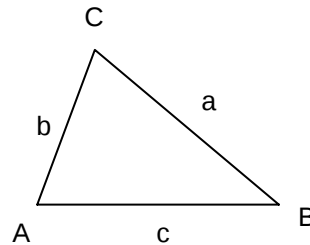


TRIÁNGULOS. TEOREMA DE PITÁGORAS.

Un triángulo $\triangle ABC$ es la figura geométrica del plano formada por 3 segmentos llamados lados cuyos extremos se cortan 2 a 2 en 3 puntos llamados vértices.

Los vértices se escriben en letras mayúsculas y el lado opuesto al vértice con la misma letra minúscula.



Propiedades:

- 1.- La suma de dos lados es mayor que el otro lado.
- 2.- La suma de los ángulos de un triángulo mide 180° .

Dos triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ son iguales si los lados y los ángulos correspondientes son iguales.

Criterios de igualdad de triángulos.

Criterio 1.

Dos triángulos son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Criterio 2.

Dos triángulos son iguales si tienen igual un lado y los ángulos contiguos.

Criterio 3.

Dos triángulos son iguales si tienen los lados correspondientes iguales.

Clasificación de los triángulos:

Según los lados:

Equilátero: Tiene los 3 lados iguales.

Isósceles: Tiene 2 lados iguales.

Escaleno: Tiene los tres lados desiguales.

Según los ángulos:

Acutángulo: Tiene los 3 ángulos agudos.

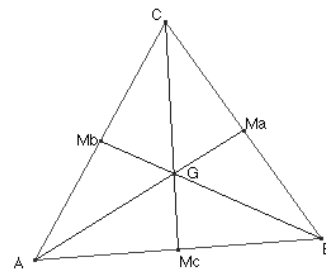
Rectángulo: Tiene un ángulo recto y los otros agudos.

Obtusángulo: Tiene un ángulo obtuso y los otros agudos.

Otros elementos de un triángulo:

La **mediana**: Es el segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto al vértice.

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto G llamado **baricentro** o centro de gravedad del triángulo.

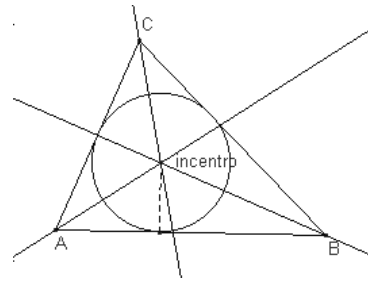


Propiedad del baricentro de un triángulo.

El baricentro de un triángulo está a doble distancia del vértice que del punto medio del lado opuesto.

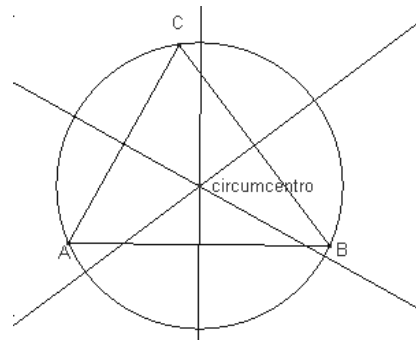
La **bisectriz**: Es la recta que pasa por el vértice que forman dos lados y divide por la mitad el ángulo que forman los mismos lados.

Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto que se llama **incentro**, que tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.



La **mediatriz**: Es la recta que pasa por el punto medio de cada lado y es perpendicular al lado.

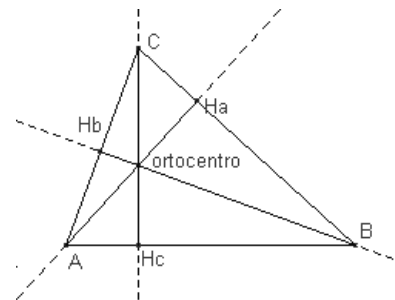
Las 3 mediatrices de un triángulo se cortan en un punto que se llama **circuncentro**, que tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



La **altura**: Es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **ortocentro**.

Normalmente consideramos la altura de un triángulo como el segmento de la recta altura que une el vértice y el punto del lado opuesto, $\overline{CH_C}$, $\overline{AH_A}$, $\overline{BH_B}$.

