego se sortean 85 000 números comprendidos entre el 00000 y el 84 999. Cada número se divide en series, las cuales, a su vez se dividen en 10 décimos cada una. De esta forma, el número que adquiere el participante está compuesto por el número en sí, el número de serie y la fracción. Los premios que se reparten son: 1 de 300 000 €, 1 de 1 000 000 €, 1 de 500 000 €, 2 de 200 000 €, 8 de 50 000 €, 1 774 de 1 000 € conocido popularmente como "la pedrea" (por cada euro que juegas tocan 5 € de premio), 2 aproximaciones de 20 000 € para los números anterior y posterior al primer premio, 2 aproximaciones de 12 500 € cada una para los números anterior y posterior al segundo premio, 2 aproximaciones de 9 600 € cada una para los números anterior y posterior al tercer premio, 297 premios de 1 000 € cada uno para los 99 números restantes de la centena del primer premio, 99 números restantes de la centena del segundo premio, 99 números restantes de la centena del tercer premio, 198 premios de 1 000 € cada uno para los 99 números restantes de la centena de los dos cuartos premios, 2 547 premios de 1 000 € cada uno para las dos cifras final del primero, segundo y tercer premios, 8 499 reintegros de 200 €. Para un décimo:

1. Calcula la probabilidad de que toque el gordo.
2. Calcula la probabilidad de conseguir elsegundo premio.
3. Calcula la probabilidad de conseguir el tercer premio.
4. Calcula la probabilidad de recibir uno de los dos cuartos premios.
5. Calcula la probabilidad de que toque uno de los ocho quintos premios.
6. Calcula la probabilidad de conseguir «la pedrea».
7. Calcula la probabilidad de recibir algún premio.

Jugamos a la lotería porque tenemos esperanza de que nos toque algún premio. Desde el punto de vista matemático la esperanza nos sirve para medir el beneficio que podríamos obtener. Para calcularlo multiplicamos la probabilidad de que nos toque el premio por el valor de dicho premio.

Por ejemplo, al lanzar una moneda cuatro veces al aire, si salen cuatro caras ganamos 10 € y si salen tres caras ganamos 3 €. En otro caso, perdemos 2 € y 80 céntimos.

Probabilidad de que salgan cuatro caras $\frac{1}{16}$, probabilidad de obtener tres caras $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$. Probabilidad de no obtener cuatro caras ni tres caras $\frac{11}{16}$.

La esperanza matemática E de este juego viene dada por la ecuación $E =$ ganancias – pérdidas

$$E=\left(\frac{1}{16}\cdot 10+\frac{1}{4}\cdot 3\right)-\frac{11}{16}\cdot 2'8=-0'55$$

Al ser el resultado negativo, es más probable que perdamos la apuesta. (La probabilidad de perder es del 55% y la de ganar el 45%). Si la esperanza es negativa el juego resulta favorable para el organizador, si es positiva resulta favorable para el jugador (no ocurre, salvo que esté mal planteado); si es cero se trata de un juego equitativo.

8. Calcula la esperanza matemática de ganancia al comprar un décimo de lotería de Navidad, observando que en la ecuación el término pérdidas son los 20 € del precio del billete.

1. La probabilidad de que te toque el gordo es $\frac{1}{85000} = 0´000011764705882353.$
2. La probabilidad de conseguir el segundo premio es la misma que para conseguir el primero $\frac{1}{85000} = 0´000011764705882353.$
3. La probabilidad de conseguir el tercer premio es la misma que para conseguir e el primero o el segundo $\frac{1}{85000} = 0´000011764705882353.$
4. Cuartos premios hay dos. La probabilidad de que te toque uno de los dos cuartos premios es de:
$\frac{2}{85000} = 0´000023529411764706.$

5. La probabilidad de que te toque uno de los ocho quintos premios es de
$\frac{8}{85000} = 0´000094117647058824.$
6. La probabilidad de conseguir la pedrea es $\frac{1774}{85000} = 0{,}0208705882353.$
7. En total hay 13334 premios. La probabilidad de recibir alguno es de $0´1568705882353$.

8. $3000000 \cdot \frac{1}{85000} + 1000000 \cdot \frac{1}{85000} + 500000 \cdot \frac{1}{85000} + 200000 \cdot \frac{2}{85000} +$
$50000 \frac{8}{85000} + 1000 \frac{1774}{85000} + 20000 \frac{2}{85000} + 12500 \frac{2}{85000} + 9600 \frac{2}{85000} +$
$1000 \frac{495}{85000} + 1000 \frac{2547}{85000} + 200 \frac{8499}{85000} = 140$

Por lo tanto, 140 € es la suma de los productos de los premios de la lotería por la probabilidad de obtenerlos, para un billete.

