3 Progresiones

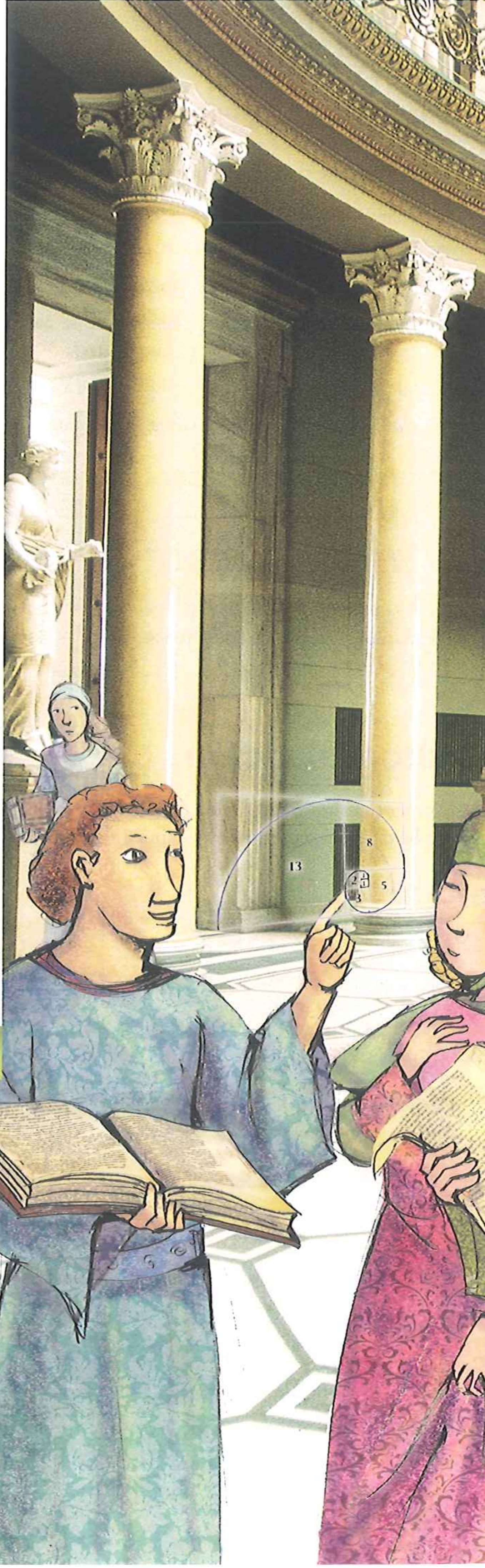
Las progresiones geométricas fueron tratadas por primera vez, de forma rigurosa, por **Euclides,** matemático griego del siglo III a.C. Fue el fundador y primer director de la gran escuela matemática de Alejandría, donde escribió su monumental obra *Elementos*, que consta de 13 libros en los que se desarrolló sobre todo la geometría, pero cuatro de ellos los dedicó a la aritmética. En uno de estos, el IX, trató las progresiones geométricas. Aunque sus resultados son similares a los que se exponen en esta unidad, la nomenclatura era muy distinta. Incluso cambia el nombre: Euclides las llamó *proporciones continuas*.

En el siglo I, **Nicómaco** recopiló lo que entonces se sabía de aritmética, casi todo conocido desde Euclides. Aunque sus aportaciones fueron escasas, en su obra incluyó el estudio de las progresiones aritméticas, que no trató Euclides cuatrocientos años antes.

Hay que esperar hasta el siglo XIII para que aparezca la sucesión más conocida de la historia, la de Fibonacci:

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad \ldots$$

Su autor, **Leonardo de Pisa** (hijo de Bonaccio: **Fibonacci**), la describió en su *Liber Abaci*, en un contexto de descendencia de conejos: "Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando por una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja que se reproduce, a su vez, desde el segundo mes".

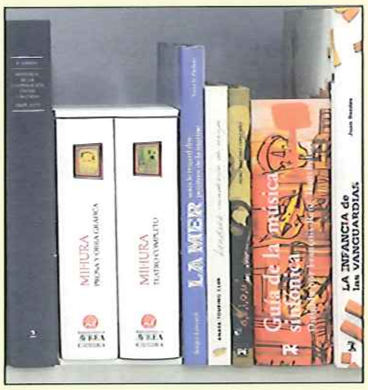


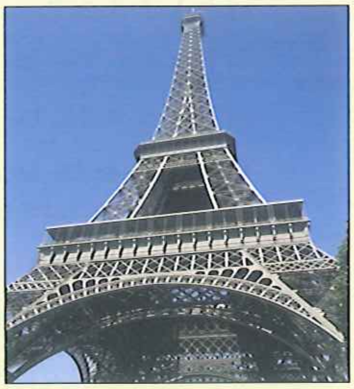
PARA EMPEZAR...

▼ Una progresión asombrosa

Supón que tienes una hoja de papel de 0,14 mm de grosor. Cada vez que la pliegas se duplica su grosor. Cuando has hecho seis o siete dobleces, ya no puedes doblarla más, pero imagina que pudieras hacerlo diez, veinte e, incluso, cincuenta veces. ¿Qué grosor crees que llegaría a alcanzar ese papel?

- Comprueba que con 10 dobleces superarías el grosor del libro más gordo de la biblioteca. Y, más asombroso, con 22 dobleces obtendrías un grosor mayor que la altura de la torre Eiffel (324 m).





Para realizar tus cálculos, utiliza el *factor constante* en la calculadora. Recuerda:

— Si tienes calculadora con PANTALLA SENCILLA, con la secuencia:

$$2\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\dots$$

se obtienen los resultados 4, 8, 16, …

Cada vez que das a la tecla $\boxed{=}$, se multiplica por 2 (se duplica) el número que hay en la pantalla.