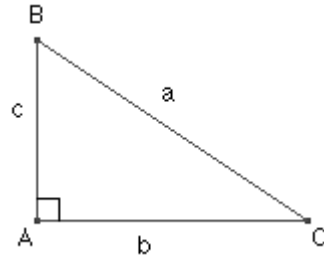


Propiedad: **Área de un triángulo.**

El área de un triángulo es igual a $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ la fórmula no depende de la base elegida.

Teorema de Pitágoras

Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$
De hipotenusa a y catetos b, c
Entonces, $a^2 = b^2 + c^2$



El teorema de Pitágoras también se puede enunciar de la forma siguiente:

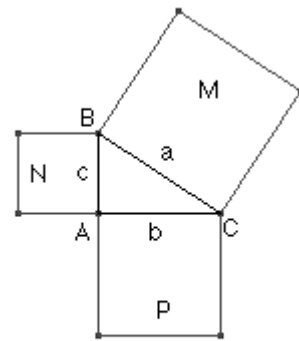
El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene la misma área que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos:

$$\text{áreaM} = a^2$$

$$\text{áreaP} = b^2$$

$$\text{áreaN} = c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$



$$\text{áreaM} = \text{áreaN} + \text{áreaP}$$

Teorema de la altura y de los catetos de un triángulo rectángulo.

Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$

Sea la altura $h = \overline{AH}$ sobre la hipotenusa.

Sea $m = \overline{BH}$ la proyección del cateto c sobre la hipotenusa.

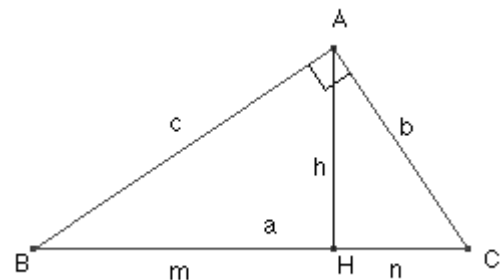
Sea $n = \overline{HC}$ la proyección del cateto b sobre la hipotenusa.

Entonces,

a) $h^2 = m \cdot n$ **Teorema de la altura.**

b) $b^2 = n \cdot a$ **Teorema del cateto.**

c) $c^2 = m \cdot a$ **Teorema del cateto.**



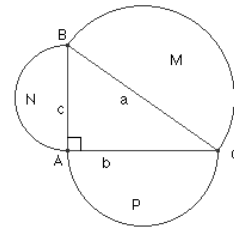
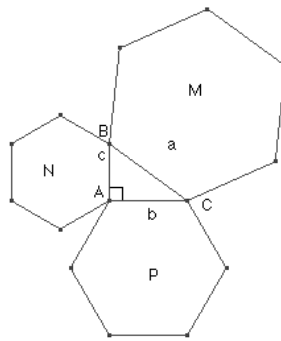
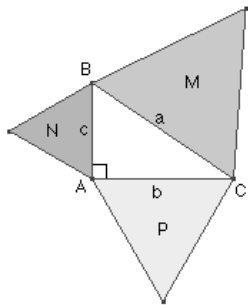
Teorema inverso del teorema de Pitágoras:

Sea un triángulo $\triangle ABC$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$

Entonces el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo y el ángulo $\angle BAC = 90^\circ$

Generalización del teorema de Pitágoras:

El área de la figura construida sobre la hipotenusa es la misma que la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos.



$$\text{área } M = \text{área } N + \text{área } P$$

Ejercicios de autoaprendizaje

Nota: Para resolver los ejercicios de este tema tendremos que aplicar el teorema de Pitágoras, que sólo lo podremos aplicar a triángulos rectángulos.

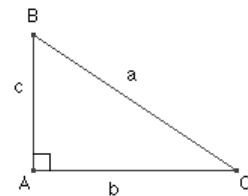
- a) Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$ $a = 13, b = 10$
Calcula el lado c .

Aplicando el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$13^2 = 10^2 + c^2, \quad 169 = 100 + c^2, \quad c^2 = 69$$

$$\text{Entonces, } c = \sqrt{69}.$$



- b) Calcula la diagonal del rectángulo de lados
 $a = 8, b = 15$

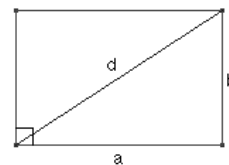
Las diagonales de un rectángulo dividen el rectángulo en dos triángulos rectángulos iguales.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 = 8^2 + 15^2, \quad d^2 = 64 + 225, \quad d^2 = 289$$

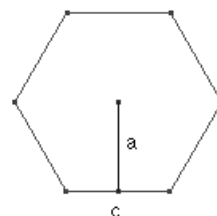
$$\text{Entonces, } d = \sqrt{289} = 17$$



- c) Calcula la apotema y el área del hexágono regular de lado $c = 6$

La apotema es el segmento que une el centro del hexágono y el punto medio de un lado.

