

Página 83

Resuelve

1. ¿Cuál de estas igualdades asocias al enunciado del montón de trigo que aparece en el papiro egipcio? ¿Cuántas *medidas* tiene ese *montón*?

① $x - \frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{2}$ ② $x - \frac{x}{3} - 5 = \frac{x}{2}$ ③ $\frac{x}{3} + 5 = \frac{x}{2}$

La igualdad II.

$$x - \frac{x}{3} - 5 = 5 \rightarrow \frac{6x - 2x - 3x}{6} = 5 \rightarrow \frac{x}{6} = 5 \rightarrow x = 30$$

El montón tiene 30 medidas.

2. Completa en tu cuaderno la igualdad que relaciona las áreas de las dos figuras geométricas que tienes más arriba: $a^2 - b^2 = \dots$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

3. Traduce a lenguaje algebraico (al estilo actual) el enunciado del problema de *la cosa*, descrito más arriba. Después, averigua tanteando el valor de dicha *cosa*.

$$16x + 35 = 3x \cdot x \rightarrow 3x^2 - 16x - 35 = 0$$

La cosa vale 7.

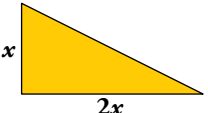
1 Expresiones algebraicas

Página 84

1. Describe mediante una expresión algebraica cada uno de los enunciados siguientes:

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c)  El área de este triángulo es 36 cm^2 .

d) Gasté en un traje $\frac{3}{5}$ de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

a) $2x - \frac{1}{3}x$

b) $2(x + 3)$

c) $\frac{2x \cdot x}{2} = 36$

d) $x - \left(\frac{3}{5}x + 60\right) = \frac{1}{2}x$

2 Monomios

Página 85

1. ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?

a) $-5xy^2z^3$

b) $11xy^2$

c) -12

a) Su grado es 6.

b) Su grado es 3.

c) Su grado es 0.

2. Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$

b) $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + 11y + 2x^3$

d) $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

a) $9x + 2x^2$

b) $-5x^2y$

c) $5x - 5x^2 + 2x^3 + 11y$

d) $yz^3 + 6y^3z$

3. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$

b) $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

c) $(7xy^2) \cdot (2y)$

d) $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

a) $-4x^4$

b) $\frac{-2}{15}x^5$

c) $14xy^3$

d) $-15x^3yz^2$

4. Simplifica cada uno de los siguientes cocientes entre monomios:

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2}$

b) $\frac{5x^4y^2}{3x^3y}$

c) $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4}$

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2} = \frac{5x^3}{3y}$

b) $\frac{5x^4y^2}{3x^3y} = \frac{5xy}{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4} = \frac{\sqrt{3}}{5x^2}$

3 Polinomios

Página 86

1. Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$

a) Su grado es 6.

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2$. Su grado es 4.

c) $3x^2 + x - 2$. Su grado es 2.

2. Sean $P = 5x^3 - 2x + 1$ y $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$.

Halla $P + Q$ y $P - Q$.

$$\begin{array}{r} 5x^3 \qquad \qquad - 2x + 1 \\ - x^4 \qquad \qquad - 2x^2 + 2x - 2 \\ \hline - x^4 + 5x^3 - 2x^2 \qquad - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 \qquad \qquad - 2x + 1 \\ x^4 \qquad \qquad + 2x^2 - 2x + 2 \\ \hline x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

3. Halla los productos siguientes y di de qué grado son:

a) $2x(x^2 + 3x - 1)$

c) $-2(-3x^3 - x)$

e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$

g) $4x^2(3 - 5x + x^3)$

i) $-x^3(-3x + 2x^2)$

a) $2x^3 + 6x^2 - 2x$

Su grado es 3.

c) $6x^3 + 2x$

Su grado es 3.

e) $-14x^7 + 21x^6 + 7x^5$

Su grado es 7.

g) $12x^2 - 20x^3 + 4x^5 = 4x^5 - 20x^3 + 12x^2$

Su grado es 5.

i) $3x^4 - 2x^5 = -2x^5 + 3x^4$

Su grado es 5.

b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

d) $5(x^2 + x - 1)$

f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

h) $8x^2(x^2 + 3)$

j) $-4x[x + (3x)^2 - 2]$

b) $6x^4 - 8x^3 + 12x^2$

Su grado es 4.

d) $5x^2 + 5x - 5$

Su grado es 2.

f) $-14x^4 + 21x^3 - 7x^2$

Su grado es 4.

h) $8x^4 + 24x^2$

Su grado es 4.

j) $-4x^2 - 36x^3 + 8x = -36x^3 - 4x^2 + 8x$

Su grado es 3.

Página 87

4. Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$, calcula:

 a) $P \cdot Q$

 b) $P \cdot R$

 c) $Q \cdot R$

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad \begin{array}{r} 4x^2 \quad + \quad 3 \\ 5x^2 - 3x + 7 \\ \hline 28x^2 \quad + \quad 21 \\ - 12x^3 \quad - 9x \\ 20x^4 \quad + \quad 15x^2 \\ \hline 20x^4 - 12x^3 + 43x^2 - 9x + 21 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad \begin{array}{r} 4x^2 \quad + \quad 3 \\ 5x - 8 \\ \hline - 32x^2 \quad - 24 \\ 20x^3 \quad + \quad 15x \\ \hline 20x^3 - 32x^2 + 15x - 24 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c)} \quad \begin{array}{r} 5x^2 - 3x + 7 \\ 5x - 8 \\ \hline - 40x^2 + 24x - 56 \\ 25x^3 - 15x^2 + 35x \\ \hline 25x^3 - 55x^2 + 59x - 56 \end{array} \end{array}$$

5. Opera y simplifica la expresión resultante.

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x - 3)}{3} - \frac{4(y - x)}{5} + \frac{x + 2}{15} - 7 \right]$

d) $(x^2 - 2x + 7)(5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

a) $5x^3 + 3x^2 - x - 2x^3 + 4x^2 + 12x^2 = 3x^3 + 19x^2 - x$

b) $5x - 15 + 2y + 8 - \frac{7}{3}y + \frac{14}{3}x - 7 - 8 = \frac{29}{3}x - \frac{1}{3}y - 22$

c) $10(x - 3) - 12(y - x) + (x + 2) - 105 = 10x - 30 - 12y + 12x + x + 2 - 105 = 23x - 12y - 133$

d) $5x^5 + 3x^2 - 10x^4 - 6x + 35x^3 + 21 - 2x^5 + 3x^3 + 2x - 1 = 3x^5 - 10x^4 + 38x^3 + 3x^2 - 4x + 20$

6. Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + 4)^2$

b) $(2x - 5)^2$

c) $(1 - 6x)^2$

d) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$

e) $\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$

f) $(ax + b)^2$

a) $x^2 + 16 + 8x$

b) $4x^2 + 25 - 20x$

c) $1 + 36x^2 - 12x$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{16} + \frac{3x}{4} = \frac{1}{16}(4x^2 + 9 + 12x)$

e) $4x^4 + \frac{1}{4} - 2x^2 = \frac{1}{4}(16x^4 + 1 - 8x^2)$

f) $a^2x^2 + b^2 + 2abx$

7. Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$

b) $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$

d) $(ax + b)(ax - b)$

a) $x^2 - 1$

b) $4x^2 - 9$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{1}{4}$

d) $a^2x^2 - b^2$

4 Identidades

Página 88

1. De estas igualdades, ¿cuáles son identidades?

a) $a + a + a = 3a$

b) $3a + 15 = 3 \cdot (a + 5)$

c) $x^2 \cdot x = 27$

d) $a + a + a = 15$

e) $x \cdot x \cdot x = x^3$

f) $a + 5 + a = 2a + 5$

g) $(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4x - 9$

h) $m^2 - m - 6 = (m + 2) \cdot (m - 3)$

Son identidades a), b), e), f) y h).