Si efectúas $2\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,0{,}14\,\underbrace{\boxed{=}\,\boxed{=}\dots\boxed{=}}_{n\text{ veces}}$, obtienes, en milímetros, el grosor alcanzado por el papel tras n dobleces.

— Con calculadora de PANTALLA DESCRIPTIVA, la secuencia es:

$$2\,\boxed{=}\,\boxed{\text{Ans}}\,\boxed{\times}\,0{,}14\,\boxed{=}\,\boxed{=}\dots\boxed{=}$$

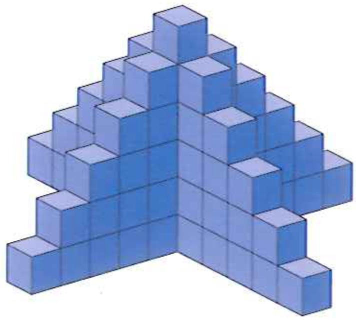
- ¿Cuántos dobleces necesitarías para superar la altura del Everest (8 848 m)?
- ¿Cuál sería el grosor si lo pudieras doblar 50 veces? Compáralo con la distancia de la Tierra al Sol (150 millones de kilómetros).

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se usan el "factor constante" y el "sumando constante" con la calculadora.
- Algunas propiedades de las potencias y los radicales.

WWW **1.** Todas estas cuestiones están desarrolladas en www.anayadigital.com, junto con algunas actividades para practicar sobre ellas.

1 Sucesiones



¿A cuál de las sucesiones de la derecha corresponde esta torre?

Las **sucesiones** son conjuntos de números (u otros objetos) dados ordenadamente. Por ejemplo:

a) 1, 5, 9, 13, 17, …

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, …

d) 1, –3, 9, –27, 81, –243, …

e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

f) 170, 120, 70, 20, –30, –80, …

g) 1, 3, 6, 8, 16, 18, 36, …

Cada una de las sucesiones anteriores se construye siguiendo un cierto criterio. Algunos son evidentes:

— Sumar siempre la misma cantidad.

— Multiplicar siempre por la misma cantidad.

Otros son menos evidentes:

— Cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

— Alternativamente, sumamos o multiplicamos por un mismo número.

A los elementos de la sucesión los llamamos **términos.** Podemos referirnos al primer término, al segundo término, al tercer término… de una sucesión c, pero es más cómodo llamarlos $c_1, c_2, c_3, \dots$

Así, por ejemplo, para indicar que en la primera sucesión la diferencia de cada término al anterior es 4, podemos escribir:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = 4$$

WWW **2.** Refuerza el concepto de sucesión.

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión:

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, \dots$$

Actividades

1 Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.

2 Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.

3 Indica cuál es la relación $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \dots$ de la sucesión c) de arriba.

4 Establece la relación (cociente) entre cada dos términos consecutivos de la sucesión d) que aparece arriba.

Término general de una sucesión

A veces, podemos encontrar una expresión que sirve para obtener un término cualquiera de la sucesión con solo saber el lugar que este ocupa.

Por ejemplo, para la sucesión a) 1, 5, 9, 13, 17, … de la página anterior, encontramos la expresión $a_n = 4n - 3$, pues dándole a n los valores 1, 2, 3, 4, …, obtenemos los términos $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$a_n = 4n - 3$ es el **término general** de esta sucesión.

Se llama **término general** de una sucesión s (y se simboliza con s_n) a la expresión que representa un término cualquiera de esta.

Hay sucesiones cuyo término general puede expresarse mediante una fórmula, $s_n = f(n)$, en la cual, dándole a n un cierto valor, se obtiene el término correspondiente.

Las sucesiones que habitualmente manejaremos estarán formadas siguiendo algún criterio. Algunas vendrán dadas por su término general o será fácil obtenerlo. Pero en otras, cada término se obtendrá operando con los anteriores.

Las **sucesiones** cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores se dice que están dadas en **forma recurrente.**

WWW **3.** Refuerza el concepto de término general de una sucesión.

Por ejemplo, en la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, cada término es la suma de los dos anteriores, $e_n = e_{n-1} + e_{n-2}$.

Actividades

5 Comprueba, para b), c), d) y f) de la página anterior, que: $b_n = n^2$; $c_n = 2^n$; $d_n = (-3)^{n-1}$; $f_n = 220 - 50n$.

6 Escribe los cinco primeros términos de:

$$g_n = n^3 \qquad h_n = n^2 - 3n + 7 \qquad i_n = \frac{n-3}{n+4}$$

7 Forma una sucesión recurrente con estos datos:

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-2} + j_{n-1}$$

8 Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.

9 Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$ b) $b_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $c_n = (n-1)(n-2)$ d) $d_n = n^2 - n$

10 Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

11 Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).

12 a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$a_n \rightarrow$ 1, –1, 1, –1, 1, –1, …

$b_n \rightarrow$ 1, –2, 3, –4, 5, –6, …

2 Progresiones aritméticas

Con calculadora

Añade cuatro términos a cada una de las sucesiones de la derecha. Si decimos que en a) la diferencia es 3, ¿cuál será la diferencia en las demás?

