1 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 31

PRACTICA

Números enteros

1 **Calcula.**

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)]$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1)$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)]$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)]$

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)] = 5 - 3 + 2 + 4 - 6 - 3 + 6 - 4 =$
$= (5 + 2 + 4 + 6) - (3 + 6 + 3 + 4) =$
$= 17 - 16 = 1$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1) = (-2) \cdot (-7) \cdot (-1) = -14$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)] = 5 \cdot (8 - 5) - (-4) \cdot (6 - 9) =$
$= 5 \cdot 3 - (-4) \cdot (-3) = 15 - 12 = 3$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)] = (-7) \cdot [4 \cdot (-5) - 5 \cdot 3] =$
$= (-7) \cdot (-20 - 15) = (-7) \cdot (-35) = 245$

2 **Calcula.**

a) $|3 + (2 - 5)|$

b) $|1 - 5 + 31|$

c) $|20 - (-10 + 9)|$

d) $|-3 + |2 - 8||$

a) $|3 + (-3)| = |3 - 3| = |0| = 0$

b) $|-4 + 31| = |27| = 27$

c) $|20 - (-1)| = |20 + 1| = |21| = 21$

d) $|-3 + 1 - 61| = |-3 + 6| = |3| = 3$

3 **Calcula las siguientes potencias:**

$$(-2)^3 \quad -2^3 \quad 2^3 \quad (-2)^4 \quad -2^4 \quad 2^0$$

$(-2)^3 = -8 \quad -2^3 = -8 \quad 2^3 = 8 \quad (-2)^4 = 16 \quad -2^4 = -16 \quad 2^0 = 1$

4 □□□ **Ordena de menor a mayor.**

$$(-5)^2 \quad -4^3 \quad (-1)^{105} \quad 7^2 \quad 11^0 \quad -3^2$$

Calculamos cada una de las potencias dadas:

$(-5)^2 = 25$ | $7^2 = 49$

$-4^3 = -64$ | $11^0 = 1$

$(-1)^{105} = -1$ | $-3^2 = -9$

Ordenamos los resultados obtenidos:

$-64 < -9 < -1 < 1 < 25 < 49 \rightarrow -4^3 < -3^2 < (-1)^{105} < 11^0 < (-5)^2 < 7^2$

5 □□□ **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $(-3+1)^3 + (5-8)^4 \cdot (-1) - 5^2 : (-1)^7$

b) $4 : (2-3)^7 + 5 \cdot (-1)^2 - 3^2 \cdot 4$

c) $(2 \cdot 3)^2 : (-1-5) + 3 \cdot (5-2)^0$

d) $6 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-5+4)^6$

a) $(-2)^3 + (-3)^4 \cdot (-1) - 25 : (-1) = -8 + 81 \cdot (-1) + 25 = -8 - 81 + 25 = -64$

b) $4 : (-1)^7 + 5 \cdot 1 - 9 \cdot 4 = 4 : (-1) + 5 - 36 = -4 + 5 - 36 = -35$

c) $6^2 : (-6) + 3 \cdot 3^0 = 36 : (-6) + 3 = -6 + 3 = -3$

d) $-6 + 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-1)^6 = -6 + 20 - 2 \cdot 1 = 12$

6 □□□ **Expresa como potencia única.**

a) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^4$ | **b)** $(-3)^5 : (-3)^2$

c) $3^4 : (-3)^2$ | **d)** $(2^2 \cdot 2)^3$

e) $12^2 : 4^2$ | **f)** $(-1)^3 \cdot (-2)^3 \cdot 5^3$

a) 30^4 | b) $(-3)^3$

c) $3^4 : 3^2 = 3^2$ | d) $(2^3)^3 = 2^9$

e) $\left(\frac{12}{4}\right)^2 = 3^2$ | f) $[(-1) \cdot (-2) \cdot 5]^3 = 10^3$

7 □□□ **Elimina paréntesis y simplifica.**

a) $\dfrac{[(-5)^3]^2}{(-5)^6}$ | **b)** $[(-3)^5 : (-3)^3]^2$

c) $\dfrac{9^2}{(-3)^4}$ | **d)** $[2^4 \cdot (-2)^2] : (-4)^3$

a) $\dfrac{(-5)^6}{(-5)^6} = 1$ | b) $[(-3)^2]^2 = (-3)^4 = 81$

c) $\dfrac{(3^2)^2}{(-3)^4} = \dfrac{3^4}{3^4} = 1$ | d) $\dfrac{2^4 \cdot 2^2}{-4^3} = \dfrac{2^6}{-(2^2)^3} = \dfrac{2^6}{-2^6} = -1$

8 ■□□ **Un ascensor se encuentra en el sótano 4. ¿En qué piso se encontrará después de realizar los siguientes movimientos?:**

sube 6; baja 3; sube 9; baja 5; baja 2

El sótano 4 equivale a –4. Una subida es un número positivo, y una bajada, uno negativo. Por tanto:

$$-4 + 6 - 3 + 9 - 5 - 2 = 15 - 14 = 1$$

Se encuentra en la primera planta.

9 ■□□ **Las temperaturas medias que se alcanzan en un mismo mes, en distintas ciudades, son:**

–2 °C, 3 °C, 10 °C, –7 °C, 0 °C, 12 °C

Ordénalas de menor a mayor.

$$-7\ °C < -2\ °C < 0\ °C < 3\ °C < 10\ °C < 12\ °C$$

10 ■■□ **La temperatura de un congelador baja 2 °C cada 3 minutos hasta llegar a –18 °C. ¿Cuánto tardará en llegar a –12 °C si cuando lo encendemos la temperatura es de 16 °C?**

La diferencia de temperatura entre 16 °C y –12 °C es de 16 + 12 = 28 °C.

Cada 3 minutos, la temperatura baja 2 °C. En bajar 28 °C tardará:

$$\frac{28}{2} \cdot 3 \text{ minutos} = 14 \cdot 3 = 42 \text{ minutos}$$

11 ■□□ **Aristóteles murió en el año 322 a.C. y vivió 62 años. ¿En qué año nació?**

(Año en que murió) – (Año en que nació) = N.º de años vividos

(322 a.C.) – (Año en que nació) = 62

(–322) – (Año en que nació) = 62

–322 – 62 = Año en que nació

–384 = Año en que nació

Aristóteles nació en el año 384 a.C.

Fracciones

12 ■□□ **Calcula mentalmente.**

a) La mitad de $\frac{7}{8}$.

b) La tercera parte de $\frac{9}{5}$.

c) La mitad de la quinta parte de –4.

d) El triple de la mitad de $\frac{2}{3}$.

a) $\frac{7}{16}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) 1

13 □□□ **Calcula mentalmente.**

a) Los dos quintos de 400.

b) El número cuyos dos quintos son 160.

c) Los tres séptimos de 140.

d) El número cuyos cinco sextos son 25.

a) $\frac{2}{5}$ de $400 = 2 \cdot 80 = 160$

b) $\frac{2}{5}$ de $\boxed{} = 160 \rightarrow$ por a) se sabe que el número es 400

c) $\frac{3}{7}$ de $140 = 3 \cdot 20 = 60$

d) $\frac{5}{6}$ de $\boxed{} = 25 \rightarrow$ el número es 30

14 □□□ **Calcula mentalmente.**

a) $\frac{4}{3}$ **de 21** **b)** $\frac{5}{2}$ **de 10**

c) $\frac{3}{10}$ **de 1 millón** **d)** $\frac{7}{20}$ **de cien mil**

a) $\frac{4}{3}$ de $21 = 4 \cdot 7 = 28$

b) $\frac{5}{2}$ de $10 = 5 \cdot 5 = 25$

c) $\frac{3}{10}$ de 1 millón $= 3 \cdot 100\,000 = 300\,000$

d) $\frac{7}{20}$ de cien mil $= 7 \cdot 5\,000 = 35\,000$

15 □□□ **Compara mentalmente los siguientes pares de fracciones:**

a) $\frac{2}{5}$ **y** $\frac{2}{7}$ **b) 3 y** $\frac{7}{2}$

c) $\frac{7}{8}$ **y 1** **d)** $\frac{5}{8}$ **y** $\frac{3}{8}$

a) $\frac{2}{7} < \frac{2}{5}$ b) $3 < \frac{7}{2}$

c) $\frac{7}{8} < 1$ d) $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$

16 □□□ **Expresa en forma de fracción de hora.**

a) 15 minutos **b) 20 minutos** **c) 10 minutos**

d) 1 minuto **e) 120 segundos** **f) 1 segundo**

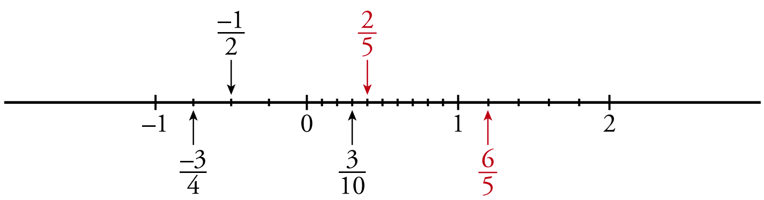
a) $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{60}$

e) $120'' = 2' \rightarrow \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ f) $1 \text{ h} = 3\,600'' \rightarrow \frac{1}{3\,600}$

PÁGINA 32

17 **Representa, aproximadamente, en la recta numérica.**

$$\frac{2}{5};\ -\frac{3}{4};\ -\frac{1}{2};\ \frac{6}{5};\ \frac{3}{10}$$



18 **Calcula tres fracciones equivalentes a $\frac{8}{12}$. ¿Cuál es la correspondiente fracción irreducible?**

$\frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \rightarrow$ Por tanto, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{15}$ son tres fracciones equivalentes a $\frac{8}{12}$.

La fracción irreducible es $\frac{2}{3}$.

19 **Expresa como número mixto las siguientes fracciones:**

a) $\frac{5}{3}$ **b)** $\frac{-7}{3}$ **c)** $\frac{45}{5}$

d) $\frac{-48}{5}$ **e)** $\frac{93}{10}$ **f)** $\frac{2\,437}{621}$

a) $\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{-7}{3} = \frac{-6}{3} - \frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

c) $\frac{45}{5} = 9$

d) $\frac{-48}{5} = \frac{-45}{5} - \frac{3}{5} = -9 - \frac{3}{5}$

e) $\frac{93}{10} = \frac{90}{10} + \frac{3}{10} = 9 + \frac{3}{10}$

f) $\frac{2\,437}{621} = \frac{1\,863}{621} + \frac{574}{621} = 3 + \frac{574}{621}$

20 **Calcula.**

a) $6 - \left[\frac{10}{3} - \left(1 + \frac{5}{6}\right)\right]$

b) $\frac{3}{2} - \left(\frac{7}{8} + \frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{1}{2}\right)$

d) $-\frac{7}{2} - \left[2 + \frac{2}{7} - \left(-\frac{3}{4}\right)\right]$

a) $6 - \frac{10}{3} + 1 + \frac{5}{6} = \frac{36}{6} - \frac{20}{6} + \frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

b) $\frac{3}{2} - \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{16}{8} - \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{3}{8}$

c) $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{13}{12} + \frac{1}{2} = \frac{16}{12} - \frac{9}{12} - \frac{2}{12} - \frac{13}{12} + \frac{6}{12} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$

d) $-\frac{7}{2} - \left[2 + \frac{2}{7} + \frac{3}{4}\right] = -\frac{7}{2} - 2 - \frac{2}{7} - \frac{3}{4} = \frac{-98}{28} - \frac{56}{28} - \frac{8}{28} - \frac{21}{28} = \frac{-183}{28}$

21 □□□ **Reduce a una sola fracción cada una de estas expresiones:**

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right)$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right]$

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} - \frac{4}{16} - \frac{2}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right) = \left(\frac{12}{20} - \frac{5}{20} + \frac{40}{20}\right) - \left(\frac{15}{20} - \frac{8}{20} + \frac{20}{20}\right) =$

$= \frac{47}{20} - \frac{27}{20} = \frac{20}{20} = 1$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$

$= 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{4} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{2} =$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] = \left(\frac{9}{15} + \frac{5}{15}\right) - \left[1 - \left(\frac{3-2}{4}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] =$

$= \frac{14}{15} - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right) =$

$= \frac{14}{15} - 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{20} =$

$= \frac{56}{60} - \frac{60}{60} + \frac{15}{60} - \frac{40}{60} + \frac{9}{60} =$

$= \frac{-20}{60} = \frac{-1}{3}$

22 **Calcula.**

a) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{-6}$ **b)** $\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right):\left(3+\frac{1}{7}\right)$

c) $\dfrac{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{3}{14}}$ **d)** $\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{\frac{5}{3}:\frac{7}{6}}$

a) $\dfrac{3\cdot 8\cdot 5}{4\cdot 9\cdot 6}=\dfrac{5}{9}$

b) $\left(\dfrac{8}{8}+\dfrac{4}{8}-\dfrac{1}{8}\right):\left(\dfrac{21}{7}+\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{11}{8}:\dfrac{22}{7}=\dfrac{11\cdot 7}{22\cdot 8}=\dfrac{7}{16}$

c) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{6}{8}-\frac{4}{8}-\frac{1}{8}}{\frac{7}{14}-\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{14}}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{7}}=\dfrac{7}{16}$

d) $\dfrac{-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 3}}{\frac{5\cdot 6}{7\cdot 3}}=\dfrac{\frac{-5}{2}}{\frac{10}{7}}=\dfrac{-5\cdot 7}{2\cdot 10}=\dfrac{-7}{4}$

23 **Con una barrica que contiene 510 *l* de vino, ¿cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar? ¿Cuántas de litro y medio?**

$510:\dfrac{3}{4}=\dfrac{510\cdot 4}{3}=680\to$ Se pueden llenar 680 botellas de $\dfrac{3}{4}$ de litro.

1 litro y medio $=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$510:\dfrac{3}{2}=\dfrac{510\cdot 2}{3}=340\to$ Se pueden llenar 340 botellas de litro y medio.

Este último caso también se puede resolver observando que 1 botella de litro y medio equivale a 2 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. Por tanto, el número de botellas de litro y medio que se pueden llenar será la mitad del número de botellas de $\frac{3}{4}$ de litro: $\frac{680}{2}=340$.

24 **Calcula qué fracción de hora ha pasado entre las diez y cuarto y las once menos veinte.**

Entre las diez y cuarto y las once menos veinte han pasado 25 minutos, que equivalen a $\frac{25}{60}$ de hora $=\frac{5}{12}$ de hora.

25 □□□ **En cierta parcela se cultivan $\frac{4}{5}$ partes de trigo, y el resto, 100 m^2, de maíz. ¿Cuál es la superficie de la parcela?**

Trigo $\to$ $\frac{4}{5}$ partes $\to$ sobra $\frac{1}{5}$

Maíz $\to$ $\frac{1}{5}$ parte que equivale a 100 m^2

Superficie de la parcela = $100 \cdot 5 = 500$ m^2

26 □□□ **Ana se gasta $\frac{2}{3}$ del dinero en ropa y $\frac{1}{4}$ del total en comida.**

a) ¿Cuál es la fracción gastada?

b) ¿Qué fracción le queda por gastar?

c) Si salió de casa con 180 €, ¿qué cantidad no se ha gastado?

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$

b) $1 - \frac{11}{12} = \frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

c) La fracción que no se ha gastado es $\frac{1}{12}$:

$\frac{1}{12}$ de 180 € = $\frac{180}{12}$ = 15 € es la cantidad que no se ha gastado.

27 □□□ **Con una garrafa de $\frac{5}{2}$ de litro se llenan 25 vasos. ¿Qué fracción de litro entra en 1 vaso?**

$\frac{5}{2}$ de litro : 25 vasos = $\frac{5}{2} : 25 = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

En 1 vaso entra $\frac{1}{10}$ de litro.

28 □□□ **De una botella de $\frac{3}{4}$ de litro se ha consumido la quinta parte. ¿Qué fracción de litro queda?**

Si se ha consumido la quinta parte, quedan sin consumir $\frac{4}{5}$ de la botella:

$\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de litro = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ de litro quedan sin consumir.

Potencias

29 □□□ **Calcula.**

a) $(-2)^4$	**b)** -2^4	**c)** $(-2)^3$	**d)** -2^{-3}	**e)** 2^{-3}
f) $(-2)^{-3}$	**g)** $(-1)^{-16}$	**h)** 1^{-17}	**i)** -1^{-30}	

a) 16 b) -16 c) -8

d) $\frac{1}{-2^3} = -\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8}$

g) $\frac{1}{(-1)^{16}} = 1$ h) $\frac{1}{1^{17}} = 1$ i) $-\frac{1}{1^{30}} = -1$

30 **Ordena de menor a mayor.**

$$3^{-3} \quad (-3)^{-1} \quad -3^0 \quad (-3)^{-4} \quad 3^{-2}$$

Calculamos el valor de cada una de las potencias:

$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ $(-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = -\frac{1}{3}$ $-3^0 = -1$

$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$ $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Por tanto:

$$-1 < -\frac{1}{3} < \frac{1}{81} < \frac{1}{27} < \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad -3^0 < (-3)^{-1} < (-3)^{-4} < 3^{-3} < 3^{-2}$$

31 **Calcula.**

a) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ **b)** $-\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$ **c)** $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **e)** $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ **f)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

g) $\left(-\frac{7}{6}\right)^{-1}$ **h)** $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$ **i)** $-\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

a) $\frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$ b) $-\frac{7}{3}$ c) $(-6)^2 = 36$

d) $2^3 = 8$ e) $\frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$ f) $\frac{3}{2}$

g) $-\frac{6}{7}$ h) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ i) $-(4)^3 = -64$

32 **Expresa como potencias de base 10.**

a) Cien millones. **b) Diez billones.**

c) Una milésima. **d) Cien mil millones.**

e) Una millonésima. **f) Cien milésimas.**

g) Diez mil billones. **h) Mil centésimas.**

a) $100 \cdot 1\,000\,000 = 10^2 \cdot 10^6 = 10^8$ b) $10 \cdot 10^{12} = 10^{13}$

c) $0{,}001 = 10^{-3}$ d) $100\,000 \cdot 1\,000\,000 = 10^5 \cdot 10^6 = 10^{11}$

e) $0{,}000001 = 10^{-6}$ f) $100 \cdot 0{,}001 = 10^2 \cdot 10^{-3} = 10^{-1}$

g) $10\,000 \cdot 10^{12} = 10^4 \cdot 10^{12} = 10^{16}$ h) $1\,000 \cdot 0{,}01 = 10^3 \cdot 10^{-2} = 10$

33 **Escribe en forma de potencia de base 2 ó 5.**

a) -625 **b)** $\frac{1}{128}$ **c)** $-\frac{1}{25}$ **d)** $\frac{1}{5}$

e) 32 **f)** -125 **g)** $\frac{1}{64}$ **h)** $-\frac{1}{8}$

a) -5^4 b) $\frac{1}{2^7} = 2^{-7}$ c) $-\frac{1}{5^2} = -5^{-2}$ d) 5^{-1}

e) 2^5 f) -5^3 g) $\frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ h) $-\frac{1}{2^3} = -2^{-3}$

PÁGINA 33

34 **Calcula.**

a) $-3 \cdot (4-2)^{-2} + 10 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (2-5)$

c) $(1-4) \cdot 3^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} - 6 \cdot 2^{-3}$

d) $\left(\frac{8}{5}\right)^{-1} + (3-5) \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2^{-3} \cdot 3$

a) $-3 \cdot 2^{-2} + 10 \cdot \frac{4}{5} = -3 \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{40}{5} = -\frac{3}{4} + 8 = -\frac{3}{4} + \frac{32}{4} = \frac{29}{4}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{1} + \frac{4}{9} \cdot (-3) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

c) $(-3) \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{5}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{3}{9} + \frac{5}{2} - \frac{6}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{-4}{12} + \frac{30}{12} - \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$

d) $\frac{5}{8} + (-2) \cdot \frac{49}{4} + \frac{1}{2^3} \cdot 3 = \frac{5}{8} - \frac{98}{4} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{49}{2} = 1 - \frac{49}{2} = \frac{2}{2} - \frac{49}{2} = -\frac{47}{2}$

35 **Calcula.**

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{-1}$ **b)** $\left(\frac{7}{2}\right)^3 : \left(-\frac{2}{21}\right)^{-2}$

c) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **d)** $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} \cdot \frac{3}{28}\right] : 2^{-4}$

a) $\frac{9}{25} \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{7^3}{2^3} : \left(-\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{7^3}{2^3} : \frac{21^2}{2^2} = \frac{7^3 \cdot 2^2}{21^2 \cdot 2^3} = \frac{7^3}{7^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = \frac{7}{3^2 \cdot 2} = \frac{7}{9 \cdot 2} = \frac{7}{18}$

c) $-5 \cdot \frac{2^2}{5^2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{-5 \cdot 2^2 \cdot 3^3}{5^2 \cdot 2^3} = \frac{-3^3}{5 \cdot 2} = -\frac{27}{10}$

d) $\left[\frac{7}{4} \cdot \frac{3}{28}\right] : \frac{1}{2^4} = \frac{3}{16} : \frac{1}{16} = \frac{3 \cdot 16}{16 \cdot 1} = 3$

36 **Calcula.**

a) $\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{4}\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2$

c) $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

d) $\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - 4\right)^{-1}$

a) $\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{6}{4} - \frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9-10}{8}\right)^2 = \left(\frac{-1}{4}\right)^3 : \left(\frac{-1}{8}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^6 = -1$

b) $\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{6}\right)^2 - \left(\frac{8}{6} - \frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right)^2 =$

$= \left(\frac{-3}{6}\right)^2 - \left(\frac{3}{6}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

c) $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{6}{4} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{9} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4 =$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 =$

$= \frac{-4^2 \cdot 9}{3 \cdot 4} + 4 = -12 + 4 = -8$

d) $\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - 4\right)^{-1} = \left(\frac{3}{12} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{10}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{4}\right)^{-1} =$

$= \frac{-4}{12} + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{15}{4}\right)^{-1} =$

$= -\frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{-4}{15}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

37 **Resuelto en el libro de texto.**

38 **Reduce aplicando las propiedades de las potencias.**

a) $\dfrac{(-2)^3 \cdot 4^2}{32}$ **b)** $\dfrac{125}{25^2 \cdot (-5)^2}$ **c)** $\dfrac{3^2 \cdot 9^4}{(3^5)^2}$

a) $\dfrac{-2^3 \cdot (2^2)^2}{2^5} = \dfrac{-2^3 \cdot 2^4}{2^5} = \dfrac{-2^7}{2^5} = -2^2 = -4$

b) $\dfrac{5^3}{(5^2)^2 \cdot (-5)^2} = \dfrac{5^3}{5^4 \cdot 5^2} = \dfrac{5^3}{5^6} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

c) $\dfrac{3^2 \cdot (3^2)^4}{3^{10}} = \dfrac{3^2 \cdot 3^8}{3^{10}} = \dfrac{3^{10}}{3^{10}} = 1$

PIENSA Y RESUELVE

Problemas para contar

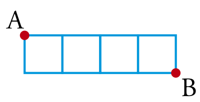
39 **Marta tiene 4 pantalones y 5 camisas. ¿De cuántas formas se puede vestir? ¿Y si además tiene 3 pares de zapatos?**

Por cada pantalón que elija, tiene 5 camisas para ponerse; como tiene 4 pantalones, en total tiene $4 \cdot 5 = 20$ formas diferentes de vestirse.

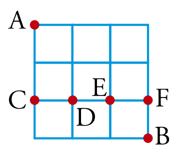
Para cada una de las 20 formas anteriores, puede elegir 3 pares de zapatos. En total tendrá $20 \cdot 3 = 60$ formas diferentes de vestirse.

40 **En cada uno de los siguientes casos, ¿cuántos caminos distintos hay para llegar de A a B, sin retroceder en ningún momento?**

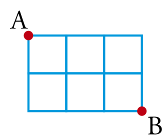
a)



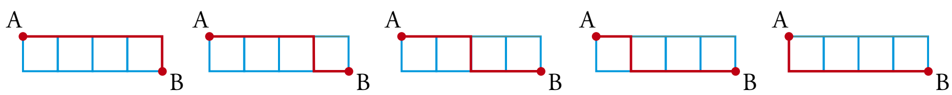
b)



c)



a)

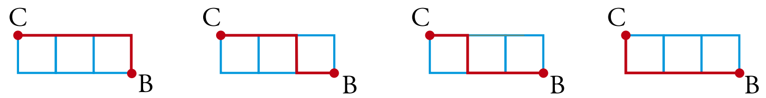


Hay 5 formas de ir de A a B.

b) Para calcular las diferentes posibilidades, organizamos el problema de la siguiente manera:

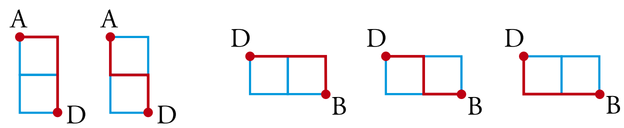
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por C:

  De A a C hay 1 camino y de C a B, 4 caminos $\rightarrow 1 \cdot 4 = 4$ formas.



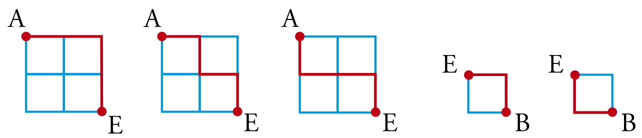
- Calculamos los caminos que hay de A a B, pasando por D y sin pasar por C:

  De A a D hay 2 caminos, y de D a B, otros 3 → $2 \cdot 3 = 6$ formas.



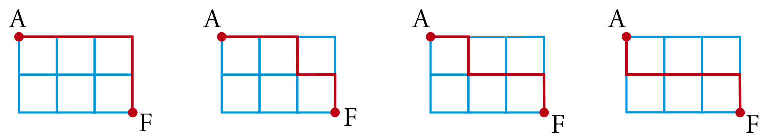
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por E pero no por C ni D:

  De A a E hay 3 caminos, y de E a B, otros 2 → $3 \cdot 2 = 6$ formas.



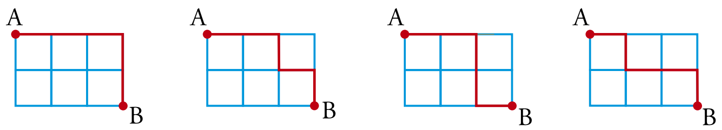
- Calculamos los caminos que hay de A a B pasando por F y sin pasar por C, D y E:

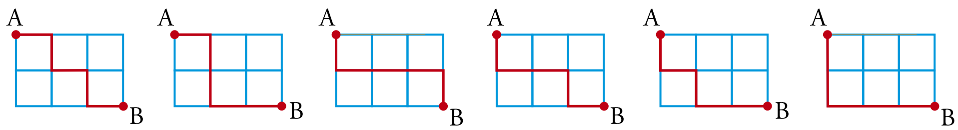
  De A a F hay 4 caminos, y de F a B, uno → $4 \cdot 1 = 4$ formas.



- Por tanto, el número total de caminos de A a B es: $4 + 6 + 6 + 4 = 20$

c)





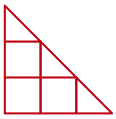
Hay 10 caminos distintos.

41 **Una manifestación ocupa una superficie de 3 600 m^2. Si en un metro cuadrado caben 3 personas, ¿cuántas personas han acudido a la manifestación?**

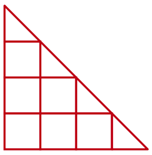
Si en 1 m^2 caben 3 personas, en 3 600 m^2 cabrán $3\,600 \cdot 3 = 10\,800$ personas.

42 ¿Cuántos triángulos rectángulos ves en estas figuras?

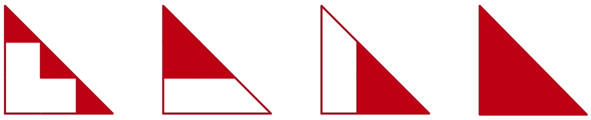
a)



b)

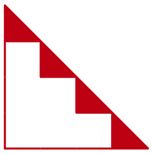


a)

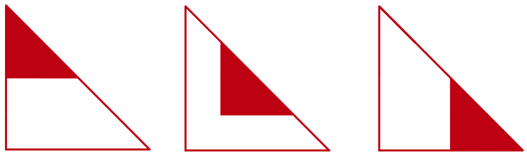


3 pequeños, 2 medianos y 1 grande. En total, 6 triángulos rectángulos.

