

Página 41

Resuelve

- 1.** Resuelve los dos problemas del papiro de Ahmes que se han propuesto, y respecto al primero de ellos, contesta:

a) ¿Cuánto debe durar una tinaja?

b) ¿Cuánta grasa se puede consumir en un mes?

a) 1 año = 12 meses

Una tinaja debe durar $12 : 10 = 1,2$ meses.

b) En un mes se puede consumir $10 : 12 = \frac{5}{6}$ de tinaja.

- 2.** Un banquero presta a un interés del 6 % anual.

a) ¿Qué intereses obtendrá al prestar 100 doblones durante un año? ¿Y si los presta durante un mes? ¿Y si lo hace durante siete meses?

b) ¿Qué interés obtendrá por prestar 500 euros durante siete meses?

a) $100 \cdot 1,06 = 106$

Al cabo de un año obtendrá $106 - 100 = 6$ doblones.

$6 : 12 = 0,5 \%$; $1,005 \cdot 100 = 100,5$

Si los presta durante un mes obtendrá un interés de $100,5 - 100 = 0,5 \%$.

$100 \cdot 1,005^7 = 103,55$

Si lo hace durante siete meses obtendrá un interés de $103,55 - 100 = 3,55 \%$.

b) $500 \cdot 1,005^7 = 517,76$

Por prestar 500 euros durante siete meses obtendrá un interés de $517,76 - 500 = 17,76 \%$.

- 3.** Resuelve el problema de la tablilla babilónica mencionado más arriba.

$$C_F = 2 \cdot C \rightarrow 2C = C \cdot 1,2^n \rightarrow \frac{2C}{C} = 1,2^n \rightarrow 2 = 1,2^n$$

$$\log 2 = \log (1,2^n) \rightarrow \log 2 = n \cdot \log 1,2 \rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,2} = 3,08$$

1 Aproximaciones y errores

Página 43

1. ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?

a) Volumen de una bañera, 326 litros.

b) Volumen de una piscina, 326 m^3 .

c) Volumen de un pantano, 326 hm^3 .

d) Volumen de un asteroide, $3,26 \cdot 10^6 \text{ km}^3$.

a) Error absoluto $< 0,5 \text{ l}$

b) Error absoluto $< 0,5 \text{ m}^3 = 500 \text{ l}$

c) Error absoluto $< 0,5 \text{ hm}^3 = 5 \cdot 10^8 \text{ l} = 500\,000\,000 \text{ l}$

d) Error absoluto $< 0,005 \cdot 10^6 \text{ km}^3 = 5 \cdot 10^3 \text{ km}^3 = 5 \cdot 10^{15} \text{ l}$

2. Compara el error relativo cometido al hacer las siguientes pesadas:

a) Una ballena, 37 toneladas.

b) Un pavo, 3 kg.

c) Don Anselmo, 87,3 kg.

d) La Tierra, $5,972 \cdot 10^{21}$ toneladas.

El menor error relativo se da al pesar la Tierra, porque se usan 4 cifras significativas.

Y el mayor error relativo se da al pesar al pavo, porque solo tiene una cifra significativa.

2 La proporcionalidad en los problemas aritméticos

Página 46

- 1. Un barreño de 150 litros se llena con un grifo que mana 5 litros por minuto. ¿Qué caudal de agua se necesita para llenar una balsa de 2 400 litros en el mismo tiempo?**

A más litros a llenar, más caudal habrá → directa.

$$\left. \begin{array}{l} 150 \text{ litros} \rightarrow 5 \text{ litros/minuto} \\ 2\,400 \text{ litros} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{2\,400 \cdot 5}{150} = 80 \text{ litros}$$

- 2. En una granja, 16 conejos consumen 100 kg de alfalfa en 12 días. ¿Cuántos días pueden comer 6 conejos con 100 kg de alfalfa?**

Para menos conejos, tarda más tiempo en gastarse la alfalfa → inversa.

$$\left. \begin{array}{l} 16 \text{ conejos} \rightarrow 12 \text{ días} \\ 6 \text{ conejos} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{16 \cdot 12}{6} = 32 \text{ días}$$

Con 100 kg de alfalfa, 6 conejos podrán comer 32 días.

- 3. Si 15 l de agua se convierten en 16 l de hielo, ¿qué volumen ocuparán, al congelarse, 2 m³ de agua?**

A mayor cantidad de agua, mayor cantidad de hielo → directa.

2 m³ de agua = 200 dm³ de agua = 200 l de agua.

$$\left. \begin{array}{l} 15 \text{ l de agua} \rightarrow 16 \text{ l de hielo} \\ 200 \text{ l de agua} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{16 \cdot 200}{15} = 213,3 \text{ l}$$

Ocupará un volumen de 213,3 l.

- 4. Un grifo que mana 5 litros por minuto llena un cierto barreño en 30 minutos. ¿Qué caudal debe tener otro grifo que lo llene en 40 minutos?**

A mayor tiempo de llenado, menor caudal → inversa.

$$\left. \begin{array}{l} 30 \text{ minutos} \rightarrow 5 \text{ litros/minuto} \\ 40 \text{ minutos} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{30 \cdot 5}{40} = 3,75 \text{ litros/minuto}$$

- 5. Para calentar una pieza de hierro de 1 240 g de 10 °C a 150 °C se han necesitado 18 228 cal. ¿Cuántas calorías se necesitarán para subir una pieza de hierro de 3 480 g de 0 °C a 210 °C?**

Son dos proporcionalidades directas, a más temperatura se necesitan más calorías y a mayor cantidad de hierro, mayor cantidad de calorías necesarias.

PESO DE LA PIEZA	VARIACIÓN DE TEMPERATURA	CALORÍAS
1 240 g	140 °C	18 228
1 g	140 °C	14,7
1 g	1 °C	0,105
3 480 g	210 °C	$0,105 \cdot 210 \cdot 3\,480 = 76\,734$

Se necesitarán 76 734 calorías.

- 6. Para calentar una pieza de hierro de 1240 g de 10 °C a 150 °C se han necesitado 18 228 cal. ¿A qué temperatura se pondrá una pieza de hierro de 5 kg que está a 20 °C, si se le suministran 20 000 cal?**

Es una doble proporcionalidad directa, a más cantidad de hierro se han de suministrar más calorías para que aumente 1 °C y, dando una cantidad de calorías aumentará una cantidad directamente proporcional de grados.

PESO DE LA PIEZA	VARIACIÓN DE TEMPERATURA	CALORÍAS
1 240 g	140 °C	18 228
1 g	140 °C	14,7
1 g	1 °C	0,105
5 kg = 5 000 g	$\frac{20\,000}{0,105 \cdot 5\,000} \approx 38,1$ °C	20 000

Se pondrá a una temperatura de 38,1 °C.

- 7. En los trabajos de una autopista, 20 camiones trabajando 8 horas diarias logran llevar del tajo a la escombrera 4 dam³ de tierra cada día. ¿Cuánta tierra moverán en un día 12 camiones trabajando en turnos de 10 horas diarias?**

Son dos proporcionalidades directas, a menos camiones menos tierra movida, y a más horas diarias más tierra movida.

N.º CAMIONES	HORAS DIARIAS	VOLUMEN DE TIERRA (dam ³)
20	8	4
1	8	0,2
1	1	0,025
12	10	$0,025 \cdot 12 \cdot 10 = 3$

Se moverán 3 dam³ de tierra.

- 8. Para que un gramo de agua suba un grado, se necesita una caloría. ¿Cuánto calor es necesario para subir a punto de ebullición un litro de agua que sale del grifo a 12 °C?**

1 l de agua = 1 kg de agua = 1 000 g de agua

Punto de ebullición del agua = 100 °C.

Deberá subir $100 - 12 = 88$ °C. Es una doble proporcionalidad directa ya que a más cantidad de agua más calorías se necesitan y a mayor temperatura más calorías son necesarias.

GRAMOS DE AGUA	GRADOS QUE AUMENTA	CALORÍAS
1 g	1 °C	1
1 000 g	88 °C	$1 \cdot 1\,000 \cdot 88 = 88\,000$

Se necesitarán 88 000 calorías.

9. Una piara de 23 cerdos se come, en 50 días, 2990 kg de pienso. ¿Cuántos días duran 6240 kg de pienso a 75 cerdos?

PROPORCIONALIDAD DIRECTA PROPORCIONALIDAD INVERSA		
kg DE PIENSO	CERDOS	DÍAS
2990	23	50
1	23	$\frac{5}{299}$
1	1	$\frac{5}{13}$
6240	75	$\frac{5}{13} \cdot \frac{6240}{75} = 32$

Los 6240 kg de pienso para 75 cerdos durarán 32 días.

3 Problemas clásicos

Página 47

- 1. Tres socios pusieron 2, 3 y 6 millones de euros, respectivamente, para crear una empresa.**

Si las ganancias del primer año ascienden a 75 900 €, ¿cuánto corresponderá a cada uno?

Entre los tres aportaron $2 + 3 + 6 = 11$ millones de euros.

