1º. Halla el término general de las sucesiones:

a) –3, 0, 3, 6…

b) 2, 5, 8, 11…

c) 3, 6, 12…

d) 4, −1, −6…

2º. El sexto término de una progresión aritmética es 41 y el tercero es 23. ¿Cuánto vale el primer término? ¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros términos?

3º. Halla la suma de todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 2000.

4º. Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 2000.

5º. Halla el cuadragésimo tercer término de una progresión aritmética sabiendo que el tercer término es 19 y el octavo 54.

6º. Calcula la suma de los múltiplos de 27 comprendidos entre 500 y 3000.

7º. Halla la suma de los primeros 30 múltiplos de 3.

8º. Halla la suma de todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 250.

9º. Halla la suma de todos los números pares de 3 cifras.

10º. Interpola 4 medios aritméticos entre 3 y 18.

11º. Interpola 5 medios aritméticos entre -4 y 12.

12º. Interpola tres medios aritméticos entre 8 y -12.

13º. Escribe ocho medios aritméticos entre 3 y 23.

14º. La diferencia de una progresión aritmética es 4. El producto de los cuatro primeros términos es 585. Halla los términos.

15º. La suma de los 6 primeros términos de una progresión aritmética es 26 y el producto de los términos extremos es 11. Calcula el primer término y la diferencia.

16º. Demuestra que cada término de una progresión aritmética es la semisuma del anterior y el siguiente.

17º. Demuestra que una sucesión del tipo $a_n=An+B$, siendo A y B números reales, es una progresión aritmética.

1º

a) $0-(-3)=+3$

$3-0=+3$

$6-3=+3$

...

La diferencia entre dos términos consecutivos es constante, por lo tanto:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1=-3 \\ d=3 \end{array}\right\} \rightarrow a_n = -3+(n-1)\cdot 3 = -3+3n-3 \Rightarrow \boxed{a_n=+3n-6}$$

b) $5-2=+3$; $8-5=+3$; $11-8=+3$ → la diferencia es constante, se trata de una progresión aritmética.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ d=3 \end{array}\right\} \rightarrow a_n = 2+(n-1)\cdot 3 = 2+3n-3 \rightarrow \boxed{a_n=3n-1}$$

c) $6-3=+3$; $12-6=+6$ → NO es una progresión aritmética.

$\frac{6}{3}=2$, $\frac{12}{6}=2$ → el cociente entre 2 términos consecutivos es constante → es una progresión geométrica.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ $\quad a_1=3$, $r=2$ → $\boxed{a_n = 3\cdot 2^{n-1}}$

d) $-1-4=-5$; $-6-(-1)=-5$ → la diferencia es constante, se trata de una progresión aritmética.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=4 \\ d=-5 \end{array}\right\} \rightarrow a_n = 4+(n-1)\cdot(-5) = 4-5n+5 \rightarrow \boxed{a_n=-5n+9}$$

2º Fórmulas

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n.$$

a) Este problema se resuelve mediante un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} a_6 = a_1 + 5\cdot d \longrightarrow 41 = a_1 + 5d \\ a_3 = a_1 + 2\cdot d \longrightarrow 23 = a_1 + 2d \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 41 = a_1 + 5d \\ -23 = -a_1 - 2d \\ \hline 18 = 3d \end{array} \rightarrow d = \frac{18}{3} = 6.$$

$$\Rightarrow 41 = a_1 + 5\cdot 6 \longrightarrow a_1 = 41 - 30 = 11.$$

Solución: $a_1 = 11$, $d = 6$ $\Rightarrow \boxed{a_n = 11 + (n-1)\cdot 6}$

b) $S_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \Leftrightarrow$

$$a_{100} = 11 + 99\cdot 6 = 605$$

$$\boxed{S_{100}} = 11 + 17 + \cdots + 605 = \frac{11 + 605}{2}\cdot 100 = \boxed{30800}$$

3º Fórmulas necesarias

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Además: los múltiplos consecutivos de un número forman una progresión aritmética.

PASO 1. ¿Cuál es el 1º múltiplo de 7 posterior a 100?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ \hline 30 & 14 \\ 2 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 14 \cdot 7 = 98 \\ 15 \cdot 7 = \boxed{105} \end{array}$$

PASO 2. ¿Cuál es el último múltiplo anterior a 2000?