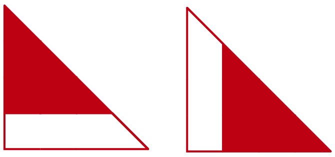
b) 4 triángulos pequeños:



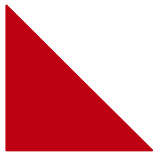
3 triángulos cuyos catetos miden 2:



2 triángulos cuyos catetos miden 3:



1 triángulo grande:



En total, 4 + 3 + 2 + 1 = 10 triángulos rectángulos.

43 **En un restaurante nos ofrecen para comer un menú que consta de 4 primeros platos, 3 segundos y 4 postres. ¿De cuántas formas distintas podemos comer?**

Elegido un primer plato y un segundo, podemos elegir entre 4 postres. Como hay 3 segundos, en total habrá $3 \cdot 4 = 12$ maneras de comer con un primer plato fijo. Al haber 4 primeros platos, en total podemos elegir $4 \cdot 12 = 48$ menús diferentes.

44 **Cuatro jugadores llegan a la fase final de un campeonato de tenis. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón. Calcula de cuántas formas se pueden repartir los premios y descríbelas.**

Llamamos a los jugadores A, B, C y D.

Hacemos un diagrama en árbol:

CAMPEÓN	SUBCAMPEÓN	RESULTADO
A	B	A-B
	C	A-C
	D	A-D
B	A	B-A
	C	B-C
	D	B-D
C	A	C-A
	B	C-B
	D	C-D
D	A	D-A
	B	D-B
	C	D-C

En total hay $3 \cdot 4 = 12$ formas de repartir los premios.

45 ■□□ **Seis amigos van a jugar un campeonato de pádel, jugando todos contra todos.**

a) ¿Cuántos partidos han de jugar?

b) ¿Cuántos partidos jugarían si el campeonato fuera a doble vuelta?

a) Llamamos a los jugadores A, B, C, D, E y F.

Usamos la siguiente tabla para contar el número de partidos y describirlos:

	A	B	C	D	E	F
A	×	A · B	A · C	A · D	A · E	A · F
B	×	×	B · C	B · D	B · E	B · F
C	×	×	×	C · D	C · E	C · F
D	×	×	×	×	D · E	D · F
E	×	×	×	×	×	E · F
F	×	×	×	×	×	×

En la tabla se refleja que el campeonato no es a doble vuelta y que un jugador no juega contra sí mismo. Hay, por tanto, 15 partidos.

b) Jugarán el doble de partidos que en el apartado anterior; es decir:

$15 \cdot 2 = 30$ partidos.

Los describimos usando la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F
A	×	A · B	A · C	A · D	A · E	A · F
B	B · A	×	B · C	B · D	B · E	B · F
C	C · A	C · B	×	C · D	C · E	C · F
D	D · A	D · B	D · C	×	D · E	D · F
E	E · A	E · B	E · C	E · D	×	E · F
F	F · A	F · B	F · C	F · D	F · E	×

46 ■□□ **Se tienen apiladas 20 cajas con latas de refresco en cada una de las cuales hay 6 filas y 8 columnas. Calcula el número total de latas de refresco que hay.**

Cada caja contiene $6 \cdot 8 = 48$ latas de refresco.

En 20 cajas habrá: $20 \cdot 48 = 960$ latas de refresco

PÁGINA 34

47 ■□□ **En una zona de montañas hay 4 casas rurales que están comunicadas por los caminos indicados en este dibujo:**

Calcula el número de rutas posibles que se pueden seguir para ir de A a D.

Elegido un camino para ir de A a B, y otro para ir de B a C, hay 4 caminos posibles para ir de C a D. Como de A a B hay 3 caminos posibles, y de B a C, 2 caminos, en total habrá: $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ rutas posibles para ir de A a D.

48 ■□□ **¿Cuántos números capicúas hay entre el 2 000 y el 5 000?**

Los números capicúas que hay entre 2 000 y 3 000 son de la forma $2aa2$, siendo $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Hay 10 números capicúas entre 2 000 y 3 000.

Análogamente, entre 3 000 y 4 000 y entre 4 000 y 5 000:

$3aa3 \rightarrow$ 10 capicúas

$4aa4 \rightarrow$ 10 capicúas

El total de números capicúas entre 2 000 y 5 000 es de $10 \cdot 3 = 30$.

Fracciones

49 ■□□ **En un depósito, el lunes había 3 000 litros de agua y estaba lleno. El martes se gastó $\frac{1}{6}$ del depósito. El miércoles se sacaron 1 250 litros.**

¿Qué fracción queda?

Lunes $\rightarrow$ depósito lleno = 3 000 l

Martes $\rightarrow$ se gastó $\frac{1}{6}$ del depósito $= \frac{1}{6}$ de $3\,000 = 500$ l

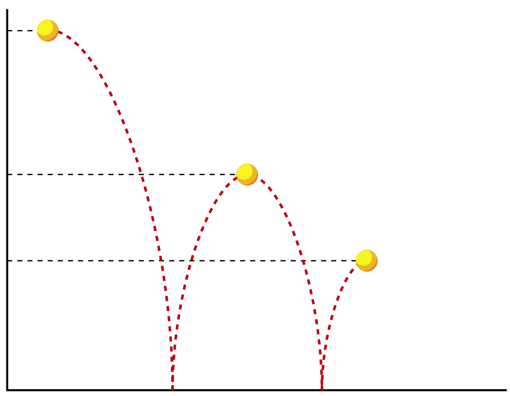
Miércoles $\rightarrow$ se sacaron 1 250 l

Litros que quedan $\rightarrow$ $3\,000 - 1\,250 - 500 = 1\,250$ l

La fracción que representa el número de litros que queda es $\frac{1\,250}{3\,000} = \frac{5}{12}$.

50 ■□□ **Una pelota pierde en cada bote $\frac{2}{5}$ de la altura a la que llegó en el bote anterior.**

¿Qué fracción de la altura inicial, desde la que cayó, alcanzará cuatro botes después?



En el primer bote alcanzará una altura de $\frac{3}{5}$ de la altura inicial;

en el segundo bote la altura será $\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{5}$ de la altura inicial…

… luego en cuatro botes la altura alcanzada será $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$ de la altura inicial.

51 □□□ **Los $\frac{3}{8}$ de un poste están pintados de blanco; los $\frac{3}{5}$ del resto, de azul, y el resto, que mide 1,25 m, de rojo.**

¿Cuál es la altura del poste? ¿Cuánto mide la parte pintada de azul?

Pintados de blanco $\rightarrow$ $\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ el resto es $\frac{5}{8}$

Pintados de azul $\rightarrow$ $\frac{3}{5}$ del resto $= \frac{3}{5}$ de $\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

Pintados de rojo $\rightarrow$ 1,25 m

Fracción pintada de blanco o azul $= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

El resto, que es $\frac{1}{4}$, está pintado de rojo, y representa 1,25 m $\rightarrow$

ALTURA DEL POSTE $= 1{,}25 \cdot 4 = 5$ m

La parte pintada de azul mide $\frac{3}{8}$ de $5 = 1{,}875$ m.

52 □□□ **Una canica cae al suelo y se eleva cada vez a los $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. Después de haber botado tres veces, se ha elevado 2 m de altura.**

¿Desde qué altura cayó?

$\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de la altura incial es 2 m $\rightarrow$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ de la altura inicial} = 2 \text{ m} \rightarrow \frac{8}{27} \text{ de la altura inicial} = 2 \text{ m}$$

Altura inicial $= \frac{2 \cdot 27}{8} = 6{,}75$ m

53 □□□ **Un jardinero riega en un día $\frac{2}{5}$ partes del jardín. ¿Cuántos días tardará en regar todo el jardín?**

¿Cuánto ganará si cobra 50 € por día?

En 1 día riega $\frac{2}{5}$ partes $\rightarrow$ en medio día riega: $\frac{2}{5} : 2 = \frac{1}{5}$ del jardin.

Luego todo el jardin lo regará en 5 medios días, es decir, en 2 días y medio.

En 1 día cobra 50 € $\rightarrow$ en 2 días y medio: $50 \cdot 2{,}5 = 125$ €.

54 □□□ **En un puesto de frutas y verduras, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden al apartado frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los 3/8 corresponden a las naranjas. Si la venta de naranjas asciende a 89 €, ¿qué caja ha hecho el establecimiento?**

Del dinero total recaudado, la fracción que corresponde a la venta de naranjas es:

$$\frac{3}{8} \text{ de } \frac{5}{6} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$$

Por lo tanto, $\frac{5}{16}$ equivale a 89 € $\rightarrow$ $\frac{1}{16}$ equivale a 17,8 € (resultado de dividir 89 entre 5) $\rightarrow$ el total de dinero recaudado será $17{,}8 \cdot 16 = 284{,}8$ €.

55 □□□ **A Pablo le descuentan al mes, del sueldo bruto, la octava parte de IRPF y la décima parte para la Seguridad Social. Si el sueldo neto es 1 302 €, ¿cuál es su sueldo bruto mensual?**

Calculamos la fracción total que se descuenta del sueldo bruto:

$$\left.\begin{array}{l} \text{IRPF} \rightarrow \frac{1}{8} \\ \text{S. Social} \rightarrow \frac{1}{10} \end{array}\right\} \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{5}{40} + \frac{4}{40} = \frac{9}{40}$$

Por tanto, la fracción que cobra del sueldo bruto es $1 - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}$.

$\frac{31}{40}$ del sueldo bruto = 1 302 $\rightarrow$ Sueldo bruto = $\frac{1\,302 \cdot 40}{31} = 1\,680$

Su sueldo bruto mensual es de 1 680 €.

56 □□□ **De una clase de alumnos, $\frac{3}{7}$ del total han ido al museo de ciencias y $\frac{2}{5}$ a un concierto.**

a) ¿Adónde han ido más alumnos?

b) Si 6 alumnos no han ido a ninguna actividad, ¿cuántos alumnos hay en la clase?

a) Comparamos las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} = \frac{15}{35} \\ \frac{2}{5} = \frac{14}{35} \end{array}\right\} \frac{15}{35} > \frac{14}{35} \rightarrow \frac{3}{7} > \frac{2}{5}$$

Han ido más alumnos al museo de Ciencias.

b) Fracción de alumnos que han ido a alguna actividad:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{29}{35}$$

Fracción de alumnos que no han ido a ninguna actividad:

$$1 - \frac{29}{35} = \frac{35}{35} - \frac{29}{35} = \frac{6}{35}$$

$\frac{6}{35}$ equivale a 6 alumnos $\rightarrow$ $\frac{35}{35}$ equivaldrá a 35 alumnos.

En la clase hay 35 alumnos.

57 □□□ **En una fiesta de cumpleaños se comen, en una primera ronda, $\frac{3}{8}$ de la tarta, y, después, la quinta parte de lo que sobraba.**

¿Qué fracción de tarta no se ha comido?

Primera ronda → se comen $\frac{3}{8}$ → sobra $\frac{5}{8}$

Segunda ronda → se comen $\frac{1}{5}$ de lo que sobra $= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

Fracción del total de tarta comida $= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

La fracción de tarta que no se ha comido es $\frac{1}{2}$.

58 □□□ **Una familia se va de vacaciones diez días. Se alojan en un hotel con pensión completa cuyo coste representa 3/5 de su presupuesto, gastándose 2/3 del resto en ocio.**

Si regresan a su casa con 640 €, ¿cuál era su presupuesto para las vacaciones?

Fracción gastada en el hotel con pensión completa → $\frac{3}{5}$. Sobran $\frac{2}{5}$.

Fracción gastada en ocio → $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

Fracción total gastada → $\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15}$

Fracción sin gastar → $1 - \frac{13}{15} = \frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$

$\frac{2}{15}$ equivale a 640 € → $\frac{1}{15}$ equivale a 640 : 2 = 320 €

El presupuesto para las vacaciones ha sido de $320 \cdot 15 = 4\,800$ €.

59 □□□ **De un solar se venden primero los 2/3 de su superficie y después los 2/3 de lo que quedaba. El ayuntamiento expropia los 3 200 m² restantes para un parque público.**

¿Cuál era la superficie del solar?

1ª venta → $\frac{2}{3}$ → queda por vender $\frac{1}{3}$

2ª venta → $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Fracción que representa el solar vendido $= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$

Fracción que representa el solar sin vender, que es la superficie expropiada:

$\frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$, que equivale a $3\,200$ m^2

La superficie del solar será $3\,200 \cdot 9 = 28\,800$ m^2.

60 **Un obrero ha tardado 1 hora y tres cuartos en acuchillar 3/5 partes de un piso. Si ha empezado a las 10 de la mañana, ¿a qué hora acabará?**

1 hora y tres cuartos $= 1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ de hora

$\frac{3}{5}$ partes del piso tarda $\frac{7}{4}$ de hora $\rightarrow \frac{1}{5}$ tardará $\frac{7}{4} : 3 = \frac{7}{12}$ de hora =

$= \frac{7}{12}$ de 60 minutos $= \frac{7 \cdot 60}{12} = 35$ minutos.

En acuchillar todo el piso tardará $35 \cdot 5 = 175$ minutos; es decir, 2 horas y 55 minutos.

Si ha empezado a las 10 de la mañana, acabará a la una menos cinco de la tarde (12 h 55 min) en acuchillar todo el piso.

61 **Un tren tarda 3 horas y cuarto en recorrer 5/9 de un trayecto de 918 km.**

a) Calcula el tiempo que tarda en realizar el trayecto si sigue a la misma velocidad.

b) ¿Cuál ha sido su velocidad media?

a) 3 horas y cuarto $= 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ de hora

En recorrer $\frac{5}{9}$ del trayecto tarda $\frac{13}{4}$ de hora $\rightarrow$ En recorrer $\frac{1}{9}$ tardará:

$\frac{13}{4} : 5 = \frac{13}{20}$ de hora $= \frac{13}{20}$ de 60 minutos $= \frac{13 \cdot 60}{20} = 39$ minutos

En realizar todo el trayecto tardará $9 \cdot 39 = 351$ minutos; esto es, 5 horas y 51 minutos.

b) velocidad $= \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$ $\qquad$ 5 h y 51 minutos $= 5\text{ h} + \frac{51}{60}\text{ h} = \frac{351}{60}\text{ h}$

velocidad $\frac{918\text{ km}}{\frac{351}{60}\text{ h}} = \frac{918 \cdot 60}{351} \approx 156{,}92$ km/h

62 **Reduce.**

a) $\frac{(a^3)^2 \cdot b^4}{(ab)^2}$ $\qquad$ **b)** $\frac{a^2 \cdot (b \cdot c)^2}{(ab)^3 \cdot c}$ $\qquad$ **c)** $\frac{(ab)^2 - (ab)^3}{(ab)^4}$

a) $\frac{(a^3)^2 \cdot b^4}{(ab)^2} = \frac{a^6 \cdot b^4}{a^2 b^2} = a^4 \cdot b^2$

b) $\frac{a^2 \cdot (b \cdot c)^2}{(ab)^3 \cdot c} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{a^3 \cdot b^3 \cdot c} = \frac{c}{ab}$

c) $\frac{(ab)^2 - (ab)^3}{(ab)^4} = \frac{a^2b^2 - a^3b^3}{a^4b^4} = \frac{a^2b^2(1 - ab)}{a^4b^4} = \frac{1 - ab}{a^2b^2}$

63 **Reduce aplicando las propiedades de las potencias.**

a) $\dfrac{2^2 \cdot 3^4}{9 \cdot 12 \cdot 6}$ **b)** $\dfrac{4 \cdot 45 \cdot 24}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5}$ **c)** $\dfrac{8 \cdot 27^{-1}}{12^{-1}}$

a) $\dfrac{2^2 \cdot 3^4}{9 \cdot 12 \cdot 6} = \dfrac{2^2 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{2^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{4 \cdot 45 \cdot 24}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = \dfrac{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = 2$

c) $\dfrac{8 \cdot 27^{-1}}{12^{-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^{-3}}{2^{-2} \cdot 3^{-1}} = 2^5 \cdot 3^{-2} = \dfrac{2^5}{3^2}$

PÁGINA 46

PRACTICA

Relación entre número decimal y fracción

1 **Calcula mentalmente el número decimal equivalente a cada fracción.**

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{8}{5}$ **d)** $\frac{17}{10}$

e) $\frac{15}{100}$ **f)** $\frac{45}{2}$ **g)** $\frac{7}{20}$ **h)** $\frac{31}{25}$

a) 0,75 b) 0,2 c) 1,6 d) 1,7

e) 0,15 f) 22,5 g) 0,35 h) 1,24

2 **Transforma en número decimal las siguientes fracciones:**

a) $\frac{121}{9}$ **b)** $\frac{753}{4}$ **c)** $\frac{1}{18}$ **d)** $\frac{2}{11}$ **e)** $\frac{49}{8}$

a) $13,\overset{\frown}{4}$ b) 188,25 c) $0,0\overset{\frown}{5}$ d) $0,\overset{\frown}{18}$ e) 6,125

3 **Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos y decimales periódicos.**

a) $\frac{13}{8}$ **b)** $\frac{139}{27}$ **c)** $\frac{25}{11}$

d) $\frac{9}{250}$ **e)** $\frac{131}{66}$ **f)** $\frac{223}{18}$

a) 1,625 b) $5,\overset{\frown}{148}$ c) $2,\overset{\frown}{27}$

d) 0,036 e) $1,9\overset{\frown}{84}$ f) $12,3\overset{\frown}{8}$

Son decimales exactos a) y d) y decimales periódicos b), c), e) y f).

4 **Expresa en forma de fracción irreducible.**

a) 1,321 **b)** $2,\overset{\frown}{4}$ **c)** 0,008 **d)** $5,\overset{\frown}{54}$

e) $2,3\overset{\frown}{5}$ **f)** $0,0\overset{\frown}{36}$ **g)** $0,\overset{\frown}{945}$ **h)** $0,11\overset{\frown}{6}$

a) $1,321 = \frac{1\,321}{1\,000}$

b) $2,\overset{\frown}{4}$

$$\left.\begin{array}{r} N = 2,444\ldots \\ 10N = 24,44\ldots \end{array}\right\}$$

Restando: $10N - N = 22 \rightarrow 9N = 22 \rightarrow N = \frac{22}{9} \rightarrow 2,\overset{\frown}{4} = \frac{22}{9}$

c) $0,008 = \frac{8}{1\,000} = \frac{1}{125}$

d) $5,\widehat{54}$

Llamamos $N = 5,545454...$

Para obtener un número con el mismo periodo, multiplicamos N por 100:

$100N = 554,54...$

Restando:

$100N - N = 554,54... - 5,5454... \Rightarrow 99N = 554 - 5 \rightarrow N = \frac{549}{99} = \frac{61}{11}$

Por lo tanto: $5,\widehat{54} = \frac{61}{11}$

e) $2,3\widehat{5}$

$$\left.\begin{aligned} N &= 2,3555... \\ 10N &= 23,555... \\ 100N &= 235,555... \end{aligned}\right\}$$

Restando: $100N - 10N = 212 \rightarrow 90N = 212 \rightarrow N = \frac{212}{90} = \frac{106}{45}$

Así: $2,3\widehat{5} = \frac{106}{45}$

f) $0,0\widehat{36}$

Llamamos $N = 0,03636...$

Multiplicamos por 10 para obtener un decimal periódico puro:

$10N = 0,3636...$

Multiplicamos por 1 000 para obtener otro con la misma parte decimal:

$1\,000N = 36,36...$

Restando: $1\,000N - 10N = 36 \rightarrow 990N = 36 \rightarrow N = \frac{36}{990} = \frac{2}{55}$

Por tanto: $0,0\widehat{36} = \frac{2}{55}$

g) $0,\widehat{945}$

Llamamos $N = 0,945945...$

Multiplicamos N por 1 000 para obtener otro número con la misma parte decimal:

$1\,000N = 945,945...$

Restando:

$1\,000N - N = 945 \rightarrow 999N = 945 \rightarrow N = \frac{945}{999} = \frac{35}{37}$

Por tanto: $0,\widehat{945} = \dfrac{35}{37}$

h) $0,11\widehat{6}$

Llamamos $N = 0,11666\ldots$

Multiplicamos por 100 para obtener un número decimal periódico puro:

$100N = 11,666\ldots$

Multiplicamos por 1 000 para obtener un número con la misma parte decimal:

$1\,000N = 116,666\ldots$

Restamos: $1\,000N - 100N = 116 - 11 \;\rightarrow\; 900N = 105 \;\rightarrow\; N = \dfrac{105}{900} = \dfrac{7}{60}$

Por tanto: $0,11\widehat{6} = \dfrac{7}{60}$

5 **Comprueba, pasando a fracción, que los siguientes números decimales corresponden a números enteros:**

$$\mathbf{1,\widehat{9};\;\; 2,\widehat{9};\;\; 7,\widehat{9};\;\; 11,\widehat{9}}$$

Observando el resultado obtenido, ¿qué número entero le corresponde a $126,\widehat{9}$?

- Llamamos: $N = 1,999\ldots \;\rightarrow\; 10N = 19,999\ldots$

  $10N - N = 19 - 1 \;\rightarrow\; 9N = 18 \;\rightarrow\; N = 2$

  Luego: $1,\widehat{9} = 2$
- Llamamos: $N = 2,99\ldots \;\rightarrow\; 10N = 29,99\ldots$

  $10N - N = 29 - 2 \;\rightarrow\; 9N = 27 \;\rightarrow\; N = 3$

  Luego: $2,\widehat{9} = 3$
- Llamamos: $N = 7,99\ldots \;\rightarrow\; 10\,N = 79,99\ldots$

  $10N - N = 79 - 7 \;\rightarrow\; 9N = 72 \;\rightarrow\; N = 8$

  Por tanto: $7,\widehat{9} = 8$
- Llamamos: $N = 11,99\ldots \;\rightarrow\; 10N = 119,99\ldots$

  $10N - N = 119 - 11 \;\rightarrow\; 9N = 108 \;\rightarrow\; N = 12$

  Luego: $11,\widehat{9} = 12$

A $126,\widehat{9}$, le corresponde el número entero 127.

6 **Ordena de menor a mayor:**

$$\mathbf{5,53;\;\; 5,\widehat{53};\;\; 5,5\widehat{3};\;\; 5,5;\;\; 5,56;\;\; 5,\widehat{5}}$$

$$5,5 < 5,53 < 5,5\widehat{3} < 5,\widehat{53} < 5,\widehat{5} < 5,56$$

7 ■□□ **¿Cuáles de los siguientes números pueden expresarse como fracción?:**

$$3,45;\ 1,00\widehat{3};\ \sqrt{2};\ 2+\sqrt{5};\ \pi;\ 1,\widehat{142857}$$

Escribe la fracción que representa a cada uno en los casos en que sea posible.

Se pueden expresar como fracción: $3,45$; $1,00\widehat{3}$ y $1,\widehat{142857}$

- $3,45 = \dfrac{345}{100} = \dfrac{69}{20}$

- $1,00\widehat{3}$

$$\left.\begin{array}{r l} N = & 1,00333\ldots \\ 100N = & 100,333\ldots \\ 1\,000N = & 1\,003,333\ldots \end{array}\right\}$$

Restando: $1\,000N - 100N = 903 \;\to\; 900N = 903 \;\to$

$\to\; N = \dfrac{903}{900} = \dfrac{301}{300} \;\to\; 1,00\widehat{3} = \dfrac{301}{300}$

- $1,\widehat{142857}$

$1\,142\,857,\widehat{142857} - 1,\widehat{142857} = 1\,142\,856$

$$\left\{\begin{array}{r l} N = & 1,142857\ldots \\ 1\,000\,000N = & 1\,142\,857,142857\ldots \end{array}\right.$$

Restando: $1\,000\,000N - N = 1\,142\,856 \;\to\; 999\,999N = 1\,142\,856$

$$N = \frac{1\,142\,856}{999\,999} = \frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}{3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{2^3}{7} = \frac{8}{7}$$

$1,\widehat{142857} = \dfrac{8}{7}$

8 ■■□ **Escribe, en cada caso, un decimal exacto y un decimal periódico comprendidos entre los números dados:**

a) $3,5$ **y** $3,6$ **b)** $3,\widehat{4}$ **y** $3,\widehat{5}$ **c)** $3,2\widehat{5}$ **y** $3,\widehat{26}$

a) Entre $3,5$ y $3,6$

Exacto $\to$ $3,55$

Periódico $\to$ $3,5\widehat{1}$

b) Entre $3,\widehat{4}$ y $3,\widehat{5}$

Exacto $\to$ $3,47$

Periódico $\to$ $3,4\widehat{52}$

c) Entre $3,2\widehat{5}$ y $3,\widehat{26}$

Exacto $\to$ $3,26$

Periódico $\to$ $3,25\widehat{8}$

Números aproximados. Errores

9 **Aproxima a las centésimas:**

a) **0,318** **b)** **3,2414** **c)** **18,073**

d) $\frac{100}{71}$ **e)** $\frac{25}{13}$ **f)** $\frac{65}{7}$

a) 0,32 b) 3,24 c) 18,07

d) $\frac{100}{71} = 1{,}4084507 \rightarrow$ la aproximación a las centésimas es 1,41

e) $\frac{25}{13} = 1{,}9230769 \rightarrow$ la aproximación a las centésimas es 1,92

f) $\frac{65}{7} = 9{,}2857142 \rightarrow$ la aproximación a las centésimas es 9,29

10 **Calcula:**

a) El error absoluto cometido en cada una de las aproximaciones realizadas en el ejercicio anterior.

Dado que el error absoluto = |valor real – valor aproximado| se obtiene, en cada caso, lo siguiente:

a) Error absoluto = $|0{,}318 - 0{,}32| = 0{,}002$

b) Error absoluto = $|3{,}2414 - 3{,}24| = 0{,}0014$

c) Error absoluto = $|18{,}073 - 18{,}07| = 0{,}003$

d) Error absoluto = $\left|\frac{100}{71} - 1{,}41\right| \approx 0{,}0015$

e) Error absoluto = $\left|\frac{25}{13} - 1{,}92\right| \approx 0{,}003$

f) Error absoluto = $\left|\frac{65}{7} - 9{,}29\right| \approx 0{,}004$

b) Una cota del error relativo cometido en cada caso.

En todos los casos, al haber redondeado a las centésimas, el error absoluto es menor que 0,005.

a) Error relativo $< \frac{0{,}005}{0{,}318} < 0{,}016$

b) Error relativo $< \frac{0{,}005}{3{,}2414} < 0{,}002$

c) Error relativo $< \frac{0{,}005}{18{,}073} < 0{,}0003$

d) Error relativo $< \frac{0{,}005}{100/71} < 0{,}004$

e) Error relativo $< \frac{0{,}005}{25/13} < 0{,}003$

f) Error relativo $< \frac{0{,}005}{65/7} < 0{,}00054$

11 □□□ **Expresa con un número adecuado de cifras significativas.**

a) Audiencia de cierto programa de televisión: 3 017 849 espectadores.

b) Tamaño de un virus: 0,008375 mm.

c) Resultado de 15^7.

d) Precio de un coche: 18 753 €.

e) Presupuesto de un ayuntamiento: 987 245 €.

f) Porcentaje de votos de un candidato a delegado: 37,285%.

g) Capacidad de un pantano: 3 733 827 000 *l*.

a) 3 000 000 espectadores

b) 0,008 mm

c) $15^7 = 170\,859\,375 \;\rightarrow\; 170\,000\,000$

d) 19 000 €

e) 1 000 000 €

f) 37%

g) 3 750 000 000 *l*

12 □□□ **Calcula, en cada uno de los apartados del ejercicio anterior, el error absoluto y el error relativo de las cantidades dadas como aproximaciones.**

Dado que:

Error absoluto = |Valor real – Valor de la medición|

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}},$$

obtendríamos:

a) Error absoluto = 17 849

$$\text{Error relativo} = \frac{17\,849}{3\,017\,849} \approx 0{,}006$$

b) Error absoluto = 0,000375

$$\text{Error relativo} = \frac{0{,}000375}{0{,}008375} \approx 0{,}04$$

c) Error absoluto = 859 375

$$\text{Error relativo} = \frac{859\,375}{170\,859\,375} \approx 0{,}005$$

d) Error absoluto = 247

$$\text{Error relativo} = \frac{247}{18\,753} \approx 0{,}013$$

e) Error absoluto = 12 755

$$\text{Error relativo} = \frac{12\,755}{987\,245} \approx 0{,}013$$

f) Error absoluto = 0,285

Error relativo = $\frac{0{,}285}{37{,}285} \approx 0{,}007$

g) Error absoluto = 16 173 000

Error relativo = $\frac{16\,173\,000}{3\,733\,827\,000} \approx 0{,}004$

13 □□□ **Indica, en cada caso, en cuál de las aproximaciones se comete menos error absoluto:**

a) $1{,}\widehat{37} \approx \begin{cases} 1{,}3 \\ 1{,}4 \end{cases}$ **b)** $\frac{17}{6} \approx \begin{cases} 2{,}8 \\ 2{,}9 \end{cases}$

a) Error absoluto = |valor real – valor aproximado|

Si tomamos 1,3 como aproximación de 1,37 → Error absoluto = |1,37 – 1,3| = 0,07.