Por tanto, a cada uno le corresponderá:

$$\text{Primero} \rightarrow \frac{2}{11} \cdot 75\,900 = 13\,800 \text{ €}$$

$$\text{Segundo} \rightarrow \frac{3}{11} \cdot 75\,900 = 20\,700 \text{ €}$$

$$\text{Tercero} \rightarrow \frac{6}{11} \cdot 75\,900 = 41\,400 \text{ €}$$

- 2. ¿Cómo se podrían repartir 2 310 € entre tres hermanos de forma que al mayor le corresponda la mitad que al menor, y a este, el triple que al mediano?**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mayor} \rightarrow \frac{3x}{2} \\ \text{Mediano} \rightarrow x \\ \text{Menor} \rightarrow 3x \end{array} \right\} \frac{3x}{2} + x + 3x = 2\,310 \rightarrow x = 420$$

Por tanto, a cada hermano le corresponde:

$$\text{Mayor} \rightarrow 630 \text{ €}$$

$$\text{Mediano} \rightarrow 420 \text{ €}$$

$$\text{Menor} \rightarrow 1\,260 \text{ €}$$

- 3. Tres personas poseían $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{6}$, respectivamente, de una urbanización, junto con un cuarto socio que se retira llevándose su parte. ¿Qué parte de lo que queda corresponde a cada uno?**

Los tres propietarios restantes tienen en total $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{6+4+3}{18} = \frac{13}{18}$ partes.

$$\text{Primero} \rightarrow \frac{1}{3} : \frac{13}{18} = \frac{6}{13}$$

$$\text{Segundo} \rightarrow \frac{2}{9} : \frac{13}{18} = \frac{4}{13}$$

$$\text{Tercero} \rightarrow \frac{1}{6} : \frac{13}{18} = \frac{3}{13}$$

- 4. Una balsa de 12 150 l se llena con tres grifos cuyos caudales son 14,6 l/s; 8,9 l/s y 4,2 l/s. ¿Cuánto ha aportado cada uno al total de la balsa? Da la solución aproximando hasta las decenas de litro.**

Entre los tres grifos tienen un caudal de $14,6 + 8,9 + 4,2 = 27,7$ l/s.

Por tanto, cada grifo aporta:

$$\text{Primero} \rightarrow \frac{14,6}{27,7} \cdot 12\,150 = 6\,403,97 \text{ l}$$

$$\text{Segundo} \rightarrow \frac{8,9}{27,7} \cdot 12\,150 = 3\,903,79 \text{ l}$$

$$\text{Tercero} \rightarrow \frac{4,2}{27,7} \cdot 12\,150 = 1\,842,24 \text{ l}$$

Página 48

5. Si mezclamos 12 kg de café de 12,40 €/kg con 8 kg de café de 7,40 €/kg, ¿cuál será el precio de la mezcla?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ 1	12 kg	12,40 €/kg	$12 \cdot 12,40 = 148,80 \text{ €}$
CAFÉ 2	8 kg	7,40 €/kg	$8 \cdot 7,40 = 59,20 \text{ €}$
MEZCLA	20 kg		$148,80 + 59,20 = 208 \text{ €}$

Precio de la mezcla $\rightarrow \frac{208 \text{ €}}{20 \text{ kg}} = 10,4 \text{ €/kg}$

6. Si mezclamos un lingote de 3 500 g con un 80 % de oro con otro lingote de 1 500 g con un 95 % de oro, ¿qué proporción de oro habrá en el lingote resultante? ¿Y si añadimos 2 kg de oro puro?

	PESO TOTAL	% ORO	PESO DE ORO
1 ^{er} LINGOTE	3 500 g	80	$3\,500 \cdot \frac{80}{100} = 2\,800 \text{ g}$
2 ^o LINGOTE	1 500 g	95	$1\,500 \cdot \frac{95}{100} = 1\,425 \text{ g}$
TOTAL	5 000 g		$2\,800 + 1\,425 = 4\,225 \text{ g}$

Proporción de oro $\rightarrow \frac{4\,225 \text{ g oro}}{5\,000 \text{ g totales}} \cdot 100 = 84,5 \%$

Y si añadimos 2 kg de oro puro:

	PESO TOTAL	% ORO	PESO DE ORO
1 ^{er} LINGOTE	3 500 g	80	2 800 g
2 ^o LINGOTE	1 500 g	95	1 425 g
3 ^{er} LINGOTE	2 000 g	100	2 000 g
TOTAL	7 000 g		6 225 g

Proporción de oro $\rightarrow \frac{6\,225 \text{ g oro}}{7\,000 \text{ g totales}} \cdot 100 = 88,9 \%$

7. Un litro de agua pesa 999,2 g, y un litro de alcohol, 794,7 g. ¿Cuál es el peso de un litro de la disolución obtenida al mezclar 3 l de agua con 7 l de alcohol?

	LITROS	PESO POR LITRO	PESO TOTAL
AGUA	3	999,2 g/l	2 997,6 g
ALCOHOL	7	794,7 g/l	5 562,9 g
MEZCLA	10		8 560,5 g

Gramos por litro de la mezcla $\rightarrow \frac{8\,560,5 \text{ g}}{10 \text{ l}} = 856,05 \text{ g/l}$

8. Un joyero quiere fundir un lingote de 2 kg de oro de ley 0,85 con otro lingote de 1,5 kg de oro cuya ley es 0,9. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?

	PESO TOTAL	LEY	PESO DE ORO
1 ^{er} LINGOTE	2 000 g	0,85	1 700 g
2 ^o LINGOTE	1 500 g	0,9	1 350 g
TOTAL	3 500 g		3 050 g

Lingote resultante $\rightarrow$ Ley = $\frac{3\,050\text{ g}}{3\,500\text{ g}} \approx 0,87$

Página 49

9. Un coche va a 120 km/h y un camión a 90 km/h.

a) Si el coche sigue al camión a 75 km de distancia, ¿cuánto tardará en alcanzarlo?

b) Si están a 504 km y se dirigen el uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

a) El coche se aproxima al camión a una velocidad de $120 - 90 = 30$ km/h.

Tardará en alcanzarlo:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{75}{30} = 2,5 \text{ horas.}$$

b) Se aproximan a una velocidad de $120 + 90 = 210$ km/h.

Tardarán en cruzarse:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{504}{210} = 2,4 \text{ h}$$

10. La capacidad de un pantano es $981,1 \text{ hm}^3$. Actualmente se encuentra al 43 % del total, y está recibiendo una aportación de $45 \text{ m}^3/\text{s}$ mientras que se desembalsan $3\,200 \text{ l/s}$. De mantenerse este ritmo, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse hasta un 95 % de su capacidad?

$$45 \text{ m}^3/\text{s} = 45\,000 \text{ dm}^3/\text{s} = 45\,000 \text{ l/s}$$

$$981,1 \text{ hm}^3 = 9,811 \cdot 10^{11} \text{ dm}^3 = 9,811 \cdot 10^{11} \text{ l}$$

$$\text{La velocidad de llenado es } 45\,000 - 3\,200 = 41\,800 \text{ l/s}$$

$$43 \% \text{ de } 9,811 \cdot 10^{11} \text{ l} = 4,21873 \cdot 10^{11} \text{ l}$$

$$95 \% \text{ de } 9,811 \cdot 10^{11} \text{ l} = 9,32045 \cdot 10^{11} \text{ l}$$

$$\text{Se quieren llenar } 9,32045 \cdot 10^{11} - 4,21873 \cdot 10^{11} = 5,10172 \cdot 10^{11} \text{ l}$$

Tardará en llenarse al 95 %:

$$t = \frac{vol}{v} = \frac{5,10172 \cdot 10^{11}}{41\,800} = 12\,205\,071,77 \text{ s}$$

$$12\,205\,071,77 \text{ s} = 141 \text{ días, 6 horas y 30 minutos.}$$

4 Cálculos con porcentajes

Página 50

Cálculo mental

Expresa en forma decimal los siguientes porcentajes:

- | | | |
|----------|----------|---------|
| a) 10 % | b) 7 % | c) 1 % |
| d) 160 % | e) 127 % | f) 5 % |
| a) 0,1 | b) 0,07 | c) 0,01 |
| d) 1,6 | e) 1,27 | f) 0,05 |

Cálculo mental

¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?

- | | | |
|-------------------------|---------------------|---------------------|
| a) 15 respecto a 30. | b) 5 respecto a 20. | c) 2 respecto a 10. |
| d) 30 respecto a 3 000. | e) 3 respecto a 4. | |
| a) 50% | b) 25% | c) 20% |
| d) 1% | e) 75% | |

1. Calcula.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) El 24 % de 300. | b) El 112 % de 560. |
| c) El 3 % de 83 200. | d) El 30 % de 83 200. |
| e) El 230 % de 5 200. | f) El 300 % de 40. |
| a) $300 \cdot 0,24 = 72$ | b) $560 \cdot 1,12 = 627,2$ |
| c) $83\,200 \cdot 0,03 = 2\,496$ | d) $83\,200 \cdot 0,3 = 24\,960$ |
| e) $5\,200 \cdot 2,30 = 11\,960$ | f) $40 \cdot 3 = 120$ |

2. Calcula el tanto por ciento que representa.

- | | |
|--|--|
| a) 45 respecto a 225. | b) 6 160 respecto a 56 000. |
| c) 4 230 respecto a 9 000. | d) 1 922 respecto a 1 240. |
| e) 6 000 respecto a 4 000. | f) 975 respecto a 32 500. |
| a) $\frac{45}{225} \cdot 100 = 20 \rightarrow 20\%$ | b) $\frac{6\,160}{56\,000} \cdot 100 = 11 \rightarrow 11\%$ |
| c) $\frac{4\,230}{9\,000} \cdot 100 = 47 \rightarrow 47\%$ | d) $\frac{1\,922}{1\,240} \cdot 100 = 155 \rightarrow 155\%$ |
| e) $\frac{6\,000}{4\,000} \cdot 100 = 150 \rightarrow 150\%$ | f) $\frac{975}{32\,500} \cdot 100 = 3 \rightarrow 3\%$ |

Página 51

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?