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 7 \\ \hline 60 & 285 \\ 40 & \\ 5 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 285 \cdot 7 = \boxed{1995} \\ 286 \cdot 7 = 2002 \end{array}$$

PASO 3 ¿Cuántos sumandos tiene la suma?

$$105 + 112 + \cdots + 1995 = S_n = \frac{105 + 1995}{2} \cdot n \qquad ¿n?$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_1 = 105 \\ d = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 1995 = 105 + (n-1) \cdot d \Rightarrow \boxed{d = 271}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{271} = 105 + 112 + \cdots + 1995 = \frac{105 + 1995}{2} \cdot 271 = 284\,550}$$

4º

PASO 1. ¿Cuál es el 1er múltiplo de 59 mayor que 1000?

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 59 \\ \hline 410 & 16 \\ 56 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 16 \cdot 59 = 944 < 1000 \\ 17 \cdot 59 = 1003 > 1000 \rightarrow \boxed{1003} \end{array}$$

PASO 2. ¿Cuál es el último múltiplo de 59 menor que 2000?

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 59 \\ \hline 230 & 33 \\ 53 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 33 \cdot 59 = 1947 < 2000 \longrightarrow \boxed{1947} \\ 34 \cdot 59 = 2006 > 2000 \end{array}$$

PASO 3. ¿Cuántos sumandos tiene la suma?

$$1003 + 1062 + \cdots + 1947 = S_n = \frac{1003 + 1947}{2} \cdot n \qquad ¿n?$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_1 = 1003 \,,\ d = 59 \end{array}\right\} \Rightarrow 1947 = 1003 + (n-1) \cdot 59 \longrightarrow \boxed{n = 17}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{17} = 1003 + \cdots + 1947 = \frac{1003 + 1947}{2} \cdot 17 = 25075}$$

La suma pedida está formada por términos de una progresión ARITMÉTICA.

$$1003 \underbrace{+}_{+59} 1062 \underbrace{+}_{+59} \cdots + 1888 \underbrace{+}_{+59} 1947$$

5º Este problema se resuelve mediante un sistema.
El término general de una progresión aritmética es

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_1 + 2\cdot d \\ a_8 = a_1 + 7\cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 19 = a_1 + 2\cdot d \\ 54 = a_1 + 7\cdot d \end{array}\right\} \Leftrightarrow a_1 = 19 - 2d$$

$$54 = 19 - 2d + 7d \Leftrightarrow 5d = 54 - 19 \rightarrow \boxed{d = \frac{35}{5} = 7}$$

$$\boxed{a_1 = 19 - 2\cdot 7 = 5}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{43} = a_1 + 42\cdot d = 5 + 42\cdot 7 = 299}$$

6º **PASO 1**. ¿Cuál es el 1er múltiplo de 27 mayor de 500?

$$500 \div 27 = 18, \text{ resto } 14 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 27 \cdot 18 = 486 < 500 \\ 27 \cdot 19 = 513 > 500 \rightarrow \boxed{513} \end{array}$$

PASO 2. ¿Cuál es el último múltiplo de 27 menor que 3000?

$$3000 \div 27 = 111, \text{ resto } 3 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 27 \cdot 111 = 2997 < 3000 \rightarrow \boxed{2997} \\ 27 \cdot 112 = 3024 > 3000 \end{array}$$

PASO 3. ¿Cuál es la suma y cuántos sumandos tiene?

$$513 + 540 + \cdots + 2997 = S_n = \frac{513 + 2997}{2} \cdot n$$

¿n? los sumandos son los términos de una progresión aritmética de 1er término 513 y diferencia 27.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 513 + (n-1) \cdot 27 \\ a_n = 2997 \end{array}\right\} \Rightarrow 513 + (n-1) \cdot 27 = 2997 \Rightarrow \boxed{n = 93}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{93} = 513 + \cdots + 2997 = \frac{513 + 2997}{2} \cdot 93 = 163215.}$$

7º) 1er múltiplo $a_1 = 3$

2º " $a_2 = 3\cdot 2 = 6$

$\vdots$

30º " $a_3 = 3\cdot 30 = 90$

$S_{30} = 3 + 6 + 9 + \cdots + 90$

Son los 30 términos de una progresión aritmética de $a_1 = 3$ y $d = 3$. $\Rightarrow$

$$\boxed{S_{30} = \frac{3+90}{2}\cdot 30 = 1395}$$

8º) Paso 1. ¿Cuál es el 1º múltiplo de 7 mayor que 100?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ 30 & 14 \\ 2 & \end{array}$$

