EJERCICIOS RESUELTOS DE SUCESIONES

EJERCICIO 7:

Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 1, 3/4, 5/9, 7/16, ...
b) 2, 5, 10, 17, 26, ...
c) 10, 26, 50, 82, ...
d) -1/2, 1/5, 3/8, 5/11, ...
e) -2, 4, -8, 16, ...

Solución:

a) 1, 3/4, 5/9, 7/16, ...

Los denominadores son los cuadrados de los números naturales 1, 2, 3, ..., y los numeradores están en progresión aritmética de diferencia 2. Usando la fórmula del término general de las progresiones aritméticas para el numerador tenemos que:

$b_n = 1+(n-1)\cdot 2 = 1+2n-2 = 2n - 1$

El término general de nuestra sucesión será $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$

b) 2, 5, 10, 17, 26, ...

$2 = 1^2 + 1 = a_1$
$5 = 2^2 + 1 = a_2$
$10 = 3^2 + 1 = a_3$
$17 = 4^2 + 1 = a_4$
$26 = 5^2 + 1 = a_5$

Por tanto, el término general de nuestra sucesión será: $b_n = n^2 + 1$

c) 10, 26, 50, 82, ...

$10 = 3^2 + 1 = c_1$
$26 = 5^2 + 1 = c_2$
$50 = 7^2 + 1 = c_3$
$82 = 9^2 + 1 = c_4$

Los siguientes términos serán $11^2+1=122=c_5$, $13^2+1=170=c_6$, ...

Hemos de buscar una relación entre n y los números elevados al cuadrado 3, 5, 7, 9, ... los cuales están en progresión aritmética:

$3=2+1= 2\cdot 1 + 1$
$5=4+1= 2\cdot 2 + 1$
$7=6+1= 2\cdot 3 + 1$
$9=8+1= 2\cdot 4 + 1$

En general podemos escribirlos así: $2n + 1$. Por tanto, el término general de nuestra sucesión será:

$c_n = (2n+1)^2 + 1$

Si desarrollamos el cuadrado podemos escribirlo de la siguiente forma:

$c_n = (2n+1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 + 1 \Longrightarrow \quad c_n = 4n^2 + 4n + 2$

d) -1/2, 1/5, 3/8, 5/11, ...

Si consideramos numerador y denominador por separado, vemos que ambas son progresiones aritméticas. Si calculamos el término general de cada una de ellas tendremos también el término general de la sucesión original.

Sea $\{a_n\} = \{-1, 1, 3, 5, ...\}$ la sucesión de los numeradores. Usando la fórmula del término general de las progresiones aritméticas tenemos que:

$a_n = a_1 + (n-1)d = -1+(n-1)\cdot 2 = -1+2n-2 = 2n - 3$

Del mismo modo, si $\{b_n\} = \{2, 5, 8, 11, ...\}$ es la sucesión de los denominadores:

$b_n = b_1 + (n-1)d = 2+(n-1)\cdot 3 = 2+3n-3 = 3n - 1$

El término general de nuestra sucesión será $d_n = \frac{2n-3}{3n-1}$

e) -2, 4, -8, 16, ...

Todos los términos son potencias de base (-2):
$e_1 = -2 = (-2)^1$
$e_2 = 4 = (-2)^2$
$e_3 = -8 = (-2)^3$
$e_4 = 16 = (-2)^4$

El término general será $e_n = (-2)^n$

EJERCICIO 7:

Halla los tres primeros números de una progresión aritmética sabiendo que su suma es 6 y la suma de sus cuadrados es $\frac{158}{9}$.