Con calculadora de pantalla sencilla generamos las sucesiones así:

a) 3 ⊕⊕ 2 ⊜⊜⊜⊜⊜⊜ …

b) 20 ⊕⊕ 120 ⊜⊜⊜⊜⊜⊜ …

c) 2 [+/-]⊕⊕ 9 ⊜⊜⊜⊜⊜⊜ …

d) 0,04 ⊕⊕ 5,83 ⊜⊜⊜⊜⊜ …

Y con calculadora de pantalla descriptiva, así:

a) 2 ⊜[Ans]⊕ 3 ⊜⊜⊜⊜⊜ …

b) 120 ⊜[Ans]⊕ 20 ⊜⊜⊜⊜ …

c) 9 ⊜[Ans]⊕(-) 2 ⊜⊜⊜⊜ …

d) 5,83 ⊜[Ans]⊕ 0,04 ⊜⊜⊜⊜ …

Observa las siguientes sucesiones:

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, …

b) 120, 140, 160, 180, 200, 220, …

c) 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, …

d) 5,83; 5,87; 5,91; 5,95; 5,99; 6,03; …

A estas sucesiones se las llama **progresiones aritméticas.**

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo), al que se llama **diferencia,** d, de la progresión.

Obtención del término general

Una progresión aritmética queda perfectamente determinada si conocemos el primer término y la diferencia. Por ejemplo, en la progresión a) de arriba, $a_1 = 2$ y $d = 3$. ¿Cómo hallaríamos el término 100?

— Para pasar del a_1 al a_{100}, hemos de dar 99 pasos.

— Cada paso supone aumentar 3 unidades.

— Por tanto, para pasar del término a_1 al a_{100}, aumentamos $99 \cdot 3 = 297$ unidades.

— Es decir, $a_{100} = 2 + 297 = 299$.

El **término general** a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d se obtiene razonando así:

Para pasar de a_1 a a_n damos $n - 1$ pasos de amplitud d. Por tanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Actividades

WWW **4.** Refuerza el concepto de progresión aritmética.

1 El primer término de una progresión aritmética es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2,5$. Escribe sus diez primeros términos.

Haz lo mismo para otra cuyo primer término es $t_1 = 20$ y cuya diferencia es $d = -3$.

2 Calcula, para las progresiones de arriba:

$$b_{36} \qquad c_{31} \qquad d_{1000}$$

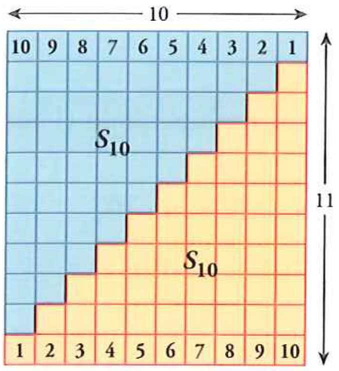
3 Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).

4 a) Si dos términos de una progresión son:

$$s_1 = 6 \text{ y } s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.



$$S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

Suma de los términos de una progresión aritmética

Los números naturales forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$. Veamos cómo obtenemos la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$:

$$\begin{array}{l} S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ S_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{10} = 11 + 11 + 11 + \ldots\ldots\ldots + 11 + 11 \end{array}$$

$$2S_{10} = 10 \cdot 11 \longrightarrow S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

Esta forma simplificada de proceder se debe a la siguiente propiedad:

En una progresión aritmética de n términos, los términos equidistantes de los extremos suman lo mismo:

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \quad \ldots \quad a_{n-2} \xleftarrow{-d} a_{n-1} \xleftarrow{-d} a_n$$

$$\left.\begin{array}{r} a_2 = a_1 + d \\ a_{n-1} = a_n - d \end{array}\right\} a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \qquad \left.\begin{array}{r} a_3 = a_1 + 2d \\ a_{n-2} = a_n - 2d \end{array}\right\} a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

Basándonos en esta propiedad y utilizando el mismo procedimiento, podemos obtener la fórmula general para sumar los n primeros términos de una progresión aritmética: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

$$\begin{array}{l} \text{Suma} \longrightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \left.\begin{array}{r}\text{Suma}\\ \text{invertida}\end{array}\right\} \longrightarrow S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n = (a_1 + a_n) + (\ ) + (\ ) + \ldots + (\ ) + (\ ) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Hay n paréntesis y el resultado de cada uno de ellos es $a_1 + a_n$. Por tanto:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \longrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

WWW **5.** Refuerza el cálculo de la suma de los términos de una progresión aritmética.

La **suma** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ de los n **primeros términos** de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Actividades

5 Halla la suma de todos los números impares menores que 100.

6 a) Si $a_1 = 5$ y $a_2 = 7$, calcula a_{40} y S_{40}.

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 12$, calcula S_{32}.

7 Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.

8 Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

3 Progresiones geométricas

Observa las siguientes sucesiones:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, … Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Se trata de una progresión geométrica de razón 2.

b) 3, 30, 300, 3 000, … Es una progresión geométrica de razón 10.

También son progresiones geométricas las tres sucesiones siguientes:

c) 80; 40; 20; 10; 5; 2,5; … Su razón es $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

d) 80; 8; 0,8; 0,08; … Su razón es $\frac{1}{10} = 0{,}1$.

e) 3, –6, 12, –24, 48, –96, … Su razón es –2.

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un número fijo, r, llamado **razón.**

Con calculadora

Añade dos términos a cada una de las progresiones a), b), c), d), e) que aparecen a la derecha.

Obtén nuevamente, ahora con la calculadora, las cinco progresiones geométricas usando el **factor constante.**

Por ejemplo, para a):

2 [×][×] 3 [=] [=] [=] [=] [=] …

6 12 24 48 96

O bien, con la calculadora de pantalla descriptiva:

3 [=] [Ans] [×] 2 [=] [=] [=] [=] …

6 12 24 48

WWW 6. Refuerza el concepto de progresión geométrica.

Obtención del término general

Una progresión geométrica queda completamente definida si conocemos el primer término y la razón. Por ejemplo, en la progresión a), el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$. ¿Cómo hallaríamos el término 25?

— Para pasar del a_1 al a_{25}, hemos de dar 24 pasos.

— Cada paso supone multiplicar por 2. Por tanto, para pasar del a_1 al a_{25} habremos de multiplicar veinticuatro veces por 2; es decir, por 2^{24}.