- | | | |
|---------|----------|----------|
| a) 25 % | b) 5 % | c) 40 % |
| d) 80 % | e) 110 % | f) 200 % |
| a) 1,25 | b) 1,05 | c) 1,4 |
| d) 1,8 | e) 2,1 | f) 3 |

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?

- | | | |
|---------|---------|---------|
| a) 25 % | b) 5 % | c) 40 % |
| d) 15 % | e) 88 % | f) 1 % |
| a) 0,75 | b) 0,95 | c) 0,6 |
| d) 0,85 | e) 0,12 | f) 0,99 |

- 3.** Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35 %. ¿Cuánto valen ahora?

Ahora valen $13,70 \cdot 1,35 = 18,50$ €.

- 4.** En una comunidad autónoma había 69 580 parados. Han disminuido un 15 %. ¿Cuántos hay ahora?

Ahora hay $69\,580 \cdot 0,85 = 59\,143$ parados.

Página 52

Cálculo mental

Di la cantidad inicial si sabemos que:

a) Aumenta 50 %. C. final = 1 500.

b) Aumenta 50 %. C. final = 3 000.

c) Aumenta 25 %. C. final = 125.

d) Aumenta 25 %. C. final = 250.

e) Disminuye 50 %. C. final = 400.

f) Disminuye 40 %. C. final = 600.

a) 1 000

b) 2 000

c) 100

d) 200

e) 800

f) 1 000

- 5.** El precio de una batidora, después de cargarle un 18 % de impuestos, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle esos impuestos?

El precio sin IVA es $70,80 : 1,18 = 60$ €.

- 6.** Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30 % y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?

Sin estirar, la goma mide $104 : 1,30 = 80$ cm.

- 7.** En unas rebajas en las que se hace el 30 % de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?

Su precio era de $50,40 : 0,70 = 72$ €.

- 8.** Un cartero ha repartido el 36 % de las cartas que tenía. Aún le quedan 1 184. ¿Cuántas tenía antes de empezar el reparto?

Si ha repartido el 36 %, le quedan el 64 %; es decir, $1184 : 0,64 = 1850$ cartas.

Página 53

- 9.** Un comerciante aumenta el precio de sus productos un 30 % y, después, pretendiendo dejarlos al precio inicial, los rebaja un 30 %.

a) Un ordenador que inicialmente costaba 1 000 €, ¿cuánto costará en cada paso del proceso?

b) ¿Cuál es la variación porcentual que sufren los artículos respecto al precio inicial?

$$\text{a) } 1\,000\,€ \xrightarrow{+30\%} 1\,300\,€ \xrightarrow{-30\%} 910\,€$$

b) Índice de variación total: $1,3 \cdot 0,7 = 0,91$.

$$0,91 - 1 = -0,09$$

Variación porcentual: baja un 9 %.

- 10.** Un capital de 42 000 € se deposita en un banco al 5 % anual. ¿En cuánto se habrá convertido en un año? ¿Y en dos? ¿Y en tres años?

$$42\,000\,€ \xrightarrow{1.^{\text{er}} \text{ AÑO}} 42\,000 \cdot 1,05 = 44\,100\,€$$

$$\xrightarrow{2.^{\text{o}} \text{ AÑO}} 44\,100 \cdot 1,05 = 46\,305\,€$$

$$\xrightarrow{3.^{\text{er}} \text{ AÑO}} 46\,305 \cdot 1,05 = 48\,620,25\,€$$

También puede hacerse así:

$$1 \text{ año: } 42\,000 \cdot 1,05 = 44\,100\,€$$

$$2 \text{ años: } 42\,000 \cdot 1,052 = 46\,305\,€$$

$$3 \text{ años: } 42\,000 \cdot 1,053 = 48\,620,25\,€$$

5 Interés compuesto

Página 54

- 1. ¿En cuánto se transforma un capital de 20 000 € colocado al 3,6 % anual durante 5 años?**

Se transforma en $20\,000 \cdot (1,036)^5 = 23\,868,7$ €.

- 2. ¿En cuánto se transforman 20 000 € colocados 5 años al 3,6 % anual, con pago de intereses mensual?**

Un 3,6 % anual significa un $3,6 : 12 = 0,3$ % mensual.

Así: $20\,000 \cdot (1,003)^{60} = 23\,937,9$ €.

Ejercicios y problemas

Página 56

Practica

Aproximaciones y errores

1.  Expresa con dos cifras significativas las cantidades siguientes:

- a) Presupuesto de un club: 1 843 120 €.
- b) Votos de un partido político: 478 235.
- c) Precio de una empresa: 150 578 147 €.
- d) Tamaño de un ácaro: 1,083 mm.

- a) 1,8 millones de euros.
- b) 480 000 votos.
- c) 16 000 000 €.
- d) 1,1 mm.

2.  ¿En cuál de las aproximaciones dadas en cada caso se comete menos error absoluto?

a) $\frac{14}{3} \approx \begin{cases} 4,6 \\ 4,7 \end{cases}$

b) $1,546 \approx \begin{cases} 1,5 \\ 1,6 \end{cases}$

c) $\sqrt{6} \approx \begin{cases} 2,44 \\ 2,45 \end{cases}$

d) $\sqrt{10} \approx \begin{cases} 3,16 \\ 3,2 \end{cases}$

a) $\frac{14}{3} - 4,6 = 0,0666\dots$

b) $1,546 - 1,5 = 0,046$

$4,7 - \frac{14}{3} = 0,0333\dots$

$1,6 - 1,546 = 0,054$

Con 4,7 se comete menos error absoluto.

Con 1,5 se comete menos error absoluto.

c) $\sqrt{6} - 2,44 = 0,0095$

d) $\sqrt{10} - 3,16 = 0,0023$

$2,45 - \sqrt{6} = 0,0005$

$3,2 - \sqrt{10} = 0,04$

Con 2,45 se comete menos error absoluto.

Con 3,16 se comete menos error absoluto.

3.  ¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo en cada caso?

- a) Precio de un coche: 12 400 €.
- b) Tiempo de una carrera: 34,6 min.
- c) Asistentes a una manifestación: 250 000.
- d) Diámetro de una bacteria: 0,0006 mm.

- a) El error absoluto será menor de 50 € y, el error relativo será menor, puesto que tiene 3 cifras significativas.
- b) El error absoluto será menor de 3 segundos, y el error relativo será pequeño, puesto que tiene 3 cifras significativas.
- c) El error absoluto será menor de 5 000 asistentes, y el error relativo será mayor, solo tiene 2 cifras significativas.
- d) El error absoluto será menor de 0,00005 mm, y el error relativo será mayor, ya que tiene una sola cifra significativa.

4.  ¿Cuál de las siguientes medidas es más precisa (tiene menos error relativo)? Di, en cada una, de qué orden es el error absoluto cometido:

- a) Altura de un chica: 1,75 m.
- b) Precio de un televisor: 1 175 €.
- c) Tiempo de un anuncio: 95 segundos.
- d) Oyentes de un programa de radio: 2 millones.

- a) Altura: 1,75 m $\rightarrow$ Error absoluto $< 0,005$ m
- b) Precio: 1 175 € $\rightarrow$ Error absoluto $< 0,5$ €
- c) Tiempo: 95 s $\rightarrow$ Error absoluto $< 0,5$ s
- d) N.º de oyentes: 2 millones $\rightarrow$ Error absoluto $< 500\,000$

La de menor error relativo es la b), porque tiene más cifras significativas.

Porcentajes

5.  Calcula mentalmente.

- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|
| a) 20 % de 340 | b) 2,5 % de 400 | c) 75 % de 4 000 |
| d) 150 % de 200 | e) 60 % de 250 | f) 12 % de 12 |
| a) 68 | b) 10 | c) 3 000 |
| d) 300 | e) 150 | f) 1,44 |

6.  ¿Qué porcentaje representa?

- | | |
|----------------|---------------|
| a) 78 de 300 | b) 420 de 500 |
| c) 25 de 5 000 | d) 340 de 200 |
| a) 26 % | b) 84 % |
| c) 0,5 % | d) 170 % |

7.  Calcula, en cada caso, la cantidad inicial de lo que conocemos:

- | | |
|---------------------------------|------------------------------|
| a) El 28 % es 98. | b) El 15 % es 28,5. |
| c) El 2 % es 325. | d) El 150 % es 57. |
| a) $\frac{98}{0,28} = 350$ | b) $\frac{28,5}{0,15} = 190$ |
| c) $\frac{325}{0,02} = 16\,250$ | d) $\frac{57}{1,5} = 38$ |

8.  ¿Por qué número hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la final en cada caso?