El precio del billete es 200

La **esperanza matemática de ganancia** al comprar un billete de lotería de Navidad es:

$Esperanza = ganancias - pérdidas \Rightarrow Esperanza = 140 - 200 = -60$

Al comprar un décimo que cuesta 20 (la décima parte) la **esperanza matemática de ganancia** será la décima parte, esto es, -6

En definitiva, la lotería de Navidad es favorable para la Hacienda Pública.

EJERCICIOS

Experimento aleatorio

○ **18.** Indica cuál de los siguientes experimentos es aleatorio y cuál es determinista:

a) Comprobar la máxima altura de Gredos.

b) Lanzar un dado y anotar el resultado obtenido.

c) Medir la altura de tu profesor.

d) Extraer una carta determinada de una baraja.

e) Lanzar una moneda y comprobar el resultado.

○ **19.** En una urna hay 2 bolas blancas, 3 bolas negras y 8 bolas verdes. Extraemos una bola y anotamos su color. Indica el espacio muestral.

○ **20.** Realizamos el experimento aleatorio de lanzar un dado de 8 caras (un octaedro regular) y anotamos el resultado. Indica cuál es su espacio muestral.

Operaciones con sucesos

◐ **21.** En el experimento del ejercicio anterior consideramos los sucesos siguientes:

A = {Obtener múltiplo de 2}

B = {Obtener múltiplo de 3}

C – {Obtener múltiplo de 4}

Calcula:

a) $A \cup B$	f) $\overline{A} \cup C$	k) $A \cup \overline{C}$
b) $A \cap B$	g) $\overline{A} \cap C$	l) $\overline{C} \cap B$
c) $A \cup C$	h) $A \cap \overline{C}$	m) $\overline{B} \cap \overline{A}$
d) $A \cap C$	i) $\overline{C} \cup B$	n) $\overline{B} \cap \overline{C}$
e) $\overline{A} \cap B$	j) $\overline{A} \cup B$	ñ) $\overline{B} \cap A$

Ley de Laplace

○ **22.** Extraemos una bola al azar de una urna que contiene 3 bolas verdes, 5 blancas y 4 rojas. Calcula la probabilidad de que:

a) La bola sea blanca. c) La bola sea verde.
b) La bola no sea blanca. d) La bola no sea roja.

○ **23.** A la hora del recreo 12 alumnos almuerzan un bocadillo, 11 desayunan con golosinas y 7 no toman nada. Elegimos al azar un alumno. Calcula la probabilidad de que:

a) Desayune bocadillo.
b) Desayune golosinas.
c) No desayune.

◐ **24.** Extraemos una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Un basto. b) Una sota. c) La sota de bastos.

Probabilidad de sucesos compuestos

● **25.** En la baraja española extraemos una carta al azar. Consideramos los sucesos:

A = {Obtener una espada}
B = {Obtener una sota}

Calcula: $P(A \cup B)$

● **26.** En una urna tenemos 3 bolas negras, 5 rojas y 2 blancas. Elegimos una bola al azar y anotamos el resultado. Posteriormente, sin devolver la bola extraída la primera vez, se extrae una segunda bola. Realiza un diagrama de árbol del experimento. Calcula la probabilidad de cada suceso del espacio muestral.

PROBLEMAS

○ **27.** Tenemos una urna con 32 bolas rojas y 24 bolas amarillas. Extraemos una bola al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que salga roja.

b) La probabilidad de que salga amarilla.

○ **28.** Calcula la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado al aire.

○ **29.** En una tienda de electrodomésticos saben que de las 100 lavadoras que tienen hay 3 defectuosas, pero no saben cuáles son. Un cliente compra una lavadora al azar. Calcula la probabilidad de que se lleve una de las defectuosas.

○ **30.** Extraemos 2 cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de obtener 2 sotas si las extracciones las hacemos de las siguientes maneras:
a) Devolviendo la primera carta al mazo.
b) Sin devolución.

◐ **31.** Lanzamos una moneda tres veces. Calcula la probabilidad de obtener al menos una cara.

◐ **32.** La probabilidad de acierto en el blanco de un cazador es 0'7. Calcula la probabilidad de acertar dos veces seguidas en el blanco.

