Ejercicio nº 1.- a) Divide el polinomio $D(x) = 5x^4 - 14 + 5x + x^3$ entre $d(x) = x^2 - 3$ indicando el cociente, $C(x)$, y el resto, $R(x)$, resultantes.

b) Aplica la regla de la división para comprobar que los cálculos del apartado anterior están bien realizados.

2 puntos

Ejercicio nº 2.- a) Halla el valor de m para que la división $(x^3 + mx^2 + 2x - 10) : (x - 5)$ sea exacta.

b) Halla el resto de las divisiones $(x^{2010} - 1) : (x - 1)$ y $(x^{2011} - 1) : (x + 1)$.

2 puntos

Ejercicio nº 3.- Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:

a) $x^5 - 9x^3$

b) $x^3 - 3x^2 - 25x - 21$

c) $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

3 puntos

Ejercicio nº 4.- Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\dfrac{x^2}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x}{x^2-1}$ b) $\dfrac{2x^2+2}{(x+1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ c) $\left(\dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{1}{x-2}\right) : \left(1 + \dfrac{2}{x-2}\right)$

3 puntos

SOLUCIONES

E.1. a) Divide el polinomio $D(x)=5x^4-14+5x+x^3$ entre $d(x)=x^2-3$ indicando el cociente, C(x), y el resto, R(x), resultantes.

b) Aplica la regla de la división para comprobar que los cálculos del apartado anterior están bien realizados.

---

a) Ordenamos el dividendo en forma decreciente, dejando un hueco en la columna de los términos de grado 2 y otra en los términos independientes:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +x^3 & & +5x & -14 & x^2-3 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & & +15x^2 & & & 5x^2+x+15 \\ \cline{1-3}
 & +x^3 & +15x^2 & & & \\
 & -x^3 & & +3x & & \\ \cline{2-4}
 & & +15x^2 & +8x & & \\
 & & -15x^2 & & -45 & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & +31 &
\end{array}
$$

Cociente: $C(x)=5x^2+x+15$; Resto: $R(x)=8x+31$.

b) Aplicamos la prueba de la división:

$d(x)\cdot c(x)+r(x)=(x^2-3)\cdot(5x^2+x+15)+(8x+31)=$

$=5x^4+x^3+15x^2-15x^2-3x-45+8x+31=5x^4+x^3+5x-14=D(x)$. (c.q.d.)

E.2. a) Halla el valor de m para que la división $(x^3+mx^2+2x-10):(x-5)$ sea exacta.

b) Halla el resto de las divisiones $(x^{2010}-1):(x-1)$ y $(x^{2011}-1):(x+1)$.

---

a) Si la división es exacta, el resto ha de ser cero. Se trata de aplicar el teorema del resto, así que lo podemos resolver de dos formas:

Valor numérico:

$P(5)=0\Rightarrow 5^3+m\cdot 25+2\cdot 5-10=0\Rightarrow 125+25m+10-10=0\Rightarrow 25m=-125\Rightarrow m=-5$.

Haciendo la división (aplicando la regla de Ruffini):

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & m & 2 & -10 \\
5 & & 5 & 25+5m & 135+25m \\ \hline
 & 1 & 5+m & 27+5m & 125+25m
\end{array}
$$

Al imponer que el resto sea 0, se obtiene el mismo resultado : $125+25m=0\Rightarrow m=-5$.

b) En este caso es "mucho más complicado" hacer la división. No queda más remedio que aplicar directamente el Teorema del Resto:

- $r_1 = P(1) = 1^{2010} - 1 = 1 - 1 = 0$. Por lo tanto, se trata de una división exacta.
- $r_2 = P(-1) = (-1)^{2011} - 1 = -1 - 1 = -2$.

E.3. Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:

a) $x^5 - 9x^3$

b) $x^3 - 3x^2 - 25x - 21$

c) $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

---

a) En primer lugar extraemos factor común, y después, factorizamos la identidad notable:

$x^5 - 9x^3 = x^3 \cdot (x^2 - 9) = x^3 \cdot (x+3) \cdot (x-3)$.

Sus raíces (valores que hacen cero el polinomio) son 0 y ± 3.

b) Para factorizar este polinomio debemos aplicar la regla de Ruffini con los divisores del término independiente:

	1	- 3	- 25	- 21
- 1		- 1	4	+ 21
	1	- 4	- 21	0
- 3		- 3	+ 21	
	1	- 7	0	

Ya lo tenemos:

$x^3 - 3x^2 - 25x - 21 = (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x-7)$ y sus raíces son -1, -3 y $+7$.

c) Sacamos factor común y después aplicamos la regla de Ruffini con los divisores de 12:

$x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x = x \cdot (x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x - 12) = x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+4)$.

	1	+ 3	- 9	- 23	- 12
- 1		- 1	- 2	+ 11	+ 12
	1	+ 2	- 11	- 12	0
- 1		- 1	- 1	+12	
	1	+ 1	- 12	0	
3		+ 3	+ 12		
	1	+ 4	0		

Las raíces de este polinomio son: 0, -1, $+3$ y -4.

E.4. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}$ b) $\frac{2x^2+2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}$ c) $\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}\right):\left(1+\frac{2}{x-2}\right)$

---

a) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x^2\cdot(x-1)+x+1+2x}{(x+1)\cdot(x-1)}=\boxed{\frac{x^3-x^2+3x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}}=\boxed{\frac{x^3-x^2+3x+1}{x^2-1}}.$

b) $\frac{2x^2+2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{2\cdot\cancel{(x^2+1)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)}{(x+1)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(x^2+1)}}=\boxed{\frac{2\cdot(x-1)}{x+1}}=\boxed{\frac{2x-2}{x+1}}.$

c) $\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}\right):\left(1+\frac{2}{x-2}\right)=\frac{1+x+2}{(x+2)\cdot(x-2)}:\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x-2)}:\frac{x}{x-2}=$

$=\frac{(x+3)\cdot\cancel{(x-2)}}{x\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}=\boxed{\frac{x+3}{x\cdot(x+2)}}=\boxed{\frac{x+3}{x^2+2x}}.$