2. Completa, de la forma más breve posible, el segundo término de estas igualdades para que resulten identidades:

a) $\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$

b) $5a - 4 + a - \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$

c) $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b = [?]$

d) $(1 - b) \cdot (1 + b) + b^2 + a - 1 = [?]$

a) a^3

b) $5a - 4 + a - a = 5a - 4$

c) $2ab + ac$

d) $1 - b^2 + b^2 + a - 1 = a$

3. Partiendo de cada una de las siguientes expresiones, llega mediante identidades a los resultados que se indican:

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) \rightarrow 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) \rightarrow x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \rightarrow x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 \rightarrow 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 \rightarrow 4ab$

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - x - 6 = 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) = (x^2 + 6x + 2x + 12) - (x^2 + 5x + 2x + 10) = x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x - 1) = x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 = x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 = (x^2 - 1) - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$

Página 89

4. Extrae factor común en cada expresión:

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$

b) $\frac{x^4}{3} - \frac{x}{9} - \frac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3$

d) $2x^2y - 5x^3y(2y - 3)$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$

f) $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

g) $\frac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \frac{7}{2}(y - 1)$

h) $\frac{(2x^2 + 1)^2}{3} - \frac{4}{3}(2x^2 + 1)$

a) $5x^2(1 - 3x + 5x^2)$

b) $\frac{1}{3}\left(x^4 - \frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right)$

c) $x^2y^2(2xy^3 - 3y^2 + 2x^5 + 7xy)$

d) $x^2y(2 - 10xy + 15x)$

e) $(x - 3)(2 + 3 - 5) = (x - 3) \cdot 0 = 0$

f) $2xy^2(1 - 3xy + 2y)$

g) $(y - 1)\left(\frac{x^2 - 3 - 7}{2}\right) = (y - 1)\left(\frac{x^2}{2} - 5\right)$

h) $\frac{1}{3}(2x^2 + 1)[(2x^2 + 1) - 4] = \frac{1}{3}(2x^2 + 1)(2x^2 - 3)$

5. Expresa en forma de cuadrado de una expresión algebraica o de producto de dos expresiones.

a) $4x^2 - 25$

b) $x^2 + 16 + 8x$

c) $x^2 + 2x + 1$

d) $9x^2 + 6x + 1$

e) $4x^2 + 25 - 20x$

f) $\frac{x^2}{4} + x + 1$

g) $144(x^2)^2 - x^2$

h) $\frac{(x^3)^2}{25} + \frac{x^3}{5} + \frac{1}{4}$

i) $16x^4 - 9$

j) $\frac{x^6}{100} + \frac{8x^3}{5} + 64$

a) $(2x + 5)(2x - 5)$

b) $(x + 4)^2$

c) $(x + 1)^2$

d) $(3x + 1)^2$

e) $(2x - 5)^2$

f) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$

g) $(12x^2 - x) \cdot (12x^2 + x)$

h) $\left(\frac{x^3}{5} + \frac{1}{2}\right)^2$

i) $(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 + 3)$

j) $\left(\frac{x^3}{10} + 8\right)^2$

6. Completa estas igualdades para que sean identidades:

a) $x^2 - \dots + 1 = (x - \dots)^2$

b) $4x^2 + \dots + 36 = (\dots + 6)^2$

c) $9x^2 - \dots = (3x + \dots)(\dots - 5)$

d) $\frac{1}{4}x^2 + x + \dots = (x + \dots)^2$

a) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

b) $4x^2 + 24x + 36 = (2x + 6)^2$

c) $9x^2 - 25 = (3x + 5) \cdot (3x - 5)$

d) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(x + \left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right)^2$

7. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $(x-2)(x+2) - (x^2+4)$

b) $(3x-1)^2 - (3x+1)^2$

c) $2(x-5)^2 - (2x^2+3x+50)$

d) $(5x-4)(2x+3) - 5$

e) $3(x^2+5) - (x^2+40)$

f) $(x+3)^2 - [x^2 + (x-3)^2]$

a) $x^2 - 4 - x^2 - 4 = -8$

b) $(9x^2 - 6x + 1) - (9x^2 + 6x + 1) = 9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 - 6x - 1 = -12x$

c) $2(x^2 - 10x + 25) - (2x^2 + 3x + 50) = 2x^2 - 20x + 50 - 2x^2 - 3x - 50 = -23x$

d) $10x^2 + 15x - 8x - 12 - 5 = 10x^2 + 7x - 17$

e) $3x^2 + 15 - x^2 - 40 = 2x^2 - 25$

f) $(x^2 + 6x + 9) - [x^2 + (x^2 - 6x + 9)] = x^2 + 6x + 9 - x^2 - x^2 + 6x - 9 = -x^2 + 12x$

8. Asocia cada expresión de la izquierda con el factor común que se puede extraer de ella en la derecha:

$12x^3 - 8x^5 + 4x^2y^2 - \frac{4}{3}x^2$

$2(x-2)$

$(x^2-1) + (x^2-2x+1) - (4x-4)$

$3x$

$6(x^2-4x+4) - (2x^2-8) + (30x-60)$

$x-1$

$9x^2 - 18xy^2 - 6xyz + 6x$

$4x^2$

Obtén las expresiones simplificadas después de extraer los factores.

$12x^3 - 8x^5 + 4x^2y^2 - \frac{4}{3}x^2 = 4x^2 \left(3x - 2x^3 + y^2 - \frac{1}{3} \right)$

$(x^2-1) + (x^2-2x+1) - (4x-4) = (x-1) [(x+1) + (x-1) - 4] = (x-1)(2x-4)$

$6(x^2-4x+4) - (2x^2-8) + (30x-60) = 2(x-2) [3(x-2) - (x+2) + 15] = 2(x-2)(2x+7)$

$9x^2 - 18xy^2 - 6xyz + 6x = 3x(3x - 6y^2 - 2yz + 2)$

9. Multiplica y simplifica el resultado.

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ por 8

b) $x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} - \frac{12x+4}{9}$ por 9

c) $\frac{(2x-4)^2}{8} - \frac{x(x+1)}{2} - 5$ por 8

d) $\frac{3(x+2)}{4} + \frac{3x+5}{2} - \frac{5(4x+1)}{6} + \frac{25}{12}$ por 12

e) $\frac{x-1}{4} + 36 - \frac{x+7}{6} - \left(\frac{4x+7}{9} + 11 \right)$ por 36

f) $\frac{(x+2)^2}{5} - \frac{x^2-9}{4} + \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{1}{5}$ por 20

a) $4x + 2x + x - 6x - 2 = x - 2$

b) $9x + 2x - 3 + 3(x-1) - (12x+4) = 9x + 2x - 3 + 3x - 3 - 12x - 4 = 2x - 10$

c) $(2x-4)^2 - 4x(x+1) - 40 = (4x^2 - 16x + 16) - 4x^2 - 4x - 40 = 4x^2 - 16x + 16 - 4x^2 - 4x - 40 = -20x - 24$

d) $9(x+2) + 6(3x+5) - 10(4x+1) + 25 = 9x + 18 + 18x + 30 - 40x - 10 + 25 = -13x + 63$

e) $9(x-1) + 1296 - 6(x+7) - 4(4x+7) - 396 = 9x - 9 + 1296 - 6x - 42 - 16x - 28 - 396 = -13x + 821$

f) $4(x+2)^2 - 5(x^2-9) + 10(x+3)^2 + 4 = 4x^2 + 16x + 16 - 5x^2 + 45 + 10x^2 + 60x + 90 + 4 = 9x^2 + 76x + 155$

5 Cociente de polinomios

Página 91

1. Halla el cociente y el resto de estas divisiones:

a) $(x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 8) : (x^2 - 3x + 1)$

b) $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$

c) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$ por Ruffini

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x^5 - 7x^4 - 8 \\
 - x^5 + 3x^4 - x^3 \\
 \hline
 - 4x^4 - x^3 + 3x^2 - 8 \\
 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 - 13x^3 + 7x^2 - 8 \\
 + 13x^3 - 39x^2 + 13x \\
 \hline
 - 32x^2 + 13x - 8 \\
 + 32x^2 - 96x + 32 \\
 \hline
 - 83x + 24
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 - 13x - 32
 \end{array}
 \end{array}$$

Cociente: $x^3 - 4x^2 - 13x - 32$; Resto: $-83x + 24$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 6x^4 + 3x^3 \\
 - 6x^4 - 4x^2 \\
 \hline
 3x^3 - 4x^2 - 2x \\
 - 3x^3 - 2x \\
 \hline
 - 4x^2 - 4x \\
 + 4x^2 + 8/3 \\
 \hline
 - 4x + 8/3
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 3x^2 + 2 \\
 \hline
 2x^2 + x - 4/3
 \end{array}
 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + x - \frac{4}{3}$; Resto: $-4x + \frac{8}{3}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 c) & 5 & 0 & 6 & -11 & 13 \\
 2 & & 10 & 20 & 52 & 82 \\
 \hline
 & 5 & 10 & 26 & 41 & 95
 \end{array}$$