— Así, $a_{25} = 3 \cdot 2^{24} = 3 \cdot 16\,777\,216 = 50\,331\,648$.

Las progresiones geométricas de razón mayor que 1 *crecen de forma sorprendente*, dando lugar a situaciones curiosísimas, como la estudiada en la segunda página de esta unidad.

El **término general** a_n de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r se obtiene razonando del siguiente modo:

Para pasar de a_1 a a_n hemos de dar $n - 1$ pasos. Cada paso consiste en multiplicar por r. Por tanto:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Observa

En las progresiones geométricas se verifica:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \dots$$

¿Comprendes por qué Euclides las llamaba **proporciones continuas**?

Problemas resueltos

1. Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $a_1 = 250$ y $a_2 = 300$. Calcular r, a_6 y a_n.

$a_2 = a_1 \cdot r \;\rightarrow\; 300 = 250 \cdot r \;\rightarrow\; r = \frac{300}{250} = 1{,}2$

$a_1 = 250,\ a_2 = 300,\ a_3 = 360,\ a_4 = 432,\ a_5 = 518{,}4;\ a_6 = 622{,}08$

TÉRMINO GENERAL: $a_n = 250 \cdot 1{,}2^{n-1}$

Con calculadora

1,2 [×][×] 250 [=] [=] [=] [=] …

300 360 432 518,4

O bien:

250 [=] [Ans] [×] 1,2 [=] [=] …

Observa

Cuando r es negativo:

— Si a_1 es positivo, son negativos los términos pares.

— Si a_1 es negativo, son negativos los términos impares.

2. En una progresión geométrica, $a_1 = 625$ y $a_3 = 400$. Hallar sus primeros términos.

Lo primero es calcular la razón:

$a_3 = a_1 \cdot r^2 \;\rightarrow\; 400 = 625 \cdot r^2 \;\rightarrow\; r^2 = 400/625 = 0{,}64 \;\rightarrow\; r = \pm 0{,}8$

Hay dos progresiones geométricas que cumplen las condiciones impuestas. Sus razones son $r = 0{,}8$ y $r' = -0{,}8$.

- $r = 0{,}8 \;\rightarrow\; 625,\ 500,\ 400,\ 320,\ 256,\ \ldots$
- $r' = -0{,}8 \;\rightarrow\; 625,\ -500,\ 400,\ -320,\ 256,\ \ldots$

3. En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 3$ y $a_3 = 6$. Hallar a_n, a_{20} y a_{21}.

$a_3 = a_1 \cdot r^2 \;\rightarrow\; 3r^2 = 6 \;\rightarrow\; r^2 = 6/3 = 2 \;\rightarrow\; r = \pm\sqrt{2}$

Como los términos son positivos, la razón también lo es: $r = \sqrt{2}$

$$a_n = 3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$$

$$a_{20} = 3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{19} = 3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{18} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 2^9 \cdot \sqrt{2} = 1\,536 \cdot \sqrt{2}$$

$$a_{21} = a_{20} \cdot r = \left(1\,536\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} = 1\,536 \cdot 2 = 3\,072$$

4. Un centurión le pidió al césar que le recompensara por su valentía. El césar, mostrándole grandes montones de monedas, le dijo: "Puedes tomar un denario; mañana, 2; al día siguiente, 4; al otro, 8. Así, sucesivamente, cada día duplicarás lo del anterior. Pero lo de cada día deberás llevártelo tú solo y de una sola vez. Te permito usar un carro".

Suponiendo que un denario pesara 20 g y que lo máximo que consiguiera llevar en un carro fuera una tonelada, ¿cuántos días duró la recompensa? ¿Cuál fue el número de denarios de la última carretada?

Denarios que hay en una tonelada $\rightarrow$ $1\,000\,000 : 20 = 50\,000$

Denarios que se lleva cada día $\rightarrow$ $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

¿Cuál será el mayor valor de n para que 2^{n-1} sea menor que 50 000? Utilizando el factor constante obtenemos que $2^{15} = 32\,768$ y $2^{16} = 65\,536$. Así, $n - 1 = 15 \rightarrow n = 16$

La recompensa duró 16 días, y el último día se llevó 32 768 denarios.

Actividades

1 Construye una progresión geométrica cuyo primer término es 125 y cuya razón es 0,4.

2 De una progresión geométrica conocemos $a_1 = 0{,}625$ y $a_3 = 0{,}9$. Halla r y los seis primeros términos.

3 En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 2$ y $a_3 = 6$. Halla a_n, a_{11} y a_{12}.

4 En una progresión geométrica, el primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 1{,}4$. Averigua, con ayuda de la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es inferior a 1 000 000.

5 En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $r = 0{,}8$. Averigua, con la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es mayor que 1.

Suma de los términos de una progresión geométrica

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica puede expresarse mediante una sencilla fórmula en la que solo intervienen la razón y los términos extremos. Vamos a obtenerla:

WWW 7. Ayuda al razonamiento. Suma de los términos de una progresión geométrica.

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por r, resulta:

$$S_n \cdot r = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + \ldots + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r =$$
$$= a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n \cdot r$$

Restando $S_n \cdot r - S_n$:

$$S_n \cdot r = \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n \cdot r$$
$$S_n = a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n}$$
$$S_n \cdot r - S_n = -a_1 + a_n \cdot r$$

$$S_n \cdot r - S_n = a_n \cdot r - a_1 \rightarrow S_n \cdot (r-1) = a_n \cdot r - a_1 \rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

La suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}, \text{ pues } a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Problema resuelto

Sin duda conoces la leyenda del inventor del ajedrez. Como pago por su invento, el sabio pidió al rey un grano de trigo por la primera casilla del tablero; dos, por la segunda; cuatro, por la tercera…; por cada casilla, el doble de granos que por la anterior. ¿Cuántos granos pidió en total?

