Progresiones aritméticas

8 ■■■ Escribe los cinco primeros términos y a_{20} de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 1,5$; $d = 2$

b) $a_1 = 32$; $d = -5$

c) $a_1 = 5$; $d = 0,5$

d) $a_1 = -3$; $d = -4$

a) 1,5; 3,5; 5,5; 7,5; 9,5; $a_{20} = 1,5 + 19 \cdot 2 = 39,5$

b) 32, 27, 22, 17, 12; $a_{20} = 32 + 19 \cdot (-5) = -63$

c) 5; 5,5; 6; 6,5; 7; $a_{20} = 5 + 19 \cdot 0,5 = 14,5$

d) -3, -7, -11, -15, -19; $a_{20} = -3 + 19 \cdot (-4) = -79$

9 ■■■ Halla, en cada caso, el término general y calcula, después, a_{50} :

a) 25, 18, 11, 4, ...

b) -13, -11, -9, -7, ...

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; ...

d) -3, -8, -13, -18, ...

a) $a_1 = 25$; $d = -7$; $a_n = 25 + (n-1)(-7) = 32 - 7n$; $a_{50} = -318$

b) $a_1 = -13$; $d = 2$; $a_n = -13 + (n-1)2 = -15 + 2n$; $a_{50} = 85$

c) $a_1 = 1,4$; $d = 0,5$; $a_n = 1,4 + (n-1)0,5 = 0,9 + 0,5n$; $a_{50} = 25,9$

d) $a_1 = -3$; $d = -5$; $a_n = -3 + (n-1)(-5) = 2 - 5n$; $a_{50} = -248$

10 ■■■ Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $d = 5$; $a_8 = 37$

b) $a_{11} = 17$; $d = 2$

☞ Ten en cuenta que $a_8 = a_1 + 7d$; sustituye y halla a_1 .

a) $a_8 = a_1 + 7d \rightarrow 37 = a_1 + 7 \cdot 5 \rightarrow a_1 = 2$

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 5 = -3 + 5n$$

b) $a_{11} = a_1 + 10d \rightarrow 17 = a_1 + 10 \cdot 2 \rightarrow a_1 = -3$

$$a_n = -3 + (n-1)2 \rightarrow a_n = -5 + 2n$$

11 ■■■ Halla la diferencia y el primer término de las progresiones aritméticas siguientes:

a) $a_2 = 18$; $a_7 = -17$

b) $a_4 = 15$; $a_{12} = 39$

☞ $a_7 = a_2 + 5d$

a) $a_7 = a_2 + 5d \rightarrow -17 = 18 + 5d \rightarrow d = -7$

$$a_1 = a_2 - d \rightarrow a_1 = 18 - (-7) = 25$$

b) $a_{12} = a_4 + 8d \rightarrow 39 = 15 + 8d \rightarrow d = 3$

$$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 15 = a_1 + 9 \rightarrow a_1 = 6$$

12 ■■■ Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 5$; $d = 2$

b) $a_1 = -1$; $a_2 = -7$

c) Los números pares.

d) Los múltiplos de 3.

a) $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$; $S_{20} = \frac{(5 + 43) \cdot 20}{2} = 480$

b) $d = -7 - (-1) = -6$; $a_{20} = -1 + 19 \cdot (-6) = -115$

$$S_{20} = \frac{[-1 + (-115)] \cdot 20}{2} = -1160$$

c) $d = 2$, $a_1 = 2$, $a_{20} = 2 + 19 \cdot 2 = 40$

$$S_{20} = \frac{(2 + 40) \cdot 20}{2} = 420$$

d) $a_1 = 3$, $d = 3$, $a_{20} = 3 + 19 \cdot 3 = 60$

$$S_{20} = \frac{(3 + 60) \cdot 20}{2} = 630$$

13 ■■■ ¿Qué lugar ocupa un término cuyo valor es 56 en la progresión aritmética definida por $a_1 = 8$ y $d = 3$?