Cociente: $5x^3 + 10x^2 + 26x + 41$; Resto: 95

2. Transforma los siguientes polinomios en producto de factores:

a) $P(x) = x^3 - 7x - 6$

b) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4x$

c) $P(x) = x^3 - 3x + 2$

d) $P(x) = x^4 - x^2$

a) $(x + 2)(x - 3)(x + 1)$

b) $x(x - 1)(x^2 + x + 4)$

c) $(x + 2)(x - 1)^2$

d) $x^2(x + 1)(x - 1)$

6 Fracciones algebraicas

Página 93

1. Simplifica las fracciones siguientes. Para ello, saca factor común cuando convenga:

a) $\frac{15x^2}{5x^2(x-3)}$

b) $\frac{3(x-1)^2}{9(x-1)}$

c) $\frac{3x^2-9x^3}{15x^3-3x^4}$

d) $\frac{9(x+1)-3(x+1)}{2(x+1)}$

e) $\frac{5x^2(x-3)^2(x+3)}{15x(x-3)}$

f) $\frac{x(3x^3-x^2)}{(3x-1)x^3}$

a) $\frac{3}{x-3}$

b) $\frac{x-1}{3}$

c) $\frac{3x^2(1-3x)}{3x^3(5-x)} = \frac{1-3x}{x(5-x)} = \frac{-3x+1}{-x^2+5x}$

d) $\frac{(x+1)(9-3)}{2(x+1)} = \frac{6(x+1)}{2(x+1)} = 3$

e) $\frac{x(x-3)(x+3)}{3} = \frac{x(x^2-9)}{3} = \frac{x^3-9x}{3}$

f) $\frac{x \cdot x^2(3x-1)}{(3x-1)x^3} = \frac{x^3(3x-1)}{(3x-1)x^3} = 1$

2. Opera y simplifica.

a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} + \frac{x-2}{x}$

b) $\frac{3}{x+1} - \frac{2x^2+8x}{x^2+x} - 4x$

c) $\frac{2}{x^2-9} - \frac{7x}{x-3} + 3$

d) $\frac{5x^3+15x^2}{x+3} - \frac{10x^3+15x^2}{5x^2} + 2x$

a) $\frac{4}{2x} + \frac{3}{2x} + \frac{2(x-2)}{2x} = \frac{7+2x-4}{2x} = \frac{2x+3}{2x}$

b) $\frac{3}{x+1} - \frac{2x^2+8x}{x(x+1)} - 4x = \frac{3x}{x(x+1)} - \frac{2x^2+8x}{x(x+1)} - \frac{4x \cdot x(x+1)}{x(x+1)} =$
 $= \frac{3x-2x^2-8x-4x^3-4x^2}{x(x+1)} = \frac{-4x^3-6x^2-5x}{x(x+1)} =$
 $= \frac{-x(4x^2+6x+5)}{x(x+1)} = \frac{-4x^2-6x-5}{x+1}$

c) $\frac{2}{(x+3)(x-3)} - \frac{7x}{x-3} + 3 = \frac{2}{(x+3)(x-3)} - \frac{7x(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{3(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} =$
 $= \frac{2-7x^2-21x+3x^2-27}{(x+3)(x-3)} = \frac{-4x^2-21x-25}{(x+3)(x-3)}$

d) $\frac{5x^2(x+3)}{x+3} - \frac{5x^2(2x+3)}{5x^2} + 2x = 5x^2 - (2x+3) + 2x = 5x^2 - 2x - 3 + 2x = 5x^2 - 3$

3. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las identidades notables:

a) $\frac{x^2-1}{x} : (x-1)$

b) $\frac{x(x-2)}{x} : \frac{x^2-4}{x+2}$

c) $\frac{x^2-2x+1}{x} : \frac{x-1}{x}$

d) $6x^2 \cdot \frac{x-3}{x^3}$

e) $\frac{3x-3}{x^2} \cdot \frac{x(x+1)}{x^2-1}$

f) $\frac{2x}{x-1} : \frac{4x^2}{2x-2}$

g) $\frac{x+5}{10} \cdot \frac{5}{(x+5)^2}$

h) $\frac{2x^2}{3x} \cdot \frac{6x}{4x^3}$

i) $\frac{4x-3}{2x} \cdot \frac{4x^2}{8x-6}$

j) $\frac{3x-3}{x^2} \cdot \frac{3x}{18(x-1)}$

a) $\frac{(x+1)(x-1)}{x} : (x-1) = \frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x}$

b) $\frac{x(x-2)}{x} : \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = \frac{x(x-2)}{x} \cdot \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = 1$

c) $\frac{(x-1)^2}{x} : \frac{x-1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = x-1$

d) $\frac{6x^2(x-3)}{x^3} = \frac{6(x-3)}{x} = \frac{6x-18}{x}$

e) $\frac{3(x-1)}{x^2} \cdot \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3}{x}$

f) $\frac{2x}{x-1} : \frac{(2x)^2}{2(x-1)} = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{2(x-1)}{(2x)^2} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

g) $\frac{5(x+5)}{10(x+5)^2} = \frac{1}{2(x+5)}$

h) $\frac{12x^3}{12x^4} = \frac{1}{x}$

i) $\frac{4x-3}{2x} \cdot \frac{(2x)^2}{2(4x-3)} = \frac{2x}{2} = x$

j) $\frac{3(x-1)}{x^2} \cdot \frac{3x}{18(x-1)} = \frac{9x}{8x^2} = \frac{1}{2x}$

4. Opera y simplifica.

a) $\frac{6x^2}{4x^2-9} : \left(\frac{5x}{2x-3} + \frac{5x}{2x+3} \right)$

b) $\frac{x^2}{5x^2-25} - \frac{1}{5} - \frac{x^3+x^2}{(x+1)(5x^2-25)}$

a) $\frac{6x^2}{(2x+3)(2x-3)} : \frac{5x(2x+3) + 5x(2x-3)}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{6x^2}{(2x+3)(2x-3)} \cdot \frac{(2x+3)(2x-3)}{5x(2x+3+2x-3)} =$
 $= \frac{6x^2}{5x \cdot 4x} = \frac{6x^2}{20x^2} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{5(x+1)x^2}{5(x+1)(5x^2-25)} - \frac{(x+1)(5x^2-25)}{5(x+1)(5x^2-25)} - \frac{5(x^3+x^2)}{5(x+1)(5x^2-25)} =$
 $= \frac{5x^2(x+1) - (x+1)(5x^2-25) - 5x^2(x+1)}{5(x+1)(5x^2-25)} = \frac{5x^2 - 5x^2 + 25 - 5x^2}{5(5x^2-25)} = \frac{-5x^2+25}{5(5x^2-25)} = -\frac{1}{5}$

Ejercicios y problemas

Página 95

Practica

Traducción a lenguaje algebraico

1. Expresa en lenguaje algebraico con una sola incógnita.

- a) El doble de un número más su cuadrado.
- b) El producto de dos números consecutivos.
- c) La mitad de un número aumentado en 3.
- d) Un múltiplo de 3 menos 7.

a) $2x + x^2$

b) $x(x + 1)$

c) $\frac{(x + 3)}{2}$

d) $3x - 7$

2. Utiliza dos incógnitas para expresar en lenguaje algebraico estos enunciados:

- a) Un número más la mitad del cuadrado de otro.
- b) El cuadrado de la diferencia de dos números.
- c) La suma de las edades de un padre y su hijo hace 5 años.

a) $x + \frac{y^2}{2}$

b) $(x - y)^2$

c) $(x - 5) + (y - 5)$

3. Asocia cada una de las siguientes expresiones al perímetro y al área de los rectángulos A, B y C:

a) $12x$

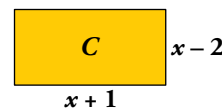
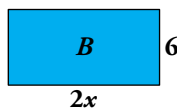
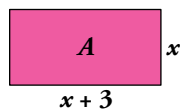
b) $4x - 2$

c) $4x + 6$

d) $4x + 12$

e) $x^2 + 3x$

f) $x^2 - x - 2$



a) $12x$ es el área de B

b) $4x - 2$ es el perímetro de C.

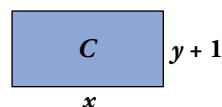
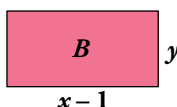
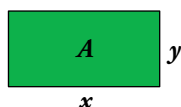
c) $4x + 6$ es el perímetro de A.

d) $4x + 12$ es el perímetro de B.

e) $x^2 + 3x$ es el área de A.

f) $x^2 - x - 2$ es el área de C.

4. Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



a) A $\begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ \text{Área} = xy \end{cases}$

b) B $\begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x - 1 + y) = 2x + 2y - 2 \\ \text{Área} = (x - 1)y = xy - y \end{cases}$

c) C $\begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y + 1) = 2x + 2y + 2 \\ \text{Área} = x(y + 1) = xy + x \end{cases}$

5. Expresa en lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas.

- a) La edad de Andrea, dentro de 7 años, será el doble que la que tenga Lucía.
b) En una empresa aceitera se han envasado 1 500 litros de aceite en garrafas de 2,5 litros y de 5 litros.
c) En un test de matemáticas te dan 4 puntos por cada acierto y te restan 1 punto por cada error. Luis obtuvo 60 puntos.
d) El cubo de la diferencia de dos números es 8.

a) $x + 7 = 2y$

b) $2,5x + 5y = 1\,500$

c) $4x - y = 60$

d) $(x - y)^3 = 8$

Monomios y polinomios. Operaciones

6. Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $-5xy$

b) $(-7x)^3$

c) $8x$

d) $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{4}{5}x^3$

g) $\frac{-3yx}{5}$

h) $\frac{1}{2}x$

a) Grado 2.

b) Grado 3.

c) Grado 1.

d) Grado 4.

e) Grado 0.

f) Grado 3.

g) Grado 2.

h) Grado 1.