Solución:

Por ser progresión aritmética, cada término se calcula sumando una cantidad fija, d, al anterior. Por tanto, la sucesión se puede escribir así:

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\} = \{a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, ...\}$$

La suma de los tres primeros términos es 6. Entonces: $a_1 + a_1+d+a_1+2d=6$
$3a_1+3d=6 \Longrightarrow a_1+d=2 \Longrightarrow \quad a_2 = 2$

La suma de sus cuadrados es:

$$a_1^2+2^2+a_3^2=\frac{158}{9} \Longrightarrow (2-d)^2+4+(2+d)^2=\frac{158}{9} \Longrightarrow 4-4d+d^2+4+4+4d+d^2=\frac{158}{9}$$

$2d^2+12=\frac{158}{9} \Rightarrow d^2+6=\frac{158}{9} \Rightarrow d^2=\frac{25}{9} \Rightarrow d=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

Si $d=\frac{5}{3} \Rightarrow a_1=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3},\ a_3=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

Los tres primeros términos serían 1/3, 2, 11/3.

Si $d=-\frac{5}{3} \Rightarrow a_1=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3},\ a_3=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

Los tres primeros términos serían 11/3, 2, 1/3.

EJERCICIO 16:

En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?

Solución:

La distancia entre filas ha de ser la misma, d. Entre la segunda y la séptima hay una diferencia de 6 m, y 5 filas entre ellas. Por tanto, esa distancia tiene que ser $d=\frac{6}{5}=1{,}2$ m.

Es una progresión aritmética, donde el primer término (primera fila) es 10 – 1,2 = 8,8 m:

8.8, 10, 11.2, ..., 16, ..., 28, ...

Para averiguar en qué fila estaríamos a 28 m de la pantalla, podemos utilizar la fórmula del término general:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 8{,}8 + (n-1)\cdot 1{,}2 = 28$

$8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28 \Rightarrow 1{,}2n = 20{,}4 \Rightarrow n=\frac{20{,}4}{1{,}2}=17$

Para ver la pantalla a 28 m habría que sentarse en la fila 17.

EJERCICIO 17:

La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y a_2 = 1. Calcula a_1 y la razón.

Solución:

La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica con razón r, $|r|<1$, es:

$$S=\frac{a_1}{1-r}$$

Sabemos entonces que $\frac{a_1}{1-r}=4$.

Si despejamos tenemos que: $a_1=4(1-r)=4-4r$

Además, por ser geométrica, el segundo término se obtiene multiplicando el primero por la razón, con lo que:

$a_1 \cdot r = 1 \implies (4-4r)\cdot r = 1 \implies -4r^2+4r-1=0$

Resolvemos la ecuación de 2° grado:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-1)}}{2\cdot(-4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-1)}}{2\cdot(-4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-8} = \frac{-4 \pm 0}{-8} = \frac{1}{2}$$

Entonces $r = \frac{1}{2}$ y $a_1 = 4 - 4\cdot\frac{1}{2} = 2$

EJERCICIO 18:

Durante 5 años depositamos en un banco 2 000 € al 4% con pago anual de intereses. ¿Qué cantidad de dinero hemos acumulado durante esos 5 años?

Solución:

Ingresamos 2000 €.
Al final del primer año esa cantidad se habrá incrementado un 4%, es decir, tendremos 2000·1,04= 2080 €.
Al final del segundo año esos 2080 € se habrán incrementado otro 4%, es decir, tendremos 2080·1,04= 2000·$1,04^2$= 2163,2 €.

Vamos obteniendo las cantidades en progresión geométrica:

a_1 = 2000·1,04= 2080 € después de un año.

a_2 = 2000·$1,04^2$ € después de dos años.

a_3 = 2000·$1,04^3$ € después de tres años.

a_4 = 2000·$1,04^4$ € después de cuatro años.

a_5 = 2000·$1,04^5$ € después de cinco años.

El segundo año volvemos a ingresar 2000 €, que estarán un año menos que el anterior en el banco, con lo que al final del 5° año habrá generado 2000·$1,04^4$ €.

Se repite el proceso, teniendo en cuenta que el último ingreso de 2000€ sólo produce intereses durante un año, por lo que genera 2000·1,04 €.

El dinero acumulado es la suma de los 5 términos de la progresión geométrica de razón 1,04 y primer término 2000·1,04 €:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_5 = \frac{2000 \cdot 1,04 \cdot (1,04^5 - 1)}{1,04 - 1} = 11265,95$$

Habremos acumulado 11265,95 €.