Si tomamos 1,4 → Error absoluto = |1,37 – 1,4| = 0,03.

Se comete menos error absoluto tomando 1,4 como valor aproximado.

b) Error absoluto = |valor real – valor aproximado|

Tomando 2,8 como aproximación de $\frac{17}{6}$ se obtiene:

Error absoluto = $\left|\frac{17}{6} - 2{,}8\right| = 0{,}0\widehat{3}$

Tomando 2,9 se obtiene:

Error absoluto = $\left|\frac{17}{6} - 2{,}9\right| = 0{,}0\widehat{6}$

Hay menos error absoluto tomando 2,8 como aproximación.

14 □□□ **En un supermercado se venden en un día 735 unidades de un determinado detergente a 10,95 € la unidad.**

a) ¿Cuánto dinero se ha recaudado con la venta? Aproxima la cantidad obtenida dando dos cifras significativas.

b) Di cuál es el error absoluto que se comete al hacer la aproximación. ¿Cuál sería una cota del error absoluto?

a) Dinero recaudado = 735 · 10,95 = 8 048,25 €

La aproximación, dando dos cifras significativas, será 8 000 € (el cero de la centena es cifra significativa).

b) Error absoluto = |valor real – valor aproximado|

Por tanto:

Error absoluto = |8 048,25 – 8 000| = 48,25

Una cota del error absoluto sería 50.

15 □□□ **Los números 2,5 y 2,6 son dos aproximaciones del valor $n = \frac{18}{7}$.**

a) Calcula el error absoluto en cada caso. ¿Cuál de los dos es más próximo a n?

b) Calcula en cada caso una cota del error relativo comprendida entre 0,1 y 0,01.

a) $\frac{18}{7} \approx 2{,}571$

La aproximación 2,6 está más próxima a $\frac{18}{7}$.

Calculamos el error absoluto con cada aproximación:

Aproximando a 2,5 $\rightarrow$ Error absoluto = 2,571 – 2,5 = 0,071

Aproximando a 2,6 $\rightarrow$ Error absoluto = 2,6 – 2,571 = 0,029

b) Error relativo = $\frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$

Tomando como aproximación 2,5:

Error relativo = $\frac{0{,}071}{18/7} < 0{,}028$

Tomando como aproximación 2,6:

Error relativo = $\frac{0{,}029}{18/7} < 0{,}0113$

PÁGINA 47

Notación científica

16 □□□ **Expresa con una potencia de base 10.**

a) 1 000 **b) 1 000 000** **c) 1 000 000 000**

d) 0,001 **e) 0,000001** **f) 0,000000001**

a) 10^3 b) 10^6 c) 10^9

d) 10^{-3} e) 10^{-6} f) 10^{-9}

17 □□□ **Expresa con todas las cifras:**

a) $6{,}25 \cdot 10^8$ **b) $2{,}7 \cdot 10^{-4}$** **c) $3 \cdot 10^{-6}$**

d) $5{,}18 \cdot 10^{14}$ **e) $3{,}215 \cdot 10^{-9}$** **f) $-4 \cdot 10^{-7}$**

a) 625 000 000 b) 0,00027 c) 0,000003

d) 518 000 000 000 000 e) 0,000000003215 f) –0,0000004

18 □□□ **Escribe en notación científica:**

a) 4 230 000 000 **b) 0,00000004**

c) 84 300 **d) 0,000572**

a) $4{,}23 \cdot 10^9$ b) $4 \cdot 10^{-8}$

c) $8{,}43 \cdot 10^4$ d) $5{,}72 \cdot 10^{-4}$

19 □□□ **Expresa en notación científica:**

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Diámetro de una punta de alfiler: 0,1 mm.

c) Presupuesto destinado a Sanidad: 525 miles de millones.

d) Diámetro de las células sanguíneas: 0,00075 mm.

a) $1{,}628 \cdot 10^6$ €

b) 10^{-1} mm

c) $525\ \underbrace{\text{miles}}_{10^3}\ \text{de}\ \underbrace{\text{millones}}_{10^6} = 525 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 525 \cdot 10^9 = 5{,}25 \cdot 10^{11}$ €

d) $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ mm

20 □□□ **Expresa en notación científica:**

a) La centésima parte de una décima.

b) Tres millares de billón.

c) Dos mil trescientos miles de millones.

d) Cinco millonésimas.

a) $0{,}01 \cdot 0{,}1 = 10^{-2} \cdot 10^{-1} = 10^{-3}$

b) $3 \cdot 10^3 \cdot 10^{12} = 3 \cdot 10^{15}$

c) $2\,300 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 23 \cdot 10^2 \cdot 10^9 = 23 \cdot 10^{11} = 2{,}3 \cdot 10^{12}$

d) $0{,}000005 = 5 \cdot 10^{-6}$

21 □□□ **Reduce a una potencia de base 10.**

a) $\mathbf{10^3 \cdot 10^5 \cdot 10}$ **b)** $\mathbf{(10^2 \cdot 10^2)^2}$

c) $\mathbf{10^{-4} \cdot 10^6}$ **d)** $\mathbf{10^{-3} \cdot 10^5}$

e) $\mathbf{10^8 : 10^3}$ **f)** $\mathbf{10^5 : 10^8}$

g) $\mathbf{10^{-2} : 10^{-5}}$ **h)** $\mathbf{10^{-6} : 10^{-2}}$

a) $10^3 \cdot 10^5 \cdot 10 = 10^{3+5+1} = 10^9$

b) $(10^2 \cdot 10^2)^2 = (10^{2+2})^2 = (10^4)^2 = 10^8$

c) $10^{-4} \cdot 10^6 = 10^{-4+6} = 10^2$

d) $10^{-3} \cdot 10^5 = 10^{-3+5} = 10^2$

e) $10^8 : 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$

f) $10^5 : 10^8 = 10^{5-8} = 10^{-3}$

g) $10^{-2} : 10^{-5} = 10^{-2-(-5)} = 10^3$

h) $10^{-6} : 10^{-2} = 10^{-6-(-2)} = 10^{-4}$

22 □□□ **Reduce:**

a) $\frac{10^5 \cdot 10^2}{10^6}$ **b)** $\frac{10^2 \cdot 10^4}{10^8}$ **c)** $\frac{10^5 \cdot 10^7}{10^4 \cdot 10^8}$

a) $\frac{10^5 \cdot 10^2}{10^6} = \frac{10^{5+2}}{10^6} = \frac{10^7}{10^6} = 10^{7-6} = 10$

b) $\frac{10^2 \cdot 10^4}{10^8} = \frac{10^{2+4}}{10^8} = \frac{10^6}{10^8} = 10^{6-8} = 10^{-2}$

c) $\frac{10^5 \cdot 10^7}{10^4 \cdot 10^8} = \frac{10^{5+7}}{10^{4+8}} = \frac{10^{12}}{10^{12}} = 10^0 = 1$

23 □□□ **Calcula mentalmente:**

a) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$ **b)** $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{-3})$

c) $(4 \cdot 10^{-12}) : (2 \cdot 10^{-4})$ **d)** $\sqrt{9 \cdot 10^4}$

e) $(2 \cdot 10^{-3})^3$ **f)** $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}}$

a) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5) = (1{,}5 \cdot 2) \cdot 10^{7+5} = 3 \cdot 10^{12}$

b) $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{-3}) = (3 : 2) \cdot 10^{6-(-3)} = 1{,}5 \cdot 10^9$

c) $(4 \cdot 10^{-12}) : (2 \cdot 10^{-4}) = (4 : 2) \cdot 10^{-12-(-4)} = 2 \cdot 10^{-8}$

d) $\sqrt{9 \cdot 10^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10^4} = 3 \cdot 10^{4/2} = 3 \cdot 10^2$

e) $(2 \cdot 10^{-3})^3 = 2^3 \cdot (10^{-3})^3 = 8 \cdot 10^{-9}$

f) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-6/3} = 2 \cdot 10^{-2}$

24 □□□ **Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.**

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5)$

c) $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(6 \cdot 10^{-7})^2$

e) $\sqrt{121 \cdot 10^{-6}}$ **f)** $(5 \cdot 10^4)^3$

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8) = (3{,}5 \cdot 4) \cdot 10^{7+8} = 14 \cdot 10^{15} = 1{,}4 \cdot 10^{16}$

b) $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5) = (5 \cdot 2{,}5) \cdot 10^{-8+5} = 12{,}5 \cdot 10^{-3} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$

c) $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6}) = (1{,}2 : 5) \cdot 10^{7-(-6)} = 0{,}24 \cdot 10^{13} = 2{,}4 \cdot 10^{12}$

d) $(6 \cdot 10^{-7})^2 = 6^2 \cdot (10^{-7})^2 = 36 \cdot 10^{-14} = 3{,}6 \cdot 10^{-13}$

e) $\sqrt{121 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{10^{-6}} = 11 \cdot 10^{-6/2} = 11 \cdot 10^{-3} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$

f) $(5 \cdot 10^4)^3 = 5^3 \cdot (10^4)^3 = 125 \cdot 10^{12} = 1{,}25 \cdot 10^{14}$

25 **Efectúa a mano utilizando la notación científica y comprueba después con la calculadora.**

a) $5,3 \cdot 10^{8} - 3 \cdot 10^{10}$ **b)** $3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6}$

c) $3,1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ **d)** $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$

a) $5,3 \cdot 10^{8} - 3 \cdot 10^{10} = 5,3 \cdot 10^{8} - 300 \cdot 10^{8} = (5,3 - 300) \cdot 10^{8} = -294,7 \cdot 10^{8} =$

$= -2,947 \cdot 10^{10}$

b) $3 \cdot 10^{-5} + 8,2 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-5} + 0,82 \cdot 10^{-5} = (3 + 0,82) \cdot 10^{-5} = 3,82 \cdot 10^{-5}$

c) $3,1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10} = 310 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{10} = (310 + 2) \cdot 10^{10} = 312 \cdot 10^{10} = 3,12 \cdot 10^{12}$

d) $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8} = 0,6 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-8} = (0,6 - 5) \cdot 10^{-8} = -4,4 \cdot 10^{-8}$

26 **Expresa en notación científica y calcula:**

a) $(75\,800)^{4} : (12\,000)^{2}$

b) $\dfrac{0,000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0,00302}$

c) $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0,00003 - 0,00015}$

a) $(75\,800)^{4} : (12\,000)^{2} = (7,58 \cdot 10^{4})^{4} : (1,2 \cdot 10^{4})^{2} =$

$= [(7,58)^{4} \cdot 10^{16}] : [(1,2)^{2} \cdot 10^{8}] = \dfrac{(7,58)^{4}}{(1,2)^{2}} \cdot 10^{16-8} =$

$= 2\,292,52 \cdot 10^{8} = 2,29252 \cdot 10^{11} \approx 2,29 \cdot 10^{11}$

b) $\dfrac{0,000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0,00302} = \dfrac{5,41 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0318 \cdot 10^{7}}{1,52 \cdot 10^{6} \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} =$

$= \dfrac{(5,41 \cdot 1,0318) \cdot 10^{3}}{(1,52 \cdot 3,02) \cdot 10^{3}} = \dfrac{5,582038}{4,5904} \approx 1,216$

c) $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0,00003 - 0,00015} = \dfrac{2,7 \cdot 10^{6} - 13 \cdot 10^{6}}{3 \cdot 10^{-5} - 15 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{(2,7 - 13) \cdot 10^{6}}{(3 - 15) \cdot 10^{-5}} =$

$= \dfrac{-10,3 \cdot 10^{6}}{-12 \cdot 10^{-5}} = 0,858\overset{\frown}{3} \cdot 10^{11}$

27 **Utiliza la calculadora para efectuar las siguientes operaciones y expresa el resultado con dos y con tres cifras significativas:**

a) $(4,5 \cdot 10^{12}) \cdot (8,37 \cdot 10^{-4})$ **b)** $(5,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3,25 \cdot 10^{-9})$

c) $(8,4 \cdot 10^{11}) : (3,2 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(7,8 \cdot 10^{-7})^{3}$

a) $(4,5 \cdot 10^{12}) \cdot (8,37 \cdot 10^{-4}) = (4,5 \cdot 8,37) \cdot 10^{12-4} =$

$= 37,665 \cdot 10^{8} \approx 3,7665 \cdot 10^{9}$

Con 3 cifras significativas $\rightarrow$ $3,77 \cdot 10^{9}$

Con 2 cifras significativas $\rightarrow$ $3,8 \cdot 10^9$

b) $(5,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3,25 \cdot 10^{-9}) = (5,2 \cdot 3,25) \cdot 10^{-4-9} = 16,9 \cdot 10^{-13} =$

$= 1,69 \cdot 10^{-12} \approx 1,7 \cdot 10^{-12}$

c) $(8,4 \cdot 10^{11}) : (3,2 \cdot 10^{-6}) = (8,4 : 3,2) \cdot 10^{11-(-6)} =$

$= 2,625 \cdot 10^{17} \approx 2,63 \cdot 10^{17} \approx 2,6 \cdot 10^{17}$

d) $(7,8 \cdot 10^{-7})^3 = (7,8)^3 \cdot 10^{-7 \cdot 3} = 474,552 \cdot 10^{-21} = 4,74552 \cdot 10^{-19} \approx$

$\approx 4,75 \cdot 10^{-19} \approx 4,8 \cdot 10^{-19}$

28 **Efectúa y expresa el resultado en notación científica:**

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$

b) $\dfrac{7,35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3,2 \cdot 10^7$

c) $(4,3 \cdot 10^3 - 7,2 \cdot 10^5)^2$

Comprueba los resultados con la calculadora

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5} = \dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 70 \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5} = \dfrac{(3 + 70) \cdot 10^{-5}}{(10 - 5) \cdot 10^5} =$

$= \dfrac{73 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^5} = 14,6 \cdot 10^{-10} = 1,46 \cdot 10^{-9}$

b) $\dfrac{7,35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3,2 \cdot 10^7 = (7,35 : 5) \cdot 10^{4-(-3)} + 3,2 \cdot 10^7 =$

$= 1,47 \cdot 10^7 + 3,2 \cdot 10^7 = (1,47 + 3,2) \cdot 10^7 =$

$= 4,67 \cdot 10^7$

c) $(4,3 \cdot 10^3 - 7,2 \cdot 10^5)^2 = (4,3 \cdot 10^3 - 720 \cdot 10^3)^2 = (-715,7 \cdot 10^3)^2 =$

$= (-7,157 \cdot 10^5)^2 \approx 51,22 \cdot 10^{10} = 5,122 \cdot 10^{11}$

29 **Asocia cada uno de estos números con una de las cantidades dadas:**

Números:

$$5,98 \cdot 10^{31};\ \ 1,5 \cdot 10^{-1};\ \ 9,1 \cdot 10^{-31}$$

Cantidades:

Paso de un tornillo en milímetros.

Masa del electrón en kilogramos.

Masa de la Tierra en toneladas.

$5,98 \cdot 10^{31}$ $\rightarrow$ Masa de la Tierra en toneladas
$1,5 \cdot 10^{-1}$ $\rightarrow$ Paso de un tornillo en milímetros
$9,1 \cdot 10^{-31}$ $\rightarrow$ Masa del electrón en kilogramos

PÁGINA 48

PIENSA Y RESUELVE

30 **Comprueba, pasando a fracción, que el resultado de estas operaciones es un número entero:**

a) $6,\overset{\frown}{17} + 3,\overset{\frown}{82}$ **b)** $4,\overset{\frown}{36} : 0,\overset{\frown}{16}$

c) $2,6\overset{\frown}{9} + 9,3$ **d)** $1,4 : 1,\overset{\frown}{5} + 0,1$

a) $6,\overset{\frown}{17} + 3,\overset{\frown}{82}$

- Pasamos $6,\overset{\frown}{17}$ a fracción:

  $N = 6,1717\ldots \qquad 100N = 617,1717\ldots$

  $100N - N = 617 - 6 \;\rightarrow\; 99N = 611 \;\rightarrow\; N = \dfrac{611}{99} \;\rightarrow\; 6,\overset{\frown}{17} = \dfrac{611}{99}$

- Pasamos $3,\overset{\frown}{82}$ a fracción:

  $N = 3,8282\ldots \qquad 100N = 382,8282\ldots$

  $100N - N = 382 - 3 \;\rightarrow\; 99N = 379 \;\rightarrow\; N = \dfrac{379}{99} \;\rightarrow\; 3,\overset{\frown}{82} = \dfrac{379}{99}$

Por tanto: $6,\overset{\frown}{17} + 3,\overset{\frown}{82} = \dfrac{611}{99} + \dfrac{379}{99} = \dfrac{990}{99} = 10$

b) $4,\overset{\frown}{36} : 0,\overset{\frown}{16}$

- Pasamos $4,\overset{\frown}{36}$ a fracción:

  $N = 4,3636\ldots \qquad 100N = 436,3636\ldots$

  $100N - N = 436 - 4 \;\rightarrow\; 99N = 432 \;\rightarrow\; N = \dfrac{432}{99} \;\rightarrow\; 4,\overset{\frown}{36} = \dfrac{432}{99}$

- Pasamos $0,\overset{\frown}{16}$ a fracción:

  $N = 0,1616\ldots \qquad 100N = 16,1616\ldots$

  $100N - N = 16 - 0 \;\rightarrow\; 99N = 16 \;\rightarrow\; N = \dfrac{16}{99} \;\rightarrow\; 0,\overset{\frown}{16} = \dfrac{16}{99}$

Por tanto: $4,\overset{\frown}{36} : 30,\overset{\frown}{16} = \dfrac{432}{99} : \dfrac{16}{99} = \dfrac{432}{16} = 27$

c) $2,6\overset{\frown}{9} + 9,3$

- Pasamos a fracción el número $2,6\overset{\frown}{9}$:

  $N = 2,6999\ldots \qquad 10N = 26,999\ldots \qquad 100N = 269,999\ldots$

  $100N - 10N = 269 - 26 \;\rightarrow\; 90N = 243 \;\rightarrow\; N = \dfrac{243}{90} \;\rightarrow\; 2,6\overset{\frown}{9} = \dfrac{243}{90}$

- Pasamos a fracción el número 9,3:

  $9,3 = \dfrac{93}{10}$

Por tanto: $2,6\overset{\frown}{9} + 9,3 = \dfrac{243}{90} + \dfrac{93}{10} = \dfrac{243}{90} + \dfrac{837}{90} = \dfrac{1\,080}{90} = 12$

d) $1{,}4 : 1{,}\widehat{5} + 0{,}1$

- Pasamos a fracción los números decimales exactos:

  $1{,}4 = \frac{14}{10}$ $\qquad$ $0{,}1 = \frac{1}{10}$

- Pasamos a fracción el número $1{,}\widehat{5}$:

  $N = 1{,}555\ldots$ $\qquad$ $10N = 15{,}55\ldots$

  $10N - N = 15 - 1 \;\rightarrow\; 9N = 14 \;\rightarrow\; N = \frac{14}{9} \;\rightarrow\; 1{,}\widehat{5} = \frac{14}{9}$

Por tanto: $1{,}4 : 1{,}\widehat{5} + 0{,}1 = \frac{14}{10} : \frac{14}{9} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$

31 **Escribe una aproximación de los siguientes números con un error menor que cinco milésimas:**

a) 5,7468 **b) 12,5271** **c) 8,0018**

a) 5,7468

Tomando 5,75 como aproximación, el error absoluto que se comete es:

$$5{,}75 - 5{,}7468 = 3{,}2 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$$

b) 12,5271

Aproximando a 12,53 el error absoluto será:

$$12{,}53 - 12{,}5271 = 2{,}9 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$$

c) 8,0018

Tomando 8 como aproximación, el error absoluto será:

$$8{,}0018 - 8 = 1{,}8 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$$

32 **Utiliza la calculadora para expresar en forma decimal las siguientes fracciones:**

$$\frac{79}{5}, \frac{23}{6}, \frac{59}{8}, \frac{129}{20}, \frac{425}{9}, \frac{45}{7}$$

Observa los denominadores y razona sobre qué condición ha de cumplir una fracción para que pueda transformarse en un decimal exacto o periódico.

$$\frac{79}{5} = 15{,}8 \qquad \frac{23}{6} = 3{,}8\widehat{3} \qquad \frac{59}{8} = 7{,}375$$

$$\frac{129}{20} = 6{,}45 \qquad \frac{425}{9} = 47{,}\widehat{2} \qquad \frac{45}{7} = 6{,}\widehat{428571}$$

Una fracción se transforma en un número decimal exacto si el denominador de la fracción solo tiene como factores primos el 2 y el 5. Eso le ocurre a las fracciones $\frac{79}{5}$, $\frac{59}{8}$ y $\frac{129}{20}$.

Sin embargo, si el denominador tiene factores distintos de 2 ó 5, la expresión decimal correspondiente es periódica. Eso le ocurre a las fracciones $\frac{23}{6}$, $\frac{425}{9}$ y $\frac{45}{7}$.

33 **Di cuál es la vigésima cifra decimal de estos números cuando los expresamos como decimales.**

a) $\mathbf{\frac{47}{111}}$ **b)** $\mathbf{\frac{123}{990}}$ **c)** $\mathbf{\frac{45}{13}}$

a) $\frac{47}{111} = 0,\overset{\frown}{423}$ $\rightarrow$ La vigésima cifra decimal ($20 = 6 \cdot 3 + 2$) coincidirá con la que ocupa la segunda posición; en este caso, el 2.

b) $\frac{123}{990} = 0,1\overset{\frown}{24}$ $\rightarrow$ La vigésima cifra decimal coincidirá con la primera cifra del periodo ($20 - 1 = 19$ y $19 = 9 \cdot 2 + 1$); en este caso, el 2.

c) $\frac{45}{13} = 3,\overset{\frown}{461538}$ $\rightarrow$ La vigésima cifra decimal coincidirá con la que ocupa el segundo lugar ($20 = 6 \cdot 3 + 2$); en este caso, el 6.

34 **Indica cuánto ha de valer n para que se verifique cada igualdad:**

a) $\mathbf{0,0000000023 = 2,3 \cdot 10^n}$

b) $\mathbf{87,1 \cdot 10^{-6} = 8,71 \cdot 10^n}$

c) $\mathbf{1\,250\,000 = 1,25 \cdot 10^n}$

d) $\mathbf{254,2 \cdot 10^4 = 2,542 \cdot 10^n}$

e) $\mathbf{0,000015 \cdot 10^{-2} = 1,5 \cdot 10^n}$

a) $0,0000000023 = 2,3 \cdot 10^{-9} \rightarrow n = -9$

b) $87,1 \cdot 10^{-6} = \frac{87,1}{10} \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 8,71 \cdot 10^{-5} \rightarrow n = -5$

c) $1\,250\,000 = 1,25 \cdot 10^6 \rightarrow n = 6$

d) $254,2 \cdot 10^4 = \frac{254,2}{100} \cdot 10^4 \cdot 10^2 = 2,542 \cdot 10^6 \rightarrow n = 6$

e) $0,000015 \cdot 10^{-2} = 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2} = 1,5 \cdot 10^{-7} \rightarrow n = -7$

35 **Ejercicio resuelto en el libro de texto.**

36 **El presupuesto destinado a infraestructuras para cierta región es de 3 430 millones de euros.**

a) Expresa la cantidad en notación científica.

b) Da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido al tomar dos cifras significativas.

a) 3 430 millones = $3\,430 \cdot 10^6 = 3{,}43 \cdot 10^9$ €.

b) Con dos cifras significativas, la cantidad es $3{,}4 \cdot 10^9$; es decir, 34 cientos de millones de euros.

ERROR ABSOLUTO < 0,5 cientos de millones = $0{,}5 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^7$

ERROR RELATIVO < $\dfrac{0{,}5 \text{ cientos de millones}}{3\,430 \text{ millones}} = \dfrac{50}{3\,430} < 0{,}02$

37 **Calcula utilizando la notación científica. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto cometido en cada caso:**

a) $(7{,}5 \cdot 10^6) : (0{,}000086)$

b) $\dfrac{13\,000\,000 - 2\,700\,000}{0{,}00015 - 0{,}00003}$

c) $328\,000\,000 \cdot (0{,}0006)^2$

d) $(45\,000)^2 - 85\,400\,000$

a) $(7{,}5 \cdot 10^6) : (0{,}000086) = (7{,}5 \cdot 10^6) : (8{,}6 \cdot 10^{-5}) = (7{,}5 : 8{,}6) \cdot 10^{6-(-5)} =$

$= 0{,}872093023 \cdot 10^{11} = 8{,}72093023 \cdot 10^{10}$

El resultado con tres cifras significativas es $8{,}72 \cdot 10^{10}$.

ERROR ABSOLUTO < $5 \cdot 10^7$

b) $\dfrac{13\,000\,000 - 2\,700\,000}{0{,}00015 - 0{,}00003} = \dfrac{1{,}3 \cdot 10^7 - 0{,}27 \cdot 10^7}{15 \cdot 10^{-5} - 3 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{(1{,}3 - 0{,}27) \cdot 10^7}{(15-3) \cdot 10^{-5}} =$

$= \dfrac{1{,}03 \cdot 10^7}{12 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{1{,}03 \cdot 10^7}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} = \dfrac{1{,}03}{1{,}2} \cdot 10^{7-(-4)} =$

$= 0{,}858\overset{\frown}{3} \cdot 10^{11} = 8{,}58\overset{\frown}{3} \cdot 10^{10}$

Tomando tres cifras significativas, obtenemos $8{,}58 \cdot 10^{10}$.

ERROR ABSOLUTO < $5 \cdot 10^7$

c) $328\,000\,000 \cdot (0{,}006)^2 = 3{,}28 \cdot 10^8 \cdot (6 \cdot 10^{-4})^2 = 3{,}28 \cdot 10^8 \cdot 36 \cdot 10^{-8} =$

$= 3{,}28 \cdot 36 = 118{,}08 = 1{,}1808 \cdot 10^2$

El resultado, con tres cifras significativas, es $1{,}18 \cdot 10^2$.

ERROR ABSOLUTO < $5 \cdot 10^{-1}$

d) $(45\,000)^2 - 85\,400\,000 = (4{,}5 \cdot 10^4)^2 - 8{,}54 \cdot 10^7 = 20{,}25 \cdot 10^8 - 8{,}54 \cdot 10^7 =$

$= 202{,}5 \cdot 10^7 - 8{,}54 \cdot 10^7 = (202{,}5 - 8{,}54) \cdot 10^7 =$

$= 193{,}96 \cdot 10^7 = 1{,}9396 \cdot 10^9$

Tomando 3 cifras significativas, obtenemos $1{,}94 \cdot 10^9$.

ERROR ABSOLUTO < $5 \cdot 10^6$

38 **La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5{,}98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol en kilos.**

$M_{Sol} = 330\,000 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{21} = 33 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{25} = 1{,}9734 \cdot 10^{27}$ t

$M_{Sol} = 1{,}9734 \cdot 10^{30}$ kg

39 **El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g, y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de una ballena?**

1 t tiene 10^6 g; por tanto, 138 t tendrán $1{,}38 \cdot 10^8$ g.

Como un virus pesa 10^{-18} g, entonces la ballena azul necesita:

$\dfrac{1{,}38 \cdot 10^8}{10^{-18}} = 1{,}38 \cdot 10^{26}$ virus para conseguir su peso.

40 **En un saco de arena de 50 kg hay, aproximadamente, $3 \cdot 10^6$ granos. Calcula el número de granos que habrá en una tonelada.**

1 tonelada = 1 000 kg = $20 \cdot 50$ kg

En 50 kg hay $3 \cdot 10^6$ granos. En 1 tonelada habrá $20 \cdot 3 \cdot 10^6 = 60 \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^7$ granos.