Son semejantes: a) y g); b) y f); d) y e).

7. Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.

a) $-5 \cdot (-1) \cdot 3 = 15$

b) $[-7 \cdot (-1)]^3 = 343$

c) $8(-1) = -8$

d) $[(-1) \cdot 3]^2 = 9$

e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{4}{5}(-1)^3 = -\frac{4}{5}$

g) $\frac{-3 \cdot 3(-1)}{5} = \frac{9}{5}$

h) $\frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$

8. Efectúa.

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2 = 6x^2 - 4x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2 = -x^2 - x + 8y$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2 = x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2$

9. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $(6x^2)(-3x)$

b) $(2xy^2)(4x^2y)$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right)$

d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right)$

a) $6x^2(-3x) = -18x^3$

b) $(2xy^2)(4x^2y) = 8x^3y^3$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{3}{8}x^6$

d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right) = \frac{3}{8}x^2yz$

10. Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante en cada caso:

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$ b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1) = x^3 - 5x - 3x^3 - 6x^2 - 7x^2 - 7 =$
 $= -2x^3 - 13x^2 - 5x - 7 \rightarrow \text{Grado 3.}$

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x = -15x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 3x^3 - 6x =$
 $= -12x^3 + 3x^2 - 6x \rightarrow \text{Grado 3.}$

11. Considera estos polinomios:

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$ $B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$ $C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

$A + B = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + 2x^4 + x^3 - 2x + 4 = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 3$

$A - C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (-x^3 + 3x^2 - 7x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + x^3 - 3x^2 + 7x =$
 $= 4x^3 - 8x^2 + 8x - 1$

$A - B + C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (2x^4 + x^3 - 2x + 4) + (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$
 $= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 - 2x^4 - x^3 + 2x - 4 - x^3 + 3x^2 - 7x =$
 $= -2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 5$

12. Prueba si los números -1, 1, 2, 3 son raíces de alguno de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 7x + 6$ b) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ c) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

a) 1 y 2 son raíces de $x^3 - 7x + 6$.

b) 3 es raíz de $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$.

c) -1, 1 y 3 son raíces de $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

13. Opera y simplifica.

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2)$ b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 - x^2 + 2x = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3) = x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 3x - x^4 + 3x = -6x^3 + 8x^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12) = 3x^3 - 6x^2 + 10x^2 - 20x + x - 2 = 3x^3 + 4x^2 - 19x - 2$

Página 96

14. Reduce las siguientes expresiones:

a) $6\left(\frac{5x-4}{6} + \frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{3}\right)$

b) $12\left(\frac{x+6}{3} - \frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4}\right)$

c) $20\left[\frac{2(x-1)}{10} - \frac{x(x+1)}{5} + \frac{1}{4}\right]$

a) $6\left(\frac{5x-4}{6} + \frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{3}\right) = 5x-4 + 3(2x-3) - 2(x-1) =$
 $= 5x-4 + 6x-9 - 2x+1 = 9x-12$

b) $12\left(\frac{x+6}{3} - \frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4}\right) = 4(x+6) - 6(x+1) + 3(3x-1) =$
 $= 4x+24 - 6x-6 + 9x-3 = 7x+15$

c) $20\left[\frac{2(x-1)}{10} - \frac{x(x+1)}{5} + \frac{1}{4}\right] = 4(x-1) - 4x(x+1) + 5 = 4x-4 - 4x^2 - 4x+5 = -4x^2 + 1$

15. Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado:

a) $\frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12}$

b) $\frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6}$

c) $\frac{3x-3}{5} - \frac{x+1}{3} + \frac{1}{2}$

a) $\frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12} = 24\left(\frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12}\right) = 3(3+x) - 4(5-x) - 2(x+1) =$
 $= 9+3x-20+4x-2x-2 = 5x-13$

b) $\frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6} = 12\left(\frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6}\right) =$
 $= 3 \cdot 3(x-1) - 4(x+1) + 2 = 9x-9-4x-4+2 = 5x-11$

c) $\frac{3x-3}{5} - \frac{x+1}{3} + \frac{1}{2} = 30\left[\frac{3x-3}{5} - \frac{x+1}{3} + \frac{1}{2}\right] = 6(3x-3) - 10(x+1) + 15 =$
 $= 18x-18-10x-10+15 = 8x-13$

Igualdades notables

16. Desarrolla estas expresiones:

a) $(x+6)^2$

b) $(7-x)^2$

c) $(3x-2)^2$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

e) $(x-2y)^2$

f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2$

a) $(x + 6)^2 = x^2 + 36 + 12x$

c) $(3x - 2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$

e) $(x - 2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy$

b) $(7 - x)^2 = 49 + x^2 - 14x$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4} + x$

f) $\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \frac{4}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{4}{15}xy$

17. Expresa como diferencia de cuadrados.

a) $(x + 7)(x - 7)$

b) $(3 + x)(3 - x)$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x)$

d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

e) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

f) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

a) $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$

b) $(3 + x)(3 - x) = 9 - x^2$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x) = 9 - 16x^2$

d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1$

e) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

f) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$

18. Completa con el término que falta para que cada expresión sea el cuadrado de una suma o el de una diferencia:

a) $x^2 + \dots + 4x$

b) $x^2 + \dots - 10x$

c) $x^2 + 9 + \dots$

d) $x^2 + 16 - \dots$

a) $x^2 + 4 + 4x$

b) $x^2 + 25 - 10x$

c) $x^2 + 9 + 6x$

d) $x^2 + 16 - 8x$

19. Extrae factor común.

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x$

b) $-3x^3 + x - x^2$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$

a) $12x^3 - 8x^2 - 4x = 4x(3x^2 - 2x - 1)$

b) $-3x^3 + x - x^2 = x(-3x^2 + 1 - x)$

c) $2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2 = xy(2y - 4x + xy)$

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x(2x + x^2 - 5)$

20. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.

• $x^2 + 25 + 10x = x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2$

a) $x^2 + 49 - 14x$

b) $x^2 + 1 - 2x$

c) $4x^2 + 1 + 4x$

d) $x^2 + 12x + 36$

a) $x^2 + 49 - 14x = x^2 + 7^2 - 2 \cdot 7x = (x - 7)^2$

b) $x^2 + 1 - 2x = x^2 + 1^2 - 2x = (x - 1)^2$

c) $4x^2 + 1 + 4x = (2x)^2 + 1^2 + 2 \cdot 2x = (2x + 1)^2$

d) $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \cdot 6x + 6^2 = (x + 6)^2$

21. Transforma en producto.

a) $4x^2 - 49$

b) $x^2 - 18x + 81$

c) $9x^2 + 12x + 4$

d) $121 - 100x^2$

a) $(2x - 7)(2x + 7)$

b) $(x - 9)^2$

c) $(3x + 2)^2$

d) $(11 + 10x)(11 - 10x)$

22. Reduce las siguientes expresiones:

a) $18 \left[\frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6} \right]$

b) $8 \left[\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} - \frac{(3x+2)^2}{8} \right]$

c) $30 \left[\frac{x(x-2)}{15} - \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{1}{2} \right]$

a) $18 \left[\frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6} \right] = 2(2x-5)^2 - 3(x+1)^2 = 8x^2 - 40x + 50 - 3x^2 - 6x - 3 =$
 $= 5x^2 - 46x + 47$

b) $8 \left[\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} - \frac{(3x+2)^2}{8} \right] = 4x(x-3) + 2x(x+2) - (3x+2)^2 =$
 $= 4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x - 9x^2 - 12x - 4 = -3x^2 - 20x - 4$

c) $30 \left[\frac{x(x-2)}{15} - \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{1}{2} \right] = 2x(x-2) - 5(x^2 + 1 + 2x) + 15 =$
 $= 2x^2 - 4x - 5x^2 - 5 - 10x + 15 = -3x^2 - 14x + 10$