- | | |
|---|---|
| a) Aumenta un 12 %. | b) Disminuye el 37 %. |
| c) Aumenta un 150 %. | d) Disminuye un 2 %. |
| e) Aumenta un 10 % y, después, el 30 %. | f) Disminuye un 25 % y aumenta un 42 %. |
| a) $1 + 0,12 = 1,12$ | b) $1 - 0,37 = 0,63$ |
| c) $1 + 1,5 = 2,5$ | d) $1 - 0,02 = 0,98$ |
| e) $(1 + 0,1)(1 + 0,3) = 1,43$ | f) $(1 - 0,25)(1 + 0,42) = 1,065$ |

9. Calcula el índice de variación y la cantidad final:**a) 325 aumenta el 28 %.****b) 87 disminuye el 80 %.****c) 425 aumenta el 120 %.****d) 125 disminuye el 2 %.****e) 45 aumenta el 40 % y el 30 %.****f) 350 disminuye el 20 % y el 12 %.**

a) $I_V = 1,28$

$C_F = 416$

b) $I_V = 0,2$

$C_F = 17,4$

c) $I_V = 2,2$

$C_F = 935$

d) $I_V = 0,98$

$C_F = 122,5$

e) $I_V = 1,4 \cdot 1,3 = 1,82$

$C_F = 81,9$

f) $I_V = 0,8 \cdot 0,88 = 0,704$

$C_F = 246,4$

10. ¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a estos índices de variación?**a) 1,54****b) 0,18****c) 0,05****d) 2,2****e) 1,09****f) 3,5**

a) Aumento 54 %.

b) Disminución 82 %.

c) Disminución 95 %.

d) Aumento 120 %.

e) Aumento 9 %.

f) Aumento 250 %.

11. ¿Qué porcentaje es?**a) El 40 % del 40 %.****b) El 25 % del 20 %.****c) El 30 % del 120 %.****d) El 150 % del 20 %.**

a) $0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \rightarrow 16 \%$

b) $0,25 \cdot 0,20 = 0,05 \rightarrow 5 \%$

c) $0,30 \cdot 1,2 = 0,36 \rightarrow 36 \%$

d) $1,5 \cdot 0,2 = 0,3 \rightarrow 30 \%$

12.  Calcula, en cada caso, la cantidad que falta:

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	↑+18 %	
4 500	↓−48 %	
75	↑+110 %	
5 600		4 592
326		603,1
	↑+32 %	165
	↓−0,8 %	4 140

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	↑+18 %	1 003
4 500	↓−48 %	2 340
75	↑+110 %	157,5
5 600	↓−18 %	4 592
326	↑+85 %	603,1
125	↑+32 %	165
4 173,4	↓−0,8 %	4 140

13.  Relaciona fracciones con porcentajes.

FRACCIÓN	13/20	77/200	11/60		
PORCENTAJE				24,8 %	13,6 %

FRACCIÓN	13/20	77/200	11/60	31/125	41/300 (*)
PORCENTAJE	65 %	38,5 %	18,3 %	24,8 %	13,6 %

$$(*) \ 13,6 = \frac{123}{9} \rightarrow \frac{123}{9} : 100 = \frac{123}{900} = \frac{41}{300}$$

Resuelve problemas

Proporcionalidad

- 14.** Los vecinos de una urbanización abonan 390 € mensuales por las 130 farolas que alumbran sus calles. ¿Cuántas farolas han de suprimir si desean reducir la factura mensual a 240 €?

A menos farolas, menos gasto → directa.

$$\left. \begin{array}{l} 390 \text{ €} \rightarrow 130 \text{ farolas} \\ 240 \text{ €} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{240 \cdot 130}{390} = 80 \text{ farolas}$$

Deben suprimir $130 - 80 = 50$ farolas.

- 15.** Cinco carpinteros necesitan 21 días para entarimar un suelo. ¿Cuántos carpinteros serán necesarios si se desea hacer el trabajo en 15 días?

Proporcionalidad inversa, si se quiere terminar en menos días se debe tener más carpinteros.

$$\left. \begin{array}{l} 21 \text{ días} \rightarrow 5 \text{ carpinteros} \\ 15 \text{ días} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{21 \cdot 5}{15} = 7 \text{ carpinteros}$$

- 16.** El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios. ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 938 €?

A más cajas, mayor precio → directa.

$$\left. \begin{array}{l} 1.^{\text{er}} \text{ pedido: } 25 \text{ cajas} \rightarrow 670 \text{ €} \\ 2.^{\text{o}} \text{ pedido: } 17 \text{ cajas} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{670 \cdot 17}{25} = 455,6 \text{ €}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1.^{\text{er}} \text{ pedido: } 670 \text{ €} \rightarrow 25 \text{ cajas} \\ 2.^{\text{o}} \text{ pedido: } 938 \text{ €} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{25 \cdot 938}{670} = 35 \text{ cajas}$$

- 17.** Un campamento de refugiados que alberga a 4 600 personas tiene víveres para 24 semanas. ¿En cuánto se reducirá ese tiempo con la llegada de 200 nuevos refugiados?

A más personas en el refugio, menos tiempo durará la comida → inversa.

$$\left. \begin{array}{l} 4\,600 \text{ personas} \rightarrow 24 \text{ semanas} \\ 4\,800 \text{ personas} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{4\,600 \cdot 24}{4\,800} = 23 \text{ semanas}$$

El tiempo se reducirá a 23 semanas.

- 18.**  Un peregrino del Camino de Santiago, que camina seis horas cada jornada, ha invertido 5 días y 2 horas en recorrer una distancia de 128 kilómetros. ¿Qué distancia recorre al día?

Es una proporcionalidad directa, con la misma velocidad, a más tiempo andando, mayor distancia recorrida.

El tiempo en total que ha estado caminando ha sido 5 días y 2 horas = $5 \cdot 6 + 2 = 32$ horas.

$$\left. \begin{array}{l} 32 \text{ horas} \rightarrow 128 \text{ kilómetros} \\ 6 \text{ horas} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{6 \cdot 128}{32} = 24 \text{ kilómetros}$$

Al día recorre una distancia de 24 kilómetros.

- 19.**  En España se consumen, aproximadamente, 8,5 millones de toneladas de papel al año. ¿Cuál es el consumo anual per cápita? (Población de España: 46,5 millones). Da la respuesta con un error absoluto menor que 0,5 kg.

Es una proporcionalidad directa, a menos gente menos papel usado.

8,5 millones de toneladas = 8 500 millones de kg

$$\left. \begin{array}{l} 46,5 \text{ millones de toneladas} \rightarrow 8\,500 \text{ millones de kg de papel} \\ 1 \text{ persona} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{8,5 \cdot 10^9 \cdot 1}{46,5 \cdot 10^6} = 183 \text{ kg}$$

El consumo anual *per cápita* de papel en España es de 183 kg.

- 20.**  Una locomotora, a 85 km/h, tarda 3 horas y 18 minutos en realizar el viaje de ida entre dos ciudades. ¿Cuánto tardará en el viaje de vuelta si aumenta su velocidad a 110 km/h?

A mayor velocidad, menor tiempo empleado en el mismo recorrido $\rightarrow$ inversa.

3 horas y 18 minutos = 3,3 horas

$$\left. \begin{array}{l} 85 \text{ km/h} \rightarrow 3,3 \text{ horas} \\ 110 \text{ km/h} \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{85 \cdot 3,3}{110} = 2,55 \text{ horas} = 2 \text{ horas y } 33 \text{ minutos}$$

- 21.**  La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año.

a) ¿Qué distancia recorre la luz en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón? (Distancia del Sol a Plutón: $5,914 \cdot 10^9$ km).

c) La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años luz de la Tierra. Expresa en kilómetros esa distancia.

(Da las respuestas con tres cifras significativas.)

a) Distancia que recorre la luz en un año:

$$3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

b) Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Plutón:

$$t = \frac{5,914 \cdot 10^9 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 19,7 \text{ segundos}$$

c) 4,3 años luz = $4,3 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 4,07 \cdot 10^{13}$ km

22.  El tamaño de un archivo informático se mide en bytes (B).

- a) ¿Cuántos bytes tiene un archivo de 21,3 MB (megabytes)? ¿Y cuántos KB (kilobytes)?
 b) ¿Cuántos bytes puede almacenar mi disco duro de 1 TB (terabytes)? ¿Y archivos de 20 MB?
 c) Quiero hacer una copia de seguridad de mi disco duro del que tengo ocupado 310 GB. ¿Puedo hacerlo en un disco de 0,5 TB?

$$1 \text{ GB} = 1\,024 \text{ MB} \quad 1 \text{ MB} = 1\,024 \text{ KB} \quad 1 \text{ KB} = 1\,024 \text{ B}$$

a) $21,3 \text{ MB} = 21,3 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024 = 22\,334\,668,8 \text{ B}$

$$20 \text{ MB} = 20 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024 = 20\,971\,520 = 2,097 \cdot 10^7 \text{ B}$$

b) $1 \text{ T} = 1\,000 \text{ GB} = 1\,000 \cdot 1\,024^3 = 1,074 \cdot 10^{12} \text{ B}$

$$1\,000 \text{ GB} = 1\,000 \cdot 1\,024 = 1\,024\,000 \text{ MB}$$

$$\text{Puedo almacenar } 1\,024\,000 : 20 = 51\,200 \text{ archivos de } 20 \text{ MB.}$$

c) Sí puedo hacerlo, porque 0,5 T son 500 GB. Por tanto, me sobrarán $500 - 310 = 190 \text{ GB}$.