Estamos ante una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$.

Como hay 64 casillas, el último término es $a_{64} = 2^{63}$ granos. La suma es:

$$S_{64} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Esto corresponde a casi 1 000 veces la producción anual de trigo en toda la Tierra.

WWW 8. Refuerza el cálculo de la suma de los términos de una progresión geométrica.

Actividades

6 Siguiendo el procedimiento utilizado para hallar S_n, calcula 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384.

7 ¿Cuántos denarios se llevó, en total, el centurión del problema resuelto 4 de la página anterior?

8 Calcula la suma de los diez primeros términos de una progresión geométrica que cumpla $a_1 = 8{,}192$ y $r = 2{,}5$.

9 Efectúa la suma $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^7$.

Suma de los términos de una progresión geométrica con $|r| < 1$

Todo lo estudiado hasta ahora sobre progresiones geométricas es válido cualquiera que sea el valor de r. Sin embargo, si $0 < r < 1$ (r positivo y menor que 1), los términos de la progresión decrecen aproximándose a cero. Ello hace que estas progresiones sean especialmente interesantes; sobre todo, la suma de sus términos.

En estas progresiones geométricas decrecientes, como $a_n \cdot r$ es menor que a_1, con objeto de que el numerador y el denominador sean números positivos, pondremos la fórmula de la suma del siguiente modo:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

El sustraendo $a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n$ se hace cada vez más pequeño y llega a ser insignificante si n es muy grande. Eso se expresa así:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$ Esta fórmula también es válida cuando la razón es negativa: $-1 < r < 0$

La suma de "todos" los términos de una progresión geométrica en la que su razón verifica $0 < |r| < 1$ se expresa como S_∞ y se obtiene así: $S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$.

Ejercicios resueltos

1. Calcular la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica en la que:

$$a_1 = 10 \qquad r = \frac{2}{3}$$

1. Puesto que $r = \frac{2}{3}$ es menor que 1, podemos aplicar la fórmula:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{10}{1 - (2/3)} = \frac{10}{1/3} = 30$$

2. Hallar los siete primeros términos, su suma y la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica en la que:

$$a_1 = 16 \qquad r = -\frac{1}{2}$$

2. $a_1 = 16,\ a_2 = -8,\ a_3 = 4,\ a_4 = -2,\ a_5 = 1,\ a_6 = -\frac{1}{2},\ a_7 = \frac{1}{4}$

$$S_7 = 16 - 8 + 4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{(1/4) \cdot (-1/2) - 16}{(-1/2) - 1} = \frac{43}{4} = 10{,}75$$

$$S_\infty = \frac{16}{1 - (-1/2)} = \frac{16}{3/2} = \frac{32}{3} = 10{,}\widehat{6}$$

Actividades

WWW **9.** Refuerza el cálculo de la suma de los términos de una progresión geométrica con $|r| < 1$.

10 En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $r = 0{,}75$. Calcula la suma de sus infinitos términos.

11 En una progresión geométrica, $a_1 = 30$ y $r = -0{,}2$. Calcula la suma de "todos" sus términos.

12 En una progresión geométrica, su cuarto término es $a_4 = 10$ y el sexto es $a_6 = 0{,}4$. Halla: la razón, r; el primer término, a_1; el octavo término, a_8; la suma de los ocho primeros términos, S_8; y la suma de sus infinitos términos, S_∞.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Sucesiones: formación, término general

1 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) Cada término se obtiene sumando 7 al anterior. El primero es –10.

b) El primer término es 0,1. Los demás se obtienen multiplicando el anterior por 2.

c) El primero es 2; el segundo, 4, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

2 ▼▽▽ Escribe los términos a_{10} y a_{25} de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n - 1$ b) $b_n = \dfrac{n^2+1}{2}$

c) $c_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ d) $d_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{10}$

e) $e_n = n(n-1)$ f) $f_n = \dfrac{n-2}{n+2}$

3 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de la siguiente sucesión:

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 2a_{n-1} + 3$$

4 ▼▽▽ Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las siguientes sucesiones:

a) 11, 9, 7, 5, … b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dots$

c) 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; … d) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots$

e) 8, 12, 18, 27, … f) 0, 3, 8, 15, …

5 ▼▼▽ Halla el término general de estas sucesiones:

a) 12, 14, 16, 18, … b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$

c) 1, 3, 9, 27, … d) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 4 \cdot 5, \dots$

6 ▼▼▽ Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:

a) 8, 10, 2, –8, –10, …

b) $3, 2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dots$

Progresiones aritméticas

7 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos y a_{20} de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 1{,}5;\ d = 2$ b) $a_1 = 32;\ d = -5$

c) $a_1 = 5;\ d = 0{,}5$ d) $a_1 = -3;\ d = -4$

8 ▼▽▽ Halla, en cada caso, el término general y calcula, después, a_{50}:

a) 25, 18, 11, 4, … b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; … d) –3, –8, –13, –18, …

9 ▼▽▽ Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 5;\ d = 2$ b) $a_1 = -1;\ a_2 = -7$

c) Los números pares. d) Los múltiplos de 3.