◐ **33.** Lanzamos un dado dos veces seguidas. Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos en ambos lanzamientos sea menor que nueve.

● **34.** En un examen de 15 preguntas un alumno solo ha preparado cinco. Calcula la probabilidad de que le pregunten las 5 preguntas que se ha estudiado.

● **35.** En una reunión de amigos hay 8 franceses, 7 españoles, 5 rusos y 6 argentinos. Si elegimos 2 amigos al azar, calcula la probabilidad de que ambos puedan entenderse en su idioma materno.

18.

a) Determinista
b) Aleatorio
c) Determinista
d) Aleatorio
e) Aleatorio

19. E = {Blanca, Negra, Verde}

20. E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

21. A = {2, 4, 6, 8} B = {3, 6} C = {4, 8}

a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8\}$
b) $A \cap B = \{6\}$
c) $A \cup C = \{2, 4, 6, 8\}$
d) $A \cap C = \{4, 8\}$
e) $\overline{A} \cap B = \{3\}$
f) $\overline{A} \cup C = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$
g) $\overline{A} \cap C = \{\phi\}$
h) $A \cap \overline{C} = \{2, 6\}$
i) $\overline{C} \cup B = \overline{C}$
j) $\overline{A} \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7\}$
k) $A \cup \overline{C} = E$
l) $\overline{C} \cap B = \{3, 6\}$
m) $\overline{B} \cap \overline{A} = \{1, 5, 7\}$
n) $\overline{B} \cap \overline{C} = \{1, 2, 5, 7\}$
ñ) $\overline{B} \cap A = \{2, 4, 8\}$

22.

a) P(la bola es blanca) = $\frac{5}{12} = 0'42$

b) P(la bola no es blanca) = $\frac{7}{12} = 0'58$

c) P(la bola es verde) = $\frac{3}{12} = 0'25$

d) P(la bola no es roja) = $\frac{8}{12} = 0'66$

23.

a) P(desayuna bocadillo) = $\frac{12}{30} = 0'4$

b) P(desayuna golosinas) = $\frac{11}{30} = 0'36$

c) P(no desayune) = $\frac{7}{30} = 0'23$

24.

a) P(obtener bastos) = $\frac{10}{40}$ = 0'25

b) P(obtener una sota) = $\frac{4}{40}$ = 0'1

c) P(la sota de bastos) = $\frac{1}{40}$ = 0'025

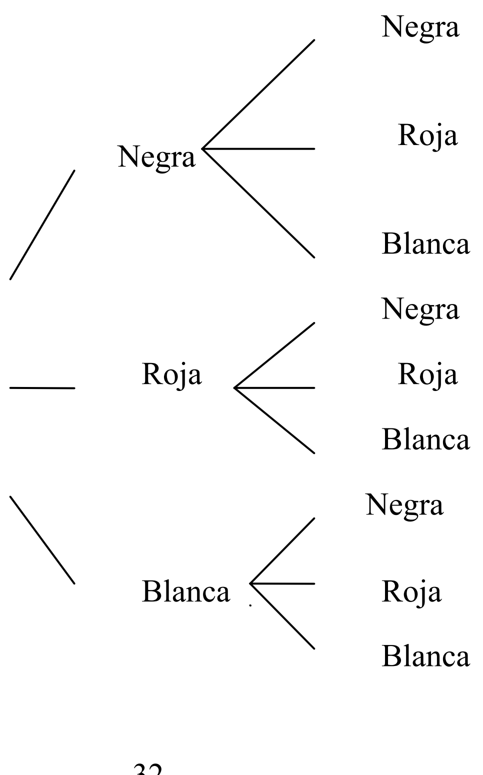
25.

A U B = {As de espadas, 2 de espadas, 3 de espadas, 4 de espadas, 5 de espadas, 6 de espadas, 7 de espadas, Sota de espadas, Caballo de espadas, Rey de espadas, Sota de oros, Sota de copas, Sota de bastos}

P(A U B) = $\frac{13}{40}$ = 0'325

26. N = negra; R = roja; B = blanca

E = {NN, NR, NB, RN, RR, RB, BN, BR, BB};
P(NN) =1/15 ; P(NR) = 1/6 ; P(NB) = 1/15 ; P(RN)= 1/6 ; P(RR) = 2/9 ; P(RB) = 1/9 ; P(BN) = 1/15 ; P(BR) = 1/9 ; P(BB) = 2/90



27.

a) P(sale roja) = $\frac{32}{56}$ = 0'57

b) P(sale amarilla) = $\frac{24}{56}$ = 0'43

28. P(sale un número primo) = $\frac{3}{6}$ = 0'5

29. P(la lavadora es defectuosa) = $\frac{3}{100} = 0'03$

30.

a) Extracción con reemplazamiento; P(obtener dos sotas) = $\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = 0'01$

b) Extracción sin reemplazamiento; P(obtener dos sotas) = $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = 0'00769$

31.