41 **La dosis de una vacuna es 0,05 cm^3. Si la vacuna tiene 100 000 000 bacterias por centímetro cúbico, ¿cuántas bacterias habrá en una dosis? Exprésalo en notación científica.**

En 1 cm^3 hay 10^8 bacterias $\rightarrow$ en una dosis habrá:

$$0{,}05 \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^6 \text{ bacterias}$$

42 **Si la velocidad de crecimiento del cabello humano es $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ km/h, ¿cuántos centímetros crece el pelo en un mes? ¿Y en un año?**

Calculamos el número de horas que hay en un mes:

$$30 \cdot 24 = 720 \text{ h}$$

Crecimiento del pelo en 1 mes:

$$1{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 720 \text{ km} = 1\,152 \cdot 10^{-8} \text{ km} = 1{,}152 \cdot 10^{-5} \text{ km} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ km} =$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5 \text{ cm} = 1{,}2 \text{ cm}$$

En 1 año habrá crecido 12 veces lo que crece en 1 mes:

$$12 \cdot 1{,}2 \text{ cm} = 14{,}4 \text{ cm}$$

43 **En 18 g de agua hay $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas de este compuesto. ¿Cuál es la masa en gramos de una molécula de agua?**

Si en 18 g hay $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas, la masa de una molécula será:

$$\frac{18}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \text{ g} = (18 : 6{,}02) \cdot 10^{-23} \text{ g} \approx 2{,}99 \cdot 10^{-23} \text{ g} \approx 3 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

PÁGINA 60

PRACTICA

Números reales

1 □□□ **a) Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:**

$$\frac{41}{13};\ \sqrt{49};\ 53,\widehat{7};\ 3,2;\ \sqrt{12};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{\pi}{2}$$

b) ¿Alguno de ellos es entero?

c) Ordénalos de menor a mayor.

a) Racionales: $\frac{41}{13};\ \sqrt{49};\ 53,\widehat{7};\ 3,2$

Irracionales: $\sqrt{12};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{\pi}{2}$

b) El único entero es $\sqrt{49}$ (= 7).

c) $\frac{\pi}{2} < \sqrt[3]{5} < \frac{41}{13} < 3,2 < \sqrt{12} < \sqrt{49} < 53,\widehat{7}$

2 □□□ **Di cuáles de los siguientes números son irracionales:**

$$-\frac{3}{4};\quad 1,7\widehat{3};\quad \sqrt{3};\quad \pi;\quad \sqrt{9};\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad 3,7$$

Son irracionales $\sqrt{3}$, π y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3 □□□ **Indica cuáles de los siguientes números pueden expresarse como cociente de dos números enteros y cuáles no:**

$$21,5;\ \sqrt{7};\ 2,010010001\ldots;$$
$$\sqrt[3]{-8};\ 2+\sqrt{3};\ 0,\widehat{5};\ 2\pi-1$$

Los números que pueden expresarse como cociente de dos números enteros son los racionales, y los que no, irracionales:

Racionales: $21,5;\ \sqrt[3]{-8};\ 0,\widehat{5}$

Irracionales: $\sqrt{7};\ 2,010010001\ldots;\ 2+\sqrt{3};\ 2\pi-1$

4 □□□ **Clasifica estos números como naturales, enteros, racionales y/o reales:**

3	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{7}$	$7,23$
-2	π	0	-4
$\frac{1}{3}$	$\sqrt{-1}$	$\frac{11}{9}$	$\sqrt{5}$
2	$2,48$	18	$1+\sqrt{2}$
-1	$\sqrt[3]{-1}$	1	$1,010203\ldots$

$\mathbb{N} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1$

$\mathbb{Z} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1}$

$\mathbb{Q} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1};\ -\frac{3}{4};\ 7{,}23;\ \frac{1}{3};\ \frac{11}{9};\ 2{,}48$

$\mathbb{R} \rightarrow 3;\ 0;\ 2;\ 18;\ 1;\ -2;\ -4;\ -1;\ \sqrt[3]{-1};\ -\frac{3}{4};\ 7{,}23;\ \frac{1}{3};\ \frac{11}{9};\ 2{,}48;$

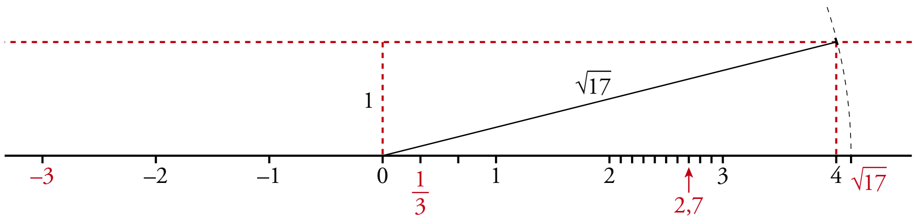
$\sqrt{2};\ \pi;\ 1+\sqrt{2};\ 1{,}010203\ldots$

5 **Representa en la recta real los siguientes números:**

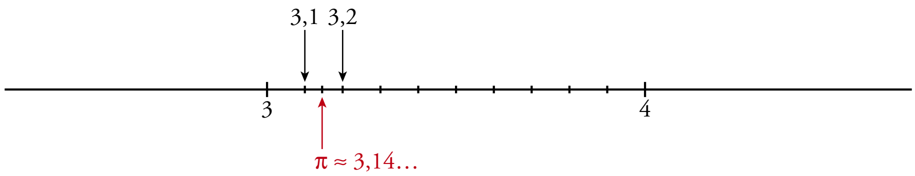
a) $-3;\ 2{,}7;\ \sqrt{17};\ \frac{1}{3}$**, de forma exacta.**

b) $\pi = 3{,}14\ldots$**, de forma aproximada.**

a) $\sqrt{17} = \sqrt{4^2 + 1^2}$



b)



6 **a) Escribe un número racional comprendido entre** $\frac{2}{3}$ **y 1.**

b) Halla $\sqrt{5}$ **con la calculadora y escribe dos números, uno mayor y otro menor que** $\sqrt{5}$**, que se diferencien con él en una diezmilésima.**

a) Por ejemplo, $\left(\frac{2}{3} + 1\right) : 2 = \frac{5}{3} : 2 = \frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{3}$

b) $\sqrt{5} = 2{,}236067978\ldots$

Una diezmilésima es 0,0001.

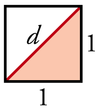
- Un número menor que $\sqrt{5}$ que se diferencie con él en una diezmilésima será:

  $\sqrt{5} - 0{,}0001 = 2{,}235967978\ldots$

- Un número mayor que $\sqrt{5}$ que se diferencie con él en una diezmilésima será:

  $\sqrt{5} + 0{,}0001 = 2{,}236167978\ldots$

7 □□□ **Calcula el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1 e indica el tipo de número obtenido.**



Calculamos el valor de la diagonal d, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \;\rightarrow\; d^2 = 2 \;\rightarrow\; d = \sqrt{2}$$

La diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$ y es un número irracional.

Intervalos y semirrectas

8 □□□ **Considera los números siguientes:**

1; 2; 2,3; 3; 3,9; 4; 4,1

a) Indica cuáles de ellos pertenecen al intervalo [2, 4).

b) ¿Y cuáles pertenecen al intervalo [2, 4]?

c) ¿Y cuáles al (2, +∞)?

a) Al intervalo [2, 4) pertenecen el 2; 2,3; 3; 3,9.

b) En el intervalo [2, 4] están el 2; 2,3; 3; 3,9; 4.

c) En el intervalo (2, +∞) se encuentran los números 2,3; 3; 3,9; 4; 4,1.

9 □□□ **Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:**

a) $0 < x < 1$

b) $x \leq -3$

c) $x > 0$

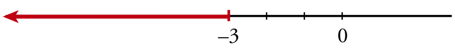
d) $-5 \leq x \leq 5$

e) $x > -5$

f) $1 \leq x < 3$

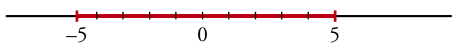
a) (0, 1)

b) (–∞, –3]



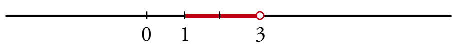
c) (0, +∞)

d) [–5, 5]



e) (–5, +∞)

f) [1, 3)



10 ■□□ **Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:**

a) (1; 2,5) **b)** [–2, 3] **c)** [–7, 0)

d) [–3, +∞) **e)** (2, +∞) **f)** (–5, 2]

a) $\{x \,/\, 1 < x < 2{,}5\}$

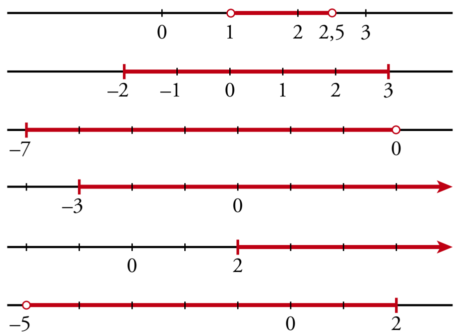
b) $\{x \,/\, -2 \le x \le 3\}$

c) $\{x \,/\, -7 \le x < 0\}$

d) $\{x \,/\, -3 \le x\}$

e) $\{x \,/\, x > 2\}$

f) $\{x \,/\, -5 < x \le 2\}$



11 ■□□ **Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados:**

a) 

b) 

c) 

d) 

		INTERVALO	DESIGUALDAD
a)		[–2, 5)	$\{x \,/\, -2 \le x < 5\}$
b)		[3, +∞)	$\{x \,/\, x \ge 3\}$
c)		[2, 7]	$\{x \,/\, 2 \le x \le 7\}$
d)		(–∞, –1)	$\{x \,/\, x < -1\}$

12 ■□□ **Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones dadas en cada caso:**

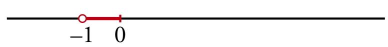
a) **Menores o iguales que 3.**

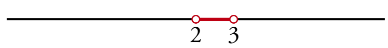
b) **Comprendidos entre –1 y 0, incluyendo el 0, pero no el –1.**

c) **Mayores que 2, pero menores que 3.**

d) **Mayores que 5.**

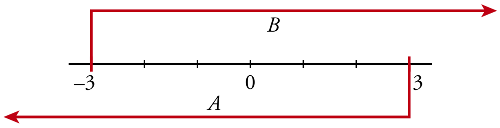
a) (–∞, 3] 

b) (–1, 0] 

c) (2, 3) 

d) (5, +∞) 

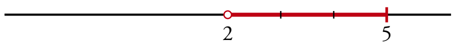
13 **Representa en una misma recta las semirrectas $A = (-\infty, 3]$ y $B = [-3, +\infty)$. ¿Cuáles son los números que pertenecen a A y a B? Exprésalo como un intervalo.**



Los números que pertenecen a A y a B son los comprendidos entre –3 y 3, ambos incluidos; es decir $[-3, 3]$.

14 **Representa los intervalos $A = (2, 5]$ y $B = [-1, 4)$ y di si tienen puntos en común. Si es un intervalo, di cuál es.**

$A = (2\ ,5]$



$B = [-1\ ,4)$

Los puntos comunes a A y B están entre 2 y 4 $\rightarrow$ $(2, 4)$

15 **Indica dos intervalos que tengan en común los puntos del intervalo $[-1, 1]$.**

Por ejemplo: $A = (-\infty, 1]$ y $B = [-1, 5)$

PÁGINA 61

Potencias y raíces

16 **Expresa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[3]{5^2}$ **b)** $\sqrt[5]{a^2}$ **c)** $\sqrt[8]{a^5}$ **d)** $\sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt{a^{-1}}$ **f)** $\sqrt[4]{a^2}$ **g)** $\sqrt{a}$ **h)** $\sqrt{2}$

a) $5^{2/3}$ b) $a^{2/5}$ c) $a^{5/8}$ d) $x^{1/3}$

e) $a^{-1/2}$ f) $a^{2/4} = a^{1/2}$ g) $a^{1/2}$ h) $2^{1/2}$

17 **Expresa en forma de raíz.**

a) $3^{2/5}$ **b)** $2^{3/4}$ **c)** $a^{1/3}$ **d)** $a^{1/2}$

e) $x^{1/4}$ **f)** $a^{3/2}$ **g)** $x^{-1/2}$ **h)** $x^{-3/2}$

a) $\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$ b) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$ c) $\sqrt[3]{a}$ d) $\sqrt{a}$

e) $\sqrt[4]{x}$ f) $\sqrt{a^3}$ g) $\sqrt{x^{-1}}$ h) $\sqrt{x^{-3}}$

18 □□□ **Calcula.**

a) $25^{1/2}$ **b)** $27^{1/3}$ **c)** $125^{2/3}$ **d)** $81^{3/4}$

e) $9^{5/2}$ **f)** $16^{5/4}$ **g)** $49^{3/2}$ **h)** $8^{5/3}$

a) $25^{1/2} = (5^2)^{1/2} = 5^{2/2} = 5$

b) $27^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^{3/3} = 3$

c) $125^{2/3} = (5^3)^{2/3} = 5^{3 \cdot 2/3} = 5^2 = 25$

d) $81^{3/4} = (3^4)^{3/4} = 3^3 = 27$

e) $9^{5/2} = (3^2)^{5/2} = 3^{2 \cdot 5/2} = 3^5 = 243$

f) $16^{5/4} = (2^4)^{5/4} = 2^{4 \cdot 5/4} = 2^5 = 32$

g) $49^{3/2} = (7^2)^{3/2} = 7^{2 \cdot 3/2} = 7^3 = 343$

h) $8^{5/3} = (2^3)^{5/3} = 2^{3 \cdot 5/3} = 2^5 = 32$

19 □□□ **Di el valor de *k* en cada caso:**

a) $\sqrt[k]{243} = 3$ **b)** $\sqrt[3]{k} = -2$

c) $\sqrt[4]{k} = \dfrac{3}{2}$ **d)** $\sqrt[k]{-125} = -5$

e) $\sqrt[3]{k} = -1$ **f)** $\sqrt[k]{\dfrac{49}{64}} = \dfrac{7}{8}$

a) $\sqrt[k]{3^5} = 3 \quad \rightarrow \quad k = 5$

b) $k = (-2)^3 \quad \rightarrow \quad k = -8$

c) $k = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \quad \rightarrow \quad k = \dfrac{81}{16}$

d) $\sqrt[k]{(-5)^3} = -5 \quad \rightarrow \quad k = 3$

e) $k = (-1)^3 \quad \rightarrow \quad k = -1$

f) $\sqrt[k]{\left(\dfrac{7}{8}\right)^2} = \dfrac{7}{8} \quad \rightarrow \quad k = 2$

20 □□□ **Calcula las siguientes raíces:**

a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt[5]{243}$ **c)** $\sqrt[7]{0}$

d) $\sqrt[4]{1}$ **e)** $\sqrt[3]{-1}$ **f)** $\sqrt{-1}$

g) $\sqrt[3]{-27}$ **h)** $\sqrt{144}$ **i)** $\sqrt[6]{15\,625}$

a) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ b) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$ c) $\sqrt[7]{0} = 0$

d) $\sqrt[4]{1} = 1$ e) $\sqrt[3]{-1} = -1$ f) $\sqrt{-1}$ no existe

g) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-(3)^3} = -3$ h) $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$ i) $\sqrt[6]{15\,625} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

21 ■□□ **Obtén con la calculadora.**

a) $\sqrt[5]{9}$ **b)** $\sqrt[3]{-173}$ **c)** $\sqrt[4]{14^3}$

d) $\sqrt[4]{75,3}$ **e)** $\sqrt[6]{603}$ **f)** $\sqrt[3]{0,06^2}$

a) $\sqrt[5]{9} = 9^{1/5} \approx 1,55$

b) $\sqrt[3]{-173} \approx -5,57$

c) $\sqrt[4]{14^3} = 14^{3/4} \approx 7,24$

d) $\sqrt[4]{75,3} \approx 2,95$

e) $\sqrt[6]{603} \approx 2,91$

f) $\sqrt[3]{0,06^2} \approx 0,15$

22 ■□□ **Halla con la calculadora.**

a) $28^{3/4}$ **b)** $8^{1/2}$ **c)** $0,02^{2/3}$

d) $0,8^{3/5}$ **e)** $12^{5/2}$ **f)** $3,5^{1/5}$

a) $28^{3/4} \approx 12,17$ b) $8^{1/2} \approx 2,83$ c) $0,02^{2/3} \approx 0,07$

d) $0,8^{3/5} \approx 0,87$ e) $12^{5/2} \approx 498,83$ f) $3,5^{1/5} \approx 1,28$

Radicales

23 ■□□ **Simplifica.**

a) $\sqrt[6]{9}$ **b)** $\sqrt{625}$ **c)** $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ **e)** $\sqrt[6]{125}$ **f)** $\sqrt[5]{3^{15}}$

a) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = 3^{2/6} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$

c) $\sqrt[15]{2^{12}} = 2^{12/15} = 2^{4/5} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

d) $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = 7^{2/4} = 7^{1/2} = \sqrt{7}$

e) $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = 5^{3/6} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$

f) $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^{15/5} = 3^3 = 27$

24 ■■□ **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[10]{a^8}$ **b)** $\sqrt[4]{a^{12}}$ **c)** $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2b^2}$ **e)** $\sqrt[3]{a^6b^6}$ **f)** $\sqrt[6]{a^2b^4}$

a) $\sqrt[10]{a^8} = a^{8/10} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}$

b) $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{12/4} = a^3$

c) $\sqrt[12]{a^3} = a^{3/12} = a^{1/4} = \sqrt[4]{a}$

d) $\sqrt[8]{a^2b^2} = \sqrt[8]{(ab)^2} = (ab)^{2/8} = (ab)^{1/4} = \sqrt[4]{ab}$

e) $\sqrt[3]{a^6b^6} = \sqrt[3]{(ab)^6} = (ab)^{6/3} = (ab)^2 = a^2b^2$

f) $\sqrt[6]{a^2b^4} = (a^2b^4)^{1/6} = a^{2/6} \cdot b^{4/6} = a^{1/3} \cdot b^{2/3} = \sqrt[3]{ab^2}$

25 ■□□ **Multiplica y simplifica el resultado.**

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}$

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot3\cdot6}=\sqrt{36}=6$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^3}=a$

c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{5\cdot10\cdot8}=\sqrt{400}=20$

d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}=\sqrt{a\cdot a^3}=\sqrt{a^4}=a^2$

26 ■■□ **Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $\sqrt{28}$ **c)** $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ **e)** $\sqrt{200}$ **f)** $\sqrt{300}$

a) $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{28}=\sqrt{7\cdot2^2}=2\sqrt{7}$

c) $\sqrt[4]{2^{10}}=\sqrt[4]{2^4\cdot2^4\cdot2^2}=4\sqrt[4]{4}$

d) $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{200}=\sqrt{5^2\cdot2^3}=5\cdot2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

f) $\sqrt{300}=\sqrt{2^2\cdot5^2\cdot3}=10\sqrt{3}$

27 ■□□ **Reduce a un solo radical.**

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ **e)** $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ **f)** $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

a) $\sqrt{\sqrt{13}}=\sqrt[4]{13}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}=\sqrt[15]{15}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}=\sqrt[12]{2^5}$ e) $\sqrt{\sqrt{3^3}}=\sqrt[4]{3^3}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt{11}}=\sqrt[10]{11}$

28 ■■□ **Calcula y simplifica en cada caso:**

a) $(\sqrt{2})^{10}$ **b)** $(\sqrt[3]{2})^4$ **c)** $(\sqrt[4]{3^2})^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ **e)** $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ **f)** $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6$

a) $(\sqrt{2})^{10}=\sqrt{2^{10}}=2^5=32$ b) $(\sqrt[3]{2})^4=\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$

c) $(\sqrt[4]{3^2})^8=\sqrt[4]{3^{16}}=3^4=81$ d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}=\sqrt[8]{8}$

e) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}=\sqrt[4]{2^{10}}=\sqrt{2^5}$ f) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6=\sqrt[6]{2^6}=2$

29 Resuelto en el libro de texto.

30 Expresa como un solo radical.

a) $2\sqrt{45} - 3\sqrt{20}$ **b)** $5\sqrt{48} + \sqrt{12}$

c) $3\sqrt{28} - 5\sqrt{7}$ **d)** $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

a) $2\sqrt{45} - 3\sqrt{20} = 2\sqrt{3^2 \cdot 5} - 3\sqrt{2^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5} - 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 0$

b) $5\sqrt{48} + \sqrt{12} = 5\sqrt{2^4 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = 5 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 22\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{28} - 5\sqrt{7} = 3\sqrt{2^2 \cdot 7} - 5\sqrt{7} = 3 \cdot 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = 6\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = \sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

31 Efectúa.

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ **b)** $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8}$ **d)** $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18} = 2\sqrt{2^3} + 4\sqrt{3^2 \cdot 2^3} - 7\sqrt{3^2 \cdot 2} =$

$= 2 \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} - 7 \cdot 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 21\sqrt{2} =$

$= (4 + 24 - 21)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} - \sqrt{3^3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} =$

$= (2 + 5 - 3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8} = \sqrt{2^5} + 3\sqrt{2 \cdot 5^2} - 2\sqrt{2^3} = 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 4\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8} = 3\sqrt{2} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - 3\sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (3 + 3 - 6)\sqrt{2} = 0$

32 Suprime el radical del denominador y simplifica.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ **c)** $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ **d)** $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt{12}} = \dfrac{6\sqrt{12}}{12} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{15} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

33 **Suprime el radical del denominador.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **d)** $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[8]{a^3}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^8}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

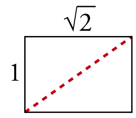
d) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{5\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{5\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{5\sqrt[4]{8}}{2}$

PÁGINA 62

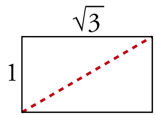
PIENSA Y RESUELVE

34 **Calcula el valor de la diagonal en cada caso e indica si es un número racional o irracional:**

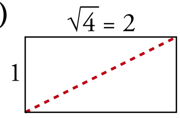
a)



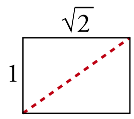
b)



c)

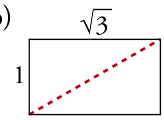


a)



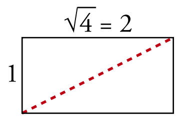
diagonal$^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3 \rightarrow$ diagonal $= \sqrt{3}$ (n.º irracional)

b)



diagonal$^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 \rightarrow$ diagonal $= \sqrt{4} = 2$ (n.º racional)

c)



diagonal$^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \rightarrow$ diagonal $= \sqrt{5}$ (n.º irracional)

35 **¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?**

$$\sqrt[3]{-20}; \quad \sqrt[6]{0,12}; \quad \sqrt{-1}; \quad \sqrt[5]{241}; \quad \sqrt[4]{-16}$$

No existen las raíces de índice par y radicando negativo: $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$ no existen.

36 **Resuelto en el libro de texto.**

37 ■■□ **Expresa como potencia única.**

a) $(4^{1/3}) \cdot (\sqrt{2})$ **b)** $(\sqrt[3]{25}) : (5^{1/2})$

c) $(\sqrt{3}) \cdot (9^{1/3})$ **d)** $(27^{2/3}) \cdot (\sqrt[7]{9})$

a) $(4^{1/3}) \cdot (\sqrt{2}) = (2^2)^{1/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{2/3 + 1/2} = 2^{7/6}$

b) $(\sqrt[3]{25}) : (5^{1/2}) = (\sqrt[3]{5^2}) : 5^{1/2} = 5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{2/3 - 1/2} = 5^{1/6}$

c) $(\sqrt{3}) \cdot (9^{1/3}) = (3^{1/2}) \cdot (3^2)^{1/3} = 3^{1/2} \cdot 3^{2/3} = 3^{1/2 + 2/3} = 3^{7/6}$

d) $(27^{2/3}) \cdot (\sqrt[7]{9}) = (3^3)^{2/3} \cdot \sqrt[7]{3^2} = 3^2 \cdot 3^{2/7} = 3^{2 + 2/7} = 3^{16/7}$

38 ■■□ **Expresa como potencia única.**

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ **b)** $2\sqrt[3]{4}$ **c)** $a\sqrt{a}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ **f)** $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a}$

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3^{1/2} \cdot 3^{1/3} = 3^{1/2 + 1/3} = 3^{5/6}$

b) $2\sqrt[3]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2 \cdot 2^{2/3} = 2^{1 + 2/3} = 2^{5/3}$

c) $a\sqrt{a} = a \cdot a^{1/2} = a^{3/2}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2^{3/2}}{2^{2/3}} = 2^{3/2 - 2/3} = 2^{5/6}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = \dfrac{a^{8/3}}{a^2} = a^{8/3 - 2} = a^{2/3}$

f) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a} = a^{2/3} \cdot a^{1/6} = a^{2/3 + 1/6} = a^{5/6}$

39 ■■□ **Expresa en forma exponencial.**

a) $(\sqrt[5]{a^2})^3$ **b)** $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

d) $(\sqrt[4]{a})^3$ **e)** $(\sqrt[4]{a^2})^2$ **f)** $(\sqrt{a})^5$

a) $(\sqrt[5]{a^2})^3 = (a^{2/5})^3 = a^{6/5}$

b) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2} = \sqrt[8]{a^7} = a^{7/8}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x} = x^{1/12}$

d) $(\sqrt[4]{a})^3 = (a^{1/4})^3 = a^{3/4}$

e) $(\sqrt[4]{a^2})^2 = (a^{2/4})^2 = a$

f) $(\sqrt{a})^5 = (a^{1/2})^5 = a^{5/2}$

40 **Indica si el número que se obtiene en cada caso es racional o irracional:**

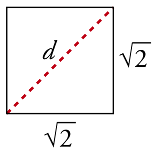
a) La diagonal de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm.

b) El área de un círculo de radio 2 cm.

c) El cateto del triángulo rectángulo de lados 24 cm y 25 cm.

d) La diagonal de un pentágono regular cuyo lado mide 1 cm.

a) La diagonal de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm. $\rightarrow$ Racional

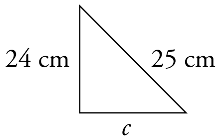


$d^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4 \rightarrow d = \sqrt{4} = 2$

b) El área de un círculo de radio 2 cm. $\rightarrow$ Irracional

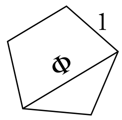
Área $= \pi \cdot r^2 \rightarrow$ Área $= \pi \cdot 2^2 = 4(\pi)$, n.º irracional

c) El cateto del triángulo rectángulo de lados 24 cm y 25 cm. $\rightarrow$ Racional



$25^2 = 24^2 + c^2 \rightarrow 625 = 576 + c^2 \rightarrow c^2 = 49 \rightarrow c = 7$

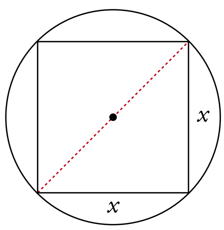
d) La diagonal de un pentágono regular cuyo lado mide 1 cm. $\rightarrow$ Irracional



La diagonal de un pentágono regular de lado 1 es el número $\Phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, n.º irracional.

41 **Calcula la longitud del lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio.**

El resultado obtenido, ¿se puede poner en forma de fracción?



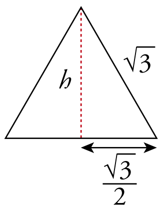
La diagonal del cuadrado es $2r = 2 \cdot 6 = 12$ cm.

Llamando x al lado del cuadrado y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura, obtenemos:

$x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow 2x^2 = 144 \rightarrow x^2 = 72 \rightarrow x = \sqrt{72}$ cm

El resultado obrenido, $\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$ cm, es un número irracional; por tanto, no se puede poner en forma de fracción.

42 □□□ **Halla el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide $\sqrt{3}$ cm. Expresa los cálculos con radicales.**



Llamamos h a la altura del triángulo y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura:

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 \;\rightarrow\; h^2 + \frac{3}{4} = 3 \;\rightarrow\; h^2 = 3 - \frac{3}{4} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; h^2 = \frac{9}{4} \;\rightarrow\; h = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\text{ cm}$$

Área del triángulo $\rightarrow\; A = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$

43 □□□ **Demuestra, con ayuda de la calculadora, que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es distinto de $\sqrt{3+2}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3{,}14626437\ldots \\ \\ \sqrt{3+2} = \sqrt{5} = 2{,}236067978\ldots \end{array}\right\} \sqrt{3} + \sqrt{2} \neq \sqrt{3+2}$$

44 □□□ **Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{x-5}$ **b)** $\sqrt{5-x}$

c) $\sqrt{x^2+1}$ **d)** $\sqrt{-x}$

e) $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ **f)** $\sqrt{x(3-x)}$

a) $\sqrt{x-5}$

Puede efectuarse siempre que x valga 5 o más $\rightarrow$ $[5, +\infty)$

b) $\sqrt{5-x}$

La raíz se puede efectuar siempre que x valga 5 o menos $\rightarrow$ $(-\infty, 5]$

c) $\sqrt{x^2+1}$

$x^2 + 1$ siempre es positivo (cualquier número elevado al cuadrado y sumado con otro número será mayor que 0).

