## 1.- Concepto de sucesión

### Definición de sucesión

Una sucesión de números reales es una lista interminable de números que sigue una regla de formación de forma que a partir de los números dados y la regla de formación podemos obtener los siguientes números de la sucesión.

*Ejemplo*:

7, 4 , 1 , –2 , ... es una sucesión de números que se forma por la regla de "restar 3".
Los siguientes números de la sucesión se obtendrían restando 3.

Los números de una sucesión se llaman términos de la sucesión y se representan por $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , etc.

En la sucesión del ejemplo anterior, $a_1 = 7$ , $a_2 = 4$ , $a_3 = 1$ , $a_4 = -2$ , etc, etc.

La regla de formación puede ser muy variada. Por ejemplo, sumar, restar, multiplicar o dividir por un número, elevar al cuadrado o al cubo, hallar la raíz cuadrada, formar la sucesión de las potencias de 2, de 3, etc, etc

**Ejercicio 1** Averigua la regla de formación de las siguientes sucesiones y completa los huecos:

a) 64 , –16 , ____, –1 , $\frac{1}{4}$ , ____, .... b) $\frac{1}{5}$ , $\frac{4}{5}$ , $\frac{9}{5}$ , _____, _____ , $\frac{36}{5}$ , c) 1 , 8 , 27 , 64 , ______, ...

**Ejercicio 2** Observa la siguiente sucesión de triángulos y calcula cuántos puntos formarán las figuras 4ª, 5ª y 6ª

*Hacer ejercicios 4 y 48, del libro*

### Término general de una sucesión

Es una fórmula que nos permite calcular un término cualquiera de la sucesión sustituyendo la letra "n" por un número natural determinado.

El término general se suele representar por $\mathbf{a_n}$ , $\mathbf{b_n}$ , etc

*Ejemplo*:

Si el término de una sucesión es $a_n = \frac{3n^2 - 4}{2n+1}$ y queremos calcular, por ejemplo, el quinto término se sustituye n = 5. El quinto término sería entonces: $a_5 = \frac{3.5^2 - 4}{2.5+1} = \frac{71}{11}$

Si tenemos la fórmula del término general podemos calcular cualquier término sin tener que conocer los términos anteriores a él.

Por ejemplo, en la sucesión $b_n = 7n - 24$ $\rightarrow$ $b_{100} = 7.100 - 24 = 676$

**Ejercicio 3** Calcula el vigésimo término de la sucesión $a_n = -5.\ 2^{n-23}$

*Hacer ejercicio 43, del libro*

### Sucesiones recurrentes

Son aquellas sucesiones en las que para obtener un término usamos los términos anteriores a él y una regla de recurrencia.

*Ejemplo*:

Si $a_1 = 4$ , $a_2 = 7$ y la regla de recurrencia es "sumar los dos términos anteriores", los términos de la sucesión serían: 4 , 7 , 11 , 18 , 29 , 47 , .....

La regla de recurrencia puede venir dada por una fórmula, llamada fórmula de recurrencia.

*Ejemplo*:

Si $a_1 = 6$ , $a_2 = 40$ y la fórmula de recurrencia es $a_n = a_{n-1} - 5.a_{n-2}$ , entonces según la fórmula cada término se forma restándole al término anterior 5 veces el anterior a él

$a_3 = 40 - 5.6 = 10 \rightarrow a_3 = 10$ $\qquad$ $a_4 = 10 - 5.40 = -190 \rightarrow a_4 = -190$ $\qquad$ etc, etc

**Ejercicio 4** Descubre la regla de recurrencia de las siguientes sucesiones y calcula tres términos más

a) 1 , 5 , 2 , 8 , 15 , 25 , .... $\qquad$ b) 3 , –2 , –6 , 12 , .... $\qquad$ c) 7 , –8 , –1, –9 , –10 , –19 , ....