$$56 = 8 + (n - 1) \cdot 3 \rightarrow 56 = 5 + 3n \rightarrow n = 17$$

PÁGINA 80

Progresiones geométricas

14 ■■■ Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) $a_1 = 0,3$; $r = 2$

b) $a_1 = -3$; $r = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = 200$; $r = -0,1$

d) $a_1 = \frac{1}{81}$; $r = 3$

a) 0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8; ...

b) $-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{16}, \dots$

c) 200; -20; 2; -0,2; 0,02; ...

d) $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \dots$

15 ■■■ Halla, en cada una de las sucesiones siguientes, el término general:

a) 20; 8; 3,2; 1,28; ...

b) 40, 20, 10, 5, ...

c) 6; -9; 13,5; -20,25; ...

d) 0,48; 4,8; 48; 480; ...

a) $a_n = 20 \cdot 0,4^{n-1}$

b) $a_n = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $a_n = 6 \cdot (-1,5)^{n-1}$

d) $a_n = 0,48 \cdot 10^{n-1}$

16 ■■■ Calcula la razón y el primer término de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_1 = \frac{1}{81}$; $a_3 = \frac{1}{9}$

b) $a_2 = 0,6$; $a_4 = 2,4$

a) $a_3 = a_1 r^2 \rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{81} \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = \pm 3$

Hay dos soluciones

Si $r = 3$: $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$

Si $r = -3$: $\frac{1}{81}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, \dots$

b) $a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow 2,4 = 0,6 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 2$

Hay dos soluciones:

Si $r = 2$: $0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8; \dots$

Si $r = -2$: $-0,3; 0,6; -1,2; 2,4; -4,8; \dots$

17 ■■■ Halla el primer término y escribe el término general de las siguientes progresiones:

a) $a_3 = 3$; $r = \frac{1}{10}$

b) $a_4 = 20,25$; $r = -1,5$

a) $a_3 = a_1 r^2 \rightarrow 3 = a_1 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \rightarrow a_1 = 300$; $a_n = 300 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

b) $a_4 = a_1 r^3 \rightarrow 20,25 = a_1 (-1,5)^3 \rightarrow a_1 = -6$; $a_n = -6 \cdot (-1,5)^{n-1}$

18 ■■■ Calcula la suma de los diez primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_1 = 5$; $r = 1,2$

b) $a_1 = 5$; $r = -2$

a) $S_{10} = \frac{5 \cdot 1,2^{10} - 5}{1,2 - 1} = 129,8$

b) $S_{10} = \frac{5 \cdot (-2)^{10} - 5}{-2 - 1} = -1705$

19 ■■■ Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_1 = 4$; $r = \frac{1}{3}$

b) $a_1 = 17$; $r = 0,95$

a) $S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{4}{1 - (1/3)} = 6$

b) $S_{\infty} = \frac{17}{1 - 0,95} = 340$

PIENSA Y RESUELVE

20 ■■■ Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \dots$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

c) $0,2; 0,02; 0,002; \dots$

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

a) Progresión aritmética, $d = \frac{1}{8}$. Término general: $a_n = 1 + (n-1) \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}n$

b) No es progresión. Término general: $a_n = \sqrt{n}$

c) Progresión geométrica, $r = 0,1$.

Término general: $a_n = 0,2 \cdot (0,1)^{n-1}$

d) No es progresión.

Los numeradores 2, 3, 4, 5, ... forman una progresión aritmética cuyo término general es $n + 1$.

Los denominadores 1, 2, 3, 4, ... forman una progresión aritmética de término general n .

Término general de la sucesión: $a_n = \frac{n+1}{n}$

21 ■■■ Calcula la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1\,000$ y $a_4 = 8$.