El radio de la circunferencia circunscrita al hexágono mide lo mismo que el lado.



El centro del hexágono, el punto medio de un lado y el vértice del lado forman un triángulo rectángulo (el hexágono tiene 12 triángulos rectángulos iguales)
Aplicando teorema de Pitágoras

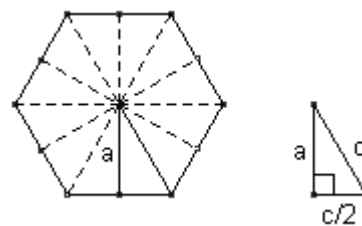
$$c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + a^2$$

$$6^2 = 3^2 + a^2, \quad 36 = 9 + a^2, \quad a^2 = 27$$

Entonces la apotema mide $a = \sqrt{27}$

Para calcular el área del hexágono multiplicaremos por 6 el área del triángulo equilátero de lado $c = 6$

$$A = 6 \cdot \left(\frac{c \cdot a}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{6 \cdot \sqrt{27}}{2}\right) = 18\sqrt{27} \cong 93.53$$



Ejercicios propuestos.

1. Llamamos **ternas pitagóricas** a tres números naturales (x,y,z) que determinan un triángulo rectángulo, es decir, $x^2 + y^2 = z^2$.

Ejemplo (3,4,5) $3^2 + 4^2 = 5^2$

Comprueba si las ternas siguientes son pitagóricas, calculando el término que falta:

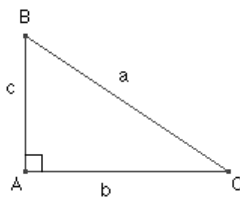
a) (21, 72, 75) b) (12, 35, x) c) (x, 28, 35) d) (28, 45, x) e) (45, 60, x)

f) (x, 15, 17) g) (20, x, 101) h) (x, 75, 85) y) (x, 135, 153) j) (24, x, 145)

2. Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$
Determina el lado que falta y el área:

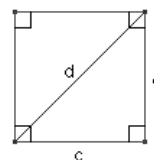
a) $a = 10$, $b = 8$ b) $b = 21$, $c = 28$

c) $a = 15$, $c = 10$ d) $a = 8$, $b = 5$



3. Calcula la diagonal del cuadrado de lado:

a) $c = 4$ b) $c = 10$ c) $c = 15$ d) $c = 25$ e) $c = 125$ f) $c = 250$



4. Calcula el lado y el área del cuadrado de diagonal:

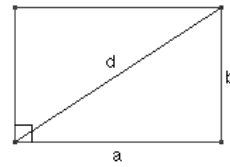
a) $d = 4$ b) $d = 10$ c) $d = 15$ d) $d = 25$ e) $d = 125$ f) $d = 250$

5. Calcula la diagonal del rectángulo de lados:

a) $a = 6$, $b = 8$ b) $a = 21$, $b = 28$

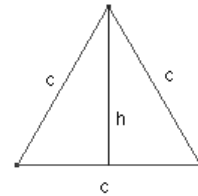
c) $a = 12$, $b = 15$ d) $a = 8$, $b = 10$

e) $a = 10$, $b = 20$ f) $a = 5$, $b = 25$



6. Calcula la altura y el área del triángulo equilátero de lados:

a) $c = 4$ b) $c = 10$ c) $c = 15$ d) $c = 25$ e) $c = 125$



7. Calcula el lado y el área del triángulo equilátero de altura:

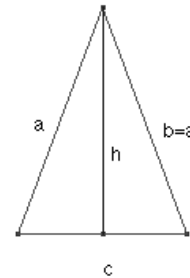
a) $h = 4$ b) $h = 10$ c) $h = 15$ d) $h = 25$ e) $h = 125$ f) $h = 250$