Progresiones geométricas

10 ▼▽▽ Escribe los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) $a_1 = 0{,}3;\ r = 2$ b) $a_1 = -3;\ r = \dfrac{1}{2}$

c) $a_1 = 200;\ r = -0{,}1$ d) $a_1 = \dfrac{1}{81};\ r = 3$

11 ▼▽▽ Halla, en cada una de las sucesiones siguientes, el término general:

a) 20; 8; 3,2; 1,28; …

b) 40, 20, 10, 5, …

c) 6; –9; 13,5; –20,25; …

d) 0,48; 4,8; 48; 480; …

12 ▼▽▽ Calcula la suma de los diez primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_1 = 5;\ r = 1{,}2$ b) $a_1 = 5;\ r = -2$

13 ▼▽▽ Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_1 = 4;\ r = \dfrac{1}{3}$

b) $a_1 = 17;\ r = 0{,}95$

Aplica lo aprendido

14 ▼▽▽ Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \ldots$ b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

c) 0,2; 0,02; 0,002; … d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

15 ▼▽▽ Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $d = 5;\ a_8 = 37$ b) $a_{11} = 17;\ d = 2$

☞ *Recuerda que $a_8 = a_1 + 7d$; sustituye y halla a_1.*

16 ▼▽▽ Halla la diferencia y el primer término de las progresiones aritméticas siguientes:

a) $a_2 = 18;\ a_7 = -17$ b) $a_4 = 15;\ a_{12} = 39$

☞ *Ten en cuenta que $a_7 = a_2 + 5d$.*

17 ▼▼▽ ¿Qué lugar ocupa un término cuyo valor es 56 en la progresión aritmética definida por $a_1 = 8$ y $d = 3$?

18 ▼▽▽ Calcula la razón y el primer término de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_5 = \frac{1}{81};\ a_3 = \frac{1}{9}$ b) $a_2 = 0{,}6;\ a_4 = 2{,}4$

19 ▼▽▽ Halla el primer término y escribe el término general de las siguientes progresiones:

a) $a_3 = 3;\ r = \frac{1}{10}$ b) $a_4 = 20{,}25;\ r = -1{,}5$

20 ▼▼▽ Calcula la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1\,000$ y $a_4 = 8$.

¿Se puede hallar la suma de sus infinitos términos?

21 ▼▼▽ Calcula las siguientes sumas:

a) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$.

b) Los números pares menores que 1 000.

c) Los números impares menores que 1 000.

Resuelve problemas

22 ▼▼▽ En un teatro, la primera fila dista del escenario 4,5 m, y la octava, 9,75 m.

a) ¿Cuál es la distancia entre dos filas?

b) ¿A qué distancia del escenario está la fila 17?

23 ▼▼▽ Para preparar una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su recorrido cada día. ¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a hacer un recorrido de 15 km?

24 ▼▼▽ En el año 1986 fue visto el cometa *Halley* desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

25 ▼▼▽ La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?

26 ▼▼▽ Un tipo de bacteria se reproduce por bipartición cada cuarto de hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de 6 horas?

27 ▼▼▽ La población de un cierto país aumenta por término medio un 2,5% anual. Si la población actual es de 3 millones, ¿cuál será dentro de 10 años?

28 ▼▼▽ Una máquina envasadora pierde cada año un 15% de su valor. Si ha costado 20 000 €, ¿cuál será su valor dentro de 5 años?

29 ▼▼▽ Una bola que rueda por un plano inclinado recorre 1 m durante el primer segundo, 4 m durante el segundo, 7 m durante el tercero, y así durante 10 segundos. ¿Qué distancia ha recorrido en total?

30 ▼▼▽ Calcula el número de bloques necesarios para construir una torre como la de la figura de la página 60, pero que tenga 50 pisos.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

31 ▼▼▽ Una pelota cae desde una cierta altura y rebota ascendiendo los 3/4 de la altura anterior. Después de dar en el suelo por tercera vez, alcanza 54 cm. ¿Desde qué altura se dejó caer? Calcula la distancia recorrida hasta que se para.

32 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

Calcular la fracción generatriz de $3,\widehat{8}$ utilizando las progresiones geométricas.

$3,\widehat{8} \rightarrow 3,8888\ldots = 3 + 0,8 + 0,08 + 0,008 + \ldots$

Hallamos la suma de los infinitos términos de la progresión $\frac{8}{10}, \frac{8}{100}, \ldots$ de razón $\frac{1}{10}$:

$$S_\infty = \frac{8/10}{1-1/10} = \frac{8/10}{9/10} = \frac{8}{9}$$

$$3,\widehat{8} = 3 + \frac{8}{9} = \frac{35}{9}$$

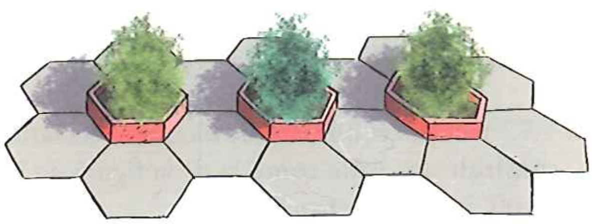
33 ▼▼▽ Calcula la fracción generatriz de estos números utilizando el método del ejercicio anterior:

a) $7,\widehat{3}$ b) $3,5\widehat{4}$ c) $0,\widehat{23}$

34 ▼▼▽ Las edades de 5 hermanos están en progresión aritmética y suman 35 años. El mayor tiene 13 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

35 ▼▼▽ Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los 2/3 del salto anterior. Quiere atravesar una charca circular de 5 m de radio, recorriendo su diámetro. Su primer salto es de 2 m. ¿Pasará por el centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca?

36 ▼▼▽ Para adornar un paseo se colocan a lo largo de su línea central una fila de jardineras hexagonales, rodeadas de baldosas de la misma forma, como muestra la figura. ¿Cuántas baldosas se necesitarán para poner 25 jardineras?



Interés compuesto

37 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

Depositamos en un banco 1 000 € al 4% anual al comienzo de un cierto año. Averiguar el capital disponible al final de cada año, durante 5 años, si no sacamos nada.