23. Extrae factor común, igual que se ha hecho en el ejemplo.

• $3x(x+1) - x^2(x+1) + (x+1)(x^2-2) = (x+1)(3x - x^2 + x^2 - 2) = (x+1)(3x-2)$

a) $2x(x-2) + x^2(x-2) - 3(x-2)$

b) $x^2(x+1) - x^2(x+2) + 2x^2(x-3)$

c) $3x^2(x+3) - 6x(x+3)$

a) $2x(x-2) + x^2(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(2x + x^2 - 3)$

b) $x^2(x+1) - x^2(x+2) + 2x^2(x-3) = x^2[x+1 - (x+2) + 2(x-3)] = x^2(2x-7)$

c) $3x^2(x+3) - 6x(x+3) = x(x+3)(3x-6)$

24. Transforma en producto, como en el ejemplo.

• $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

a) $x^3 - 4x$

b) $4x^3 - 4x^2 + x$

c) $x^4 - x^2$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2$

a) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$

b) $4x^3 - 4x^2 + x = x(4x^2 - 4x + 1) = x(2x-1)^2$

c) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x+1)(x-1)$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 = 3x^2(x^2 - 8x + 16) = 3x^2(x-4)^2$

División de polinomios. Regla de Ruffini

25.  Calcula el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

a) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

b) $(x^3 - 3x^2 + 5) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 4x + 7) : (x - 1)$

d) $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10) : (x + 2)$

e) $(-x^2 + 3x - 7) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 6 & \\ 2 & & 2 & -6 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

Cociente: $x - 3$; Resto: 0

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 0 & 5 & \\ -1 & & -1 & 4 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 1 & \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 4x + 4$; Resto: 1

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -4 & 7 & \\ 1 & & 2 & 2 & -2 & \\ \hline & 2 & 2 & -2 & 5 & \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 2x - 2$; Resto: 5

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -7 & 10 & \\ -2 & & -2 & 12 & -10 & \\ \hline & 1 & -6 & 5 & 0 & \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 6x + 5$; Resto: 0

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 3 & -7 & \\ 3 & & -3 & 0 & \\ \hline & -1 & 0 & -7 & \end{array}$$

Cociente: $-x$; Resto: -7

Página 97

26.  Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 + 1)$

b) $(2x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 2) : (x^2 + x - 1)$

d) $(x^4 - 5x^3 + 2x) : (x^2 - 2x + 1)$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + 1 \quad + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 \\ x + 2 \end{array} \right. \\ - x^3 \quad \quad - x \quad \quad \quad \\ \hline 2x^2 - x + 1 \\ - 2x^2 \quad \quad - 2 \\ \hline - x - 1 \end{array}$$

Cociente: $x + 2$; Resto: $-x - 1$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ 2x - 1 \end{array} \right. \\ - 2x^3 \quad \quad + 2x \quad \quad \quad \\ \hline - x^2 + x + 1 \\ + x^2 \quad \quad - 1 \\ \hline x \end{array}$$

Cociente: $2x - 1$; Resto: x

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 2x - 2 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x - 1 \\ x - 4 \end{array} \right. \\ - x^3 - x^2 + x \quad \quad \quad \\ \hline - 4x^2 + 3x - 2 \\ + 4x^2 + 4x - 4 \\ \hline 7x - 6 \end{array}$$

Cociente: $x - 4$; Resto: $7x - 6$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 + 2x \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 3x - 7 \end{array} \right. \\ - x^4 + 2x^3 - x^2 \quad \quad \quad \\ \hline - 3x^3 - x^2 + 2x \\ + 3x^3 - 6x^2 + 3x \\ \hline - 7x^2 + 5x \\ + 7x^2 - 14x + 7 \\ \hline - 9x + 7 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 3x - 7$; Resto: $-9x + 7$

27.  Aplica la regla de Ruffini para transformar en producto los polinomios siguientes:

a) $x^2 + 2x - 3$

b) $x^2 - 4x - 5$

c) $2x^2 - 5x + 2$

d) $x^2 - x - 6$

e) $2x^2 - x - 3$

f) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

a) $(x + 3)(x - 1)$

b) $(x - 5)(x + 1)$

c) $2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $(x - 3)(x + 2)$

e) $2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

f) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$

28. Transforma en producto.

a) $x^3 - 3x^2 + 2x$

c) $2x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 6x$

a) $x(x-1)(x-2)$

c) $2x(x+1)(x+1)(x-3)$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

b) $x^2(x-3)(x+1)$

d) $(x-3)(x+2)(x+3)$

Fracciones algebraicas

29. Simplifica estas fracciones algebraicas:

a) $\frac{9x}{12x^2}$

b) $\frac{x(x+1)}{5(x+1)}$

c) $\frac{x^2(x+2)}{2x^3}$

a) $\frac{9x}{12x^2} = \frac{3}{4x}$

b) $\frac{x(x+1)}{5(x+1)} = \frac{x}{5}$

c) $\frac{x^2(x+2)}{2x^3} = \frac{x+2}{2x}$

30. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello, saca factor común:

a) $\frac{x^2 - 4x}{x^2}$

b) $\frac{3x}{x^2 + 2x}$

c) $\frac{3x+3}{(x+1)^2}$

d) $\frac{2x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2}$

e) $\frac{8x^3 - 4x^2}{(2x-1)^2}$

f) $\frac{5x^3 + 5x}{x^4 + x^2}$

a) $\frac{x^2 - 4x}{x^2} = \frac{x(x-4)}{x^2} = \frac{x-4}{x}$

b) $\frac{3x}{x^2 + 2x} = \frac{3x}{x(x+2)} = \frac{3}{x+2}$

c) $\frac{3x+3}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1}$

d) $\frac{2x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2} = \frac{2x(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{2}{x}$

e) $\frac{8x^3 - 4x^2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2(2x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2}{2x-1}$

f) $\frac{5x^3 + 5x}{x^4 + x^2} = \frac{5x(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} = \frac{5}{x}$

31. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{5x^2}{15x}$

b) $\frac{2x(x-3)}{6(x-3)}$

c) $\frac{12x-4}{3x-1}$

d) $\frac{x+5}{(x+5)^2}$

e) $\frac{2x^2-4x}{x-2}$

f) $\frac{x^2-2x}{3x}$

a) $\frac{x}{3}$

b) $\frac{x}{3}$

c) 4

d) $\frac{1}{x+5}$

e) 2x

f) $\frac{x-2}{3}$

32. Simplifica. Para ello, transforma en producto el numerador y el denominador.

a) $\frac{2x+4}{3x^2+6x}$

b) $\frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\frac{x-2}{x^2+4-4x}$

d) $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

e) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

f) $\frac{x^3+2x^2+x}{3x+3}$

a) $\frac{2x+4}{3x^2+6x} = \frac{2(x+2)}{3x(x+2)} = \frac{2}{3x}$

b) $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

c) $\frac{x-2}{x^2+4-4x} = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$

d) $\frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x}{x+3}$

e) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}$

f) $\frac{x^3+2x^2+x}{3x+3} = \frac{x(x^2+2x+1)}{3(x+1)} = \frac{x(x+1)^2}{3(x+1)} = \frac{x(x+1)}{3}$

33.  Reduce a mínimo común denominador y opera estas expresiones:

a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$

b) $\frac{3}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{5}{3x}$

c) $\frac{5}{2x} - \frac{3}{x^2}$

d) $\frac{3-x}{x} + \frac{x-1}{x^2}$

e) $2x + \frac{3}{x-1}$

f) $\frac{2x}{x+1} - x$

a) $\frac{x+2}{x^2}$

b) $\frac{18+3-10}{6x} = \frac{11}{6x}$

c) $\frac{5x-6}{2x^2}$

d) $\frac{x(3-x)+x-1}{x^2} = \frac{-x^2+4x-1}{x^2}$

e) $\frac{2x(x-1)+3}{x-1} = \frac{2x^2-2x+3}{x-1}$

f) $\frac{2x-x(x+1)}{x+1} = \frac{2x-x^2-x}{x+1} = \frac{x-x^2}{x+1}$

34.  Efectúa.

a) $\frac{1}{6x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{2x^3}$

b) $\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x-7}$

c) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-4} + \frac{x+1}{x-4}$

d) $\frac{2x}{x-3} - \frac{x-1}{x+3}$

e) $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$

f) $\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2+x} + 2$

a) $\frac{1}{6x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{2x^3} = \frac{x^2+2x-3}{6x^3}$

b) $\frac{2}{x} + \frac{x-1}{x-7} = \frac{2(x-7)+x(x-1)}{x(x-7)} = \frac{2x-14+x^2-x}{x^2-7x} = \frac{x^2+x-14}{x^2-7x}$

c) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-4} + \frac{x+1}{x-4} = \frac{2(x-4)-3x+x(x+1)}{x(x-4)} = \frac{2x-8-3x+x^2+x}{x(x-4)} = \frac{x^2-8}{x^2-4x}$

d) $\frac{2x}{x-3} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{2(x+3)-(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+6-(x^2-4x+3)}{x^2-9} =$
 $= \frac{2x+6-x^2+4x-3}{x^2-9} = \frac{-x^2+6x+3}{x^2-9}$

e) $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4} = \frac{12+2(x-1)+x(x-1)}{4(x-1)} = \frac{12+2x-2+x^2-x}{4(x-1)} = \frac{x^2+x+10}{4(x-1)}$

f) $\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2+x} + 2 = \frac{3(x+1)-1+2x(x+1)}{x(x+1)} = \frac{3x+3-1+2x^2+2x}{x(x+1)} = \frac{2x^2+5x+2}{x(x+1)}$