$7\cdot 14 = 98 < 100$

$7\cdot 15 = 105 > 100 \longrightarrow \boxed{105}$

Paso 2. ¿Cuál es el último múltiplo de 7 menor que 250?

$$\begin{array}{r|l} 250 & 7 \\ 40 & 35 \\ 5 & \end{array}$$

$7\cdot 35 = 245 < 250 \rightarrow \boxed{245}$

$7\cdot 36 = 252 > 250$

Paso 3. ¿Cuál es la suma y el número de sumandos?

$$S_n = 105 + 112 + \cdots + 245 = \frac{105+245}{2}\cdot n$$

¿n? $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Leftrightarrow 245 = 105 + (n-1)\cdot 7 \Rightarrow \boxed{n = 21}$

$$\Rightarrow \boxed{S_{21} = \frac{105+245}{2}\cdot 21 = 3675}$$

Recuerda:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

si (a_n) es una progresión aritmética.

9º ¿Cuál es la suma?

¿Cuál es el 1er par de 3 cifras? 100

$\Rightarrow$ la suma $100 + 102 + 104 + \cdots$

¿Cuál es el último? 998.

OBSERVACIONES

- la suma es

  $100 + 102 + 104 + \cdots + 998.$

- Forman una progresión aritmética de $a_1 = 100$ y diferencia $d = 2$.
- Nos falta averiguar cuántos sumandos tiene la suma.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 998 \quad \text{(el último)} \\ a_n = 100 + (n-1)\cdot 2 \end{array}\right\} 998 = 100 + (n-1)\cdot 2 \Rightarrow \boxed{n = 450}$$

Aplicando la fórmula

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

$$\boxed{100 + \cdots + 998 = \frac{100 + 998}{2}\cdot 450 = 247050}$$

(10º) $3, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 18$

Hemos de buscar 4 números entre 3 y 18 de modo que estén en progresión aritmética.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_6 = 18 \end{array}\right\} \text{DATOS.}$$

¿d? Averiguar la diferencia supone conocer la sucesión.

$$a_6 = a_1 + 5d \iff 18 = 3 + 5d \rightarrow \boxed{d = 3}$$

$$a_2 = 6, \; a_3 = 9, \; a_4 = 12, \; a_5 = 15 \Rightarrow \boxed{3, \boxed{6, 9, 12, 15,} 18}$$

Recuerda $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

(11º) $-4, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 12.$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -4 \\ a_7 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow a_7 = a_1 + 6 \cdot d \iff 12 = -4 + 6d \Rightarrow \boxed{d = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.}$$

$$a_2 = -4 + \frac{8}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$a_3 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$a_5 = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

$$a_6 = \frac{20}{3} + \frac{8}{3} = \frac{28}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{-4, \boxed{\frac{-4}{3}, \frac{4}{3}, 4, \frac{20}{3}, \frac{28}{3},} 12}$$

12º $8, \_\_, \_\_, \_\_, -12. \Leftrightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

Forman una progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Datos

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 8 \\ a_5 = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d \Leftrightarrow -12 = 8 + 4\cdot d \Rightarrow \boxed{d = \frac{-20}{4} = -5}$$

$a_2 = 8 + (-5) = 3 \qquad a_3 = 3 + (-5) = -2, \quad a_4 = -2 + (-5) = -7.$

$$\Rightarrow \boxed{8, \boxed{3, -2, -7,} -12}$$

13º $3, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 23$

Datos

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_{10} = 23 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d \Leftrightarrow 23 = 3 + 9d \Rightarrow \boxed{d = \frac{20}{9}}$$

$a_2 = 3 + \frac{20}{9} = \frac{47}{9};$

$a_3 = \frac{47}{9} + \frac{20}{9} = \frac{67}{9}$

$a_4 = \frac{67}{9} + \frac{20}{9} = \frac{87}{9} = \frac{29}{3}$

$a_5 = \frac{29}{3} + \frac{20}{9} = \frac{107}{9}$

$a_6 = \frac{107}{9} + \frac{20}{9} = \frac{127}{9}$

$a_7 = \frac{127}{9} + \frac{20}{9} = \frac{147}{9} = \frac{49}{3}$

$a_8 = \frac{49}{3} + \frac{20}{9} = \frac{167}{9}$

$a_9 = \frac{167}{9} + \frac{20}{9} = \frac{187}{9}$

La clave está en que conocemos el último y el 1º $\rightarrow$ podemos averiguar la diferencia $\Rightarrow$ se conoce TODA la progresión.