23.  Naciones Unidas estima que durante la década de 2001-2010 se produjo en el mundo una pérdida anual de $1,3 \cdot 10^7$ hectáreas de bosques.

Por otra parte, en cierta página web, leo que la pérdida anual ha sido superior a la superficie de diez millones de campos de fútbol. Comprueba si es cierta esta información (dimensiones máximas de un campo de fútbol: $120 \text{ m} \times 75 \text{ m}$).

$$1 \text{ hectárea} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1,3 \cdot 10^7 \text{ hectáreas} = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$$

$$\text{El área de un campo de fútbol es } 120 \times 75 = 9\,000 \text{ m}^2$$

$$10\,000\,000 \text{ campos de fútbol ocupan } 9 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$$

$$1,3 \cdot 10^{11} > 9 \cdot 10^{10}, \text{ por tanto, la información es cierta.}$$

24.  Cuatro mineros abren una galería de 15 metros de longitud en 9 días. ¿Cuántos metros de galería abrirán 6 mineros en 15 días?

4 mineros que trabajan 9 días, abren una galería de 15 metros.

$$1 \text{ minero, trabajando } 1 \text{ día, abre } \frac{15}{4 \cdot 9} = 0,41\bar{6} \text{ metros.}$$

$$\text{Por tanto, } 6 \text{ mineros, trabajando } 15 \text{ días, abrirán una galería de } 6 \cdot 15 \cdot 0,41\bar{6} = 37,5 \text{ metros.}$$

25.  En una cadena de montaje, 17 operarios, trabajando 8 horas al día, ensamblan 850 aparatos de radio a la semana. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar la próxima semana, para atender un pedido de 1 000 aparatos, teniendo en cuenta que se añadirá un refuerzo de tres trabajadores?

N.º OPERARIOS	HORAS DIARIAS TRABAJADAS	N.º APARATOS ENSAMBLADOS
17	8	850
1	8	50
1	1	6,25
20	$\frac{1000}{6,25 \cdot 20} = 8$	1 000

- 26.**  En un campo de 200 m de largo y 80 m de ancho, se ha recogido una cosecha de 4 800 kg de trigo. ¿Qué cosecha podemos esperar de otro campo que mide 190 m de largo y 90 m de ancho?

La superficie del primer campo es $200 \cdot 80 = 16\,000 \text{ m}^2$.

La superficie del segundo campo es $190 \cdot 90 = 17\,100 \text{ m}^2$.

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ campo: } 16\,000 \text{ m}^2 \rightarrow 4\,800 \text{ kg de trigo} \\ 2^{\text{o}} \text{ campo: } 17\,100 \text{ m}^2 \rightarrow x \end{array} \right\} x = \frac{4\,800 \cdot 17\,100}{16\,000} = 5\,130 \text{ kg}$$

Se esperan obtener 5 130 kg de trigo.

- 27.**  Un taller produce 480 tapacubos al día trabajando con cinco máquinas en dos turnos de 8 horas.

- a) ¿Cuántos tapacubos producirá cada día, si se añade una máquina más y se aumenta a 10 el número de horas de cada turno?
- b) ¿Cuántas horas debería durar cada turno para cubrir un cupo de 540 piezas al día con seis máquinas en funcionamiento?

N.º MÁQUINAS	N.º TAPACUBOS	HORAS TRABAJADAS
5	480	16
1	$\frac{480}{5 \cdot 16} = 6$	1
6	$6 \cdot 6 \cdot 20 = 720$	20
6	540	$\frac{540}{6 \cdot 6} = 15$

- a) Cada día producirá 720 tapacubos.
- b) Cada turno debería durar 7,5 horas cada uno.

- 28.**  En un comedor de empresa, con 113 comensales, se han consumido 840 yogures en 20 días laborables. ¿Será suficiente una reserva de 200 yogures para los próximos cinco días en los que se prevé una afluencia media de 120 comensales/día?

N.º COMENSALES	N.º YOGURES	N.º DÍAS LABORABLES
113	840	20
1	$\frac{840}{113 \cdot 20} = 0,37$	1
120	$0,37 \cdot 120 \cdot 5 = 222$	5

Para los próximos cinco días, con una afluencia de 120 comensales, se necesitarán 222 yogures, por tanto, la reserva de 200 yogures no será suficiente.

Página 58

29.  La combustión de un litro de gasolina produce 2 370 g de CO₂. El consumo medio de un coche es de 6 litros por cada 100 km. En España hay aproximadamente 480 coches por cada 1 000 habitantes, que hacen una media de 15 000 km al año.

- a) Calcula la cantidad de CO₂ que emite un coche por kilómetro recorrido.
- b) ¿Cuántas toneladas de CO₂ se emiten en España en un año? (Población de España: 46,5 millones).
- c) Cierta organización ecologista propone una batería de medidas para reducir las emisiones a 120 g/km. ¿Cuántas toneladas de CO₂ se dejarían de emitir en España si fuera efectiva esa propuesta?

a) Un coche emite un CO₂ por kilómetro recorrido de $\frac{2\,370 \text{ g/l} \cdot 6 \text{ l}}{100 \text{ km}} = 142,2 \text{ g/km}$

b) $\frac{0,0001422 \text{ T/km} \cdot 15\,000 \text{ km/año} \cdot 480 \text{ coches} \cdot 46,5 \cdot 10^6 \text{ habitantes}}{1\,000 \text{ habitantes}} = 47\,608\,560 \text{ T de CO}_2$

c) Si las emisiones fueran 120 g/km:

$$x = \frac{0,000120 \text{ T/km} \cdot 15\,000 \text{ km/año} \cdot 480 \text{ coches} \cdot 46,5 \cdot 10^6 \text{ habitantes}}{1\,000 \text{ habitantes}} = 40\,176\,000 \text{ T de CO}_2$$

Se reduciría en $47\,608\,560 - 40\,176\,000 = 7\,432\,560 \text{ T de CO}_2$.

Problemas clásicos

30.  Tres socios han obtenido en su negocio un beneficio de 12 900 €.

¿Qué parte corresponde a cada uno si el primero aportó inicialmente 18 000 €, el segundo, 15 000 €, y el tercero, 10 000 €?

El capital total inicial de la empresa fue $18\,000 + 15\,000 + 10\,000 = 43\,000 \text{ €}$.

A cada socio le corresponde:

Socio primero $\rightarrow \frac{18\,000}{43\,000} \cdot 12\,900 = 5\,400 \text{ €}$

Socio segundo $\rightarrow \frac{15\,000}{43\,000} \cdot 12\,900 = 4\,500 \text{ €}$

Socio tercero $\rightarrow \frac{10\,000}{43\,000} \cdot 12\,900 = 3\,000 \text{ €}$

31.  Dos repartidores de pizzas cobran 340 € por un trabajo realizado conjuntamente. Si el primero trabajó tres jornadas y media y el segundo cinco jornadas, ¿cuánto cobrará cada uno?

En total trabajaron $3,5 + 5 = 8,5$ jornadas.

A cada repartidor le corresponde:

Repartidor 1 $\rightarrow \frac{3,5}{8,5} \cdot 340 = 140 \text{ €}$

Repartidor 2 $\rightarrow \frac{5}{8,5} \cdot 340 = 200 \text{ €}$

- 32.** Se han abonado 15 000 € por la limpieza de un bosque realizada por dos cuadrillas de trabajadores. La primera cuadrilla está formada por 12 operarios y ha trabajado durante 8 días. La segunda cuadrilla tiene 15 personas y ha trabajado 10 días. ¿Cuánto corresponde a cada brigada? ¿Y a cada trabajador? (Da la solución aproximando a las unidades y di de qué orden es el error absoluto cometido).



Se ha trabajado un total de $8 + 10 = 18$ días.

A cada cuadrilla le corresponde:

$$\text{Primera cuadrilla} \rightarrow \frac{8}{18} \cdot 15\,000 = 6\,667 \text{ € (con un error absoluto de } 0,3\text{)}$$

$$\text{Segunda cuadrilla} \rightarrow \frac{10}{18} \cdot 15\,000 = 8\,333 \text{ € (con un error absoluto de } 0,3\text{)}$$

$$\text{A cada hombre de la primera cuadrilla le corresponde } \frac{6\,667}{12} = 556 \text{ € (con un error absoluto de } 0,41\overline{6}\text{)}$$

$$\text{A cada hombre de la segunda cuadrilla le corresponde } \frac{8\,333}{15} = 555 \text{ € (con un error absoluto de } 0,5\overline{3}\text{)}$$

- 33.** Tres hermanos se reparten una herencia de 2 820 € de forma que por cada cinco euros que reciba el mayor, el mediano recibirá cuatro, y el pequeño, tres. ¿Qué cantidad se lleva cada uno?