35.  Opera y reduce.

a) $\frac{x+2}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$

b) $\frac{x-3}{2x} \cdot \frac{x^2}{x-3}$

c) $\frac{3}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{2}$

d) $\frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$

e) $\frac{5}{x-2} : \frac{x-1}{x-2}$

f) $\frac{x+5}{5x} : \frac{x+5}{x^2}$

a) $\frac{x+2}{3(x+2)} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2(x-3)}{2x(x-3)} = \frac{x}{2}$

c) $\frac{3(x+2)}{2(x+2)(x-2)} = \frac{3}{2(x-2)}$

d) $\frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x}$

e) $\frac{5(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{x-1}$

f) $\frac{x^2(x+5)}{5x(x+5)} = \frac{x}{5}$

36.  Opera, y simplifica si es posible.

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2}$

b) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x}$

c) $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1}$

d) $(x+1) : \frac{x^2-1}{2}$

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2} = \frac{3x}{(x+1)x^2} = \frac{3}{(x+1)x}$

b) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x} = \frac{x(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+2x}{x^2-1}$

c) $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-1)}{2(x-1)^2} = \frac{3}{2(x-1)}$

d) $(x+1) : \frac{x^2-1}{2} = \frac{2(x+1)}{x^2-1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$

37.  Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las igualdades notables:

a) $\left(x - \frac{4}{x}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)$

b) $\left(\frac{2}{x} : \frac{1}{3+x}\right) \cdot \frac{x^2}{2}$

c) $\left(x - \frac{9}{x}\right) \cdot \frac{2}{x+3}$

d) $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right) : \frac{x^2-4}{2x}$

e) $\left(\frac{1}{2} - \frac{x+1}{3x}\right) \cdot \frac{12x}{(x-2)^2}$

f) $\left(\frac{x-3}{x} : \frac{x+3}{3x}\right) \cdot \frac{1}{3x-9}$

a) $\frac{x^2-4}{x} : \frac{x+2}{2x} = \frac{2x(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = 2(x-2) = 2x-4$

b) $\frac{2(3+x)}{x} \cdot \frac{x^2}{2} = x(3+x) = x^2+3x$

c) $\frac{x^2-9}{x} \cdot \frac{2}{x+3} = \frac{2(x+3)(x-3)}{x(x+3)} = \frac{2(x-3)}{x} = \frac{2x-6}{x}$

d) $\left(\frac{x-2}{x} \cdot \frac{x+2}{x}\right) : \frac{x^2-4}{2x} = \frac{2x(x+2)(x-2)}{x^2(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x}$

e) $\frac{x-2}{6x} \cdot \frac{12x}{(x-2)^2} = \frac{2}{(x-2)}$

f) $\frac{3x(x-3)}{x(x+3)} \cdot \frac{1}{3(x-3)} = \frac{1}{x+3}$

Resuelve problemas

38.  Expresa en lenguaje algebraico.

- a) La cantidad de agua que hay en un depósito del que se sacan, primero, $\frac{1}{3}$ de su capacidad; después, $\frac{2}{5}$ de lo que queda, y luego, 20 litros.
- b) Compré dos pantalones por 60 €. Uno estaba rebajado un 20 %, y el otro, un 25 %.
- c) Un refresco vale 1 € más que una botella de agua. Por tres refrescos y dos aguas he pagado 6 €.

a) $x - \frac{x}{3} - \frac{2}{5}\left(x - \frac{x}{3}\right) - 20 = 0$

b) $x \cdot \frac{80}{100} + y \cdot \frac{75}{100} = 60$ o $0,8x + 0,75y = 60$

c) Si x es el valor de la botella de agua, $3(x + 1) + 2x = 6$

Si x es el precio del refresco, $3x + 2(x - 1) = 6$

39.  La expresión $10a + b$ representa un número de dos cifras. Escribe en forma algebraica:

- a) Un número de tres cifras.
- b) El número siguiente y el anterior al que has escrito en a).
- c) La diferencia entre un número de tres cifras y el que resulta de invertir las cifras del mismo.

a) $100a + 10b + c$

b) $100a + 10b + c + 1$ y $100a + 10b + c - 1$

c) $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c$

40.  La mitad de un número es 20 unidades menor que su triple. ¿Cuál de estas expresiones algebraicas corresponde a ese enunciado?

a) $\frac{x - 20}{2} = 3x$

b) $\frac{x}{2} - 20 = 3x$

c) $\frac{x}{2} + 20 = 3x$

Es la c).

41.  He pagado 9 € por un refresco, un bocadillo y un bollo. El bocadillo cuesta el triple que el refresco, y este, el doble que el bollo. Si el precio del bollo es x , expresa algebraicamente este enunciado.

$x + 2x + 6x = 9$

42.  Un grupo de amigos quiere comprar un regalo para María y les toca a 12 € cada uno. Si fueran tres amigos más, les tocaría a 4 € menos cada uno. ¿Cuál de estas igualdades representa este enunciado?

a) $12(x - 4) = 8(x + 3)$

b) $12x = 8(x + 3)$

c) $12x = 9(x + 4)$

La igualdad b).

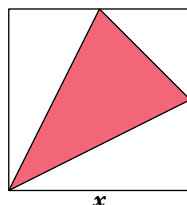
43. Si mezclamos 6 kg de pintura con 9 kg de otra de calidad inferior, que cuesta 3 € menos por kilo, la mezcla nos sale a 5,20 €/kg. Si x es el precio de la pintura cara, rellena la tabla adjunta y expresa algebraicamente este enunciado.

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA 1	6	x	$6x$
PINTURA 2	9		
MEZCLA		5,20	

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA 1	6	x	$6x$
PINTURA 2	9	$x - 3$	$9(x - 3)$
MEZCLA	15	5,20	$6x + 9(x - 3)$

$$\text{Coste de la mezcla} \rightarrow \frac{6x + 9(x - 3)}{15} = 5,20 \text{ €}$$

44. Expresa algebraicamente el área y el perímetro de la parte coloreada.



Dos de los vértices del triángulo coinciden con puntos medios de los lados del cuadrado.

Calculamos el lado mayor del triángulo, L :

$$L^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow L = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5}x}{2}$$

Calculamos el lado menor del triángulo, l :

$$l = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

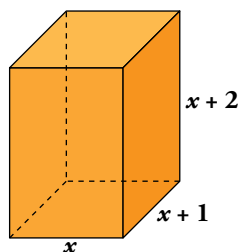
Calculamos la altura que corresponde al lado menor del triángulo, h :

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5x^2}{4} - \frac{x^2}{8} = \frac{10x^2 - x^2}{8} = \frac{9x^2}{8} \rightarrow h = \frac{3x}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Perímetro} = 2L + l = \sqrt{5}x + \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}x + \frac{\sqrt{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{5}x + \sqrt{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}x$$

$$\text{Área} = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3x}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{8}x^2$$

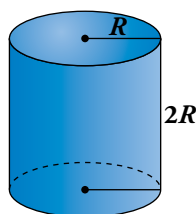
- 45.**  Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son tres números naturales consecutivos.



$$\begin{aligned}\text{Área: } 2[(x+1)(x+2) + x(x+1) + x(x+2)] &= 2(x^2 + 3x + 2 + x^2 + x + x^2 + 2x) = \\ &= 2(3x^2 + 6x + 2) = 6x^2 + 12x + 4\end{aligned}$$

$$\text{Volumen: } x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

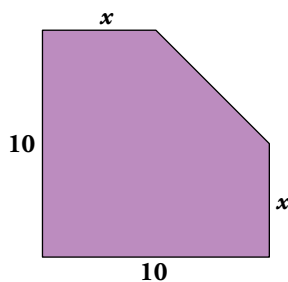
- 46.**  Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un cilindro cuya altura mide el doble que el radio de la base.



$$\text{Área: } 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$$

$$\text{Volumen: } \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

- 47.**  Expresa algebraicamente el área y el perímetro de esta figura:

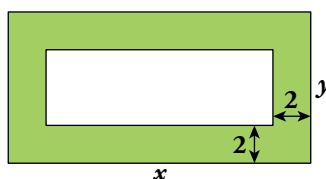


El lado que falta es la hipotenusa de un triángulo de catetos 5 y 5. Mide, por tanto, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

$$\text{Perímetro} = 20 + 2x + 5\sqrt{2}$$

$$\text{Área} = 10x + 10x - \frac{25}{2} = 20x - \frac{25}{2}$$

- 48.**  Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada.



$$A = xy - (x-4)(y-4) = xy - (xy - 4x - 4y + 16) = 4x + 4y - 16$$

Página 99

- 49.**  Piensa en tres números consecutivos. Resta al cuadrado del mayor el cuadrado del menor. Divide el resultado por el del medio. ¿Obtienes siempre 4!