Luego la raíz se podrá efectuar si x está en $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

d) $\sqrt{-x}$

Puede efectuarse siempre que x sea 0 o negativo $\rightarrow$ $(-\infty, 0]$

e) $\sqrt{(1+x)(2-x)}$

La raíz cuadrada puede efectuarse cuando el radicando es 0 o positivo. Esto ocurrirá cuado uno de los dos factores es cero, ambos son positivos o ambos son negativos. Es decir, si $x \geq -1$ o si $x \leq 2$:

$[-1, 2]$ 

f) $\sqrt{x(3-x)}$

La raíz cuadrada puede efectuarse cuando el radicando es cero o positivo. Esto ocurre cuando uno de los factores es cero, ambos son negativos o ambos positivos. Es decir, si $x \geq 0$ o si $x \leq 3$:

$[0, 3]$ 

45 **Resuelto en el libro de texto.**

46 **Simplifica los radicales que puedas e indica en cada caso cuál es mayor:**

a) $\sqrt[6]{9}$ **y** $\sqrt[3]{2}$ **b)** $\sqrt[8]{121}$ **y** $\sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[6]{625}$ **y** $\sqrt[3]{25}$ **d)** $\sqrt{5}$ **y** $\sqrt[4]{9}$

a) $\sqrt[6]{9}$ y $\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = 3^{2/6} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$

$3 > 2 \rightarrow \sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[6]{9} > \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[8]{121}$ y $\sqrt[4]{7}$

$\sqrt[8]{121} = \sqrt[8]{11^2} = 11^{2/8} = 11^{1/4} = \sqrt[4]{11}$

$11 > 7 \rightarrow \sqrt[4]{11} > \sqrt[4]{7} \rightarrow \sqrt[8]{121} > \sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[6]{625}$ y $\sqrt[3]{25}$

$\sqrt[6]{625} = \sqrt[6]{25^2} = 25^{2/6} = 25^{1/3} = \sqrt[3]{25}$

En este caso, ambas raíces coinciden.

d) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{9}$

$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

Como $5 > 3 \rightarrow \sqrt{5} > \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{5} > \sqrt[4]{9}$

47 **Ordena de menor a mayor los siguientes radicales simplificándolos previamente:**

$$\sqrt[6]{121} \qquad \sqrt[12]{16} \qquad \sqrt[3]{3} \qquad \sqrt[9]{125}$$

Empezamos por simplificar los radicales que sean posibles:

$\sqrt[6]{121} = \sqrt[6]{11^2} = 11^{2/6} = 11^{1/3} = \sqrt[3]{11}$

$\sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = 2^{4/12} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[9]{125} = \sqrt[9]{5^3} = 5^{3/9} = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$

Ordenar los radicales dados, equivale a ordenar:

$$\sqrt[3]{11}, \qquad \sqrt[3]{2}, \qquad \sqrt[3]{3}, \qquad \sqrt[3]{5}$$

Todos tienen el mismo índice; por tanto, para ordenarlos, basta ordenar los radicandos:

$$2 < 3 < 5 < 11 \;\rightarrow\; \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{11} \;\rightarrow\; \sqrt[12]{16} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[9]{125} < \sqrt[6]{121}$$

48 **Comprueba que los números $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 3 = 0$.**

Para comprobar que los números dados son soluciones de dicha ecuación, basta sustituir x, por cada uno de ellos en la ecuación:

- Si $x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; (\sqrt{3})^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \;\rightarrow$ Es solución.
- Si $x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; (-\sqrt{3})^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \;\rightarrow$ Es solución.

PÁGINA 75

PRACTICA

1 **Calcula mentalmente:**

a) 50% de 360 **b) 25% de 88**

c) 10% de 1 375 **d) 20% de 255**

e) 75% de 800 **f) 30% de 150**

a) 50% de 360 → 180

b) 25% de 88 → 22

c) 10% de 1 375 → 137,5

d) 20% de 255 → 51

e) 75% de 800 → 600

f) 30% de 150 → 45

2 **Calcula:**

a) 20% de 1 240 **b) 12% de 175**

c) 87% de 4 000 **d) 95% de 60**

e) 13% de 2 400 **f) 7% de 250**

g) 22% de 1 353 **h) 5% de 421**

a) 20% de 1 240 = $\frac{20 \cdot 1\,240}{100} = 248$

b) 12% de 175 = $\frac{12 \cdot 175}{100} = 21$

c) 87% de 4 000 = $\frac{87 \cdot 4\,000}{100} = 3\,480$

d) 95% de 60 = $\frac{95 \cdot 60}{100} = 57$

e) 13% de 2 400 = $\frac{13 \cdot 2\,400}{100} = 312$

f) 7% de 250 = $\frac{7 \cdot 250}{100} = 17{,}5$

g) 22% de 1 353 = $\frac{22 \cdot 1\,353}{100} = 297{,}66$

h) 5% de 421 = $\frac{5 \cdot 421}{100} = 21{,}05$

3 □□□ **Piensa y completa:**

a) Al multiplicar por 0,2 se calcula el …%.

b) Al multiplicar por 0,02 se calcula el …%.

c) Al multiplicar por 0,87 se calcula el …%.

d) Al multiplicar por … se calcula el 34%.

e) Al multiplicar por … se calcula el 130%.

a) 20% b) 2% c) 87% d) 0,34 e) 1,30

4 □□□ **Calcula mentalmente qué tanto por ciento representa cada cantidad respesto de su total:**

a) 18 respecto de 72 **b) 120 respecto de 240**

c) 17 respecto de 170 **d) 15 respecto de 60**

a) 25% b) 50% c) 10% d) 25%

5 □□□ **Calcula el tanto por ciento que representa:**

a) 42 respecto de 200 **b) 45 respecto de 1 500**

c) 432 respecto de 960 **d) 117 respecto de 650**

e) 575 respecto de 2 500 **f) 195 respecto de 1 300**

g) 8 respecto de 50 **h) 75 respecto de 625**

a) $\frac{42}{200} \cdot 100 = 21\%$ b) $\frac{45}{1\,500} \cdot 100 = 3\%$

c) $\frac{432}{960} \cdot 100 = 45\%$ d) $\frac{117}{650} \cdot 100 = 18\%$

e) $\frac{575}{2\,500} \cdot 100 = 23\%$ f) $\frac{195}{1\,300} \cdot 100 = 15\%$

g) $\frac{8}{50} \cdot 100 = 16\%$ h) $\frac{75}{625} \cdot 100 = 12\%$

6 □□□ **¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?**

a) 8% b) 3% c) 17% d) 95% e) 110%

a) I.V. = 1,08 b) I.V. = 1,03 c) I.V. = 1,17

d) I.V. = 1,95 e) I.V. = 2,10

7 □□□ **¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?**

a) 96% b) 13% c) 35% d) 6% e) 63%

a) I.V. = 0,04 b) I.V. = 0,87 c) I.V. = 0,65

d) I.V. = 0,94 e) I.V. = 0,37

8 **Piensa y completa:**

a) Al multiplicar por 1,3 se aumenta un …%.

b) Al multiplicar por 1,08 se aumenta un …%.

c) Al multiplicar por 0,90 se disminuye un …%.

d) Al multiplicar por 0,65 se disminuye un …%.

a) 30% b) 8% c) 10% d) 35%

9 **Calcula el valor de x en cada caso:**

a) El 30% x es 21.

b) El 85% de x es 187.

c) El 32% de x es 384.

d) El 13% de x es 97,24.

a) 30% de $x = 21 \rightarrow 0{,}3 \cdot x = 21 \rightarrow x = 21 : 0{,}3 = 70$

b) 85% de $x = 187 \rightarrow 0{,}85 \cdot x = 187 \rightarrow x = 187 : 0{,}85 = 220$

c) 32% de $x = 384 \rightarrow 0{,}32 \cdot x = 384 \rightarrow x = 384 : 0{,}32 = 1\,200$

d) 13% de $x = 97{,}24 \rightarrow 0{,}13 \cdot x = 97{,}24 \rightarrow x = 97{,}24 : 0{,}13 = 748$

Problemas de proporcionalidad simple y compuesta

10 **Un coche ha consumido 24 litros de combustible en un viaje de 375 km. ¿Cuántos litros consume cada 100 kilómetros? ¿Cuántos consumirá en un viaje de 80 km?**

El número de litros que consume un coche es directamente proporcional a la distancia que recorre.

P. DIRECTA

DISTANCIA (km)	CONSUMO (l)
375	24
100	x
80	y

$$\frac{375}{100} = \frac{24}{x} \rightarrow x = \frac{24 \cdot 100}{375} = 6{,}4$$

$$\frac{375}{80} = \frac{24}{y} \rightarrow y = \frac{80 \cdot 24}{375} = 5{,}12$$

Cada 100 km consume 6,4 l y en un viaje de 80 km consumirá 5,12 l.

11 ■□□ **Un campesino ha obtenido una cosecha de 40 000 kilos de trigo de un campo que tiene una superficie de 2,5 hectáreas. ¿Qué cosecha puede esperar de un campo próximo con una superficie de hectárea y media?**

La superficie de un campo y el número de kilos de trigo que se obtienen son magnitudes directamente proporcionales.

P. DIRECTA

SUPERFICIE (ha)	TRIGO (kg)
2,5	40 000
1,5	x

$$\frac{2,5}{1,5} = \frac{40\,000}{x} \to$$

$$\to \quad x = \frac{1,5 \cdot 40\,000}{2,5} = 24\,000$$

Puede esperar una cosecha de 24 000 kg.

12 ■□□ **Un solador, trabajando 8 horas al día, ha tardado 5 días en poner el suelo de una vivienda. ¿Cuántos días habría tardado trabajando 10 horas diarias?**

El número de horas trabajadas al día es inversamente proporcional al número de días que se tarda en hacer un trabajo.

P. INVERSA

HORAS/DÍA	NÚMERO DE DIAS
8	5
10	x

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{5} \to x = \frac{8 \cdot 5}{10} = 4$$

Trabajando 10 horas al día habría tardado 4 días.

13 ■□□ **El ayuntamiento de una población de 2 300 habitantes dedica una partida de 9 200 € anuales para actividades culturales. ¿Qué cantidad dedicará a ese mismo concepto una población vecina que distribuye los presupuestos con criterios similares y tiene una población de 3 700 habitantes?**

El número de habitantes de una población y el presupuesto anual dedicado a cierta actividad, son magnitudes directamente proporcionales:

P. DIRECTA

Nº DE HABITANTES	PRESUPUESTO (€)
2 300	9 200
3 700	x

$$\frac{2\,300}{3\,700} = \frac{9\,200}{x} \to$$

$$\to \quad x = \frac{9\,200 \cdot 3\,700}{2\,300} = 14\,800$$

En una población de 3 700 habitantes se ha de dedicar un presupuesto de 14 800 €.

14 □□□ **Un taller de confección ha fabricado 1 600 chaquetas, trabajando 8 horas diarias durante 10 días. ¿Cuánto tiempo tardará en servir un pedido de 2 000 chaquetas trabajando 10 horas al día?**

El número de chaquetas que se han de confeccionar es directamente proporcional al número de días que se han de trabajar.

Sin embargo, el número de horas de trabajo al día es inversamente proporcional al número de días trabajados.

P. DIRECTA

P. INVERSA

CHAQUETAS	HORAS/DÍA	Nº DE DÍAS
1 600	8	10
2 000	10	x

$$\frac{1\,600 \cdot 10}{2\,000 \cdot 8} = \frac{10}{x} \to$$

$$\to \; x = \frac{10 \cdot 2\,000 \cdot 8}{1\,600 \cdot 10} = 10$$

Se tardarán 10 días en servir el pedido.

15 □□□ **Tres personas mecanografían 120 folios en 5 horas. ¿Cuántos folios pueden mecanografiar 4 personas en 6 horas si mantienen el mismo ritmo que las anteriores?**

El número de personas que mecanografían y el número de horas trabajadas son directamente proporcionales al número de folios.

P. DIRECTA

P. DIRECTA

Nº PERSONAS	Nº HORAS	Nº FOLIOS
3	5	120
4	6	x

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{120}{x} \to x = \frac{10 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5} = 192$$

Cuatro personas en 6 horas mecanografían 192 folios.

Problemas de repartos proporcionales

16 □□□ **Se ha encargado a un orfebre el diseño y fabricación de un trofeo que ha de pesar 5 kg y ha de estar fabricado con una aleación que contenga tres partes de oro, tres de plata y dos de cobre. ¿Qué cantidad se necesita de cada metal?**

Número total de partes = 3 + 3 + 2 = 8

Cantidad de metal en cada parte = $\frac{5}{8}$ = 0,625 kg

Cantidad de oro $\to$ $3 \cdot 0{,}625 = 1{,}875$

Cantidad de plata $\to$ $3 \cdot 0{,}625 = 1{,}875$

Cantidad de cobre $\to$ $2 \cdot 0{,}625 = 1{,}25$

Se necesita 1 kg 875 g de oro, la misma cantidad de plata y 1 kg 250 g de cobre.

PÁGINA 76

17 □□□ **Tres vecinos de una aldea alquilan una máquina motosierra durante 12 días. Juan la tiene 2 días; Pedro, 3 días; y Rufino, 7 días. El importe del alquiler asciende a 264 euros. ¿Cuánto debe pagar cada uno?**

Número total de días que se alquila la máquina = 12

Precio por día $= \dfrac{\text{Precio total}}{\text{Nº de días}} = \dfrac{264}{12} = 22$

Juan debe pagar $\rightarrow$ $2 \cdot 22 = 44$ €

Pedro debe pagar $\rightarrow$ $3 \cdot 22 = 66$ €

Rufino debe pagar $\rightarrow$ $7 \cdot 22 = 154$ €

Juan debe pagar 44 €, Pedro, 66 €, y Rufino, 154 €.

18 □□□ **Tres socios financian un negocio que exige una inversión de 136 000 €. El primero pone el 65%; el segundo, el 20%, y el tercero, el resto. Un tiempo después reparten unos beneficios de 16 800 €. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?**

El beneficio se repartirá de forma proporcional a como se ha hecho la inversión.

PRIMERO $\rightarrow$ se queda con el 65% de 16 800 = $0{,}65 \cdot 16\,800 = 10\,920$

SEGUNDO $\rightarrow$ se queda con el 20% de 16 800 = $0{,}2 \cdot 16\,800 = 3\,360$

TERCERO $\rightarrow$ se queda con el 15% de 16 800 = $0{,}15 \cdot 16\,800 = 2\,520$

Al primero le corresponden 10 920 €, al segundo, 3 360 €, y al tercero, 2 520 €.

Problemas de mezclas

19 □□□ **Un fabricante de churros usa una mezcla de aceite que contiene dos partes de aceite de oliva por cada parte de aceite de girasol. Sabiendo que compra el de oliva a 3,40 €/litro y el de girasol a 1,60 €/litro, ¿a cómo le sale el litro de mezcla?**

	CANTIDAD (l)	PRECIO (€/l)	COSTE TOTAL (€)
ACEITE OLIVA	2	3,40	6,80
ACEITE GIRASOL	1	1,60	1,60
MEZCLA	3		8,40

Precio de un litro de mezcla $= \dfrac{\text{Coste}}{\text{nº de litros}} = \dfrac{8{,}40}{3} = 2{,}8$

El litro de mezcla sale a 2,8 €.

20 **Para fabricar cierta colonia se mezcla 1 litro de esencia con 5 litros de alcohol y 2 litros de agua destilada. La esencia cuesta 200 €/litro; el alcohol, 6 €/litro; y el agua destilada, 1 €/litro. ¿Cuál es el coste de un litro de esa colonia?**

	CANTIDAD (l)	PRECIO (€/l)	COSTE
ESENCIA	1	200	200
ALCOHOL	5	6	30
AGUA DESTILADA	2	1	2
MEZCLA	8		232

$$\text{Precio mezcla} = \frac{\text{Coste}}{\text{litros}} = \frac{232}{8} = 29$$

El precio de 1 litro de colonia es de 29 €.

21 **Se quiere fundir un lingote de 500 g que contiene un 77% de plata con otro de 1,3 kg y un 95% de plata. ¿Cuál es la proporción de plata del lingote resultante?**

	PESO (kg)	% PLATA	COSTE EN PLATA (kg)
LINGOTE 1	0,5	77	77% DE 0,5 = 0,385
LINGOTE 2	1,3	95	95% DE 1,3 = 1,235
LINGOTE NUEVO	1,8		1,62

$$\text{Proporción de plata} = \frac{\text{peso en plata}}{\text{peso total}} = \frac{1{,}62}{1{,}8} = 0{,}9 \;\rightarrow\; 90\%$$

La proporción de plata es del 90%.

22 **Se funden juntos un lingote de 800 g de oro de ley 0,95 con un vaso de 6 kg de oro de ley 0,78. ¿Cuál es la ley del lingote obtenido?**

	PESO (kg)	LEY	PESO EN ORO
LINGOTE	0,8	0,95	0,8 · 0,95 = 0,76
VASO	6	0,78	6 · 0,78 = 4,68
LINGOTE RESULTANTE	6,8		5,44

$$\text{Ley del lingote resultante} = \frac{\text{peso en oro}}{\text{peso total}} = \frac{5{,}44}{6{,}8} = 0{,}8$$

La ley del lingote obtenido es de 0,80.

Problemas de móviles

23 **Dos poblaciones A y B distan 270 km. A las 12 de la mañana sale de A hacia B un coche a una velocidad de 100 km/h. En el mismo instante, un coche sale de B hacia A a 80 km/h. ¿A qué hora se cruzan?**

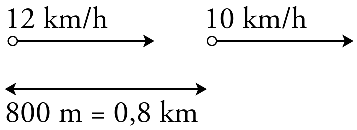
100 km/h $\longrightarrow$ A ... B $\longleftarrow$ 80 km/h

Ambos vehículos se aproximan a la velocidad de 100 + 80 = 180 km/h.

A una velocidad de 180 km/h, el tiempo que tardan en recorrer los 270 km que separan A de B es $t = \frac{e}{v} = \frac{270}{180} = 1{,}5$ h.

Por tanto, se cruzarán a las 13 horas y media (una y media de la tarde).

24 **Un corredor de fondo avanza a la velocidad de 10 km/h, perseguido por un rival que está 800 metros más atrás y lleva una velocidad de 12 km/h. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el segundo alcance al primero?**



Los corredores se aproximan a una velocidad de 12 – 10 = 2 km/h.

El tiempo que se tarda en recorrer los 0,8 km que les separan, a una velocidad de 2 km/h es:

$$t = \frac{e}{v} \quad \rightarrow \quad t = \frac{0,8}{2} = 0,4 \text{ h} = 0,4 \cdot 60 \text{ min} = 24 \text{ minutos}$$

El segundo alcanzará al primero al cabo de 24 minutos.

25 **Un depósito contiene 16 800 *l* de agua para uso doméstico. Por error, se abren simultáneamente un grifo que arroja un caudal de 185 *l*/min y el desagüe del depósito con 335 *l*/min de caudal. ¿Cuánto tarda el depósito en vaciarse?**

El caudal que va saliendo del pozo es la diferencia del caudal del desagüe y el caudal del grifo: 335 – 185 = 150 *l*/min.

El tiempo que tarda el depósito en vaciarse es:

$$t = \frac{\text{nº litros}}{\text{caudal}} = \frac{16\,800}{150} = 112 \text{ minutos} \rightarrow \quad 1 \text{ hora } 52 \text{ minutos}$$

26 **Un depósito de 21 000 litros se abastece de dos grifos que aportan un caudal de 40 litros por minuto y de 30 litros por minuto, respectivamente. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abren ambos grifos simultáneamente?**

Ambos grifos, en 1 minuto, aportan un caudal de 40 + 30 = 70 *l*.

Como el depósito tiene una capacidad de 21 000 *l*:

$$\frac{21\,000}{70} = 300 \text{ minutos} = 5 \text{ horas}$$

El depósito tardará 5 horas en llenarse.

27 **Un ciclista sale de un lugar a 18 km/h. Media hora más tarde sale otro ciclista del mismo lugar a 22 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar al primero?**

- Calculamos la distancia que ha recorrido el primer ciclista en media hora, yendo a una velocidad de 18 km/h:

  Si en 1 hora recorre 18 km, en media hora recorrerá 9 km.

- Los ciclistas se aproximan a la velocida de 22 – 18 = 4 km/h.
- El tiempo que tardarán en encotrarse, a una velocidad de 4 km/h, sabiendo que la distancia que los separa es de 9 km, será:

$$t = \frac{e}{v} \quad \rightarrow \quad t = \frac{9 \text{ km}}{4 \text{ km/h}} = 2,25 \text{ h} = 2 \text{ h y cuarto}$$

Problemas de porcentajes

28 □□□ **Para comprar un piso que se vende en 180 000 €, se ha de pagar además un 7% a Hacienda (IVA), y 5 400 € de gastos de notaría y gestión.**

¿Cuál es el gasto total necesario para la compra?

7% de 180 000 € = 180 000 · 0,07 = 12 600 €

180 000 + 12 600 + 5 400 = 198 000

El gasto total es de 198 000 €.

29 □□□ **En una sesión de cine, de las 840 localidades disponibles, se han vendido un 65%. ¿Cuántos asientos hay vacíos?**

Si se han vendido un 65% de las localidades, el 35% quedan sin vender.

$$35\% \text{ de } 840 = 0{,}35 \cdot 840 = 294$$

Quedan 294 asientos vacíos.

30 □□□ **En un estudio sociológico, de 1 232 hombres encuestados, 924 declaran que colaboran activamente en las tareas del hogar. ¿Cúal es el porcentaje de hombres que dice trabajar en casa?**

De un total de 100 hombres, colaboran en las tareas del hogar x.

TOTAL	PARTE
1 232	924
100	x

$$\frac{1\,232}{100} = \frac{924}{x} \rightarrow x = \frac{924 \cdot 100}{1\,232} = 75$$

El 75% de los hombres dice trabajar en casa.

31 □□□ **Paula ha pagado 76,50 € por un jersey que costaba 85 €. ¿Qué tanto por ciento le han rebajado?**

PRECIO INICIAL (€)	PRECIO FINAL (€)
85	76,5
100	x

$$\frac{85}{100} = \frac{76{,}5}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{76{,}5 \cdot 100}{85} = 90$$

En un artículo que hubiera costado 100 €, habría pagado 90 €, luego le han rebajado el 10%.

32 □□□ **En un supermercado se vuelca una caja que contiene 360 huevos y se rompen 45. ¿Qué tanto por ciento de los huevos se han roto?**

Nº TOTAL DE HUEVOS	HUEVOS ROTOS
360	45
100	x

$$\frac{360}{100} = \frac{45}{x} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 100}{360} = 12{,}5$$

Se han roto el 12,5% de los huevos.

33 □□□ **Iván recibe un sueldo de 80 € semanales por ayudar en el negocio familiar en los ratos libres. A partir del mes que viene, su padré le subirá su asignación en un 20%, lo que le permitirá apuntarse a clases de guitarra que le cuestan 50 € mensuales. Calcula cuánto dinero le quedará disponible cada semana.**

El sueldo semanal que va a recibir es el 120% del sueldo inicial:

$$120\% \text{ de } 80 = 1{,}20 \cdot 80 = 96 \text{ €}$$

El gasto en las clases de guitarra, por semana, es de $\frac{50}{4} = 12{,}5$ €.

Así, el dinero disponible cada semana es de $96 - 12{,}5 = 83{,}5$ €.

Cada semana le quedarán disponibles 83,5 €.

34 □□□ **En una tienda se anuncian rebajas del 35%. Una camisa cuesta 60 €; un pantalón, 72 €, y un jersey, 46 €. ¿Cuánto costarán después de la rebaja?**

Una rebaja del 35% implica que se paga el 65% del precio del artículo. Por tanto, los precios después de la rebaja serán:

Camisa → $0{,}65 \cdot 60 = 39$ €

Pantalón → $0{,}65 \cdot 72 = 46{,}80$ €

Jersey → $0{,}65 \cdot 46 = 29{,}90$ €

35 □□□ **Un especulador compra un terreno de 6 000 m² a 80 € el metro cuadrado. Un año después, vende 2 000 m² un 20% más caro, y seis meses más tarde vende el resto por un 25% más de lo que le costó. ¿Cuál ha sido la ganancia obtenida?**

Precio pagado por el terreno = $6\,000 \cdot 80 = 480\,000$ €

Precio de venta:

- 2 000 m^2 un 20% más caro → $1{,}20 \cdot 80 = 96$ €/m^2

  Venta de 2 000 m^2: $2\,000 \cdot 96 = 192\,000$ €

- 4 000 m^2 un 25% más caro → $1{,}25 \cdot 80 = 100$ €/m^2

Venta de 4 000 m^2: $4\,000 \cdot 100 = 400\,000$ €

Dinero total conseguido por la venta: $400\,000 + 192\,000 = 592\,000$ €

Ganancia = $592\,000 - 480\,000 = 112\,000$ €

La ganancia obtenida es de 112 000 €.

PÁGINA 77

36 □□□ **Una lavadora cuesta, sin IVA, 480 €. A ese precio hay que añadirle un 5% por entrega a domicilio. Calcula el precio final de la lavadora sabiendo que el IVA es del 12%.**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Precio inicial} = 480 \text{ €}\\ \text{Subida del 5\%} \rightarrow \text{I.V. es } 1{,}05\\ \text{IVA 12\%} \rightarrow \text{I.V. es } 1{,}12\end{array}\right\} \text{Precio final} = 480 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}12 = 564{,}48 \text{ €}$$

37 □□□ **El precio de la vivienda subió un 8% hace dos años, un 15% el año pasado y un 10% durante este año. ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida en los tres últimos años?**

El índice de variación en los últimos tres años será:

$$1{,}08 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}1 = 1{,}3662 \quad \to \quad 1{,}3662 - 1 = 0{,}3662$$

El porcentaje de subida es 36,62%.

38 □□□ **El precio inicial de una enciclopedia era de 355 €. A lo largo del tiempo, ha sufrido variaciones: subió un 10%, subió un 16% y bajó un 25%.**

a) ¿Cuál es su precio actual?

b) ¿Cuál es la variación total expresada en porcentaje?

a) $\left.\begin{array}{l} \text{Precio inicial} = 355 \\ \text{Subió un } 10\% \ \to \ \text{I.V.} = 1{,}10 \\ \text{Subió un } 16\% \ \to \ \text{I.V.} = 1{,}16 \\ \text{Bajó un } 25\% \ \to \ \text{I.V.} = 0{,}75 \end{array}\right\}$ Precio Actual $= 355 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}16 \cdot 0{,}75 =$
$= 339{,}74$ €

b) Índice de variación total $= 1{,}10 \cdot 1{,}16 \cdot 0{,}75 = 0{,}957$

$1 - 0{,}957 = 0{,}043 \quad \to$ La enciclopedia ha sufrido una bajada del 4,3%.

39 □□□ **Un GPS cuesta 556 €. Calcula el precio final después de subirlo un 15% y rebajarlo un 25%. ¿Cuál es el porcentaje de descuento final?**

$\left.\begin{array}{l} \text{Precio inicial} = 556 \text{ €} \\ \text{Subida del } 15\% \ \to \ \text{I.V.} = 1{,}15 \\ \text{Rebaja del } 25\% \ \to \ \text{I.V.} = 0{,}75 \end{array}\right\}$ Precio final $= 556 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}75 = 479{,}55$ €

Índice de variación total $= 1{,}15 \cdot 0{,}75 = 0{,}8625$

$1 - 0{,}8625 = 0{,}1375 \quad \to$ El porcentaje de descuento final es del 13,75%.