*Hacer ejercicio 1 de la ficha y ejercicios 49 y 50, del libro*

## 2.- Progresiones aritméticas y geométricas

| **Progresiones aritméticas** | **Progresiones geométricas** |
|---|---|
| Una progresión aritmética (p.a.) es una sucesión cuya regla es sumar un mismo número "**d**", llamado diferencia de la progresión.<br><br>*Ejemplos*:<br><br>7, 12, 17, 22, ... es una p.a.<br>En este ejemplo, el número que sumamos es 5.<br>La diferencia es d = 5<br><br>15, 12, 9, 6, 3, .... es una p.a. .<br>En este ejemplo, se resta 3 a cada término, es decir, se suma "–3". La diferencia es d = –3<br><br>La diferencia de una p.a. se puede obtener restando a cada término el término anterior. | Una progresión geométrica (p.g.) es una sucesión cuya regla es multiplicar por un mismo número "**r**", llamada razón de la progresión.<br><br>*Ejemplos*:<br><br>2 , 6 , 18 , ... es una p.g. El número por el que multiplicamos es 3. La razón es r = 3<br><br>80, 40 , 20 , 10 , .... es una p.g.<br>Cada término se divide entre 2, luego se está multiplicando por $\frac{1}{2}$. La razón es $r = \frac{1}{2}$<br><br>La razón de una p.g. se puede obtener dividiendo cada término entre el término anterior. |
| **Término general de una p.a.**<br><br>En una p.a. cada término es igual al término anterior más "d". Luego:<br>$a_2 = a_1+d \quad a_3 = a_2+d = (a_1+d)+d = a_1+2d$<br>$a_4 = a_1 + 3d$ $\qquad$ etc, etc<br><br>Por tanto, la fórmula del término general de una p.a. es: $\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)d}}$<br><br>*Ejemplo:*<br><br>–7, –1, 5, 11, .... es una p.a.<br>La diferencia es d = 6<br><br>Sustituimos en la fórmula del término general,<br>$a_1 = -7$ , $d = 6 \rightarrow a_n = -7 + (n-1).6$<br><br>$a_n = -7 + 6n - 6 \rightarrow a_n = 6n - 13$ | **Término general de una p.g.**<br><br>En una p.g. cada término es igual al término anterior multiplicado por "r". Luego:<br>$a_2 = a_1 . r \quad a_3 = a_2 . r = (a_1 . r) . r = a_1 . r^2$<br>$a_4 = a_1 . r^3$ $\qquad$ etc, etc<br><br>Por tanto, la fórmula del término general de una p.g. es: $\boxed{\mathbf{a_n = a_1 . r^{n-1}}}$<br><br>*Ejemplo:*<br><br>3, –6, 12, ... es una p.g.<br>La razón es r = –2<br><br>Sustituimos en la fórmula del término general,<br>$a_1 = 3$ , $r = -2 \rightarrow a_n = 3 . (-2)^{n-1}$ |

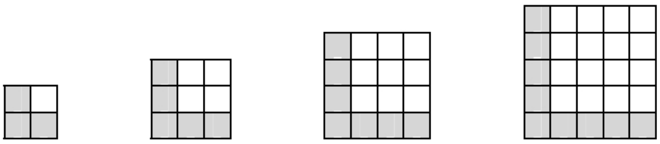
**Ejercicio 5** Averigua si las siguientes sucesiones son p.a. o p.g. , después halla $a_n$ y $a_8$:

a) $\frac{2}{3}$ , –2 , 6 , –18 , ....  b) 10 ; 6,5 ; 3 ; –0,5 ; ....  c) 2/3 , –1/3 , –4/3 ; ...

**Ejercicio 6** Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) Los números impares  b) Las potencias de 7 de exponente natural  c) Los múltiplos de 6

**Ejercicio 7** A continuación se muestra la construcción de las cuatro primeras figuras de una serie utilizando cuadraditos grises.



a) ¿Cuántos cuadraditos grises harán falta para dibujar la pieza que ocupa el lugar 100?

b) ¿Y para dibujar la pieza que ocupa el lugar n?

**Ejercicio 8** Se tiene una cuba de vino y cada día se saca la mitad de su contenido.
El 1 de octubre había 2048 litros. ¿Qué cantidad de vino había el día del Pilar?

**Ejercicio 9** En un cuadrilátero de 46 cm de perímetro, los lados están en p.a. de diferencia 3.
¿Cuánto miden?

**Ejercicio 10** Una aldea tiene actualmente 1 600 habitantes. Suponiendo que la población cada año decrece el 0,8%. ¿Qué población tendrá en el 2025?

**Ejercicio 11** Los pesos de los miembros de una familia con dos hijos están en p.a.
Entre todos pesan 275 kg. La madre es la que más pesa, 80 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

**Ejercicio 12** El número de bacterias que hay en un recipiente está aumentando un 25% cada hora.
Si al pasar 1 hora hay $3 . 10^9$ bacterias ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 6 horas?

**Ejercicio 13** Una pelota botando alcanza una altura de 4 m en el primer bote.
En cada bote la altura es las 3/5 partes que en el bote anterior.
¿Qué altura, en cm, alcanzará en el octavo bote?