Justifícalo utilizando el lenguaje algebraico.

Tres números consecutivos son x ; $x + 1$; $x + 2$

$$(x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$$

$$\frac{4x + 4}{x + 1} = \frac{4(x + 1)}{x + 1} = 4$$

- 50.**  Escribe tres números impares consecutivos. Suma 3 al menor y elévalo al cuadrado. Réstale el producto de los otros dos. ¿Qué obtienes?

Tres números impares consecutivos: $2x - 1$, $2x + 1$, $2x + 3$

$$(2x - 1 + 3)^2 - (2x + 1)(2x + 3) = (2x + 2)^2 - (2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 8x - 3 = 1$$

Siempre se obtiene 1.

Problemas “+”

- 51.**  ¡Adivina el número secreto!

Piensa un número cualquiera, multiplícalo por 2, réstale 10, réstale el número pensado, súmale 3 y dime el resultado.

Razona por qué obtengo el número secreto sumando 7 al resultado que me des.

Llamamos x al número pensado.

Multiplícalo por 2: $2x$

Réstale 10: $2x - 10$

Réstale el número pensado: $2x - 10 - x = x - 10$

Súmale 3: $x - 10 + 3 \rightarrow x - 7$

Si al resultado le sumo 7, obtengo x .

- 52.**  Piensa un número cualquiera, súmale 7, multiplica el resultado por 2, resta 4, divide por 2 y dime el resultado.

¿Cómo puedo saber el número que has pensado?

Llamamos x al número pensado.

Le sumamos 7: $x + 7$

Multiplícamos por 2: $2x + 14$

Restamos 4: $2x + 10$

Dividimos por 2: $x + 5$

Si restamos 5 al resultado, obtenemos x .

- 53.**  ¿Cuántos números de dos cifras verifican que sumando sus dos cifras más el producto de estas nos da el número inicial?

Suponemos que el número es ab .

$$a + b + a \cdot b = 10a + b \rightarrow ab = 9a \rightarrow b = 9$$

Los números que acaben en 9 cumplirán esta regla.

- 54.**  Observa:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

¿Cuál será el valor de $1 + 3 + 5 + \dots + 19$?

¿Y de $1 + 3 + 5 + \dots + n$?

Expresa con palabras esta propiedad e intenta demostrarla.

$1 + 3 + 5 + \dots + 19$ es la suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 3, 5, 7...

$$a_n = 2n - 1$$

$$S_{10} = \frac{1+19}{2} \cdot 10 = 100 = 10^2$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + n \rightarrow S_n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$$

La suma de los n primeros números impares es igual a n^2 .

Reflexiona sobre la teoría

- 55.**  ¿Cuándo se dice que un número es raíz de un polinomio?

¿Cuál de los siguientes polinomios tiene por raíces $\frac{1}{2}$ y -2 ?

a) $x^2 + 2x$

b) $4x^2 - 1$

c) $3x^2 + 5$

d) $-x^2 - 3x - 2$

e) $2x^2 + 3x - 2$

f) $2x^2 + 5x + 2$

Un número a es raíz de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

a) -2 es raíz de $x^2 + 2x$.

b) $\frac{1}{2}$ es raíz de $4x^2 - 1$.

c) Ni $\frac{1}{2}$ ni -2 son raíces de $3x^2 + 5$.

d) -2 es raíz de $-x^2 - 3x - 2$.

e) -2 y $\frac{1}{2}$ son raíces de $2x^2 + 3x - 2$.

f) -2 es raíz de $2x^2 + 5x + 2$.

- 56.**  ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) $(x + a)^2 = (-x - a)^2$

b) $(x - a)^2 = (a - x)^2$

c) $-(x)^2 = x^2$

d) Si multiplicamos dos monomios, obtenemos un binomio.

e) Dos monomios son semejantes si su parte literal tiene las mismas letras.

f) Si la suma de dos monomios es positiva, también lo es su producto.

a) Verdadero. Por ejemplo: $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25 = (-3 - 2)^2 = (-5)^2 = 25$

$$(-x - a)^2 = [-(x + a)]^2 = (x + a)^2$$

b) Verdadero. Por ejemplo: $(8 - 5)^2 = 3^2 = 9 = (5 - 8)^2 = (-3)^2$

$$(x - a)^2 = [-(x + a)]^2 = (-x + a)^2 = x^2 + a^2 - 2ax$$

c) Falso. Por ejemplo: $-(2)^2 = -4 \neq 2^2$

d) Falso. Por ejemplo: $3ab \cdot 4a^3b^2 = 12a^4b^3$. El producto de dos monomios es un monomio.

e) Falso. Por ejemplo: El monomio $8a^3b^2y$ no es semejante a $3aby$.

f) Falso. Por ejemplo: $7x + (-5)x = 2x$ y, sin embargo, $7x \cdot (-5)x = -35x^2$.

57. ¿Cuál debe ser el valor de k para que -2 sea raíz del polinomio $x^3 - 5x^2 - 7x + k$? Justifica tu respuesta.

Para que -2 sea raíz de ese polinomio, al dar a x ese valor el polinomio debe ser igual a 0. Por tanto:

$$(-2)^3 - 5(-2)^2 - 7(-2) + k = 0 \rightarrow -8 - 20 + 14 + k = 0 \rightarrow k = 14$$

58. ¿Cuál es el resultado de multiplicar una fracción por su inversa?

Compruébalo con $\frac{x}{x+2}$ y su inversa.

El producto de una fracción por su inversa es igual a 1.

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x(x+2)}{(x+2)x} = 1$$

59. a) Simplifica la expresión $(a + 1)^2 - (a - 1)^2$.

b) Halla, sin utilizar la calculadora, el valor de:

$$2501^2 - 2499^2$$

$$a) (a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (a^2 + 1 + 2a) - (a^2 + 1 - 2a) = a^2 + 1 + 2a - a^2 - 1 + 2a = 4a$$

$$b) 2501^2 - 2499^2 = 4 \cdot 2500 = 10000$$

60. Averigua cuál debe ser el valor de a , en cada caso, para que las dos expresiones sean idénticas:

$$a) (3x + a)(3x - a) + 7 \text{ y } 9x^2 - 18$$

$$b) (x - a)^2 + 2xa - 46 \text{ y } x^2 + 18$$

$$a) (3x + a)(3x - a) + 7 = 9x^2 - a^2 + 7$$

$$\text{Si } 9x^2 - a^2 + 7 = 9x^2 - 18 \rightarrow -a^2 + 7 = -18 \rightarrow a^2 = 25 \begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases}$$

$$b) (x - a)^2 + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 2xa + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 46$$

$$\text{Si } x^2 + a^2 - 46 = x^2 + 18 \rightarrow a^2 - 46 = 18 \rightarrow a^2 = 64 \begin{cases} a = 8 \\ a = -8 \end{cases}$$

61. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son identidades? Justifícalo.

$$a) \sqrt{9x^2} = 3x$$

$$b) x(x + 1) = x^2 + 1$$

$$c) (x - 5)^2 = x^2 - 25$$

$$a) \text{ Es una identidad: } \sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3x$$

b) y c) no son identidades.

62.  Si $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6}$ es un número entero, ¿qué podemos afirmar del valor de x ?

$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{4x - x}{6} = \frac{3}{6}x = \frac{1}{2}x$$

Para que $\frac{1}{2}x$ sea entero, x ha de ser un número par.