Lanzamos una moneda tres veces:

P (obtener al menos una cara) = 1 – P(no obtener cara) = 1 - $\frac{1}{8} = 0'875$

32. P (acertar dos veces en el blanco) = 0’7 · 0’7 = 0’49

33. P (la suma de los resultados obtenidos es menor que 9) = $\frac{26}{36} = 0'72$

34. P (preguntan las 5 preguntas que sabe) = $\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = 0'00033$

35. P(los amigos se entienden en su idioma materno) =

P(los dos son franceses) + P(los dos son españoles) + P(los dos son rusos) +

+ P(los dos son argentinos) + P (uno es español y el otro es argentino) =

$$\frac{8}{26} \cdot \frac{7}{25} + \frac{7}{26} \cdot \frac{6}{25} + \frac{5}{26} \cdot \frac{4}{25} + \frac{6}{26} \cdot \frac{5}{25} + \frac{7}{26} \cdot \frac{6}{25} = 0'29$$

36. Lanzamos 2 dados y anotamos el resultado. Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea veinte.

37. Lanzamos un dado de 8 caras y una moneda. Calcula la probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de 3 y de que, además, salga cruz.

38. Lanzamos 2 dados al aire. Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea estrictamente menor que diez.

39. En un estuche tengo 3 pinturas azules, 2 rojas y 5 verdes. Calcula la probabilidad de que, si elegimos una pintura al azar, sea verde o roja.

40. Problema del Caballero de Meré: calcula la probabilidad de obtener al menos un seis en 4 lanzamientos de un dado.

41. Una pareja de liebres tiene 3 crías. Calcula la probabilidad de que:

a) Las 3 crías sean machos.

b) Las 3 crías sean hembras.

c) Tengan 2 machos y 1 hembra.

d) La segunda cría sea hembra, si la primera fue macho.

42. En un instituto de 550 estudiantes, 400 juegan al fútbol, 250 al baloncesto y 110 practican ambos deportes. Si elegimos un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Practique fútbol o baloncesto.

b) No practique fútbol.

c) No practique baloncesto.

36. P (el producto de los resultados obtenidos es veinte) = $\frac{2}{36}$ = 0'055

37. Sea A = salir múltiplo de tres y B = salir cruz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0'125$$

38. P(el producto de los números obtenidos es menor que 10) = $\frac{17}{36}$ = 0'472

39. Sea A = la pintura elegida es verde y B = la pintura elegida es roja

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0'5 + 0'2 = 0'7$$

40. Lanzamos 4 veces un dado.

P (obtener al menos un 6) = 1 – P(no obtener 6) = 1 – $(5/6)^4$ = 0'52

41. Sea E = {MMM, MMH, MHM, MHH, HMM, HMH, HHM, HHH} donde M = macho y H = hembra

a) P(MMM) = $\frac{1}{8}$ = 0'125

b) P(HHH) = $\frac{1}{8}$ = 0'125

c) P(MMH) = $\frac{3}{8}$ = 0'375

d) P(la segunda cría es hembra, si la 1ª es macho) = P(MHM) + P(MHH) = $\frac{2}{8}$ = 0'25

42. Sea A = El estudiante juega al fútbol   B = El estudiante juega al baloncesto

a) $P(A \cup B) = \frac{540}{550} = 0'98$

b) $P(\overline{A}) = \frac{150}{550} = 0'27$

c) $P(\overline{B}) = \frac{300}{550} = 0'54$

AUTOEVALUACIÓN PAG. 259

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica qué experimento es aleatorio y cuál es determinista:
a) Medir a qué temperatura se licua el hidrógeno.
b) Sacar una bola blanca de una bolsa llena de bolas blancas.
c) Saber con mucha de antelación, si lloverá en mi cumpleaños.
d) Saber si picará el anzuelo un pez en un minuto.