**Ejercicio 14** Halla el término general de una p.a. en los siguientes casos: a) d = –7 , $a_{23}$ = 17

b) $a_1$ = 8  $a_{18}$ = 42  c) $a_{15}$ = 32  $a_{16}$ = 27  d) $a_7$ = 15  $a_{12}$ = 30

**Ejercicio 15** Halla el lugar que ocupa el término 57 en una p.a. en la que $a_9$ = 29 y $a_{20}$ = 73

**Ejercicio 16** Halla el término general de una p.g. en los siguientes casos: a) r = 2 , $a_7$ = 320

b) $a_1$ = 2  $a_6$ = 486  c) $a_6$ = 3125  $a_7$ = 15625  d) $a_4$ = 24  $a_9$ = 192

**Ejercicio 17** Halla el lugar que ocupa el término 320 en una p.g. en la que $a_3$ = 20, $a_9$ = 1280

## 3.- Suma de los primeros términos en las progresiones

### Suma de los primeros términos de una p.a.

Tomemos los primeros términos de una p.a. cualquiera, por ejemplo: 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , 20 , 23 , 26

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

8 + 23 = 31

5 + 26 = 31

Observa que 5 + 26 = 8 + 23 = ....

En general, en cualquier p.a. $a_1$ , $a_2$ , ........ , $a_{n-1}$ , $a_n$ → $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ....$

Usando esta propiedad, se obtiene una fórmula para calcular la suma, $S_n$ , de los "n" primeros términos de una p.a. :

$$S_n = a_1 + a_2 + \;...\; + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$$

---

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \;....\; + (a_2 + a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n).n$$

Despejando: $\boxed{\mathbf{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}}$

*Ejemplo:*

Hallemos la suma de los 30 primeros términos de la sucesión 250, 241, 232, ....

$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}).30}{2}$. Observa que $a_1 = 250$ , $d = -9$. Luego $a_{30} = a_1 + 29d = 250 + 29.(-9) = -11$

Por tanto, $S_{30} = \frac{(250 - 11).30}{2} = 3\,585$

### Suma de los primeros términos de una p.g.

Vamos a obtener una fórmula para calcular la suma, $S_n$, de los n primeros términos de una p.g.

Observa que $\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + .... + a_{n-1} + a_n}$

$r.\,S_n = r.a_1 + r.a_2 + ... + r.a_{n-1} + r.a_n$

Luego $\mathbf{r.\,S_n = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1}}$

Restando: $S_n - r.\,S_n = a_1 - a_{n+1} = a_1 - a_1.\,r^n$

Sacando factor común $S_n$ en el primer miembro y $a_1$ en el 2º miembro: $(1 - r).S_n = a_1.\,(1 - r^n)$

$$\boxed{\mathbf{S_n \; Z \; \frac{a_1 .(\,1 \; J \; r^n)}{1 \; J \; r}}}$$

*Ejemplo*:

Hallemos la suma de los 12 primeros términos de la p.g. : 3, 6, 12, 24,...

$S_{12} = \frac{a_1.(\,1 - r^{12})}{1 - r}$. Observa que $a_1 = 3$ , $r = 2$. Luego $S_{12} = \frac{3.(\,1 - 2^{12})}{1 - 2} = \frac{3.(\,1 - 4096)}{-1} = 12\,285$

**Ejercicio 18** Ana y Roberto son dos multimillonarios y acuerdan lo siguiente:

Ana le dará a Roberto 1 000 € el primer día del mes, 1 500 € el 2º día, 2 000 € el tercer día, 2 500 € el 4º día y así hasta llegar al día 30 del mes.

Roberto, en cambio sólo le dará a Ana 1 € el primer día, 2 € el 2º día, 4 € el tercer día, 8 € el 4º día y así hasta llegar al día 30 del mes.

¿Quién obtendrá mayor cantidad de dinero?

## Suma de los infinitos términos de una p.g.

Cuando la razón de una p.g. es, en valor absoluto, menor que 1 se puede calcular la suma de los infinitos términos de dicha p.g.

Para ello basta con observar que si $|r| < 1$ y n es infinitamente grande y $r^n$ es aproximadamente cero y podemos eliminarlo en la fórmula de la suma de los n primeros términos.

Por tanto, la fórmula de la suma de los infinitos términos de una p.g. en la que $|r| < 1$, es :

$$S_\infty = \frac{a_1\,(1-0)}{1-r} \quad \rightarrow \quad \boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-r}}$$

*Ejemplo*:

Hallemos la suma de los infinitos términos de la p.g.: 8, 4, 2, ...

Observa que $a_1 = 8$, $r = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Luego $S_\infty = \frac{8}{1-0{,}5} = \frac{8}{0{,}5} = 16$

**Ejercicio 19** En una sucesión de triángulos, cada triángulo tiene una superficie que es los 3/4 del triángulo anterior.

Se sabe que el área del primer triángulo es 48 $cm^2$.

a) ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los 5 primeros triángulos?

b) ¿Cuánto vale la suma de los infinitos triángulos?