Los hermanos se repartirán 2 820 € en partes de $5 + 4 + 3 = 12$ €.

A cada hermano le corresponde:

$$\text{Mayor} \rightarrow \frac{5}{12} \cdot 2\,820 = 1\,175 \text{ €}$$

$$\text{Mediano} \rightarrow \frac{4}{12} \cdot 2\,820 = 940 \text{ €}$$

$$\text{Pequeño} \rightarrow \frac{3}{12} \cdot 2\,820 = 705 \text{ €}$$

- 34.** Se han vertido 3 litros de agua, a 20 °C, en una olla que contenía 5 litros de agua a 60 °C. ¿A qué temperatura está ahora el agua de la olla? ¿Cuál sería la temperatura si añadimos además 2 litros a 50 °C?

	LITROS	TEMPERATURA
OLLA 1	3	20 °C
OLLA 2	5	60 °C
MEZCLA (OLLA 3)	8	$\frac{3 \cdot 20 + 5 \cdot 60}{8} = 45 \text{ °C}$

	LITROS	TEMPERATURA
OLLA 3	8	45 °C
OLLA 4	2	50 °C
MEZCLA (OLLA 5)	10	$\frac{8 \cdot 45 + 2 \cdot 50}{10} = 46 \text{ °C}$

35.  Añadimos 0,5 l de alcohol de 50° a 0,75 l de alcohol de 80°. ¿Qué concentración tendrá la mezcla?

	LITROS	CONCENTRACIÓN
RECIPIENTE 1	0,5	50°
RECIPIENTE 2	0,75	80°
MEZCLA	1,25	$\frac{0,5 \cdot 50 + 0,75 \cdot 80}{1,25} = 68°$

36.  En una bodega se mezclan 7 hl de vino de alta calidad que cuesta a 450 € el hectolitro, con 11 hl de vino de calidad inferior a 280 €/hl. ¿A cómo sale el litro del vino resultante? (Aproxima hasta las décimas y di el orden del error cometido).

	LITROS	€/hl	PRECIO TOTAL
VINO ALTA CALIDAD	7	450	3 150 €
VINO BAJA CALIDAD	11	280	3 080 €
MEZCLA	18	$\frac{6 230}{18} = 346,1$	6 230 €

37.  Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg y 80 % de pureza, junto con otro lingote de 1 kg y 64 % de pureza. ¿Cuál es la pureza del lingote resultante?

	PESO TOTAL	LEY	PESO DE ORO
1º LINGOTE	3 000 g	88 %	1 700 g
2º LINGOTE	1 000 g	64 %	1 350 g
TOTAL	4 000 g	$\frac{3 050}{4 000} \cdot 100 = 76,25 \%$	3 050 g

38.  Dos ciudades, A y B, distan 350 km. De A sale hacia B un coche a 110 km/h. Simultáneamente sale de B hacia A un camión a 90 km/h. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse y la distancia que recorre cada uno.

La velocidad total de los dos coches es $110 + 90 = 200 \text{ km/h}$.

Calculamos el tiempo que tardan en encontrarse:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{350}{200} = 1,75 \text{ h} = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$$

La distancia que recorre cada uno es:

$$\text{Coche} \rightarrow 110 \cdot 1,75 = 192,5 \text{ km}$$

$$\text{Camión} \rightarrow 90 \cdot 1,75 = 157,5 \text{ km}$$

39.  Un autobús sale de A a 105 km/h. Media hora después sale de B un coche a 120 km/h. La distancia entre A y B es de 300 km. Calcula la distancia que recorre cada uno hasta que se cruzan.

Antes de salir el coche, el autobús recorre una distancia de $105 \cdot 0,5 = 52,5$ km.

Por tanto, para que se encuentren hay una distancia de $300 - 52,5 = 247,5$ km.

La velocidad con la que se aproximan es de $105 + 120 = 225$ km/h.

El tiempo que tardan en cruzarse es $t = \frac{d}{v} = \frac{247,5}{225} = 1,1$ h = 1 h 6 min.

La distancia que recorre cada uno hasta que se cruzan:

Autobús $\rightarrow 52,5 + 105 \cdot 1,1 = 168$ km

Coche $\rightarrow 120 \cdot 1,1 = 132$ km

- 40.**  Un camión sale de cierta población a una velocidad de 90 km/h. Cinco minutos más tarde sale en su persecución una moto a 120 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda la moto en alcanzar al camión?

$$5 \text{ min} = \frac{1}{12} \text{ h}$$

El camión recorre $90 \cdot \frac{1}{12} = 7,5$ km antes de que salga la moto.

Se aproximan a una velocidad de $120 - 90 = 30$ km/h.

Por tanto, la moto tardará en alcanzar al camión $t = \frac{d}{v} = \frac{7,5}{30} = 0,25$ h = 15 min

- 41.**  Hemos mezclado 30 kg de café de 9 €/kg con 50 kg de otro café de calidad inferior. La mezcla resultante se vende a 7,50 €/kg. ¿Cuál es el precio por kilogramo del café de calidad inferior?

	CANTIDAD	PRECIO (€/kg)
CAFÉ SUPERIOR	30	9
CAFÉ INFERIOR	50	$\frac{80 \cdot 7,50 - 30 \cdot 9}{50} = 6,60$
MEZCLA	80	7,50

Porcentajes

- 42.**  Un comerciante del mercadillo abre su puesto, por la mañana, con 350 pares de calcetines y 240 pañuelos. Al cerrar, al mediodía, le quedan 210 pares de calcetines y 174 pañuelos. ¿Qué tanto por ciento ha vendido de cada mercancía?

Al cerrar, el comerciante ha vendido $350 - 210 = 140$ pares de calcetines y $240 - 174 = 66$ pañuelos.

$$\left. \begin{array}{l} 140 \text{ pares de calcetines de } 350 \\ x \text{ de } 100 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{140 \cdot 100}{350} = 40\%$$

$$\left. \begin{array}{l} 66 \text{ pañuelos de } 240 \\ x \text{ de } 100 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{66 \cdot 100}{240} = 27,5\%$$

El comerciante ha vendido 40 % de calcetines y 27,5 % de pañuelos.

- 43.**  La masa de un átomo de carbono es el 5 % de la de un átomo de uranio. Si la masa atómica del uranio es $4 \cdot 10^{-25}$ g, ¿cuál es la del carbono?

La masa de un átomo de carbono es el 5 % de $4 \cdot 10^{-25} = 2 \cdot 10^{-26}$ g.

Página 59

- 44.**  La información nutricional de una marca de leche dice que en un litro hay 160 mg de calcio, que es el 20 % de la cantidad diaria recomendada. Calcula la cantidad diaria de calcio que debe tomar una persona.

$160 : 0,20 = 800$ mg es lo que debe tomar una persona.

- 45.**  El 67 % del aceite que vende un supermercado es de oliva; el 21 %, de girasol, y el resto, de soja. Si se han vendido 132 litros de soja, ¿qué cantidad se ha vendido de las otras dos clases?

El porcentaje de aceite de soja que se ha vendido es $100 \% - (67 \% + 21 \%) = 12 \%$.

Litros totales de aceite $\rightarrow x$

$$12 \% \text{ de } x = 132 \rightarrow x = \frac{132 \cdot 100}{12} = 1\,100 \text{ l}$$

En total hay 1 100 litros de aceite.

$$21 \% \text{ de } 1\,100 \text{ l} = \frac{21 \cdot 1\,100}{100} = 231 \text{ l}$$

$$67 \% \text{ de } 1\,100 \text{ l} = \frac{67 \cdot 1\,100}{100} = 737 \text{ l}$$

Se han vendido 737 litros de aceite de oliva y 231 litros de aceite de girasol.

- 46.**  El litro de gasolina ha subido un 2,5 % al inicio del periodo estival, llegando a 1,56 € el litro. ¿Cuál era el precio de la gasolina antes de la subida?

El precio de la gasolina antes de la subida es de $1,56 : 1,025 = 1,52$ €/l.

- 47.**  Una empresa facturó el año pasado 2,8 millones de euros, y este año, 3,5 millones. ¿En qué tanto por ciento ha aumentado la facturación?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cantidad inicial} \rightarrow 2,8 \text{ millones} \\ \text{Índice de variación} \rightarrow x \\ \text{Cantidad final} \rightarrow 3,5 \text{ millones} \end{array} \right\} 2\,800\,000 \cdot x = 3\,500\,000 \rightarrow x = 1,25$$

La facturación ha aumentado un $125 \% - 100 \% = 25 \%$ respecto al año pasado.