2. Lanzamos una moneda y un dado. Escribe el espacio muestral.

3. Indica el suceso contrario de los siguientes sucesos:

$A = \{$Obtener cara al lanzar una moneda$\}$

$B = \{$Obtener un 1 al lanzar un dado al aire$\}$

$C = \{$Obtener un múltiplo de 2 y de 3 al lanzar un dado$\}$

4. Consideremos el siguiente espacio muestral:

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Teniendo en cuenta los sucesos siguientes:

$A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$ $B = \{1, 2, 6, 7, 8, 0\}$ $C = \{3, 6, 9, 5\}$

Calcula:

a) $A \cup B$	e) $\overline{A} \cap B$	i) $\overline{C} \cup B$	m) $\overline{B} \cap \overline{A}$
b) $A \cap B$	f) $\overline{A} \cup C$	j) $\overline{A} \cup B$	n) $\overline{B} \cap \overline{C}$
c) $A \cup C$	g) $\overline{A} \cap C$	k) $A \cup \overline{C}$	ñ) $\overline{B} \cap A$
d) $A \cap C$	h) $A \cap \overline{C}$	l) $\overline{C} \cap B$	o) $\overline{B} \cap B$

5. Lanzamos al aire 3 monedas. Calcula la probabilidad de obtener al menos una cruz.

6. En una bolsa tenemos las 5 vocales y 2 consonantes. Extraemos una letra al azar. Calcula la probabilidad de que sea:
a) Consonante. b) Vocal. c) La letra a.

7. Extraemos 2 cartas consecutivas de la baraja española. Calcula la probabilidad de obtener una espada extrayéndolas de las siguientes formas:
a) Devolviendo la primera carta al mazo.
b) Sin devolución.

8. En una bolsa tenemos 5 bolas blancas, 7 bolas verdes y 8 bolas rojas. Extraemos una bola al azar. Calcula la probabilidad de:
a) Sacar una bola que sea blanca.
b) No sacar una bola blanca.

9. Un fotógrafo de la naturaleza tiene un 90% de probabilidades de que sus fotografías salgan bien. El otro 10% son fotografías fallidas, por moverse los animales u otras causas. Si fotografía tres veces seguidas a un elefante salvaje, calcula la probabilidad de que al menos una fotografía salga correcta. Realiza un diagrama de árbol que represente la situación.

10. Lanzamos un dado con forma de icosaedro regular. Calcula la probabilidad de que el número obtenido sea:
a) Número primo. d) Múltiplo de 6 ó de 9.
b) Múltiplo de 6. e) Múltiplo de 6 y de 9.
c) Múltiplo de 9. f) Cero.

Probabilidad 259

1.
a) Determinista
b) Determinista
c) Aleatorio
d) Aleatorio

2. E = {C, +, 1, 2, 3, 4, 5, 6} siendo C= cara, + = cruz

3.
$\overline{A} = \{+\}$
$\overline{B} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$\overline{C} = \{1, 5\}$

4.

$\overline{A} = \{0, 2, 6, 8\}$ $\overline{B} = \{3, 4, 5, 9\}$ $\overline{C} = \{0, 1, 2, 4, 7, 8\}$

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = E$
b) $A \cap B = \{1, 7\}$
c) $A \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
d) $A \cap C = \{3, 5, 9\}$
e) $\overline{A} \cap B = \{0, 2, 6, 8\}$
f) $\overline{A} \cup C = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$
g) $\overline{A} \cap C = \{6\}$
h) $A \cap \overline{C} = \{1, 4, 7\}$
i) $\overline{C} \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, 7, 8\}$
j) $\overline{A} \cup B = \{0, 1, 2, 6, 7, 8\}$
k) $A \cup \overline{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
l) $\overline{C} \cap B = \{0, 1, 2, 7, 8\}$
m) $\overline{B} \cap \overline{A} = \{\phi\}$
n) $\overline{B} \cap \overline{C} = \{4\}$
ñ) $\overline{B} \cap A = \{3, 4, 5, 9\} = \overline{B}$
o) $\overline{B} \cap B = \{\phi\}$

5. P(obtener al menos una cruz) = 1 – P(no obtener cruz) = $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0'875$

6.

a) P(consonante) = $\frac{2}{7}$

b) P(vocal) = $\frac{5}{7}$

c) P(la letra a) = $\frac{1}{7}$

7.

a) P(obtener una espada) = $\frac{10}{40} \cdot \frac{30}{40} + \frac{30}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

