

Ejercicios resueltos de progresiones aritméticas

1) En cada una de las progresiones siguientes, halla los términos que faltan en cada una de ellas:

- a) 4, 8, 12, 16, ____, 24, ____, ____, 36, 40...
- b) $1, \frac{3}{2}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \frac{11}{2}$...
- c) 10, 8, ____, 4, ____, ____, ____, ____, ____, ...
- d) 2, ____, 6, ____, 10, ____, 14, ____, 18...
- e) $-\pi, 0, \pi, \underline{\quad}, 3\pi, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}$...

2) Escribe el término general de estas progresiones aritméticas conociendo los datos que se dan para cada caso:

- a) $a_3 = 8$ $a_6 = 14$
- b) $a_1 = 5$ $a_5 = 17$
- c) $a_4 = 4/3$ $d = 1/3$

3) En una progresión aritmética cuyo primer término es 5 y cuya diferencia es 4, calcula el decimotercer término.

4) En una progresión aritmética de diferencia 6, el noveno término es 72. Calcula el primer término.

5) En una progresión aritmética cuyo primer término es 11 y cuya diferencia es 5, un término vale 61. ¿Qué lugar ocupa este término en la sucesión?

6) En una progresión aritmética cuyo primer término es 15, el término noveno vale 55 ¿Cuál es la diferencia?

7) Encontrar siete números entre 5 y 85 de modo que los nueve números estén en progresión aritmética.

8) El primer término de una progresión aritmética es 5 y su diferencia es 4. ¿Cuál es la suma de los nueve primeros términos?

9) Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es 8 y cuya diferencia es 2,6.

10) Calcula la suma de los cincuenta primeros términos de la progresión aritmética en la que $a_4 = -12$ y $a_{14} = 95$.

Soluciones

1) En cada una de las progresiones siguientes, halla los términos que faltan en cada una de ellas:

- a) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40...

Esta es fácil. Cada término es el anterior más cuatro unidades.

- b) $1, \frac{3}{2}, \underline{2}, \underline{\frac{5}{2}}, \underline{3}, \underline{\frac{7}{2}}, \underline{4}, \underline{\frac{9}{2}}, \underline{5}, \frac{11}{2}$...

Aquí las fracciones pueden despistar un poco. Pero para sacar la diferencia basta restar el segundo término menos el primero. Verás que sale $\frac{1}{2}$

- c) 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8 ...

Fácil también. Recuerda que en las progresiones aritméticas también se puede restar un número en cada paso (al fin y al cabo, restar dos que es lo mismo que sumar -2)

d) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18...

En este no tenemos dos términos seguidos para ver cuánto se ha sumado de uno a otro. Pero podemos razonar que si se ha pasado de 2 a 6 en dos saltos, en cada uno se ha tenido que sumar 2.

e) $-\pi$, 0, π , 2π , 3π , 4π , 5π , 6π , 7π , 8π ...

Por que aparezca el número π el ejercicio no es más difícil que los demás. Fíjate que del primer término al segundo (o del segundo al tercero) se ha sumado π . A partir de ahí, el resto es lo de siempre.

2) *Escribe el término general de estas progresiones aritméticas conociendo los datos que se dan para cada caso:*

a) $a_3 = 8$ $a_6 = 14$

Este es parecido al apartado d) del ejercicio anterior. Si del tercer término al sexto (tres saltos) se ha sumado 6, entonces en cada salto se ha tenido que sumar 2. Con esto tenemos:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_3 = 8 = a_1 + (3-1) \cdot 2$$

Y de aquí sacamos que $a_1 = 4$. El término general es:

$$a_n = 4 + (n-1)2$$

b) $a_1 = 5$ $a_5 = 17$

$$a_5 = 17 = 5 + (5-1)d$$

De aquí sacamos que $d = 3$. El término general es:

$$a_n = 5 + (n-1)3$$

c) $a_4 = 4/3$ $d = 1/3$

calculamos a_1 como en el apartado a) de este ejercicio.

$$a_4 = 4/3 = a_1 + (4-1)1/3$$

Si operas verás que $a_1 = 1/3$. Por lo tanto, el término general es

$$a_n = 1/3 + (n-1)1/3$$

3) *En una progresión aritmética cuyo primer término es 5 y cuya diferencia es 4, calcula el decimotercer término.*

Hallamos el decimotercer término usando la fórmula del término general, de la cual nos dan todos los datos que necesitamos.

$$a_{13} = 5 + (13-1) \cdot 4$$
$$a_{13} = 5 + 12 \cdot 4 = 53$$

4) En una progresión aritmética de diferencia 6, el noveno término es 72. Calcula el primer término.