$$\underset{\displaystyle a_1}{\underset{\downarrow}{3}}, \underbrace{\_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_}_{(8)}, \underset{\displaystyle a_{10}}{\underset{\downarrow}{23}}$$

14º Datos

$d = 4$

$a_1 = a$

$a_2 = a+4$

$a_3 = a+4+4 = a+8$

$a_4 = a+8+4 = a+12$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a \\ a_2 = a+4 \\ a_3 = a+4+4 = a+8 \\ a_4 = a+8+4 = a+12 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a\cdot(a+4)\cdot(a+8)\cdot(a+12) = 585}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot(a+4) = a^2+4a \\ (a+8)\cdot(a+12) = a^2+20a+96 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(a^2+4a)\cdot(a^2+20a+96) = a^4+20a^3+96a^2+4a^3+80a^2+384a$$

la ecuación resultante sería:

$$\boxed{a^4+24a^3+176a^2+384a-585 = 0}$$

las soluciones enteras son los divisores del término independiente:

$-585: \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

$a=1$ es una solución. Aplicando la regla de Ruffini:

	1	24	176	384	-585
1		1	25	201	$+585$
	1	25	201	585	0
-13		-13	-156	-585	
	1	12	45	0	

$\rightarrow a^3+25a^2+201a+585 = 0$

$\rightarrow a^2+12a+45=0$

Aplicando el teorema del resto se obtiene otra solución $a=-13$.

Resolviendo la ec. de 2º grado.

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2-4\cdot1\cdot45}}{2\cdot1} = \frac{-12\pm\sqrt{-36}}{2} \quad \text{no tiene.}$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} a=1 \rightarrow (1,5,9,13) \\ a=-13 \rightarrow (-13,-9,-5,-1) \end{array}}\right\} \text{SOLUCIÓN}$$

15º Datos: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ forman una progresión geométrica

$\rightarrow a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$

En nuestro problema

$$\left.\begin{array}{l} S_6 = 26 \iff \frac{a_1 + a_6}{2}\cdot 6 = 26 \\ a_1 \cdot a_6 = 11 \end{array}\right\} \text{ sistema.}$$

Ordenando y colocando el sistema.

$a_1 = x$	$a_6 = y$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = \frac{52}{6} = \frac{26}{3} \\ x \cdot y = 11 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{26}{3} - y$$

$$\left(\frac{26}{3} - y\right)\cdot y = 11 \iff \frac{26}{3}y - y^2 = 11 \iff y^2 - \frac{26}{3}y + 11 = 0$$

$$(\cdot 3) \iff \boxed{3y^2 - 26y + 33 = 0}$$

$$y = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4\cdot 3\cdot 33}}{2\cdot 3} = \frac{26 \pm \sqrt{280}}{6} = \frac{26 \pm \sqrt{4\cdot 70}}{6}$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{70}}{3}$$

- si $y = a_6 = \frac{13 + \sqrt{70}}{3} \rightarrow a_1 = x = \frac{26}{3} - \frac{13 + \sqrt{70}}{3} = \frac{13 - \sqrt{70}}{3}$
- si $y = a_6 = \frac{13 - \sqrt{70}}{3} \rightarrow a_1 = x = \frac{26}{3} - \frac{13 - \sqrt{70}}{3} = \frac{13 + \sqrt{70}}{3}$

(16°) $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$

$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ = semisuma del anterior y el siguiente al término general.

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = a_1 + (n-1-1)\cdot d = a_1 + (n-2)\cdot d \\ a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)\cdot d = a_1 + n\cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}} = \frac{a_1+(n-2)\cdot d + a_1 + n\cdot d}{2} = \frac{a_1 + nd - 2d + a_1 + nd}{2}$$

$$= \frac{2a_1 + 2nd - 2d}{2} = a_1 + nd - d = a_1 + (n-1)\cdot d = \boxed{a_n}$$

(17°) Hemos de probar que la diferencia entre 2 términos consecutivos no depende de n.

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = A\cdot(n+1) + B = An + A + B \\ a_n = An + B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} - a_n = An + A + B - (An+B) = \underline{An} + A + \underline{B} - \underline{An} - \underline{B}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = A.$$

La diferencia es A. El 1er término $a_1 = A\cdot 1 + B = A+B$.

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = A + B + (n-1)\cdot A = \underline{A}+B + nA - \underline{A} = \underline{\underline{An+B}}$$