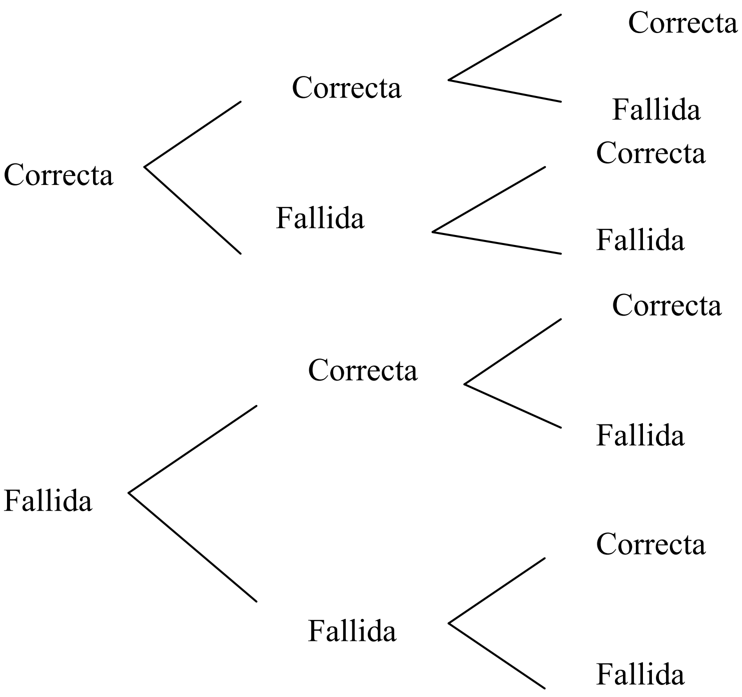
b) P(obtener una espada) = $\frac{10}{40} \cdot \frac{30}{39} + \frac{30}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{60}{156} = \frac{5}{13}$

8.

a) P(sacar una bola blanca) = $\frac{5}{20} = 0'25$

b) P(no sacar una bola blanca) = $\frac{15}{20} = 0'75$

9. P(al menos una fotografía es correcta) = 1 – P(todas salen mal) = 1 – 0’1^3 = 0’999



10. Sea E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}
Recuerda que el 1 no es un número primo.

a) P(número primo) $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0'4$

b) P(múltiplo de 6) $= \frac{3}{20} = 0'15$

c) P(múltiplo de 9) $= \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

d) P(múltiplo de 6 ó de 9) $= \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0'2$

e) P(múltiplo de 6 y de 9) $= \frac{1}{20} = 0'05$

f) P(cero) = 0

OLIMPIADA MATEMÁTICA PAG. 261

Olimpiada matemática

1. Sean r, s, u, v números reales cualesquiera. Prueba que:

$$\min\{r - s^2,\ s - u^2,\ u - v^2,\ v - r^2\} \leq \frac{1}{4}$$

2. Comprueba que la suma de los cuadrados de los 100 primeros términos de una progresión aritmética es 299’98, sabiendo que la suma de ellos vale –1 y que la suma de los términos de lugar par vale +1.

(Necesitas saber que: $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2 = 328\,350$)

1. Supongamos que $r - s^2, s - u^2, u - v^2, v - r^2 > \frac{1}{4}$. Por tanto:

$$r - s^2 + s - u^2 + u - v^2 + v - r^2 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{4} + r^2 - r\right) + \left(\frac{1}{4} + s^2 - s\right) + \left(\frac{1}{4} + v^2 - v\right) + \left(\frac{1}{4} + u^2 - u\right) < 0$$

$\left(\frac{1}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - s\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - v\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - u\right)^2 < 0$, lo cual es una contradicción.

2. Sea la progresión $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + 99d$. Entonces tenemos que hallar:

$S = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + \ldots + (a + 99d)^2 = 100a^2 + 2ad\,(1 + 2 + \ldots + 99) + d^2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2)$

Suma de los pares = +1 $\Rightarrow (a + d) + (a + 3d) + \ldots + (a + 99d) = -1 \Rightarrow 50a + 2500d = +1$

Suma de los 100 primeros números = –1 $\Rightarrow\ a + a + d + a + 2d + \ldots + a + 99d = -1$

$$100a + 4950d = -1$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 50a + 2500d = +1 \\ 100a + 4950d = -1 \end{cases}$ obtenemos: $a = -2'98$; $d = 0'06$.

El resto es fácil de calcular. Los paréntesis son progresiones:

$$1 + 2 + \ldots + 99 = 4950; \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2 = 328350$$

$$S = 100 \cdot (-2'98)^2 + 23\,(-2'98) \cdot 0'06 \cdot 4950 + 0'06^2 \cdot 328350$$

$$S = 299'98$$