En la unidad 1 vimos que un capital C, puesto al r% durante n años se transforma en $C(1 + r/100)^n$. Los valores de esta expresión para $n = 1, 2, 3, \ldots$ forman una progresión geométrica de razón $(1 + r/100)$ [= 1,04 en este problema].

Comprueba que sus primeros términos son:

1 000 €; 1 040 €; 1 081,60 €; 1 124,86 €; 1 169,86 €; 1 216,65 €.

38 ▼▼▽ Depositamos 6 000 € al 5% anual, al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada año, durante 6 años.

39 ▼▼▽ Depositamos en un banco 1 000 € al 2,5% semestral al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada semestre, durante 3 años, si no sacamos ningún dinero.

40 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

Durante cinco años, y al inicio de cada año, ingresamos 1 000 € en un banco, a un interés de un 4% anual. ¿Cuánto dinero tendremos al final del quinto año?

Al cabo de 5 años, el primer ingreso se convierte en $1\,000 \cdot 1,04^5$.

El segundo, después de 4 años, se convierte en $1\,000 \cdot 1,04^4 \ldots$

El último ingreso se convierte en $1\,000 \cdot 1,04$. El capital disponible al final del quinto año es la suma de cinco términos de una progresión geométrica de razón 1,04:

$$S_5 = \frac{a_5 r - a_1}{r-1} = \frac{1\,000 \cdot 1,04^6 - 1\,000 \cdot 1,04}{1,04-1} =$$
$$= 5\,362,98 \text{ €}$$

41 ▼▼▽ Al comienzo de cada año ingresamos 6 000 € al 5% anual. ¿De qué capital dispondremos al final del sexto año?

42 ▼▼▽ Una persona inicia un plan de pensiones ingresando, al principio de cada año, 3 000 € al 6% anual.

¿Qué capital tendrá dentro de 10 años?

Problemas "+"

43 ▼▼▼ Un comerciante recibe un pedido de 20 cajas de naranjas, 7 de clase extra y 13 de una calidad inferior. Quiere exponerlas al público formando una pirámide de base cuadrada con 12 naranjas de lado en la base, de forma que las naranjas visibles sean de la clase extra.

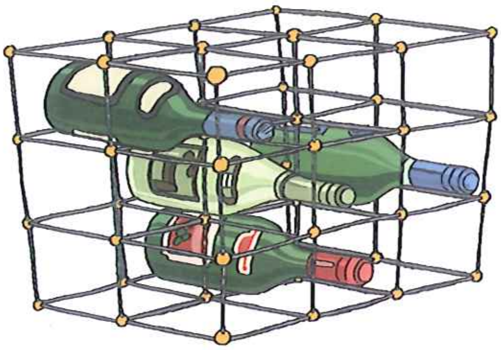
Si en cada caja hay alrededor de 40 naranjas, ¿tendrá suficientes naranjas para ello?

44 ▼▼▼ Un agricultor debe echar un cubo de agua a cada uno de los veinte árboles que hay en su huerto. Estos están alineados a distancias regulares de 6 m a lo largo de un camino, y la distancia del primer árbol a la fuente es de 12 m.

a) Si cada vez lleva un cubo, ¿qué distancia habrá recorrido hasta regar los 20 árboles y dejar el cubo en su posición inicial, junto a la fuente?

b) ¿Y si llevara dos cubos en cada viaje?

45 ▼▼▼ Queremos construir un botellero como el de la figura, en el que cada botella ocupa dos celdillas. Observa que en este caben nueve botellas.



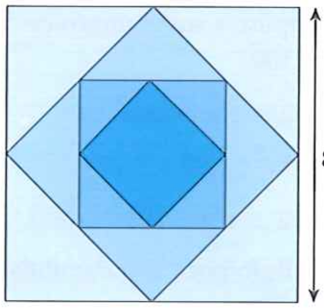
¿Cuántas bolas y cuántos palos son necesarios para hacer uno en el que quepan doce botellas?

46 ▼▼▼ El día 1 de cierto mes, un amigo le propuso a otro un trato:

Cada día de este mes tú me das 100 000 € y yo duplico el dinero que hay en esta caja (un céntimo), que, a fin de mes, te podrás llevar. El otro, después de pensar y echar cuentas con la calculadora, contestó riendo: ¿Por qué no me lo propones dentro de un año, exactamente?

Intenta averiguar en qué fecha pudo tener lugar esta conversación y justifica la respuesta.

47 ▼▼▼ Estos cuadrados se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos:



a) Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esta sucesión. ¿Cuál será su término general?

b) Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.

c) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.

Reflexiona sobre la teoría

48 ▼▽▽ En la progresión $2, \frac{5}{2}, \frac{25}{8}, \frac{125}{32}, \dots$ ¿se puede hallar la suma de sus infinitos términos? Justifícalo.

49 ▼▽▽ Si en una progresión aritmética $a_2 + a_{13} = 32$, ¿podemos saber cuánto vale $a_8 + a_7$? ¿Por qué?

50 ▼▼▽ Euclides, en sus *Elementos*, utiliza la siguiente fórmula para las progresiones geométricas:

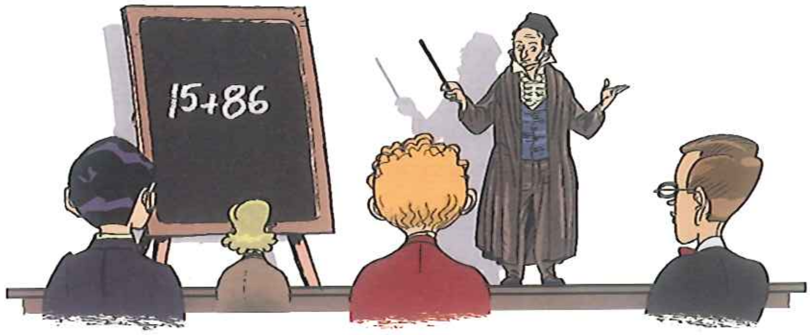
$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

A partir de ella, obtén la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, tal como la hemos estudiado en esta unidad.