Problemas de depósitos y préstamos

40 □□□ **Se depositan 15 000 € al 2,5% anual. Al acabar el año se saca todo el dinero, se añaden 10 000 € y se deposita todo en otro banco al 4%. ¿Cuánto dinero habrá al acabar el segundo año?**

Dinero al finalizar el primer año $= 15\,000 \cdot 1{,}025 = 15\,375$ €

Añade otros 10 000 €: $15\,375 + 10\,000 = 25\,375$ €

Se depositan en otro banco al 4% durante otro año:

$$25\,375 \cdot 1{,}04 = 26\,390 \text{ €}.$$

Al acabar el segundo año habrá 26 390 €.

41 **¿En cuánto se transforman 20 600 € durante 3 años al 6% anual si los periodos de capitalización son mensuales?**

6% anual significa 0,5% mensual (6 : 12 = 0,5)

En 3 años hay 36 meses.

Por tanto:

$$\text{Capital final} = 20\,600 \cdot 1{,}005^{36} = 24\,651{,}62 \text{ €}$$

42 **Un padre de familia gana en la lotería un premio de 24 000 €, y pacta con el banco mantener el dinero en una cuenta durante cinco años, cobrando los beneficios cada año. A cambio, el banco le dará un interés del 6% anual. ¿Qué beneficio obtiene anualmente? ¿Y en los cinco años que dura el acuerdo?**

Dado que los beneficios los retira anualmente, el interés que pacta con el banco es simple.

- Beneficio que obtiene en 1 año:

  $6\% \text{ de } 24\,000 = \dfrac{6 \cdot 24\,000}{100} = 1\,440 \text{ €}$

- Beneficio que obtiene en 5 años:

  $5 \cdot 1\,440 = 7\,200 \text{ €}$

En 1 año obtiene un beneficio de 1 440 € , y en 5 años, 7 200 €.

43 **Un inversor coloca 200 000 € al 5% de interés compuesto durante un periodo de 4 años. ¿A cuánto ascenderá su capital al final de dicho periodo?**

Los beneficios se suman al capital, el cual se incrementa un 5% cada año.

Capital final = $200\,000 \cdot 1{,}05^4 = 243\,101{,}25$

Al cabo de 4 años, el capital final será de 243 101,25 €.

44 **Rosa coloca 6 000 € al 4% anual y los mantiene en el banco durante cuatro años, retirando anualmente los beneficios obtenidos. María coloca la misma cantidad, al mismo interés y durante el mismo tiempo, pero da orden de que los beneficios se sumen cada año al capital. ¿Cuál es la diferencia entre los beneficios obtenidos por cada una?**

Rosa negocia su capital bajo un interés simple:

$$\left.\begin{array}{l} C = 6\,000 \text{ €} \\ r = 4 \\ t = 4 \end{array}\right\} \text{Beneficio} \rightarrow I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{6\,000 \cdot 4 \cdot 4}{100} = 960 \text{ €}$$

María negocia su capital bajo un interés compuesto:

Capital final = $6\,000 \cdot 1{,}04^4 = 7\,019{,}15$ €

María gana 7 019,15 – 6 000 = 1 019,15 €

María obtiene 1 019,15 – 960 = 59,15 € más de beneficio que Rosa.

45 □□□ **Tengo en el banco 28 500 € colocados al 4,25% anual. Al terminar el año, añado los intereses a lo que tenía y lo dejo en el banco con las mismas condiciones. ¿Qué cantidad de dinero podré retirar al cabo del año? ¿Y cinco años después?**

Cada año, el capital aumenta un 4,25%, es decir, se multiplica por 1,0425.

Al cabo del año, el capital obtenido será $28\,500 \cdot 1{,}0425 = 29\,711{,}25$ €.

En cinco años tendrá $28\,500 \cdot 1{,}0425^5 = 35\,093{,}38$ €.

PIENSA Y RESUELVE

46 □□□ **Un mayorista compra, sobre el terreno, 2 000 kilos de naranjas a 0,54 €/kg, y tres días después, otros 3 000 kilos a 0,63 €/kg. Posteriormente, vende todas las naranjas a 0,84 €/kg. ¿Cuánto gana en cada kilo por término medio? ¿Cuánto gana en total?**

Calculamos el precio del kilo de naranjas en el momento de la compra:

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE
NARANJAS CALIDAD INFERIOR	2 000	0,54	1 080
NARANJAS CALIDAD SUPERIOR	3 000	0,63	1 890
TOTAL	5 000		2 970

$$\text{Precio mezcla} = \frac{\text{Coste}}{\text{kilos}} = \frac{2\,970}{5\,000} = 0{,}594 \text{ €/kg}$$

Las vende a 0,84 €/kg, luego en cada kilo gana:

$$0{,}84 - 0{,}594 = 0{,}246 \text{ €}$$

En total gana $0{,}246 \cdot 5\,000 = 1\,230$ €.

47 □□□ **En una granja de avestruces, cada animal consume, por término medio, 800 gramos de pienso al día. ¿Cuál será el presupuesto para alimentar a 80 avestruces, durante tres meses (90 días), si el kilo de pienso cuesta 1,03 €?**

Estamos ante un problema de proporcionalidad compuesta: el número de avestruces y de días para alimentarlos son directamente proporcionales al presupuesto:

P. DIRECTA

P. DIRECTA

Nº DE AVESTRUCES	Nº DE DÍAS	PRESUPUESTO (€)
1	1	0,8 · 1,03
80	90	x

$$\frac{1 \cdot 1}{80 \cdot 90} = \frac{0{,}8 \cdot 1{,}03}{x} \;\rightarrow\; \frac{1}{7\,200} = \frac{0{,}8 \cdot 1{,}03}{x} \;\rightarrow\; x = 7\,200 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}03 = 5\,932{,}8$$

El presupuesto para alimentar a 80 avestruces durante tres meses es de 5 932,8 €.

48 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

49 ■■□ **Se mezclan 300 kg de pintura de 30 € el kilo con 200 kg de otra pintura más barata. De esta forma, la mezcla sale a 24 € el kilo. ¿Cuál es el precio de la pintura barata?**

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA BARATA	200	?	?
PINTURA CARA	300	30	9 000
MEZCLA	500	24	12 000

Para que el coste de la mezcla sea de 12 000 €, el coste de la pintura barata ha de ser 12 000 – 9 000 = 3 000 €.

El precio por kilo de la pintura barata será: $\dfrac{\text{Coste}}{\text{kilos}} = \dfrac{3\,000}{200} = 15$ €

15 €/kg cuesta la pintura barata.

50 ■■□ **Se funde un lingote de medio kilo con un 77% de oro con otro lingote que pesa 1,3 kg obteniéndose un lingote con un 90% de oro. ¿Qué proporción de oro tiene el segundo lingote?**

Situamos los datos en una tabla y razonamos sobre ella:

	PESO (kg)	PORCENTAJE ORO	PESO DE ORO (kg)
LINGOTE 1	0,5	77%	$0{,}5 \cdot 0{,}77 = 0{,}385$
LINGOTE 2	1,3		
MEZCLA	1,8	90%	$1{,}8 \cdot 0{,}90 = 1{,}62$

De la tabla se deduce que el peso de oro del 2º lingote es $1{,}62 - 0{,}385 = 1{,}235$ kg.

Por tanto:

$$\text{Proporción de oro del 2º lingote} = \frac{\text{Cantidad de oro}}{\text{Cantidad total}} = \frac{1{,}235}{1{,}3} = 0{,}95$$

El segundo lingote tiene el 95% de oro.

PÁGINA 78

51 ■□□ **¿En cuánto se convierte un capital de 1 000 euros colocados al 0,003% mensual, durante 5 meses?**

Suponemos que, mensualmente, los beneficios obtenidos se suman al capital, que se incrementa un 0,003% al mes.

$$\left.\begin{array}{l} C = 1\,000 \text{ €} \\ t = 5 \end{array}\right\} \text{Capital final} = 1\,000 \cdot 1{,}00003^5 = 1\,000{,}15 \text{ €}$$

El capital de 1 000 € se convierte en 1 000,15 €.

52 □□□ **De una plancha de acero se ha cortado una porción rectangular de 70 cm de longitud y 60 cm de anchura. Ahora deseamos cortar una nueva porción de 40 cm de anchura y que tenga el mismo peso que la primera. ¿Cuál será el largo de esta nueva porción?**

Para que las dos planchas tengan el mismo peso, la longitud y la anchura han de ser magnitudes inversamente proporcionales (a menos anchura, más longitud):

P. INVERSA

ANCHO (cm)	LARGO (cm)
60	70
40	x

$$\frac{60}{40} = \frac{x}{70} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 70}{40} = 105$$

El largo de la nueva porción será de 105 cm.

53 □□□ **En una carrera ciclista, la primera semana abandonan el 20% de los corredores, y en la segunda, el 40% de los que quedaban. ¿Qué porcentaje de los que empezaron permanece en carrera al inicio de la tercera semana?**

En la primera semana abandonan la carrera el 20% $\rightarrow$ quedan el 80%

En la segunda semana abandonan el 40% del 80% de los participantes:

40% de 80% $= \frac{40}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{32}{100}$ = 32% abandonan

Quedan: 80% – 32% = 48%

El 48% de los que empezaron permance en carrera al inicio de la tercera semana.

54 □□□ **Resuelto en el libro de texto.**

55 □□□ **Ignacio ha pagado 63 € por una camisa que estaba rebajada un 10%. ¿Cuánto costaba la camisa antes de la rebaja?**

Llamamos x al precio inicial de la camisa.

Si está rebajada el 10%, se paga el 90% del precio inicial:

$$90\% \text{ de } x = 63 \rightarrow 0{,}9 \cdot x = 63 \rightarrow x = 63 : 0{,}9 = 70$$

La camisa costaba 70 € antes de la rebaja.

56 □□□ **El 72% de las fichas de un club deportivo pertenecen a jóvenes menores de veinte años. ¿Cuántos socios tiene el club, sabiendo que los menores de veinte años son 108?**

Llamamos x al número de socios del club.

$$72\% \text{ de } x = 108 \rightarrow 0{,}72 \cdot x = 108 \rightarrow x = 108 : 0{,}72 = 150$$

El club tiene 150 socios.

57 □□□ **Repartir 720 € entre tres socios de un negocio, sabiendo que el primero puso el triple que el segundo, y este, el doble que el tercero.**

El tercer socio puso una cantidad C.

El segundo socio puso $2C$.

El primer socio puso el triple de $2C$, es decir, $6C$.

Nº total de cantidades iguales puestas = 6 + 2 + 1 = 9.

El dinero que corresponde a cada cantidad es 720 : 9 = 80 €.

El reparto será:

1^er^ socio: 6 · 80 € = 480 €

2º socio: 2 · 80 € = 160 €

3^er^ socio: 1 · 80 € = 80 €

58 □□□ **Calcula el interés que produce un capital de 40 000 €, colocados al 3,25% anual durante:**

a) Un año. b) Un mes. c) Cinco meses.

a) UN AÑO

$$3{,}25\% \text{ de } 40\,000 = \frac{3{,}25 \cdot 40\,000}{100} = 1\,300 \text{ €}$$

El interés que se produce es de 1 300 €.

b) UN MES

Si en 1 año se producen 1 300 € de interés, en 1 mes serán:

1 300 : 12 = 108,33 €

c) CINCO MESES

Si en 1 mes se producen 108,33 € de interés, en 5 meses serán:

108,33 · 5 = 541,67 €

59 □□□ **El 34% de los asistentes a un congreso sobre la paz son europeos; el 18%, africanos; el 32%, americanos; y el resto, asiáticos. Sabiendo que hay 51 europeos, ¿cuántos hay de cada uno de los demás continentes?**

Llamamos x al número de asistentes al congreso.

$$34\% \text{ de } x = 51 \;\rightarrow\; 0{,}34 \cdot x = 51 \;\rightarrow\; x = 51 : 0{,}34 = 150$$

El número total de asistentes es de 150 personas.

Calculamos el número de africanos, americanos y asiáticos que hay:

Africanos → 18% de 150 = 0,18 · 150 = 27

Americanos → 32% de 150 = 0,32 · 150 = 48

Asiáticos → 150 – 27 – 48 – 51 = 24

Hay 27 africanos, 48 americanos y 24 asiáticos.

60 □□□ **Un automóvil ha viajado a 90 km/h durante 20 minutos y a 120 km/h durante los 10 minutos siguientes.**

¿Cuál ha sido la velocidad media durante ese espacio de tiempo?

Calculamos el espacio que ha recorrido en cada periodo:

- Durante 20 minutos la velocidad ha sido de 90 km/h. El espacio que ha recorrido es de $\frac{90}{3} = 30$ km (20 minutos es la tercera parte de 1 hora).
- Durante 10 minutos la velocidad ha sido de 120 km/h. En este tiempo ha recorrido $\frac{120}{6} = 20$ km (10 minutos es la sexta parte de 1 hora).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Espacio total recorrido} = 30 + 20 = 50 \text{ km}\\ \text{Tiempo invertido} = 20 + 10 = 30 \text{ min} = 0{,}5 \text{ h}\end{array}\right\} \text{velocidad} = \frac{50}{0{,}5} = 100$$

La velocidad media ha sido de 100 km/h.

61 □□□ **Una pareja, al pactar la compra de un piso, acuerda abonar como señal un 5% del precio, un segundo pago del 65% a la firma de las escrituras, y el resto en 12 mensualidades de 7 000 euros cada una. ¿Cuál es el precio del piso?**

Señal → 5% del precio del piso

Firma de escrituras → 65% del precio del piso

Resto → 12 · 7 000 = 84 000 €, que corresponde al 30% del valor del piso.

Llamando x al precio del piso:

30% de $x = 84\,000 \;\rightarrow\; 0{,}3 \cdot x = 84\,000 \;\rightarrow\; x = 84\,000 : 0{,}3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = 280\,000$

El precio del piso es de 280 000 €.

62 □□□ **Un sastre ha cobrado 398 € por un traje en el que ha invertido 4 metros de tela y 10 horas de trabajo. Sabiendo que valora su trabajo a razón de 19 € la hora, ¿cuánto cobrará por otro traje para el que ha necesitado 3,5 metros de tela y 12 horas de trabajo?**

De los 398 € cobrados por la confección de un traje, se tiene que:

Coste por el trabajo: 10 h · 19 €/h = 190 €

Precio de 4 m de tela: 398 – 190 = 208 €

Precio de 1 m de tela: 208 € : 4 m = 52 €/m

Por un traje de 3,5 m de tela y 12 horas de trabajo cobrará:

$$\left.\begin{array}{l}12 \cdot 19 = 228 \text{ €}\\ 3{,}5 \cdot 52 = 182 \text{ €}\end{array}\right\} \text{Total} = 228 + 182 = 410$$

Cobrará por el traje 410 €.

63 **Un comerciante adquirió el mes pasado 210 carretes de hilo por cierta cantidad de dinero. ¿Cuántos adquirirá este mes, con el mismo gasto, sabiendo que han subido un 5%?**

Llamamos x al número de carretes que adquirirá este mes.

El precio por carrete ha subido un 5%:

$$1{,}05 \text{ de } x = 210 \quad \rightarrow \quad x = 210 : 1{,}05 = 200$$

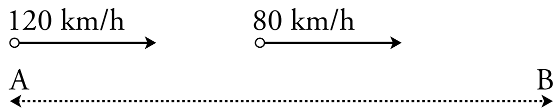
Podrá adquirir 200 carretes de hilo.

64 **Vicente ha pagado 405 € por una lavadora por la que le han cobrado un 12% de IVA, y le han rebajado un 25%. ¿Cuánto costaba inicialmente la lavadora sin IVA?**

$$\left.\begin{array}{l} P_{\text{FINAL}} = 4{,}05 \\ \text{IVA del } 12\% \quad \rightarrow \quad \text{I.V.} = 1{,}12 \\ \text{Rebaja del } 25\% \quad \rightarrow \quad \text{I.V.} = 0{,}75 \end{array}\right\} \; P_{\text{FINAL}} = P_{\text{INICIAL}} \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}75$$

$$405 = P_{\text{FINAL}} \cdot 0{,}84 \quad \rightarrow \quad P_{\text{FINAL}} = \frac{405}{0{,}84} = 482{,}14 \text{ €}$$

65 **Un camión sale de A hacia B a 80 km/h. Un cuarto de hora después sale un coche, en la misma dirección, a 120 km/h, llegando ambos a B simultáneamente. ¿Cuál es la distancia entre A y B?**



Ambos vehículos se aproximan a una velocidad de 120 – 80 = 40 km/h.

- Calculamos la distancia que lleva recorrida el camión cuando el coche sale:

  En 1 h recorre 80 km.

  En $\frac{1}{4}$ h recorre $\frac{80}{4} = 20$ km.

- El tiempo en recorrer los 20 km que les separan, a una velocidad de 40 km/h es:

  $$t = \frac{e}{v} \quad \rightarrow \quad t = \frac{20}{40} = 0{,}5 \text{ h}$$

El coche y el camión tardan media hora en encontrarse, momento que se produce al final del trayecto. Por tanto, el coche tarda 0,5 h en llegar a B a una velocidad de 120 km/h. Así, la distancia de A a B será de:

$$e = 0{,}5 \text{ h} \cdot 120 \text{ km/h} = 60 \text{ km}$$

La distancia entre A y B es de 60 km.

66 **En un examen de Matemáticas han aprobado 22 alumnos, lo que supone el 88% del total de la clase. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?**

Llamamos x al número de alumnos de la clase.

$$88\% \text{ de } x = 22 \quad \rightarrow \quad 0{,}88 \cdot x = 22 \quad \rightarrow \quad x = 22 : 0{,}88 = 25$$

En la clase hay 25 alumnos.

67 ■■■ **Pablo invierte en un banco 48 000 € al 4% anual y percibe al cabo de un tiempo 53 760 €. Calcula cuántos años duró la inversión, sabiendo que cada año iba retirando los intereses dados.**

48 000 € al 4% anual $\xrightarrow{t \text{ años}}$ 53 760 €

48 000 € al 4% anual en 1 año se obtiene $\rightarrow$ 48 000 · 1,04 = 49 920 €, es decir, 49 920 – 48 000 = 1920 € de intereses.

En t años, se han obtenido 53 760 – 48 000 = 5760 € de intereses.

$$\frac{5\,760}{1\,920} = 3 \text{ años} \quad \Rightarrow \quad \text{La inversión duró 3 años.}$$

68 ■■■ **Un grifo con un caudal de 45 *l*/h llena un depósito en 8 horas. ¿Cuál debería ser el caudal para llenar la mitad del depósito en 6 horas?**

El grifo en 1 hora arroja 45 l $\rightarrow$ En 8 horas arrojará 45 · 8 = 360 l.

La mitad del depósito será $\frac{360\ l}{2} = 180\ l$; si se quiere llenar en 6 horas, el caudal será:

$$\frac{180\ l}{6 \text{ h}} = 30\ \frac{l}{\text{h}}$$

69 ■□□ **Un comerciante pide una prórroga de dos meses en el pago de una letra de 2 000 €, con unos intereses de demora del 16% anual. ¿Cuánto le cuesta la prórroga?**

Si la prórroga fuera de un año, tendría que pagar como intereses de demora el 16% de 2 000:

$$16\% \text{ de } 2\,000 = \frac{16 \cdot 2\,000}{100} = 320\ €$$

Como solo pide una prórroga de 2 meses (sexta parte del año), deberá pagar unos intereses de 320 : 6 = 53,33 €.

La prórroga le cuesta 53,33 €.

PÁGINA 91

PRACTICA

Monomios

1 □□□ **Indica cuál es el grado de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:**

a) $2x^2$ **b)** $-3x^3$ **c)** $\frac{1}{2}x^2$

d) $\frac{3}{4}x$ **e)** $-\frac{1}{3}x$ **f)** x^3

g) 3 **h)** $\frac{-4}{5}x^2$ **i)** $\frac{-1}{5}$

a) Grado 2 b) Grado 3 c) Grado 2

d) Grado 1 e) Grado 1 f) Grado 3

g) Grado 0 h) Grado 2 i) Grado 0

Son semejantes: $2x^2,\ \frac{1}{2}x^2,\ \frac{-4}{5}x^2$

$-3x^3,\ x^3$

$\frac{3}{4}x,\ -\frac{1}{3}x$

$3, -\frac{1}{5}$

2 □□□ **Calcula el valor numérico de cada uno de estos monomios para $x = -1$, para $x = 2$ y para $x = \frac{1}{2}$:**

a) $3x^2$ **b)** $\frac{2}{5}x^3$ **c)** $-2x$ **d)** $-x^2$ **e)** $\frac{1}{2}x^2$ **f)** $-\frac{1}{4}x$

a) Valor numérico para: $x = -1 \rightarrow 3(-1)^2 = 3$

$x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) Valor numérico para: $x = -1 \rightarrow \frac{2}{5}(-1)^3 = -\frac{2}{5}$

$x = 2 \rightarrow \frac{2}{5} \cdot 2^3 = \frac{2}{5} \cdot 8 = \frac{16}{5}$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{20}$

c) Valor numérico para: $x = -1 \;\rightarrow\; -2 \cdot (-1) = 2$

$x = 2 \;\rightarrow\; -2 \cdot 2 = -4$

$x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

d) Valor numérico para: $x = -1 \;\rightarrow\; -(-1)^2 = -1$

$x = 2 \;\rightarrow\; -2^2 = -4$

$x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

e) Valor numérico para: $x = -1 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$

$x = 2 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

f) Valor numérico para: $x = -1 \;\rightarrow\; -\frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{4}$

$x = 2 \;\rightarrow\; -\frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$

3 ■□□ **Simplifica.**

a) $2x^6 - 3x^6 - x^6$ **b)** $3x^2 - \frac{2}{3}x^2 + 5x^2$

c) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + x$ **d)** $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2$

e) $-2x^3 + x^3 - 3x^3$ **f)** $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^2$

a) $2x^6 - 3x^6 - x^6 = (2 - 3 - 1)x^6 = -2x^6$

b) $3x^2 - \frac{2}{3}x^2 + 5x^2 = \left(3 - \frac{2}{3} + 5\right)x^2 = \left(8 - \frac{2}{3}\right)x^2 = \frac{22}{3}x^2$

c) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + x = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1\right)x = \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right)x = \frac{3}{4}x$

d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2 = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} + 1\right)x^2 = \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{10} + \frac{10}{10}\right)x^2 = \frac{13}{10}x^2$

e) $-2x^3 + x^3 - 3x^3 = (-2 + 1 - 3)x^3 = -4x^3$

f) $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 2x^2 = \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 2\right)x^2 = \left(-\frac{4}{2} + 2\right)x^2 = 0x^2 = 0$

4 **Dados los monomios $A = -5x^4$, $B = 20x^4$, $C = 2x$, calcula:**

a) $A + B$	**b)** $A - B$	**c)** $3A + 2B$
d) A^3	**e)** C^2	**f)** $A^2 + C^8$
g) $A \cdot B$	**h)** $A \cdot C$	**i)** $B \cdot C$
j) $B : A$	**k)** $A : B$	**l)** $(B : C) \cdot A$

$A = -5x^4 \qquad B = 20x^4 \qquad C = 2x$

a) $A + B = -5x^4 + 20x^4 = 15x^4$

b) $A - B = -5x^4 - 20x^4 = -25x^4$

c) $3A + 2B = 3 \cdot (-5x^4) + 2 \cdot (20x^4) = -15x^4 + 40x^4 = 25x^4$

d) $A^3 = (-5x^4)^3 = -125x^{12}$

e) $C^2 = (2x)^2 = 4x^2$

f) $A^2 + C^8 = (-5x^4)^2 + (2x)^8 = 25x^8 + 256x^8 = 281x^8$

g) $A \cdot B = (-5x^4) \cdot (20x^4) = -100x^8$

h) $A \cdot C = (-5x^4) \cdot (2x) = -10x^5$

i) $B \cdot C = (20x^4) \cdot (2x) = 40x^5$

j) $B : A = (20x^4) : (-5x^4) = -4$

k) $A : B = (-5x^4) : (20x^4) = -\dfrac{5}{20} = -\dfrac{1}{4}$

l) $(B : C) \cdot A = \dfrac{20x^4}{2x} \cdot (-5x^4) = (10x^3) \cdot (-5x^4) = -50x^7$

5 **Efectúa las siguientes operaciones y di cuál es el grado del monomio resultante:**

a) $2x \cdot (-3x^2) \cdot (-x)$	**b)** $\dfrac{3}{4}x^3 \cdot (-2x^2) \cdot 2x$
c) $2x^3 \cdot (-x^2) \cdot 5x$	**d)** $x \cdot \left(-\dfrac{1}{2}x\right) \cdot \dfrac{3}{5}x$
e) $-\dfrac{1}{3}x \cdot 3x^2 \cdot (-x)$	**f)** $\dfrac{2}{5}x^2 \cdot \dfrac{3}{4}x \cdot \dfrac{10}{3}x^2$

a) $2x \cdot (-3x^2) \cdot (-x) = 6x^4 \ \rightarrow$ Grado 4

b) $\dfrac{3}{4}x^3 \cdot (-2x^2) \cdot 2x = \dfrac{3}{4} \cdot (-4)x^6 = -3x^6 \ \rightarrow$ Grado 6

c) $2x^3 \cdot (-x^2) \cdot 5x = -10x^6 \ \rightarrow$ Grado 6

d) $x \cdot \left(-\dfrac{1}{2}x\right) \cdot \dfrac{3}{5}x = -\dfrac{3}{10}x^3 \ \rightarrow$ Grado 3

e) $-\dfrac{1}{3}x \cdot 3x^2 \cdot (-x) = x^4 \ \rightarrow$ Grado 4

f) $\dfrac{2}{5}x^2 \cdot \dfrac{3}{4}x \cdot \dfrac{10}{3}x^2 = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{10}{3} \cdot x^5 = x^5 \ \rightarrow$ Grado 5

6 □□□ **Efectúa las siguientes divisiones de monomios y di cuál es el grado de cada monomio resultante:**

a) $(8x^3) : (2x^2)$ **b)** $(4x^6) : (2x)$

c) $(3x^3) : (2x^2)$ **d)** $(18x^3) : (2x^3)$

e) $\dfrac{20x^3}{2x^2}$ **f)** $\dfrac{-15x^6}{3x^2}$

g) $\dfrac{-7x^3}{2x^2}$ **h)** $\dfrac{-2x^2}{x^2}$

a) $(8x^3) : (2x^2) = 4x \rightarrow$ Grado 1

b) $(4x^6) : (2x) = 2x^5 \rightarrow$ Grado 5

c) $(3x^3) : (2x^2) = \dfrac{3}{2}x \rightarrow$ Grado 1

d) $(18x^3) : (2x^3) = 9 \rightarrow$ Grado 0

e) $\dfrac{20x^3}{2x^2} = 10x \rightarrow$ Grado 1

f) $\dfrac{-15x^6}{3x^2} = -5x^4 \rightarrow$ Grado 4

g) $\dfrac{-7x^3}{2x^2} = -\dfrac{7}{2}x \rightarrow$ Grado 1

h) $\dfrac{-2x^2}{x^2} = -2 \rightarrow$ Grado 0

Polinomios

7 □□□ **Indica cuál es el grado de los siguientes polinomios (recuerda que deben estar en forma reducida):**

a) $2x^4 - 3x^2 + 4x$ **b)** $x^2 - 3x^3 + 2x$

c) $x^2 - 3x^2 + 4x^3$ **d)** $-\dfrac{1}{2}x^3 + 3x^2$

e) $3x^3 - 2x^2 - 3x^3$ **f)** $-\dfrac{1}{4}x^5 - \dfrac{3}{5}x^2$

g) $2x + 3$ **h)** $-\dfrac{1}{3}x + 3x$

a) Grado 4 b) Grado 3 c) Grado 3 d) Grado 3

e) $-2x^2 \rightarrow$ Grado 2 f) Grado 5 g) Grado 1 h) Grado 1

8 Dados los polinomios $P = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1$ y $Q = 6x^3 + 2x^2 - 7$, calcula $P + Q$ y $P - Q$.