63.  Al simplificar la fracción algebraica $\frac{6x^4 - 8x^3}{12x^2}$, ¿cuál de estas fracciones se obtiene? Justifícalo.

a) $\frac{3x^2 - 4x}{2}$

b) $\frac{x^2 - 8x^3}{6}$

c) $\frac{3x^2 - 4x}{6}$

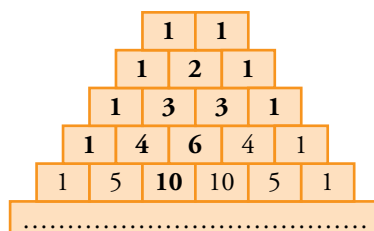
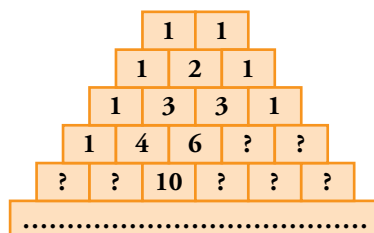
La c): $\frac{6x^4 - 8x^3}{12x^2} = \frac{2x^2(3x^2 - 4x)}{12x^2} = \frac{3x^2 - 4x}{6}$

Investiga

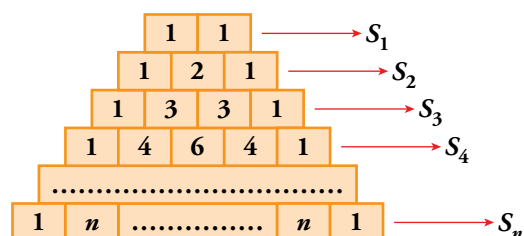
Un triángulo curioso

- Esta colección de números que se abre indefinidamente hacia abajo tiene multitud de regularidades curiosas, pero, antes que nada, averigua cómo se construye.

¿Podrías completar las casillas vacías?



- Suma los números de cada fila y completa la tabla:

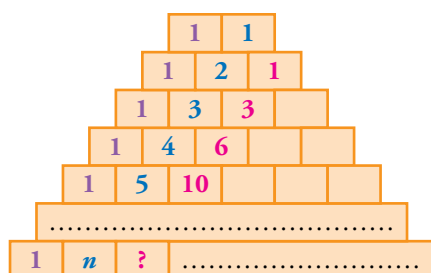


S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...	S_n
2	4	8			...	

Escribe una expresión algebraica para calcular la suma de los términos de la fila enésima, S_n .

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	...	S_n
2	4	8	16	32	...	2^n

- Fíjate en estas tres escaleras de números:



Observa que:

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = \dots$$

¿Cuál es el tercer número de la 6.^a fila?

1	6	?
---	---	---

¿Y el de la número 20 (vigésima)?

1	20	?
---	----	---

Escribe una expresión algebraica para la tercera casilla de la n -ésima fila:

1	n	?
---	-----	---

Los números de la tercera escalera coinciden con las sucesivas sumas de los primeros números naturales.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\text{Así: } a_{20} = 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$$

$$\text{Y, por fin: } a_n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$$

Página 101

Entrena resolviendo problemas

- Dos ciclistas parten del mismo lugar, a la misma hora y en el mismo sentido. Sus velocidades respectivas son 30 km/h y 24 km/h.

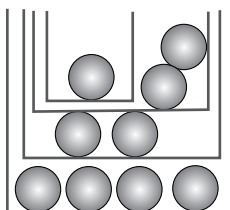
¿Qué ventaja le sacará el primero al segundo cuando haya transcurrido una hora y cuarenta minutos?

Los ciclistas se distancian a una velocidad de $\rightarrow 30 - 24 = 6$ km/h

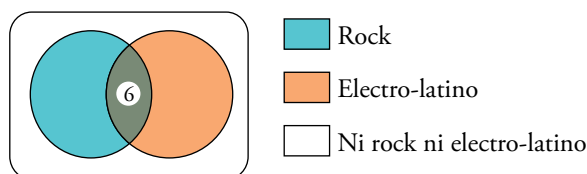
$$1 \text{ h } 40 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{4}{6} \text{ h} = \frac{10}{6} \text{ h} = \frac{5}{3} \text{ h}$$

En $\frac{5}{3}$ h se distancian $\rightarrow 6 \cdot \frac{5}{3} = 10$ km

- Después de la clase de educación física, hemos guardado en 4 cajas los 9 balones que teníamos. Cada caja contiene un número impar de balones y en ningún caso coinciden el número de balones de dos cajas. ¿Cómo es posible?



- De 30 jóvenes a los que se entrevistó en una sala de baile, 15 declararon ser aficionados al rock, y 13, al electro-latino. De ellos, 6 aseguraron ser aficionados a ambos ritmos musicales.



¿Cuántos no son aficionados ni a lo uno ni a lo otro?

Como hay 6 a quienes les gusta el rock y el electro-latino, a los chicos y a las chicas que les gusta uno de los dos estilos o ambos a la vez son: $15 + 13 - 6 = 22$.

Como en total hay 30, a quienes no les gusta ni lo uno ni lo otro son $30 - 22 = 8$.

Autoevaluación

1. Describe, mediante una expresión algebraica, los enunciados siguientes:

- El precio de la pintura que se obtiene al mezclar 5 kg de una de 3 €/kg con 7 kg de otra de x €/kg.
- Lo que tenemos que pagar por un helado, un refresco y un café, si el helado cuesta el triple que el café y el refresco la mitad que el helado.
- El área total y el volumen de un prisma de base cuadrada de lado x y de 5 cm de altura.

a) El precio es $\frac{3 \cdot 5 + 7 \cdot x}{5 + 7} = \frac{15 + 7x}{12}$

b) Si x es el precio de un café, $x + 3x + \frac{3}{2}x = \frac{2x + 6x + 3x}{2} = \frac{11}{2}x$

c) Área total = $2x^2 + 4 \cdot 5x = 2x^2 + 20x$

Volumen = $x^2 \cdot 5 = 5x^2$

2. Efectúa y reduce:

a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x$

b) $4\left[(x - 2)^2 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right]$

a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x = 9x^3 - 12x^2 + 4x - 2x^3 + 7x^2 - 3x = 7x^3 - 5x^2 + x$

b) $4\left[(x - 2)^2 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4\left[x^2 - 4x + 4 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4x^2 - 16x + 16 - 3x^2 - 16 = x^2 - 16x$

3. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{5(x-1)}{9} + \frac{7x-2}{12} - \frac{x(x-1)}{2}$$

$$36\left(\frac{5(x-1)}{9} + \frac{7x-2}{12} - \frac{x(x-1)}{2}\right) = 20(x-1) + 3(7x-2) - 18x(x-1) =$$

$$= 20x - 20 + 21x - 6 - 18x^2 + 18x = -18x^2 + 59x - 26$$

4. Transforma en productos el numerador y el denominador y simplifica la fracción siguiente:

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9}$$

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9} = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+3}$$

5. Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(3x^4 - x^3 + 2x^2 + 4) : (x^2 + x)$

b) $(x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 4 \quad | \quad x^2 + x \\ - 3x^4 - 3x^3 \quad \quad \quad 3x^2 - 4x + 6 \\ \hline \quad - 4x^3 + 2x^2 + 4 \\ \quad + 4x^3 + 4x^2 \quad \quad \quad \\ \hline \quad \quad 6x^2 + 4 \\ \quad \quad - 6x^2 - 6x + 4 \\ \hline \quad \quad \quad - 6x + 4 \end{array}$$

Cociente: $3x^2 - 4x + 6$; Resto: $-6x + 4$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & & -2 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array} \end{array}$$

Cociente: $x^2 + x - 4$; Resto: 10

6. Efectúa y simplifica si es posible.

a) $\frac{3-x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{x-5}{2x}$

b) $\left(\frac{x-2}{x} \cdot \frac{3x}{x+1}\right) : (x-2)$

a) $\frac{3-x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{x-5}{2x} = \frac{2(3-x)}{2x^2} + \frac{2x}{2x^2} - \frac{x(x-5)}{2x^2} = \frac{6-2x+2x-x^2+5x}{2x^2} = \frac{-x^2+5x+6}{2x^2}$

b) $\left(\frac{x-2}{x} \cdot \frac{3x}{x+1}\right) : (x-2) = \frac{3x(x-2)}{x(x+1)(x-2)} = \frac{3}{x+1}$

7. ¿Cuál debe ser el valor de m para que 2 sea raíz del polinomio $P = 2x^3 + mx^2 + 12$?

$2 \cdot 2^3 + m \cdot 2^2 + 12 = 0 \rightarrow 16 + 4m + 12 = 0 \rightarrow 4m = -28 \rightarrow m = -7$

8. ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) La expresión $9x^3 - 15x^2 = 3x^2(3x - 5)$ es una identidad.

b) Si multiplicamos dos binomios de grados 1 y 2, se obtiene un polinomio de grado 3.

c) Si sumamos dos binomios, se obtiene siempre un binomio.

d) Los números son monomios.

e) Los monomios $3a^2b$ y $-3ab^2$ son semejantes.

f) Al dividir $3x^2y^2 : 6xy^2$ se obtiene un monomio.

a) Verdadero, se ha extraído factor común.

b) Verdadero. $(ax) \cdot (byz) = (abxyz)$

c) Falso. Por ejemplo: $(x^2 + 3) + (3x - 2) = x^2 + 3x + 1$.

d) Falso. Un monomio ha de tener parte literal.

e) Falso, ya que las partes literales de ambos son distintas.

f) Verdadero. Se obtiene $\frac{x}{2}$.