8. Calcula la altura sobre el lado distinto y el área de los triángulos isósceles siguientes:

a) $a = 10$, $b = 10$, $c = 12$ b) $a = 16$, $b = 16$, $c = 10$

c) $a = 12$, $b = 12$, $c = 15$ d) $a = 8$, $b = 8$, $c = 10$

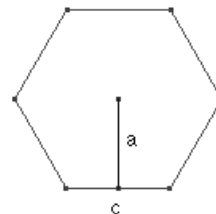
e) $a = 10$, $b = 10$, $c = 5$ f) $a = 5$, $b = 5$, $c = 2$



9. Calcula la apotema y el área del hexágono regular de lado:

a) $c = 4$ b) $c = 10$ c) $c = 15$

d) $c = 25$ e) $c = 125$ f) $c = 250$

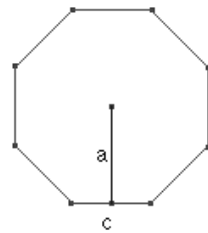


10. Calcula el lado y el área de un hexágono regular de apotema:

a) $a = 4$ b) $a = 10$ c) $a = 15$ d) $a = 25$ e) $a = 125$ f) $a = 250$

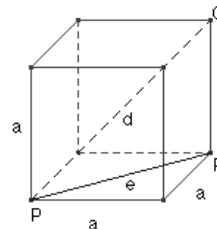
11. Calcula la apotema y el área del octógono regular de lado:

- a) $c = 4$ b) $c = 10$ c) $c = 15$
 d) $c = 25$ e) $c = 125$ f) $c = 250$



12. Calcula la diagonal de una cara $e = \overline{PR}$ y la diagonal del cubo $d = \overline{PQ}$ de arista:

- a) $a = 4$ b) $a = 10$ c) $a = 15$
 d) $a = 25$ e) $a = 125$ f) $a = 250$

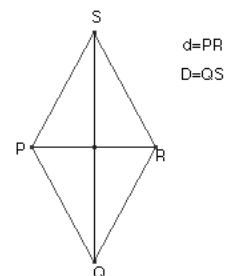
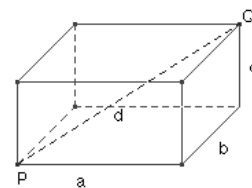


13. Calcula la arista y el volumen del cubo de diagonal:

- a) $d = 4$ b) $d = 10$ c) $d = 15$ d) $d = 25$ e) $d = 125$ f) $d = 250$

14. Calcula la diagonal $d = \overline{PQ}$ del ortoedro de aristas:

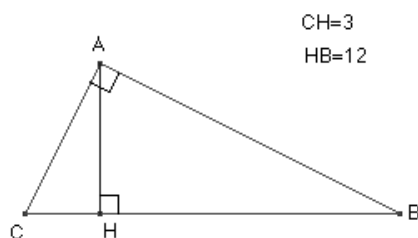
- a) $a = 6, b = 6, c = 3$ b) $a = 3, b = 4, c = 5$
 c) $a = 3, b = 6, c = 8$ d) $a = 8, b = 8, c = 10$
 e) $a = 15, b = 10, c = 5$ f) $a = 10, b = 20, c = 25$



15. Calcula los lados de un rombo de diagonales:

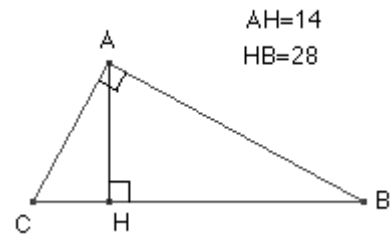
- a) $d = 6, D = 8$ b) $d = 21, D = 28$ c) $d = 12, D = 15$ d) $d = 8,$

16. Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Calcula la altura $\overline{AH}$.

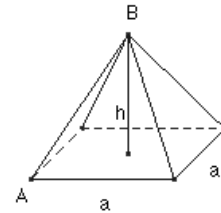


$CH=3$
 $HB=12$

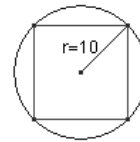
17. Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$).
Calcula la proyección $\overline{CH}$.



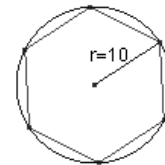
18. Sea la pirámide recta de base cuadrangular.
a) Calcula la altura h sabiendo que el lado de la base mide 100 m y la arista lateral $\overline{AB} = 150$ m.
b) Calcula la superficie de la pirámide.
c) Calcula el volumen de la pirámide $\left(V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \right)$.



19. Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 10 m.



20. Calcula la apotema y el área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.



21. En la siguiente figura cuánto mide el segmento x