$P + Q = (2x^4 - 5x^3 + 3x - 1) + (6x^3 + 2x^2 - 7) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 8$

$P - Q = (2x^4 - 5x^3 + 3x - 1) - (6x^3 + 2x^2 - 7) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1 - 6x^3 - 2x^2 + 7 =$

$= 2x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 3x + 6$

9 Sean los polinomios:

$$M = 3x^2 - 5x - 3 \qquad N = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 \qquad K = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Calcula:

a) $2M + 3K$ **b)** $M - 4N$ **c)** $4N - 3K$

a) $2M + 3K = 2(3x^2 - 5x - 3) + 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 6x^2 - 10x - 6 + 3x^2 - x + 2 =$

$= 9x^2 - 11x - 4$

b) $M - 4N = (3x^2 - 5x - 3) - 4\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1\right) = 3x^2 - 5x - 3 - 2x^2 - 3x - 4 =$

$= x^2 - 8x - 7$

c) $4N - 3K = 4\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1\right) - 3 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 2x^2 + 3x + 4 - 3x^2 + x - 2 =$

$= -x^2 + 4x + 2$

10 Efectúa.

a) $3x(2x^2 - 5x + 1)$ **b)** $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2)$

c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x)$ **d)** $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3)$

a) $3x(2x^2 - 5x + 1) = 6x^3 - 15x^2 + 3x$

b) $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2) = 14x^6 + 21x^5 - 14x^3$

c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x) = -5x^5 + 15x^3 - 25x^2$

d) $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3) = -x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 3x^2$

11 Opera y simplifica:

a) $(5x - 2)(3 - 2x)$ **b)** $x(x - 3)(2x - 1)$

c) $(3 + 7x)(5 + 2x)$ **d)** $(x + 1)(3x + 2)(x - 2)$

a) $(5x - 2)(3 - 2x) = 15x - 10x^2 - 6 + 4x = -10x^2 + 19x - 6$

b) $x(x - 3)(2x - 1) = (x^2 - 3x)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x = 2x^3 - 7x^2 + 3x$

c) $(3 + 7x)(5 + 2x) = 15 + 6x + 35x + 14x^2 = 14x^2 + 41x + 15$

d) $(x + 1)(3x + 2)(x - 2) = (3x^2 + 2x + 3x + 2)(x - 2) = (3x^2 + 5x + 2)(x - 2) =$

$= 3x^3 + 5x^2 + 2x - 6x^2 - 10x - 4 = 3x^3 - x^2 - 8x - 4$

12 **Opera y simplifica:**

a) $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5)$ **b)** $(x^2 - 5x)(x^3 + 2x)$

c) $(x^3 - 2x + 3)(x^2 + 4x - 1)$ **d)** $(3x^2 - 2x + 2)(x^3 + 3x - 2)$

a) $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5) = 6x^5 - 9x^4 + 15x^3 + 2x^2 - 3x + 5$

b) $(x^2 - 5x) \cdot (x^3 + 2x) = x^5 + 2x^3 - 5x^4 - 10x^2$

c) $(x^3 - 2x + 3) \cdot (x^2 + 4x - 1) =$

$= x^5 + 4x^4 - x^3 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + 3x^2 + 12x - 3 =$

$= x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 3$

d) $(3x^2 - 2x + 2) \cdot (x^3 + 3x - 2) =$

$= 3x^5 + 9x^3 - 6x^2 - 2x^4 - 6x^2 + 4x + 2x^3 + 6x - 4 =$

$= 3x^5 - 2x^4 + 11x^3 - 12x^2 + 10x - 4$

PÁGINA 92

13 **Calcula el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:**

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : x$ **b)** $(x^3 - 5x^2 + x) : (x - 2)$

c) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x + 3)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^5 & +7x^3 & -5x & +1 & x \\ \cline{5-5} -x^5 & & & & x^4 + 7x^2 - 5 \\ \cline{1-1} & 7x^3 & & & \\ & -7x^3 & & & \\ \cline{2-2} & & -5x & & \\ & & 5x & & \\ \cline{3-3} & & & +1 & \end{array}$$

Cociente $= x^4 + 7x^2 - 5$ Resto $= 1$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -5x^2 & +x & & x - 2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x^2 - 3x - 5 \\ \cline{1-2} & -3x^2 & +x & & \\ & 3x^2 & -6x & & \\ \cline{2-3} & & -5x & & \\ & & 5x & -10 & \\ \cline{3-4} & & & -10 & \end{array}$$

Cociente $= x^2 - 3x - 5$ Resto $= -10$

c)
$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 5x^2 + x & x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 - 3x^2} & x^2 - 8x + 25 \\
\quad -8x^2 + x & \\
\quad \underline{8x^2 + 24x} & \\
\qquad 25x & \\
\qquad \underline{-25x - 75} & \\
\qquad\quad -75 &
\end{array}$$

Cociente = $x^2 - 8x + 25$ Resto = -75

14 **Halla el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:**

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (3x + 1)$

b) $(4x^3 - x) : (2x + 3)$

c) $(5x^3 - 3x^2 + 8x) : (5x + 2)$

a)
$$\begin{array}{l|l}
3x^2 - 7x + 5 & 3x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^2 - x} & x - \dfrac{8}{3} \\
\quad -8x + 5 & \\
\quad \underline{8x + \dfrac{8}{3}} & \\
\qquad \dfrac{23}{3} &
\end{array}$$

Cociente = $x - \dfrac{8}{3}$ Resto = $\dfrac{23}{3}$

b)
$$\begin{array}{l|l}
4x^3 \qquad - x & 2x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^3 - 6x^2} & 2x^2 - 3x + 4 \\
\quad -6x^2 - x & \\
\quad \underline{6x^2 + 9x} & \\
\qquad 8x & \\
\qquad \underline{-8x - 12} & \\
\qquad\quad -12 &
\end{array}$$

Cociente = $2x^2 - 3x + 4$ Resto = -12

c)
$$\begin{array}{l|l}
5x^3 - 3x^2 + 8x & 5x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-5x^3 - 2x^2} & x^2 - x + 2 \\
\quad -5x^2 + 8x & \\
\quad \underline{5x^2 + 2x} & \\
\qquad 10x & \\
\qquad \underline{-10x - 4} & \\
\qquad\quad -4 &
\end{array}$$

Cociente = $x^2 - x + 2$ Resto = -4

Factorización de polinomios

15 **Saca factor común en cada caso:**

a) $9x^2 + 6x - 3$ **b)** $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c) $10x^3 - 5x^2$ **d)** $x^4 - x^3 + x^2 - x$

a) $9x^2 + 6x - 3 = 3(3x^2 + 2x - 1)$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x = 2x(x^2 - 3x + 2)$

c) $10x^3 - 5x^2 = 5x^2(2x - 1)$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x^3 - x^2 + x - 1)$

16 **Saca factor común en cada polinomio:**

a) $410x^5 - 620x^3 + 130x$

b) $72x^4 - 64x^3$

c) $5x - 100x^3$

d) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2$

a) $410x^5 - 620x^3 + 130x = 10x(41x^4 - 62x^2 + 13)$

b) $72x^4 - 64x^3 = 8x^3(9x - 8)$

c) $5x - 100x^3 = (1 - 20x^2)$

d) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2 = 15x^2(2x^4 - 5x^2 - 3)$

17 **Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio:**

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$ **b)** $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

c) $49 + 14x + x^2$ **d)** $x^2 - x + \frac{1}{4}$

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$ b) $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$

c) $49 + 14x + x^2 = (7 + x)^2$ d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

18 **Expresa como producto de dos binomios los siguientes polinomios:**

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$

b) $x^2 - 1$

c) $9 - x^2$

d) $4x^2 - 1$

e) $4x^2 - 9$

a) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

b) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

c) $9 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$

d) $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$

e) $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

19 ■□□ **Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los siguientes polinomios:**

a) $25x^2 + 40x + 16$

b) $64x^2 - 160x + 100$

c) $4x^2 - 25$

d) $x^4 - 1$

a) $25x^2 + 40x + 16 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 4 + 4^2 = (5x + 4)^2$

b) $64x^2 - 160x + 100 = (8x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 10 + 10^2 = (8x - 10)^2$

c) $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5)$

d) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ En realidad, se puede poner como producto de tres binomios.

20 ■□□ **Saca factor común y utiliza los productos notables para factorizar los siguientes polinomios:**

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $x^3 - x$

c) $4x^4 - 81x^2$ **d)** $x^3 + 2x^2 + x$

e) $3x^3 - 27x$ **f)** $3x^2 + 30x + 75$

a) $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$

b) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

c) $4x^4 - 81x^2 = x^2(4x^2 - 81) = x^2(2x + 9)(2x - 9)$

d) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

e) $3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) = 3x(x + 3)(x - 3)$

f) $3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x + 5)^2$

Expresiones de primer grado

21 ■□□ **Simplifica.**

a) $6(x + 3) - 2(x - 5)$

b) $3(2x + 1) + 7(x - 3) - 4x$

c) $5(3 - 2x) - (x + 7) - 8$

d) $4(1 - x) + 6x - 10 - 3(x - 5)$

e) $2x - 3 + 3(x - 1) - 2(3 - x) + 5$

f) $2(x + 3) - (x + 1) - 1 + 3(5x - 4)$

a) $6(x + 3) - 2(x - 5) = 6x + 18 - 2x + 10 = 4x + 28$

b) $3(2x + 1) + 7(x - 3) - 4x = 6x + 3 + 7x - 21 - 4x = 9x - 18$

c) $5(3 - 2x) - (x + 7) - 8 = 15 - 10x - x - 7 - 8 = -11x$

d) $4(1 - x) + 6x - 10 - 3(x - 5) = 4 - 4x + 6x - 10 - 3x + 15 = -x + 9$

e) $2x - 3 + 3(x - 1) - 2(3 - x) + 5 = 2x - 3 + 3x - 3 - 6 + 2x + 5 = 7x - 7$

f) $2(x + 3) - (x + 1) - 1 + 3(5x - 4) = 2x + 6 - x - 1 - 1 + 15x - 12 = 16x - 8$

22 □□□ **Multiplica por el número indicado y simplifica.**

a) $\frac{1-2x}{9} - 1 + \frac{x+4}{6}$ **por 18**

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} - \frac{x+1}{4}$ **por 40**

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} - \frac{1-9x}{6}$ **por 6**

d) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{5} - 2x + 6 - \frac{x-8}{5}$ **por 10**

e) $\frac{1+12x}{4} + \frac{x-4}{2} - \frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$ **por 8**

f) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{2(x-3)}{4}$ **por 60**

a) $18\left(\frac{1-2x}{9} - 1 + \frac{x+4}{6}\right) = 2(1-2x) - 18 + 3(x+4) = 2 - 4x - 18 + 3x + 12 =$

$= -x - 4$

b) $40\left(\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} - \frac{x+1}{4}\right) =$

$= 8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) - 10(x+1) =$

$= 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 - 10x - 10 = 23x$

c) $6\left(\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} - \frac{1-9x}{6}\right) = 3(x-3) - 2(5x+1) - (1-9x) =$

$= 3x - 9 - 10x - 2 - 1 + 9x = 2x - 12$

d) $10\left(\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{5} - 2x + 6 - \frac{x-8}{5}\right) = 5(x+1) + 2(x-3) - 20x + 6 - 2(x-8) =$

$= 5x + 5 + 2x - 6 - 20x + 60 - 2x + 16 =$

$= -15x + 75$

e) $8\left(\frac{1+12x}{4} + \frac{x-4}{2} - \frac{3(x+1)-(1-x)}{8}\right) =$

$= 2(1+12x) + 4(x-4) - 3(x+1) + (1-x) =$

$= 2 + 24x + 4x - 16 - 3x - 3 + 1 - x = 24x - 16$

f) $60\left(\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{2(x-3)}{4}\right) =$

$= 10(3x-2) - 6(4x+1) + 4 \cdot 2 + 15 \cdot 2(x-3) =$

$= 30x - 20 - 24x - 6 + 8 + 30x - 90 = 36x - 108$

Expresiones de segundo grado

23 **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $(x - 3)(x + 3) + (x - 4)(x + 4) - 25$

b) $(x + 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 3) - (x^2 - 3x - 1)$

c) $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x$

d) $(x + 1)^2 - 3x - 3$

e) $(2x + 1)^2 - 1 - (x - 1)(x + 1)$

f) $x(x - 3) + (x + 4)(x - 4) - (2 - 3x)$

a) $(x - 3)(x + 3) + (x - 4)(x + 4) - 25 = x^2 - 9 + x^2 - 16 - 25 = 2x^2 - 50$

b) $(x + 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 3) - (x^2 - 3x - 1) =$

$= x^2 - 3x + x - 3 + x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 + 3x + 1 = x^2 - 4x + 4$

c) $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x = 2x^2 + 6x - 6x - 10 + x = 2x^2 + x - 10$

d) $(x + 1)^2 - 3x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 = x^2 - x - 2$

e) $(2x + 1)^2 - 1 - (x - 1)(x + 1) = 4x^2 + 4x + 1 - 1 - (x^2 - 1) =$

$= 4x^2 + 4x - x^2 + 1 = 3x^2 + 4x + 1$

f) $x(x - 3) + (x + 4)(x - 4) - (2 - 3x) = x^2 - 3x + x^2 - 16 - 2 + 3x = 2x^2 - 18$

PÁGINA 93

24 **Multiplica por el número indicado y simplifica.**

a) $(3x + 1)(3x - 1) + \dfrac{(x - 2)^2}{2} - 1 + 2x$ **por 2**

b) $\dfrac{x^2 + 2}{3} - \dfrac{x^2 + 1}{4} - \dfrac{x + 5}{12}$ **por 12**

c) $\dfrac{(2x - 1)(2x + 1)}{3} - \dfrac{3x - 2}{6} - \dfrac{x^2}{3}$ **por 6**

d) $\dfrac{(x + 1)(x - 3)}{2} + x - \dfrac{x}{4}$ **por 4**

e) $x + \dfrac{3x + 1}{2} - \dfrac{x - 2}{3} - x^2 + 2$ **por 6**

f) $\dfrac{x(x - 1)}{3} - \dfrac{x(x + 1)}{4} + \dfrac{3x + 4}{12}$ **por 12**

a) $2\left((3x + 1)(3x - 1) + \dfrac{(x - 2)^2}{2} - 1 + 2x\right) = 2(3x + 1)(3x - 1) + (x - 2)^2 - 2 + 4x =$

$= 2(9x^2 - 1) + x^2 - 4x + 4 - 2 + 4x =$

$= 18x^2 - 2 + x^2 + 2 = 19x^2$

b) $12\left(\frac{x^2+2}{3}-\frac{x^2+1}{4}-\frac{x+5}{12}\right) = 4(x^2+2) - 3(x^2+1) - (x+5) =$

$= 4x^2 + 8 - 3x^2 - 3 - x - 5 = x^2 - x$

c) $6\left(\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}-\frac{3x-2}{6}-\frac{x^2}{3}\right) = 2(2x-1)(2x+1) - (3x-2) - 2x^2 =$

$= 2(4x^2 - 1) - 3x + 2 - 2x^2 =$

$= 8x^2 - 2 - 3x + 2 - 2x^2 = 6x^2 - 3x$

d) $4\left(\frac{(x+1)(x-3)}{2}+x-\frac{x}{4}\right) = 2(x+1)(x-3) + 4x - x = (2x+2)(x-3) + 3x =$

$= 2x^2 - 6x + 2x - 6 + 3x = 2x^2 - x - 6$

e) $6\left(x+\frac{3x+1}{2}-\frac{x-2}{3}-x^2+2\right) = 6x + 3(3x+1) - 2(x-2) - 6x^2 + 12 =$

$= 6x + 9x + 3 - 2x + 4 - 6x^2 + 12 =$

$= -6x^2 + 13x + 19$

f) $12\left(\frac{x(x-1)}{3}-\frac{x(x+1)}{4}+\frac{3x+4}{12}\right) = 4x(x-1) - 3x(x+1) + 3x + 4 =$

$= 4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 =$

$= x^2 - 4x + 4$

Expresiones no polinómicas

25 ■■■ **Desarrolla $A^2 - B^2$ y simplifica en cada uno de los siguientes casos:**

a) $\boldsymbol{A = \sqrt{x},\ B = x - 2}$

b) $\boldsymbol{A = \sqrt{25 - x^2},\ B = x - 1}$

c) $\boldsymbol{A = \sqrt{169 - x^2},\ B = x - 17}$

d) $\boldsymbol{A = \sqrt{5x + 10},\ B = 8 - x}$

e) $\boldsymbol{A = \sqrt{2x^2 + 7},\ B = \sqrt{5 - 4x}}$

f) $\boldsymbol{A = \sqrt{x + 2},\ B = x - 4}$

a) $A = \sqrt{x},\ B = x - 2$

$(\sqrt{x})^2 - (x-2)^2 = x - (x^2 - 4x + 4) = x - x^2 + 4x - 4 = -x^2 + 5x - 4$

b) $A = \sqrt{25 - x^2},\ B = x - 1$

$(\sqrt{25-x^2})^2 - (x-1)^2 = 25 - x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 25 - x^2 - x^2 + 2x - 1 =$

$= -2x^2 + 2x + 24$

c) $A = \sqrt{169 - x^2},\ B = x - 17$

$(\sqrt{169-x^2})^2 - (x-17)^2 = 169 - x^2 - (x^2 - 34x + 289) =$

$= 169 - x^2 - x^2 + 34x - 289 = -2x^2 + 34x - 120$

d) $A = \sqrt{5x + 10}$, $B = 8 - x$

$(\sqrt{5x + 10})^2 - (8 - x)^2 = 5x + 10 - (64 - 16x + x^2) = 5x + 10 - 64 + 16x - x^2 =$

$= -x^2 + 21x - 54$

e) $A = \sqrt{2x^2 + 7}$, $B = \sqrt{5 - 4x}$

$(\sqrt{2x^2 + 7})^2 - (\sqrt{5 - 4x})^2 = 2x^2 + 7 - (5 - 4x) = 2x^2 + 7 - 5 + 4x = 2x^2 + 4x + 2$

f) $A = \sqrt{x + 2}$, $B = x - 4$

$(\sqrt{x + 2})^2 - (x - 4)^2 = x + 2 - (x^2 - 8x + 16) = x + 2 - x^2 + 8x - 16 =$

$= -x^2 + 9x - 14$

26 **Multiplica por la expresión indicada y simplifica.**

a) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{3x}{2}$ **por** $2x$

b) $\dfrac{800}{x} - 50 - \dfrac{600}{x + 4}$ **por** $x(x + 4)$

c) $\dfrac{1}{x^2} - 2 - \dfrac{3 - x}{3x^2}$ **por** $3x^2$

d) $\dfrac{x}{2} - 1 - \dfrac{2x - 4}{x + 4}$ **por** $2(x + 4)$

e) $\dfrac{100}{x} + 5 - \dfrac{90}{x - 4}$ **por** $x(x - 4)$

f) $\dfrac{250}{x + 1} - 5 - 3(4x - 1)$ **por** $x + 1$

g) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{5}{9}$ **por** $9x^2$

h) $\dfrac{2 - x}{2} + \dfrac{4}{2 + x} - 1$ **por** $2(2 + x)$

a) $2x\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{3x}{2}\right) = 4 - 1 - 3x^2 = -3x^2 + 3$

b) $x(x + 4)\left(\dfrac{800}{x} - 50 - \dfrac{600}{x + 4}\right) = 800(x + 4) - 50x(x + 4) - 600x =$

$= 800x + 3\,200 - 50x^2 - 200x - 600x = -50x^2 + 3\,200$

c) $3x^2\left(\dfrac{1}{x^2} - 2 - \dfrac{3 - x}{3x^2}\right) = 3 - 6x^2 - 3 + x = -6x^2 + x$

d) $2(x + 4)\left(\dfrac{x}{2} - 1 - \dfrac{2x - 4}{x + 4}\right) = x(x + 4) - 2(x + 4) - 2(2x - 4) =$

$= x^2 + 4x - 2x - 8 - 4x + 8 = x^2 - 2x$

e) $x(x - 4)\left(\dfrac{100}{x} + 5 - \dfrac{90}{x - 4}\right) = 100(x - 4) + 5x(x - 4) - 90x =$

$= 100x - 400 + 5x^2 - 20x - 90x = 5x^2 - 10x - 400$

f) $(x+1)\left(\dfrac{250}{x+1} - 5 - 3(4x-1)\right) = 250 - 5(x+1) - 3(x+1)(4x-1) =$

$= 250 - 5x - 5 - (3x+3)(4x-1) = 250 - 5x - 5 - (12x^2 - 3x + 12x - 3) =$

$= 250 - 5x - 5 - 12x^2 + 3x - 12x + 3 = -12x^2 - 14x + 248$

g) $9x^2\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{5}{9}\right) = 9x + 18 - 5x^2 = -5x^2 + 9x + 18$

h) $2(2+x)\left(\dfrac{2-x}{2} + \dfrac{4}{2+x} - 1\right) = (2+x)(2-x) + 4 \cdot 2 - 2(2+x) =$

$= 4 - x^2 + 8 - 4 - 2x = -x^2 - 2x + 8$

PIENSA Y RESUELVE

Monomios, polinomios, factorización

27 **Al multiplicar $P(x)$ por $3x^2$ hemos obtenido $-15x^4$. ¿Cuánto vale $P(x)$?**

Si $P(x) \cdot 3x^2 = -15x^4 \;\rightarrow\; P(x) = \dfrac{-15x^4}{3x^2} = -5x^2$

28 **Al dividir $M(x)$ entre $2x^3$ hemos obtenido $5x^2$. ¿Cuánto vale $M(x)$?**

Si $M(x): 2x^3 = 5x^2 \;\rightarrow\; M(x) = 5x^2 \cdot 2x^3 = 10x^5$

29 **Calcula un polinomio $P(x)$ tal que:**

$$A(x) + P(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1$$

siendo: $A(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 1$

$P(x) = (2x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1) - A(x) =$

$= (2x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1) - (x^3 + 3x^2 - 5x - 1) =$

$= 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 1 - x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 2x^4 - 2x^2 + 3x$

30 **Calcula un polinomio $P(x)$ tal que:**

$$3A(x) - P(x) = -5x^3 + 3x^2 - 2x + 5$$

siendo: $A(x) = x^2 - 2x + 1$

$P(x) = 3A(x) - (-5x^3 + 3x^2 - 2x + 5) = 3(x^2 - 2x + 1) + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 5 =$

$= 3x^2 - 6x + 3 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 5x^3 - 4x - 2$

31 **Calcula un polinomio $P(x)$ tal que: $A(x) - 2B(x) + P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ siendo:**

$$A(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4x + 5 \qquad B(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 9$$

Despejamos $P(x)$ de la expresión dada; así:

$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - A(x) + 2B(x)$

$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - (2x^4 - 3x^2 - 4x + 5) + 2(x^3 - 5x^2 - 5x + 9)$

$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - 2x^4 + 3x^2 + 4x - 5 + 2x^3 - 10x^2 - 10x + 18$

$P(x) = -x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 5x + 14$

32 **Efectúa las siguientes divisiones y expresa el resultado de la forma $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$:**

a) $(x^2 - 3x + 2) : (x + 4)$

b) $(x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 1)$

c) $(3x^2 - 2x + 7) : (x - 2)$

d) $(x^2 + x - 12) : (x + 3)$

a) $(x^2 - 3x + 2) : (x + 4)$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -3x & +2 & x+4 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -4x & & x-7 \qquad C(x) = x - 7 \\ \cline{1-2}
 & -7x & +2 & \\
 & 7x & +28 & \\ \cline{2-3}
 & & 30 & \qquad\qquad R(x) = 30
\end{array}$$

Por tanto:

$x^2 - 3x + 2 = (x + 4)(x - 7) + 30$

b) $(x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -2x & +3 & x^2-1 \\ \cline{4-4}
-x^3 & +x & & x \qquad C(x) = x \\ \cline{1-3}
 & -x & +3 & \qquad\;\; R(x) = -x + 3
\end{array}$$

Así:

$x^3 - 2x + 3 = (x^2 - 1)x - x + 3$

c) $(3x^2 - 2x + 7) : (x - 2)$

$$\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & -2x & +7 & x-2 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & +6x & & 3x+4 \qquad C(x) = 3x + 4 \\ \cline{1-2}
 & 4x & +7 & \\
 & -4x & +8 & \\ \cline{2-3}
 & & 15 & \qquad\qquad R(x) = 15
\end{array}$$

Por tanto:

$3x^2 - 2x + 7 = (x - 2)(3x + 4) + 15$

d) $(x^2 + x - 12) : (x + 3)$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & +x & -12 & x+3 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -3x & & x-2 \qquad C(x) = x - 2 \\ \cline{1-2}
 & -2x & -12 & \\
 & 2x & +6 & \\ \cline{2-3}
 & & -6 & \qquad\qquad R(x) = -6
\end{array}$$

Por tanto:

$x^2 + x - 12 = (x + 3)(x - 2) - 6$

33 **Las siguientes divisiones son exactas. Efectúalas y expresa el dividendo como producto de dos factores:**

a) $(x^5 + 2x^4 + x + 2) : (x + 2)$

b) $(3x^3 + 7x^2 + 7x + 4) : (3x + 4)$

c) $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1)$

d) $(2x^3 - 3x^2 + 10x - 15) : (2x - 3)$

a) $(x^5 + 2x^4 + x + 2) : (x + 2)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^5 & +2x^4 & +x & +2 & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^5 & -2x^4 & & & x^4+1 \\ \cline{1-4}
 & & x & +2 & \\
 & & -x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Por tanto: $x^5 + 2x^4 + x + 2 = (x + 2)(x^4 + 1)$

b) $(3x^3 + 7x^2 + 7x + 4) : (3x + 4)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +7x^2 & +7x & +4 & 3x+4 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & -4x^2 & & & x^2+x+1 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & +7x & & \\
 & -3x^2 & -4x & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x & +4 & \\
 & & -3x & -4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Por tanto: $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 = (3x + 4)(x^2 + x + 1)$

c) $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & +9x & -9 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+9 \\ \cline{1-4}
 & & 9x & -9 & \\
 & & -9x & +9 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Por tanto: $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$

d) $(2x^3 - 3x^2 + 10x - 15) : (2x - 3)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -3x^2 & +10x & -15 & 2x-3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +3x^2 & & & x^2+5 \\ \cline{1-4}
 & & 10x & -15 & \\
 & & -10x & +15 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Por tanto: $2x^3 - 3x^2 + 10x - 15 = (2x - 3)(x^2 + 5)$

5 Soluciones a los ejercicios y problemas

34 **Completa estas expresiones:**

a) $(x-3)^2 = x^2 - \square x + 9$ **b)** $(2x+1)^2 = 4x^2 + \square x + 1$

c) $(x+\square)^2 = x^2 + \square x + 16$ **d)** $(3x-\square)^2 = \square x^2 - \square x + 4$

a) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ b) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

c) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ d) $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

PÁGINA 94

Enunciados: primer grado

35 **Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:**

a) La suma de las edades de Alicia y María, sabiendo que esta tiene 7 años más que Alicia.

b) La edad de Alberto dentro de 22 años.

c) La cantidad que se obtiene al invertir x euros y ganar el 11%.

d) Entre un ordenador y un equipo de música se pagan 2 500 €. Si el ordenador cuesta x euros, ¿cuánto cuesta el equipo de música?

e) Comprar un artículo por x euros y perder el 15% de su valor. ¿Cuánto costaría ahora?

f) El precio de una cena a la que acuden x personas pagando cada una 18 €.

g) Los lados de un triángulo rectángulo en el cual uno de los catetos mide los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto, 5 cm menos que esta.

h) Los lados de un triángulo rectángulo isósceles de 24 cm de perímetro.

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Alicia} = x \text{ años}\\ \text{María} = x + 7 \text{ años}\end{array}\right\}$ Suma de sus edades $= x + x + 7 = 2x + 7$

b) x = "Edad actual de Alberto". Dentro de 22 años tendrá $x + 22$

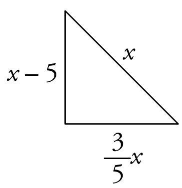
c) $\left.\begin{array}{l}\text{Inversión} = x\\ \text{Ganancia de un } 11\% \;\rightarrow\; \text{I.V. es } 1{,}11\end{array}\right\}$ Cantidad obtenida $= 1{,}11x$

d) Ordenador $= x$ €

Equipo de música $= 2\,500 - x$ €

e) $\left.\begin{array}{l}x = \text{"precio de compra"}\\ \text{Pérdida del } 15\% \;\rightarrow\; \text{I.V. es } 0{,}85\end{array}\right\}$ Precio final $= 0{,}85x$

f) 18 personas pagan x euros cada una por la cena $\rightarrow$ precio de la cena: $18x$

g) 

Los lados son: Hipotenusa $= x$

Catetos $= x - 5$ y $\frac{3}{5}x$

h) x = "longitud de cada uno de los lados iguales"

Por tanto: $24 - 2x$ medirá el lado desigual.