Y para terminar…

Infórmate

Un niño llamado Gauss



Hace poco más de dos siglos, un maestro alemán que quería paz y tranquilidad en su clase propuso a sus alumnos de 5 años que calcularan la suma de los números 1 al 100.

A Carl Friedrich Gauss se le ocurrió que:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 50 + 51 = 101$$

Era claro que la suma era $50 \cdot 101 = 5050$.

Al pobre maestro le duró poco la tranquilidad.

Carl Friedrich Gauss. Matemático y astrónomo alemán (1777-1855). Con Newton y Arquímedes forma el trío de matemáticos más relevantes de la historia. Su obra tuvo un influjo permanente en el desarrollo posterior de la ciencia matemática.

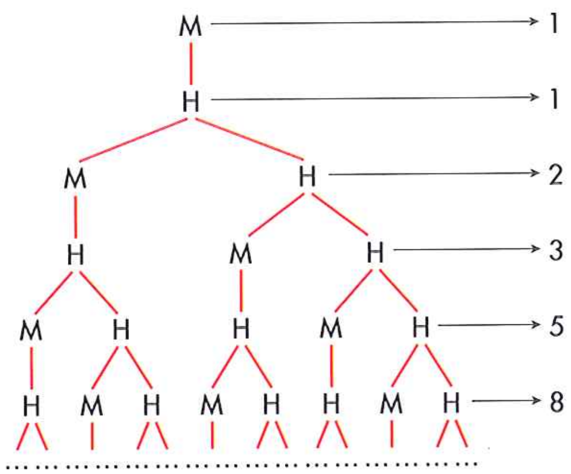
Lee y comprende

Una sucesión famosa

Las abejas macho nacen de huevos no fertilizados; es decir, tienen madre pero no padre.

Las abejas hembra nacen de huevos fertilizados.

El siguiente esquema nos permite observar el número de antepasados de una abeja macho en las distintas generaciones:



- ¿Cuántos antecesores tiene una abeja macho en la décima generación de antepasados?
- ¿Cuál es la ley de formación de la sucesión obtenida: 1, 1, 2, 3, 5, …?
- ¿Recuerdas cómo se llama esta sucesión?

Conjetura y generaliza

- OBSERVA: $1^3 = 1 \rightarrow 1^2 = 1^2$

  $1^3 + 2^3 = 9 \rightarrow 3^2 = (1 + 2)^2$

  $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \rightarrow 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$

- HAZ UNA CONJETURA: ¿Puedes predecir el valor de las siguientes expresiones?

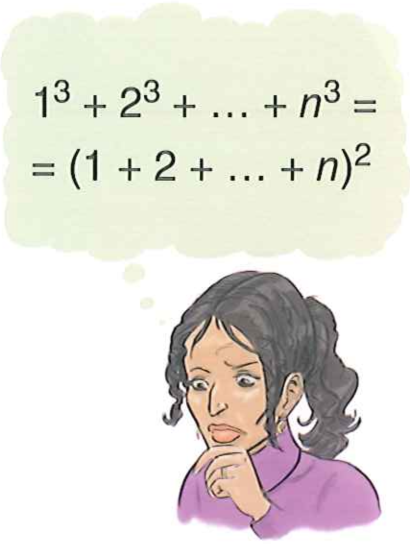
  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?$ $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = ?$ ¡Compruébalo!

- GENERALIZA TUS CONCLUSIONES:

  — ¿Cuál sería el valor de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3$?

  — Elabora una fórmula que te permita calcular:

  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ cualquiera que sea el término natural n.



Autoevaluación

WWW **10.** Soluciones de la autoevaluación.

¿Sabes obtener el término general de una sucesión y utilizarlo para calcular un término concreto? ¿Puedes definir una sucesión mediante una ley de recurrencia?

1 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ b) $1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, 4 \cdot 6, \ldots$

2 Calcula el término 10 de las sucesiones siguientes:

$a_n = 5 - 2n \qquad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2}$

3 Define, por recurrencia, la sucesión 5, 11, 23, 47, ...

¿Identificas progresiones aritméticas? ¿Escribes su término general y calculas la suma de n términos?

4 Escribe el término general y calcula la suma de los 20 primeros términos de la sucesión 5, 7, 9, 11, ...

5 Halla la diferencia y el primer término de una progresión aritmética en la que $a_3 = 8$ y $a_8 = 33$.

6 ¿Cuál de estas sucesiones es una progresión aritmética?

a) 10, 25, 35, 40, ... b) 1, 3, 6, 10...

c) $5, \frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2}, \ldots$ d) $-2, 4, -8, 16, \ldots$

¿Sabes obtener el término general de una progresión geométrica, la suma de n términos o, si fuese posible, la de sus infinitos términos?

7 Escribe el término general y calcula la suma de los ocho primeros términos de la sucesión:

0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 0,16; ...

¿Se puede hallar la suma de sus infinitos términos?

¿Sabes resolver problemas en los que tengas que reconocer un tipo u otro de progresión?

8 Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 1 000 € y una subida de 100 € al año. Otra le ofrece el mismo sueldo con una subida del 10% anual.

Razona cuál de las dos es mejor, comparando el sueldo dentro de 10 años.

9 Para rodar un anuncio se ha contratado a un gran número de personas, que deben colocarse en 51 filas. Cada fila tiene dos personas más que la anterior y en la fila 26 tiene que haber 57 personas.

Averigua cuántas personas hay en la primera fila, cuántas en la última y el número total de personas que intervienen en el anuncio.