¿Se puede hallar la suma de sus infinitos términos?

$$a_4 = a_1 r^3 \rightarrow 8 = 1\,000 \cdot r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{1\,000}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$S_5 = \frac{a_1 r^5 - a_1}{r - 1} = \frac{1\,000 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 - 1\,000}{\frac{1}{5} - 1} = 1\,249,6$$

Se puede hallar la suma de sus infinitos términos, porque la razón está comprendida entre -1 y 1 .

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1\,000}{1 - 1/5} = 1\,250$$

22 ■■■ En un teatro, la primera fila dista del escenario 4,5 m, y la octava, 9,75 m.

a) ¿Cuál es la distancia entre dos filas?

b) ¿A qué distancia del escenario está la fila 17?

a) $a_8 = a_1 + 7d \rightarrow 9,75 = 4,5 + 7d \rightarrow d = 0,75$ m

La distancia entre dos filas es 0,75 m.

b) $a_{17} = a_1 + 16 \cdot d = 4,5 + 16 \cdot 0,75 = 16,5$ m está la fila 17.

- 23** ■■■ Para preparar una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su recorrido cada día. ¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a hacer un recorrido de 21 km?

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 21 = 3 + (n-1) \cdot 1,5 \rightarrow 21 = 1,5 + 1,5n$$

$$n = 13 \text{ días}$$

- 24** ■■■ En el año 1986 fue visto el cometa *Halley* desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

a) $a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 1986 = a_1 + 3 \cdot 76 \rightarrow a_1 = 1758$

Fue descubierto en 1758.

b) $a_5 = 1986 + 76 = 2062$

Se verá en 2062.

- 25** ■■■ La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?

$$a_{12} = a_1 + 11d \rightarrow a_{12} = 100 + 11 \cdot (-5) = 45$$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ mg}$$

- 26** ■■■ ¿Cuánto dinero obtendremos si colocamos 3 000 € al 5% de interés anual compuesto durante 4 años? ¿Y si lo colocamos durante 8 años?

$$C_F = 3\,000 \cdot (1,05)^4 = 3\,646,5 \text{ € tendremos al cabo de 4 años.}$$

$$C_F = 3\,000 \cdot (1,05)^8 = 4\,432,4 \text{ € tendremos después de 8 años.}$$

- 27** ■■■ Un tipo de bacteria se reproduce por bipartición cada cuarto de hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de 6 horas?

La reproducción de las bacterias es una progresión geométrica de $r = 2$. Término general: $a_n = 2^{n-1}$.

Como $6 \cdot 4 = 24$ cuartos de hora, calculamos $a_{24} = 2^{24-1}$:

$$a_{24} = 8\,388\,608 \text{ bacterias habrá después de 6 horas.}$$

- 28** ■■■ La población de un cierto país aumenta por término medio un 1,12% anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿cuál será dentro de 10 años?

$$a_{10} = 3 \cdot 1,12^9 = 8,32 \text{ millones de habitantes dentro de 10 años.}$$

- 29** ■■■ Una máquina envasadora pierde cada año un 15% de su valor. Si ha costado 20 000 €, ¿cuál será su valor dentro de 5 años?

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \rightarrow a_5 = 20\,000 \cdot (1 - 0,15)^4 = 10\,440 \text{ € será su valor dentro de 5 años.}$$

- 30** ■■■ Una bola que rueda por un plano inclinado recorre 1 m en el primer segundo, 4 m en el segundo, 7 m en el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuánto recorre en 20 segundos?

1, 4, 7, ... es una progresión aritmética con $d = 3$.

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot 3 \rightarrow a_{20} = 1 + 19 \cdot 3 = 58 \text{ m recorre en 20 s.}$$

PÁGINA 81

- 31** ■■■ Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura de la página 70, pero que tenga 50 pisos.

Los bloques de la torre están en progresión aritmética con $d = 4$: 1, 5, 9, 13, ...

Hay que calcular la suma de 50 términos:

$$a_{50} = a_1 + 49d \rightarrow a_{50} = 1 + 49 \cdot 4 = 197$$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 197) \cdot 50}{2} = 4950 \text{ bloques.}$$

- 32** ■■■ Depositamos en un banco 1 000 € al 2,5% semestral al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada semestre, durante 3 años, si no sacamos ningún dinero.