- 48.**  Un edificio, presupuestado inicialmente en un millón y medio de euros, costó finalmente dos millones cien mil euros. ¿En qué tanto por ciento el coste real superó al presupuestado?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cantidad inicial} \rightarrow 1,5 \text{ millones} \\ \text{Índice de variación} \rightarrow x \\ \text{Cantidad final} \rightarrow 2,1 \text{ millones} \end{array} \right\} 1\,500\,000 \cdot x = 2\,100\,000 \rightarrow x = 1,4$$

El coste real superó en un $140 \% - 100 \% = 40 \%$ el coste real.

- 49.**  Pagué 187,20 € por un billete de avión de 240 €. ¿Qué porcentaje de descuento me hicieron?



$$187,2 : 240 = 0,78 \rightarrow 1 - 0,78 = 0,22$$

Descuento: 22 %

- 50.**  El kilo de tomates subió un 20 % y después bajó un 25 %. Si costaba 1,80 €, ¿cuál es el precio actual?

$$1,8 \cdot 1,2 \cdot 0,75 = 1,62 \text{ €}$$

- 51.**  Un pantano tiene a finales de agosto un 20 % menos de agua que en julio. Y a finales de julio, un 15 % menos que en junio. ¿Qué tanto por ciento ha descendido en los dos meses?

$$0,8 \cdot 0,85 = 0,68$$

En los dos meses ha descendido $1 - 0,68 = 0,32 = 32 \%$

- 52.**  El número de espectadores de un concurso de televisión que comenzó en octubre aumentó un 23 % en noviembre y disminuyó un 18 % en diciembre. Si al terminar diciembre tuvo 2 202 000 espectadores, ¿cuántos tenía en el mes de octubre?

$$\frac{2\,202\,000}{1,23 \cdot 0,82} = 2\,183\,224 \text{ espectadores en octubre.}$$

- 53.**  Si un comerciante aumenta el precio de sus productos un 25 % y, después, los rebaja un 25 %, ¿cuál ha sido la variación porcentual que experimentan los artículos respecto del precio inicial? ¿Y si hiciera lo mismo aplicando el 50 %?

$$1,25 \cdot 0,75 = 0,9375$$

$$1 - 0,9375 = 0,0625 \rightarrow \text{Corresponde a una disminución del } 6,25 \%.$$

Si hiciera lo mismo aplicando el 50 %:

$$1 - 1,5 \cdot 0,5 = 0,25 \rightarrow \text{Corresponde a una disminución del } 25 \%.$$

- 54.**  Los ingresos mensuales de un negocio han aumentado un 20 % y un 30 % en los dos meses anteriores. En el mes actual han disminuido un 25 % y han sido 13 850 €. ¿Cuál ha sido la variación porcentual? Calcula los ingresos del negocio hace tres meses.

$$1,2 \cdot 1,3 \cdot 0,75 = 1,17 \rightarrow \text{Supone un aumento del } 17 \%.$$

$$13\,850 : 1,17 = 11\,837,6 \text{ € son los ingresos de hace tres meses.}$$

- 55.**  Para que el área de un triángulo fuera 100 m^2 , su altura actual tendría que disminuir un 18 %. Si la base mide 16,8 m, ¿cuánto mide la altura?

$$\frac{16,8 \cdot al}{2} = 100 \rightarrow al = 11,9 \text{ m tendría que medir la altura para que el área fuera } 100 \text{ m}^2.$$

$$h \cdot 0,82 = 11,9 \rightarrow h = \frac{11,9}{0,82} \approx 14,5 \text{ m mide la altura.}$$

- 56.**  Miguel quiere aplicar un herbicida a su finca. Sabe que debe añadir agua al producto, de forma que tenga una concentración del 5 % como mínimo para que sea eficaz. Mezcla 1/2 litro de herbicida con 5 litros de agua y comienza a aplicarlo.

Cuando ha gastado 3 litros de la mezcla, se da cuenta de que no va a tener bastante para toda la finca y le añade 2 litros de agua. ¿Tendrá la concentración adecuada en todo momento?

Al principio, la concentración es $\frac{0,5}{5,5} = 0,09 \rightarrow 9\%$

Cuando quedan 2,5 l de mezcla, le añade 2 l de agua más. Ahora hay 4,5 l de mezcla para $2,5 \cdot 0,09 = 0,227$ l de herbicida.

Por tanto, la nueva concentración es $\frac{0,227}{4,5} = 0,05 \rightarrow 5\%$

Sí, en todo momento la concentración es mayor o igual que el 5 % requerido.

Interés compuesto

- 57.**  ¿En cuánto se convertirá un capital de 5 000 € colocado al 4,2 % anual durante tres años?

$$C_F = 5\,000 \cdot 1,042^3 = 5\,656,83 \text{ €}$$

- 58.**  ¿En cuánto se transformará un capital de 28 500 € colocado al 0,4 % mensual durante 15 meses?

$$C_F = 28\,500 \cdot 1,004^{15} = 30\,258,72 \text{ €}$$

- 59.**  ¿En cuánto se convertirá un capital de 80 000 €, colocado al 3,6 % anual, durante dos años y medio con periodo de capitalización mensual?

En dos años y medio hay 30 meses.

Un 3,6 % anual significa un $3,6/12 = 0,3\%$ mensual.

$$C_F = 80\,000 \cdot 1,003^{30} = 87\,522,15 \text{ €}$$

- 60.**  Calcula en cuánto se transformarán 60 000 € colocados a interés compuesto en los siguientes casos si el periodo de capitalización es mensual:

a) Al 3 % anual durante 2 años.

b) Al 5,4 % anual durante 9 meses.

c) Al 0,36 % mensual durante un año y medio.

d) Al 4,8 % anual durante 18 meses.

a) $C_F = 60\,000 \cdot 1,03^2 = 63\,654 \text{ €}$

b) $5,4/12 = 0,45\%$ mensual

$$C_F = 60\,000 \cdot 1,0045^9 = 62\,474,20 \text{ €}$$

c) $C_F = 60\,000 \cdot 1,0036^{18} = 64\,009,29 \text{ €}$

d) $4,8/12 = 0,4\%$ mensual

$$C_F = 60\,000 \cdot 1,004^{18} = 64\,470,66 \text{ €}$$

61.  Se depositan en un banco 28 000 € al 6 % anual y el banco nos descuenta un 20 % de los beneficios como retención fiscal.

a) ¿Cuál será el porcentaje neto de rendimiento de ese capital?

b) Si los intereses se acumulan trimestralmente al capital, ¿cuál será el beneficio al cabo de 2 años?

a) También podrían habernos preguntado “¿Cuál es el 80 % del 6 %?”.

Es decir, $0,8 \cdot 0,06 = 0,048$.

El rendimiento neto es del 4,8 %.

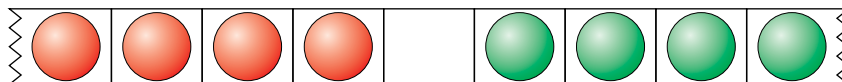
$$b) 28\,000 \left(1 + \frac{4,8}{400}\right)^8 = 30\,803,6$$

Por tanto, el beneficio obtenido es $30\,803,6 - 28\,000 = 2\,803,6$ €

Busca regularidades y generaliza

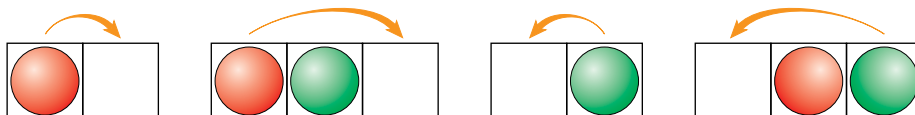
Un juego de fichas y un reto

- **Objetivo:** Poner las rojas en el lugar de las verdes y las verdes en el de las rojas.



Normas:

- Las rojas se desplazan únicamente hacia la derecha, y las verdes, hacia la izquierda.
- Los movimientos se realizan avanzando a la siguiente casilla o saltando sobre una ficha contraria.



Cuenta y completa la tabla:

N.º DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	...
N.º DE MOVIMIENTOS	?	8	?	?	...

N.º DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	n
N.º DE MOVIMIENTOS	4	8	12	16	$4 \cdot n$

Lee y comprende

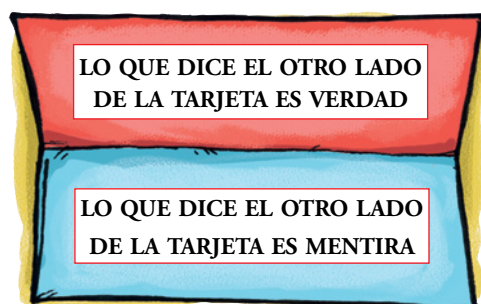
Incógnita difícil de despejar

- ¿Sabes qué es una *paradoja*? Ahora puedes observar una.

Escribe en uno y otro lado de una tarjeta los mensajes de la derecha.

Y ahora pregúntate:

¿Hay alguna verdad o alguna mentira en alguno de los lados de la tarjeta?



Si hubiera alguna verdad o alguna mentira, en cualquiera de las dos se entraría en contradicción, puesto que es una reducción a lo absurdo.

Reflexiona y saca conclusiones

- En un supermercado comparan las ventas de cada trimestre con las del trimestre anterior:
 - EL CONTABLE: El primer trimestre del año ha sido malo, hemos bajado las ventas un 10 %. Pero en el segundo trimestre hemos vuelto a subir un 10 %.
 - EL GERENTE: Entonces, durante el semestre, ni hemos bajado ni hemos subido.
 - EL CONTABLE: No, hemos perdido un 1 %.
- ¿Cuál de los dos tiene razón?