Como el problema anterior, sólo que la incógnita es ahora el primer término:

$$\begin{aligned}a_9 &= 72 = a_1 + (9-1) \cdot 6 \\72 &= a_1 + 8 \cdot 6 \\a_1 &= 72 - 48 = 24\end{aligned}$$

5) En una progresión aritmética cuyo primer término es 11 y cuya diferencia es 5, un término vale 61. ¿Qué lugar ocupa este término en la sucesión?

Primero tenemos que hallar el término general, para lo cual tenemos todos los datos:

$$a_n = 11 + (n-1) \cdot 5$$

Luego sabemos que a_n es 61, lo que no conocemos es la n , el lugar del número en la sucesión. Nos basta con resolver la ecuación.

$$\begin{aligned}a_n &= 61 = 11 + (n-1) \cdot 5 \\50 &= (n-1) \cdot 5 \\n - 1 &= 50/5 \\n &= 10 + 1 \\n &= 11\end{aligned}$$

6) En una progresión aritmética cuyo primer término es 15, el término noveno vale 55 ¿Cuál es la diferencia?

Se resuelve igual que el apartado b) del ejercicio 2.

$$\begin{aligned}a_9 &= 55 = 15 + (9-1) \cdot d \\40 &= 8d \\d &= 5\end{aligned}$$

7) Encontrar siete números entre 5 y 85 de modo que los nueve números estén en progresión aritmética.

La situación que nos plantea el problema es como si tuviésemos que resolver esto:

$$5, _, _, _, _, _, _, _, 85$$

es decir, como si a_1 valiese 5 y a_9 85. A partir de ahí, el ejercicio se resuelve como el apartado a) del ejercicio 2.

$$\begin{aligned}a_9 &= 85 = 5 + (9-1) \cdot d \\80 &= 8d \\d &= 10\end{aligned}$$

Ahora que conocemos la diferencia, hallar los siete términos intermedios no supone ninguna dificultad:

$$5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85$$

8) El primer término de una progresión aritmética es 5 y su diferencia es 4. ¿Cuál es la suma de los nueve primeros términos?

Para hallar la suma de los x primeros términos de una progresión aritmética tenemos que recurrir a la fórmula:

$$S_n = (a_n + a_1) \cdot n/2$$

De aquí conocemos a_1 (5) y n (el número de términos, 9). Nos falta hallar el último término, a_9 . Para ello, utilizamos la fórmula del término general, de la cual tenemos todos los datos.

$$\begin{aligned} a_9 &= 5 + (9-1) \cdot 4 \\ a_9 &= 37 \end{aligned}$$

Y ahora volvemos a la fórmula de la suma:

$$\begin{aligned} S_9 &= (37 + 5) \cdot 9/2 \\ S_9 &= 189 \end{aligned}$$

9) Calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es 8 y cuya diferencia es 2,6.

Igual que el ejercicio anterior (el que la diferencia sea decimal no significa nada distinto):

$$\begin{aligned} a_{10} &= 8 + (10-1) \cdot 2,6 \\ a_{10} &= 8 + 9 \cdot 2,6 \\ a_{10} &= 31,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= (31,4 + 8) \cdot 10/2 \\ S_{10} &= 197 \end{aligned}$$

10) Calcula la suma de los cincuenta primeros términos de la progresión aritmética en la que $a_4 = -12$ y $a_{14} = 95$.

Aquí necesitamos tanto el primer término como el último (el término 50). Para ello calculamos primero el término general a partir de los datos que nos dan (se procede igual que el apartado a) del ejercicio 2).

Del término cuarto al decimocuarto ha habido diez saltos, y se ha aumentado un total de $95 - (-12) = 107$ unidades. Por lo tanto, en cada salto se ha aumentado $107/10 = 10,7$ unidades.

$$\begin{aligned} a_4 &= -12 = a_1 + (4-1) \cdot 10,7 \\ -12 &= a_1 + (4-1) \cdot 10,7 \\ a_1 &= -12 - 32,1 = -44,1 \end{aligned}$$

Ya tenemos todos los datos para plantear el término general y calcular el término 50:

$$\begin{aligned} a_{50} &= -44,1 + (50-1) \cdot 10,7 \\ a_{50} &= -44,1 + 524,3 = 480,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{50} &= (480,2 + (-44,1)) \cdot 50/2 \\ S_{50} &= 10902,5 \end{aligned}$$