Es una progresión geométrica de razón $\left(1 + \frac{2,5}{100}\right) = 1,025$.

3 años son 6 semestres. Sus términos son:

$$1\,000 \cdot 1,025; 1\,000 \cdot 1,025^2; 1\,000 \cdot 1,025^3; 1\,000 \cdot 1,025^4; 1\,000 \cdot 1,025^5; 1\,000 \cdot 1,025^6 \rightarrow 1\,025; 1\,050,63; 1\,076,89; 1\,103,81; 1\,131,41; 1\,158,69$$

- 33** ■■■ Si al comienzo de cada año ingresamos 2 000 € en un banco al 5% anual, ¿cuánto dinero tendremos al final del sexto año?

👁 Mira el problema resuelto 2 de la página 78.

El capital disponible al final es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón 1,05.

$$S = 2\,000 \cdot 1,05 + 2\,000 \cdot 1,05^2 + \dots + 2\,000 \cdot 1,05^6$$

$$S = \frac{a_6 r - a_1}{r - 1} = \frac{2\,000 \cdot 1,05^7 - 2\,000 \cdot 1,05}{1,05 - 1} = \frac{2\,000(1,05^7 - 1,05)}{0,05} = 14\,284 \text{ €}$$

- 35** ■■■ Calcula la fracción generatriz de estos números utilizando el método del ejercicio anterior:

a) $7,\overline{3}$

b) $3,\overline{54}$

c) $0,\overline{23}$

$$a) 7,\widehat{3} = 7,3333\dots = 7 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots$$

Suma de los infinitos términos de la progresión $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000} \dots$

$$S_{\infty} = \frac{3/10}{1 - 1/10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$7,\widehat{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$

$$b) 3,5\widehat{4} = 3,54444\dots = 3,5 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + \dots =$$

$$= \frac{35}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$$

$$S_{\infty} = \frac{4/100}{1 - 1/10} = \frac{40}{900} = \frac{2}{45}$$

$$3,5\widehat{4} = \frac{35}{10} + \frac{2}{45} = \frac{319}{90}$$

$$c) 0,\widehat{23} = 0,23232323\dots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \dots$$

$$S_{\infty} = \frac{23/100}{1 - 1/100} = \frac{23}{99}$$

$$0,\widehat{23} = \frac{23}{99}$$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

36 ■■■ En la progresión $2, \frac{5}{2}, \frac{25}{8}, \frac{125}{32}, \dots$ ¿se puede hallar la suma de sus infinitos términos? Justifica la respuesta.

No se puede hallar la suma de los infinitos términos de esa progresión geométrica porque su razón es $\frac{5}{4}$, que es mayor que 1.

37 ■■■ Si en una progresión aritmética sabemos que $a_2 + a_{13} = 32$; ¿podemos saber cuánto vale $a_8 + a_7$? ¿Por qué?

$a_8 + a_7$ suma lo mismo que $a_2 + a_{13} = 32$, porque:

$$a_2 + a_{13} = (a_1 + d) + (a_1 + 12d) = 2a_1 + 13d$$

$$a_8 + a_7 = (a_1 + 7d) + (a_1 + 6d) = 2a_1 + 13d$$

38 ■■■ Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 1 000 € y una subida de 100 € al año. Otra le ofrece el mismo sueldo con una subida del 10% anual. Razona cuál de las dos es mejor comparando el sueldo dentro de 10 años.

Empresa A: 1 000, 1 100, 1 200, 1 300, ... $a_{10} = 1\,000 + 9 \cdot 100 = 1\,900$ €

Empresa B: 1 000, 1 100, 1 210, 1 331, ... $a_{10} = 1\,000 \cdot (1,1)^9 = 2\,357,9$ €

Es mejor la oferta de la empresa B.