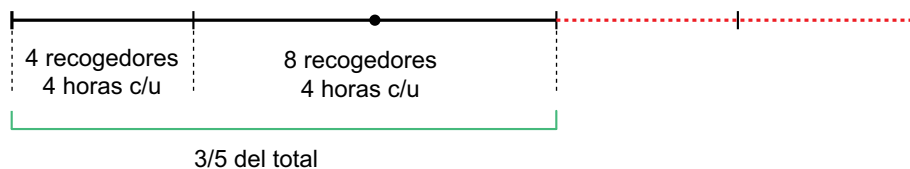
Tiene razón el contable, puesto que, si bajamos un 10 % de una cantidad tenemos un 90 %. Y si a ese 90 % le subimos un 10 % ($90 \cdot 1,1 = 99$) no obtendremos la cantidad inicial, sino que habremos perdido un 1 %.

Página 61

Entrénate resolviendo problemas

- Una cuadrilla de 4 recogedores de aceitunas trabaja 4 horas por la mañana en un campo de olivos. Por la tarde, se les unen otros 4 recogedores y trabajan todos juntos otras cuatro horas. Al final del día, se han recogido las tres quintas partes del campo.

¿Cuánto tardarán 4 de estos recogedores en rematar la faena?



$\frac{1}{5}$ de la tarea lo hacen 4 recogedores en 4 horas.

Los $\frac{2}{5}$ que faltan lo harán 4 recogedores en 8 horas.

- La media de las edades de Rosa, Carol y Pilar es de 12 años. ¿Cuál es la edad de Sara, si al incorporarse al grupo la media sube a 15 años?

Si la media sube a 15 años es porque Sara ha subido a todas 3 años más y ella ha puesto sus 15. Por tanto, Sara tiene $15 + 3 + 3 + 3 = 15 + 9 = 24$ años.

Si lo resolvemos algebraicamente, sería así:

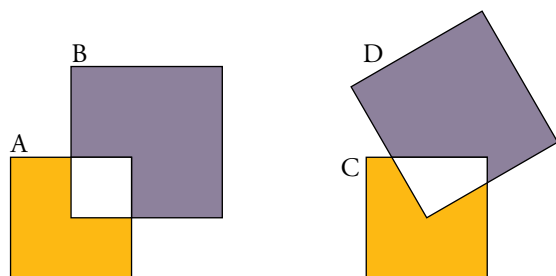
$$\frac{\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar}}{3} = 12 \rightarrow \text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} = 12 \cdot 3 = 36$$

$$\frac{\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} + \text{Sara}}{4} = 15 \rightarrow \text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} + \text{Sara} = 15 \cdot 4 = 60$$

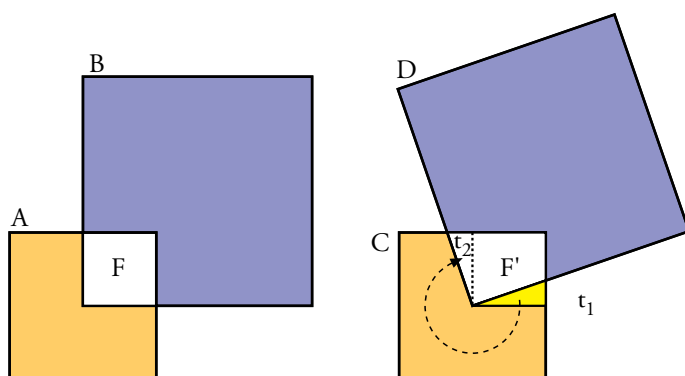
Como $\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} = 36$, entonces $36 + \text{Sara} = 60 \rightarrow \text{Sara} = 60 - 36 = 24$ años.

- El cuadrado A contiene un 16 % del cuadrado B.

¿Qué porcentaje del cuadrado D contiene el cuadrado C, si el C es igual al A, y el D, al B?



La figura F tiene la misma área que la figura F' , ya que $t_1 = t_2$. Por tanto, el cuadrado D tiene un 16 % del cuadrado C .



Autoevaluación

1. Indica el índice de variación y la cantidad final en cada caso:

a) 300 disminuye un 12 % y después un 35 %.

b) 1 520 disminuye un 90 % y después aumenta un 150 %.

a) $1 - 0,12 = 0,82$

$1 - 0,35 = 0,65$

$C_F = 300 \cdot 0,82 \cdot 0,65 = 159,9$

Índice de variación total = $0,82 \cdot 0,65 = 0,533 \rightarrow 1 - 0,533 = 0,467 = 46,7\%$ de bajada.

b) $C_F = 1\,520 \cdot 0,1 \cdot 2,5 = 380$

Índice de variación total = $0,1 \cdot 2,5 = 0,25 \rightarrow 1 - 0,25 = 0,75 = 75\%$ de bajada.

2. Indica el porcentaje de aumento o de disminución que corresponde a cada uno de los siguientes índices de variación:

a) 1,07

b) 0,78

c) 2,2

a) 7 % de subida.

b) 22 % de bajada.

c) 120 % de subida.

3. El precio de los tomates ha subido un 3,5 % y su precio es ahora 2,50 € el kilo.

a) ¿Cuál era el precio antes de la subida?

b) Si expresas el resultado del apartado anterior con dos cifras significativas, ¿qué puedes decir del error absoluto cometido?

a) El precio antes de la subida era de $2,50 : 1,035 = 2,41$ €.

b) El error absoluto sería de 0,01 € por kilo.

4. Por un libro que costaba 12,50 €, solo he tenido que pagar 9,50 €.

Calcula el tanto por ciento de rebaja que se ha aplicado al libro.

$9,5/12,5 = 0,76 \rightarrow 1 - 0,76 = 0,24 = 24\%$

Se ha rebajado un 24 % a cada libro.

5. Mezclamos 20 kg de harina de 1,25 €/kg con 35 kg de otra harina de 0,75 €/kg.

¿Cuál será el precio final de la mezcla?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE
HARINA 1	20	1,25	$20 \cdot 1,25 = 25$
HARINA 2	35	0,75	$35 \cdot 0,75 = 26,25$
MEZCLA	55	$\frac{51,25}{55} = 0,93$	51,25

- 6. Queremos repartir 756 € entre tres amigos de 12, 13 y 15 años de forma proporcional a la edad de cada uno.**

¿Qué cantidades recibirán?

$$12 + 13 + 15 = 40$$

Cada amigo recibirá:

$$12 \text{ años} \rightarrow \frac{12}{40} \cdot 756 = 226,8 \text{ €}$$

$$13 \text{ años} \rightarrow \frac{13}{40} \cdot 756 = 245,7 \text{ €}$$

$$14 \text{ años} \rightarrow \frac{14}{40} \cdot 756 = 264,6 \text{ €}$$

- 7. Un vehículo, a la velocidad de 3 m/s, da 14 vueltas a un circuito en 4 horas.**

¿Cuántas vueltas dará a ese mismo circuito, en 6 horas, si va a una velocidad de 5 m/s?

$$4 \text{ horas} = 14\,400 \text{ s}$$

Calculamos los metros que tiene el circuito:

$$d = v \cdot t = 3 \cdot 14\,400 = 43\,200 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ vuelta son } 43\,200/14 = 3\,085,71 \text{ m}$$

Si el vehículo va a una velocidad de 5 m/s, en 6 horas (21 600 s) habrá recorrido:

$$d = v \cdot t = 5 \cdot 21\,600 = 108\,000 \text{ m}$$

Entonces, el vehículo ha dado $108\,000/3\,085,71 = 35$ vueltas.

- 8. Cuatro jardineros tardan 5 horas en segar una parcela de 150 m².**

¿Cuánto tardarán cinco jardineros en segar una parcela de 240 m²?

N.º JARDINEROS	HORAS TRABAJADAS	SUPERFICIE SEGADA (m ²)
4	5	150
1	20	150
1	1	7,5
5	$\frac{240}{5 \cdot 7,5} = 6,4$	240

- 9. Dos trenes salen a las 8 de la mañana de dos ciudades A y B distantes entre sí 780 km.**

Si el que sale de A hacia B lleva una velocidad de 110 km/h, y el que sale de B hacia A va a 90 km/h, ¿a qué hora se encontrarán?

La velocidad de aproximación es $110 + 90 = 200 \text{ km/h}$

Calculamos el tiempo que tardan en encontrarse:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{780}{200} = 3,9 \text{ h} = 3 \text{ h } 54 \text{ min}$$

Por tanto, a las $8:00 + 3 \text{ h } 54 \text{ min} = 11:54$.

- 10. Depositamos en un banco 4 000 € al 3,5 % de interés anual.**

¿En cuánto se convertirá en 3 años si los periodos de capitalización son trimestrales?

Los periodos de capitalización son trimestrales, por tanto, $3,5/4 = 0,875 \%$

$$C_F = 4\,000 \cdot 1,00875^{12} = 4\,440,8 \text{ €}$$