36 □□□ **En la expresión $\frac{x}{4}+\frac{y-1}{5}-1$ sustituye x por $1-3y$ y simplifica.**

$$\frac{x}{4}+\frac{y-1}{5}-1 \xrightarrow[x\,=\,1-3y]{} \frac{1-3y}{4}+\frac{y-1}{5}-1=\frac{5(1-3y)+4(y-1)-20}{20}=$$

$$=\frac{5-15y+4y-4-20}{20}=\frac{-11y-19}{20}$$

37 □□□ **En cada caso, desarrolla $A+B$ y simplifica:**

a) $A=4(x-3)+y \qquad B=3(x+3)-y-18$

b) $A=\frac{x+4}{5}-y+1 \qquad B=\frac{x-6}{5}+y+1$

c) $A=-2\left(\frac{x+1}{3}+y-1\right) \qquad B=\frac{x-3}{4}+2y-1$

d) $A=6(x+2)-2(y+7) \qquad B=x+2(y+1)$

a) $A=4(x-3)+y \qquad B=3(x+3)-y-18$

$$A+B=4(x-3)+y+3(x+3)-y-18=4x-12+y+3x+9-y-18=$$
$$=7x-21$$

b) $A=\frac{x+4}{5}-y+1 \qquad B=\frac{x-6}{5}+y+1$

$$A+B=\frac{x+4}{5}-y+1+\frac{x-6}{5}+y+1=\frac{2x-2}{5}+2=\frac{2x-2+10}{5}=\frac{2x+8}{5}$$

c) $A=-2\left(\frac{x+1}{3}+y-1\right) \qquad B=\frac{x-3}{4}+2y-1$

$$A+B=-2\left(\frac{x+1}{3}+y-1\right)+\frac{x-3}{4}+2y-1=\frac{-2x-2}{3}-2y+2+\frac{x-3}{4}+2y-1=$$
$$=\frac{-2x-2}{3}+\frac{x-3}{4}+1=\frac{4(-2x-2)+3(x-3)+12}{12}=$$
$$=\frac{-8x-8+3x-9+12}{12}=\frac{-5x-5}{12}$$

d) $A=6(x+2)-2(y+7) \qquad B=x+2(y+1)$

$$A+B=6(x+2)-2(y+7)+x+2(y+1)=6x+12-2y-14+x+2y+2=7x$$

Enunciados: segundo grado

38 □□□ **Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:**

a) **El área de una lámina de bronce cuya base mide 5/3 de su altura.**

b) **El cuadrado de un número menos su triple.**

c) **El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $16-x$ y $9-x$.**

d) **El área de un cuadrado de lado $x+3$.**

e) **La diferencia de áreas de dos cuadrados de lados x y $x+3$, respectivamente.**

f) **La superficie de un jardín rectangular de base x y perímetro 70 m.**

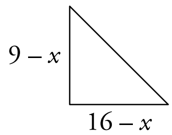
g) **El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de 24 cm de perímetro.**

h) **El área de un rombo sabiendo que la longitud de una diagonal es el triple de la otra.**

a) Base $= \frac{5}{3}x$ Altura $= x \rightarrow$ Área $= \frac{5}{3}x \cdot x = \frac{5}{3}x^2$

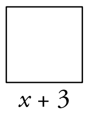
b) $x =$ número $\rightarrow x^2 - 3x$

c)



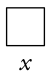
Cuadrado de la hipotenusa $= (9 - x)^2 + (16 - x)^2 =$
$= 81 - 18x + x^2 + 256 - 32x + x^2 = 2x^2 - 50x + 337$

d)

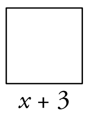


Área $= (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

e)



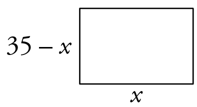
$\rightarrow$ Área $= x^2$



$\rightarrow$ Área $= (x + 3)^2$

Diferencia de áreas $= (x + 3)^2 - x^2 =$
$= x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$

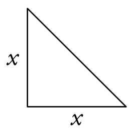
f)



Perímetro = 70 m $\rightarrow$ Semiperímetro = 35 m $\rightarrow$
$\rightarrow$ Altura $= 35 - x$

Área $= x(35 - x) = 35x - x^2$

g)



Llamamos x a los lados iguales $\rightarrow$ hipotenusa $= 24 - 2x$

Cuadrado de la hipotenusa $= (24 - 2x)^2 = 576 - 96x + 4x^2$

h) Diagonal menor $= x$
Diagonal mayor $= 3x$ $\Bigg\} \rightarrow$ Área $= \frac{x - 3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$

39 **En cada una de las siguientes expresiones, sustituye y por lo que se indica y simplifica:**

a) $xy + 2y - 2$ **y por $1 - x$** **b)** $xy - y^2$ **y por $3 - 2x$**

c) $2x^2 + y^2 - 9$ **y por $3x - 3$** **d)** $x^2 + y^2 - 2$ **y por $3 - 2x$**

a) $xy + 2y - 2 \xrightarrow[y = 1 - x]{} x(1 - x) + 2(1 - x) - 2 = x - x^2 + 2 - 2x - 2 = -x^2 - x$

b) $xy - y^2 \xrightarrow[y = 3 - 2x]{} x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 3x - 2x^2 - (9 - 12x + 4x^2) =$
$= 3x - 2x^2 - 9 + 12x - 4x^2 = -6x^2 + 15x - 9$

c) $2x^2 + y^2 - 9 \xrightarrow[y = 3x - 3]{} 2x^2 + (3x - 3)^2 - 9 = 2x^2 + 9x^2 - 18x + 9 - 9 =$
$= 11x^2 - 18x$

d) $x^2 + y^2 - 2 \xrightarrow[y = 3 - 2x]{} x^2 + (3 - 2x)^2 - 2 = x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 2 =$
$= 5x^2 - 12x + 7$

40 **En cada una de las siguientes expresiones, sustituye x por lo que se indica y simplifica:**

a) $x(x-y)-2(y^2-4)$ $\quad x$ por $-\dfrac{2y}{3}$

b) $xy-2$ $\quad x$ por $\dfrac{25}{2}y$

c) $2xy-3$ $\quad x$ por $4-2y$

a) $x(x-y)-2(y^2-4) \xrightarrow[x=\frac{-2y}{3}]{} \dfrac{-2y}{3}\cdot\left(\dfrac{-2y}{3}-y\right)-2y^2+8=\dfrac{4y^2}{9}+\dfrac{2y^2}{3}-2y^2+8=$

$=\dfrac{4y^2+6y^2-18y^2+72}{9}=\dfrac{-8y^2+72}{9}$

b) $xy-2 \xrightarrow[x=\frac{25}{2}y]{} \dfrac{25}{2}y\cdot y-2=\dfrac{25}{2}y^2-2=\dfrac{25y^2-4}{2}$

c) $2xy-3 \xrightarrow[x=4-2y]{} 2(4-2y)y-3=8y-4y^2-3=-4y^2+8y-3$

41 **Si $A=x^2+y^2-74$ y $B=2x^2-3y^2-23$, calcula $3A+B$ y simplifica.**

$3A+B=3(x^2+y^2-74)+2x^2-3y^2-23=3x^2+3y^2-222+2x^2-3y^2-23=$

$=5x^2-245$

42 **Si $A=3x^2-5y^2-7$ y $B=11y^2-3-2x^2$, calcula $2A+3B$ y simplifica.**

$2A+3B=2(3x^2-5y^2-7)+3(11y^2-3-2x^2)=6x^2-10y^2-14+33y^2-9-6x^2=$

$=23y^2-23$

Enunciados: expresiones no polinómicas

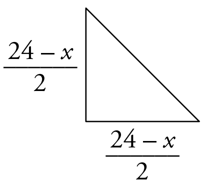
43 **Dos números suman 40. Expresa algebraicamente la suma del menor más la raíz cuadrada del mayor.**

Si un número es x, el otro es $40-x$.

Consideramos, por ejemplo: x = mayor, $\quad 40-x$ = menor

Suma del menor más la raíz cuadrada del mayor $=40-x+\sqrt{x}$

44 **El cateto de un triángulo rectángulo isósceles es $\dfrac{24-x}{2}$. Expresa algebraicamente la longitud de la hipotenusa y simplifica.**



hipotenusa $=\sqrt{\left(\dfrac{24-x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{24-x}{2}\right)^2}=\sqrt{2\left(\dfrac{24-x}{2}\right)^2}=$

$=\dfrac{24-x}{2}\sqrt{2}$

45 ■■■ **Un grupo de x estudiantes alquilan un piso por 700 € al mes. Se apuntan 2 más para alquilarlo. Expresa algebraicamente la diferencia de precio en ambos casos (con todos ellos o con 2 más).**

- x estudiantes alquilan un piso por 700 € al mes $\rightarrow$ cada uno paga $\frac{700}{x}$ €.
- Si fueran $x + 2$ estudiantes, cada una pagaría $\frac{700}{x+2}$ €.

Diferencia de precio $= \frac{700}{x} - \frac{700}{x+2} = \frac{700(x+2) - 700x}{x(x+2)} =$

$$= \frac{700x + 1\,400 - 700x}{x(x+2)} = \frac{1\,400}{x(x+2)}$$

46 ■■■ **Un grupo de x amigos compran un regalo por 75,60 €. Tres de ellos no tienen dinero. Expresa algebraicamente la diferencia de precio en ambos casos (con todos ellos o con 3 menos).**

- x amigos pagan por un regalo 75,60 € $\rightarrow$ cada uno pone $\frac{75{,}60}{x}$ €.
- Si fueran 3 menos $(x - 3)$, cada uno pondría $\frac{75{,}60}{x-3}$ €.

Diferencia de precio $= \frac{75{,}60}{x-3} - \frac{75{,}60}{x} = \frac{75{,}60x - 75{,}60(x-3)}{x(x-3)} =$

$$= \frac{75{,}60x - 75{,}60x + 226{,}8}{x(x-3)} = \frac{226{,}8}{x(x-3)}$$

PÁGINA 108

PRACTICA

Ecuaciones: soluciones por tanteo

1 **Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $2^{x+3} = 32$ **b)** $\sqrt{2x+1} = 9$

c) $x^{x+1} = 8$ **d)** $(x-1)^3 = 27$

a) $2^{x+3} = 32 \rightarrow 32 = 2^5 \rightarrow$ luego: $x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$

b) $\sqrt{2x+1} = 9 \rightarrow 2x + 1 = 81 \rightarrow 2x = 80 \rightarrow x = 40$

c) $x^{x+1} = 8 \rightarrow x = 2$ porque $2^{2+1} = 2^3 = 8$

d) $(x-1)^3 = 27 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$

2 **Las siguientes ecuaciones tienen más de una solución entera. Búscalas tanteando.**

a) $(x+1)^2 = 4$ **b)** $(x+1)(x-3) = 0$

c) $x^2 = 2x$ **d)** $3(x-2)^2 = 3$

a) $(x+1)^2 = 4 \rightarrow x + 1$ puede ser 2 ó –2, esto es $x_1 = 1$ ó $x_2 = -3$

b) $(x+1)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{array}$

c) $x^2 = 2x \rightarrow x_1 = 0$ o $x_2 = 2$

d) $3(x-2)^2 = 3 \rightarrow (x-2)^2 \rightarrow x - 2$ es 1 ó –1, esto es, $x_1 = 3$ o $x_2 = 1$

3 **Halla por tanteo una aproximación hasta las décimas de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $x^3 + x^2 = 20$ **b)** $x^x = 35$

c) $3^x = 1\,000$ **d)** $x^3 = 30$

a) $x^3 + x^2 = 20$

$\left.\begin{array}{l} 2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12 \\ 3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36 \end{array}\right\}$ Por tanto, la solución está entre 2 y 3. Probemos con 2,4; 2,5; 2,6…

$\left.\begin{array}{l} 2{,}4^3 + 2{,}4^2 = 19{,}584 \\ 2{,}5^3 + 2{,}5^2 = 21{,}875 \end{array}\right\}$ Por tanto, la solución es 2,4.

b) $x^x = 35$

$\left.\begin{array}{l} 3^3 = 27 \\ 4^4 = 256 \end{array}\right\}$ La solución está entre 3 y 4. Probemos con 3,1; 3,2…

$\left.\begin{array}{l} 3{,}1^{3{,}1} = 33{,}36 \\ 3{,}2^{3{,}2} = 41{,}35 \end{array}\right\}$ La solución más próxima es $x = 3{,}1$

c) $3^x = 1\,000$

$$\left.\begin{array}{l} 3^6 = 729 \\ 3^7 = 2\,187 \end{array}\right\}\text{ La solución está entre 6 y 7. Probemos con 6,2; 6,3…}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3^{6,2} = 908{,}14 \\ 3^{6,3} = 1\,013{,}59 \end{array}\right\}\text{ La solución más próxima es } x = 6{,}3$$

d) $x^3 = 30$

$$\left.\begin{array}{l} 3^3 = 27 \\ 4^3 = 64 \end{array}\right\}\text{ La solución está entre 3 y 4. Probemos con 3,1; 3,2…}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}1^3 = 29{,}791 \\ 3{,}2^3 = 32{,}768 \end{array}\right\}\text{ La solución es } x = 3{,}1$$

Ecuaciones de primer grado

4 □□□ **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{1-2x}{9} = 1 - \frac{x+4}{6}$

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} = \frac{1-9x}{6}$

d) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{5} - 2x = \frac{x-8}{5} - 6$

a) $\frac{1-2x}{9} = 1 - \frac{x+4}{6}$

Multiplicamos ambos miembros por 18 y simplificamos:

$2(1-2x) = 18 - 3(x+4) \to 2 - 4x = 6 - 3x - 12 \to 2 - 4x = 6 - 3x \to$

$\to 2 - 6 = 4x - 3x \to x = -4$

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

Multiplicamos la expresión por 40 y simplificamos:

$8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) = 10(x-1) \to$

$\to 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \to$

$\to 33x + 10 = 10x + 10 \to 23x = 0 \to x = 0$

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} = \frac{1-9x}{6}$

Multiplicamos ambos miembros por 6 y simplificamos:

$3(x-3) - 2(5x+1) = 1 - 9x \to 3x - 9 - 10x - 2 = 1 - 9x \to$

$\to -7x - 11 = 1 - 9x \to 2x = 12 \to x = 6$

d) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{5} - 2x = \frac{x-8}{5} - 6$

Multiplicamos la expresión por 10 y simplificamos:

$5(x+1) + 2(x-3) - 20x = 2(x-8) - 60 \rightarrow$

$\rightarrow 5x + 5 + 2x - 6 - 20x = 2x - 16 - 60 \rightarrow -15x = -75 \rightarrow x = 5$

5 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{1+12x}{4} + \frac{x-4}{2} = \frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

b) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} = -\frac{2}{15} - \frac{2(x-3)}{4}$

c) $\frac{2x-3}{6} - \frac{3(x-1)}{4} - \frac{2(3-x)}{6} + \frac{5}{8} = 0$

a) $\frac{1+12x}{4} + \frac{x-4}{2} = \frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

Multiplicamos toda la ecuación por 8:

$2(1+12x) + 4(x-4) = 3(x+1) - (1-x) \rightarrow 2 + 24x + 4x - 16 = 3x + 3 - 1 + x$

$24x - 16 = 0 \rightarrow x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} = -\frac{2}{15} - \frac{2(x-3)}{4}$

Multiplicamos la ecuación por 60:

$10(3x-2) - 6(4x+1) = -2 \cdot 4 - 15 \cdot 2(x-3)$

$30x - 20 - 24x - 6 = -8 - 30x + 90$

$36x = 108 \rightarrow x = \frac{108}{36} = 3$

c) $\frac{2x-3}{6} - \frac{3(x-1)}{4} - \frac{2(3-x)}{6} + \frac{5}{8} = 0$

Multiplicamos toda la ecuación por 24:

$4(2x-3) - 6 \cdot 3(x-1) - 4 \cdot 2(3-x) + 3 \cdot 5 = 0$

$8x - 12 - 18x + 18 - 24 + 8x + 15 = 0$

$-2x = 3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

6 **Las siguientes ecuaciones son de primer grado. Compruébalo y resuélvelas:**

a) $(x+1)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^2$

b) $4(x-3)(x+3) - (2x+1)^2 = 3$

c) $(x-3)^2 + 1 = (x+2)^2 - 4x - 3(x-1)$

d) $5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$

e) $(4x-3)(7x+2) - (3-4x)^2 = 3x(4x-5) - 2$

Para comprobar que son ecuaciones de primer grado, simplificamos las ecuaciones al máximo antes de resolverlas:

a) $(x+1)^2 + (x-2)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^2$

$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 2x + 1$

$-2x + 5 = 2x + 5 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $4(x-3)(x+3) - (2x+1)^2 = 3$

$4(x^2 - 9) - 4x^2 - 4x - 1 = 3$

$4x^2 - 36 - 4x^2 - 4x - 1 = 3$

$-4x = 40 \rightarrow x = \frac{40}{-4} = -10$

c) $(x-3)^2 + 1 = (x+2)^2 - 4x - 3(x-1)$

$x^2 - 6x + 9 + 1 = x^2 + 4x + 4 - 4x - 3x + 3$

$-3x = -3 \rightarrow x = 1$

d) $5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$

$5(x^2 - 6x + 9) + x^2 - 46 = -(2x - 6x^2 + 1 - 3x)$

$5x^2 - 30x + 45 + x^2 - 46 = 6x^2 + x - 1$

$-31x = 0 \rightarrow x = 0$

e) $(4x-3)(7x+2) - (3-4x)^2 = 3x(4x-5) - 2$

$28x^2 + 8x - 21x - 6 - 9 + 24x - 16x^2 = 12x^2 - 15x - 2$

$26x = 13 \rightarrow x = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$

b) $\frac{(2x-4)^2 - 1}{8} = \frac{x(x+1)}{2} + 5$

c) $\frac{x+3}{5} + \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{x^2+1}{4}$

d) $x + \frac{x^2}{2} = \frac{(x+2)^2}{2}$

a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$

$4(x^2 + 9 - 6x) - (4x^2 + 1 - 4x) = 35 \rightarrow 4x^2 + 36 - 24x - 4x^2 - 1 + 4x = 35$

$-20x = 0$

$20x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $\dfrac{(2x-4)^2-1}{8} = \dfrac{x(x+1)}{2} + 5$

Multiplicamos la ecuación por 8:

$(2x-4)^2 - 1 = 4x(x+1) + 40 \rightarrow 4x^2 - 16x + 16 - 1 = 4x^2 + 4x + 40 \rightarrow$

$\rightarrow -20x = 25 \rightarrow x = \dfrac{25}{20} \rightarrow x = -\dfrac{5}{4}$

c) $\dfrac{x+3}{5} + \dfrac{(x-1)^2}{4} = \dfrac{x^2+1}{4}$

Multiplicamos la ecuación por 20:

$4(x+3) + 5(x-1)^2 = 5(x^2+1) \rightarrow 4x + 12 + 5(x^2 - 2x + 1) = 5x^2 + 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4x + 12 + 5x^2 - 10x + 5 = 5x^2 + 1 \rightarrow -6x = -16 \rightarrow x = \dfrac{16}{6} \rightarrow x = \dfrac{8}{3}$

d) $x + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{(x+2)^2}{2}$

Multiplicamos la ecuación por 2:

$2x + x^2 = (x+2)^2 \rightarrow 2x + x^2 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow -2x = 4 \rightarrow x = -2$

Ecuaciones de segundo grado

8 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{x^2 - 2x - 3 = 0}$

b) $\boldsymbol{2x^2 - 7x - 4 = 0}$

c) $\boldsymbol{2x^2 - 5x - 3 = 0}$

d) $\boldsymbol{x^2 + x + 2 = 0}$

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -1$

b) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} 4 \\ \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 4,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$

c) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$

d) $x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \text{ No tiene solución.}$$

9 **Resuelve:**

a) $4x^2 - 64 = 0$

b) $3x^2 - 9x = 0$

c) $2x^2 + 5x = 0$

d) $2x^2 - 8 = 0$

a) $4x^2 - 64 = 0$

$4x^2 = 64 \to x^2 = \frac{64}{4} \to x^2 = 16 \to x = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 4,\ x_2 = -4$

b) $3x^2 - 9x = 0$

$$3x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \to x = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

c) $2x^2 + 5x = 0$

$$x(2x+5) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \to x_2 = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

d) $2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8 \to x^4 = 4 \to x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = -2,\ x_2 = 2$

10 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $-2x^2 - x + 3 = 0$ **b) $100x^2 - 25 = 0$**

c) $\frac{5}{2}x^2 + 3x = 0$ **d) $-x^2 + 3x + 10 = 0$**

a) $-2x^2 - x + 3 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 1$

b) $100x^2 - 25 = 0$

Despejamos $x^2 \to x^2 = \frac{25}{100} \to x = \pm\sqrt{\frac{25}{100}} = \pm\frac{5}{10} = \pm\frac{1}{2}$

Soluciones: $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{2}x^2 + 3x = 0$

Sacamos x factor común $\to x\left(\frac{5}{2}x + 3\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \frac{5}{2} + 3 = 0 \to x = -\frac{6}{5} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -\frac{6}{5}$, $x_2 = 0$

d) $-x^2 + 3x + 10 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{-2} = \frac{-3 \pm 7}{-2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -2$, $x_2 = 5$

11 ■□□ **Resuelve:**

a) $(x - 3)(x + 3) + (x - 4)(x + 4) = 25$

b) $(x + 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 3) = x^2 - 3x - 1$

c) $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x = 0$

a) $(x - 3)(x + 3) + (x - 4)(x + 4) = 25$

$x^2 - 9 + x^2 - 16 = 25 \to 2x^2 = 50 \to x^2 = 25 \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

b) $(x + 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 3) = x^2 - 3x - 1$

$x^2 + x - 3x - 3 + x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 1 \to$

$\to x^2 - 4x + 4 = 0 \to (x - 2)^2 = 0 \to x = 2$

c) $2x(x + 3) - 2(3x + 5) + x = 0$

$2x^2 + 6x - 6x - 10 + x = 0 \to 2x^2 + x - 10 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5/2 \end{cases}$

12 ■■□ **Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general:**

a) $(3x + 1)(3x - 1) + \frac{(x - 2)^2}{2} = 1 - 2x$

b) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} = \frac{x + 5}{12}$

c) $\frac{(2x - 1)(2x + 1)}{3} = \frac{3x - 2}{6} + \frac{x^2}{3}$

a) $(3x + 1)(3x - 1) + \frac{1}{2}(x - 2)^2 = 1 - 2x$

$9x^2 - 1 + \frac{x^2 - 4x + 4}{2} = 1 - 2x \to 18x^2 - 2 + x^2 - 4x + 4 = 2 - 4x$

$19x^2 = 0 \to x = 0$

b) $\frac{x^2+2}{3}-\frac{x^2+1}{4}=\frac{x+5}{12}$

Multiplicamos toda la ecuación por 12:

$4(x^2+2)-3(x^2+1)=x+5 \to 4x^2+8-3x^2-3=x+5 \to$

$\to x^2-x=0 \to x(x-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=1$

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}=\frac{3x-2}{6}+\frac{x^2}{3}$

Multiplicamos la ecuación por 6:

$2(2x-1)(2x+1)=3x-2+2x^2 \to 2(4x^2-1)=3x-2+2x^2 \to$

$\to 8x^2-2=3x-2+2x^2 \to 6x^2-3x=0 \to$

$\to 3x(2x-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2}$

PÁGINA 109

13 □□□ **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $(x+1)^2-3x=3$

b) $(2x+1)^2=1+(x-1)(x+1)$

c) $\frac{(x+1)(x-3)}{2}+x=\frac{x}{4}$

d) $x+\frac{3x+1}{2}-\frac{x-2}{3}=x^2-2$

e) $\frac{x(x-1)}{3}-\frac{x(x+1)}{4}+\frac{3x+4}{12}=0$

a) $(x+1)^2-3x=3$

$x^2+2x+1-3x-3=0 \to x^2-x-2=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

b) $(2x+1)^2=1+(x-1)(x+1)$

$4x^2+1+4x=1+x^2-1 \to 3x^2+4x+1=0$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{-4\pm 2}{6} \begin{cases} x_1=-1/3 \\ x_2=-1 \end{cases}$

c) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \dfrac{x}{4}$

$\dfrac{x^2-2x-3}{2} + x = \dfrac{x}{4} \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 + 4x = x \rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \dfrac{1 \pm 7}{4}$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$

d) $x + \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} = x^2 - 2$

$6x + 9x + 3 - 2x + 4 = 6x^2 - 12 \rightarrow 6x^2 - 13x - 19 = 0$

$x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169+456}}{12} = \dfrac{13 \pm 25}{12}$ $\begin{cases} x_1 = 19/6 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

e) $\dfrac{x}{3}(x-1) - \dfrac{x}{4}(x+1) + \dfrac{3x+4}{12} = 0$

$4x(x-1) - 3x(x+1) + 3x + 4 = 0$

$4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

Solución: $x = 2$

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{x^2+1}{3} - 1 = \dfrac{x^2-4}{6} + x$

b) $\dfrac{x^2-x-4}{4} = \dfrac{x^2+x-2}{2}$

c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$

d) $3x(x+4) - x(x-1) = 13x + 8$

a) $\dfrac{x^2+1}{3} - 1 = \dfrac{x^2-4}{6} + x$

$\dfrac{2x^2+2-6}{6} = \dfrac{x^2-4+6x}{6} \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

b) $\dfrac{x^2-x-4}{4} = \dfrac{x^2+x-2}{2}$

$\dfrac{x^2-x-4}{4} = \dfrac{2x^2+2x-4}{4} \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$

$x^2 - 3x + x^2 - 16 = 2 - 3x \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9$ $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

d) $3x(x + 4) - x(x - 1) = 13x + 8$

$3x^2 + 12x - x^2 + x = 13x + 8 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

Otros tipos de ecuaciones

15 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(2x - 5)(x + 7) = 0$ **b)** $(x - 2)(4x + 6) = 0$

c) $(x + 2)(x^2 + 4) = 0$ **d)** $(3x + 1)(x^2 + x - 2) = 0$

a) $(2x - 5)(x + 7) = 0$. Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

$x + 7 = 0 \rightarrow x = -7$

Soluciones: $x_1 = -7$, $x_2 = \dfrac{5}{2}$

b) $(x - 2)(4x + 6) = 0$. Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$4x + 6 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = 2$

c) $(x + 2)(x^2 + 4) = 0$. Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4$ No tiene solución.

Solución: $x = -2$

d) $(3x + 1)(x^2 + x - 2) = 0$. Igualamos a 0 cada uno de los dos factores:

$3x + 1 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -2$, $x_2 = \dfrac{-1}{3}$, $x_3 = 1$

16 **Di cuáles son las soluciones de estas ecuaciones:**

a) $(x - 2)(x + 3)(2x - 5) = 0$

b) $x^2(x - 6)(3x - 1) = 0$

c) $(2 - x)(x - 7)(x^2 - 9) = 0$

d) $x(x^2 + 1)(6x - 3) = 0$

a) $(x-2)(x+3)(2x-5)=0 \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x_1=2 \\ x+3=0 \rightarrow x_2=-3 \\ 2x-5=0 \rightarrow x_3=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

b) $x^2(x-6)(3x-1)=0 \begin{cases} x^2=0 \rightarrow x=0 \\ x-6=0 \rightarrow x=6 \\ 3x-1=0 \rightarrow x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{3},\ x_3=6$

c) $(2-x)(x-7)(x^2-9)=0 \begin{cases} 2-x=0 \rightarrow x=2 \\ x-7=0 \rightarrow x=7 \\ x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=7$

d) $x(x^2+1)(6x-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \text{ No tiene solución.} \\ 6x-3=0 \rightarrow x=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=\dfrac{1}{2}$

17 **Resuelve.**

a) $x-\sqrt{x}=2$ **b)** $x-\sqrt{25-x^2}=1$

c) $x-\sqrt{169-x^2}=17$ **d)** $x+\sqrt{5x+10}=8$

e) $\sqrt{2x^2+7}=\sqrt{5-4x}$ **f)** $\sqrt{x+2}+3=x-1$

a) $x-\sqrt{x}=2$

$(x-2)=\sqrt{x} \rightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2-4x+4=x \rightarrow x^2-5x+4=0$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2} \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=1 \end{cases}$

Comprobación: $x_1=4 \rightarrow 4-\sqrt{4}=2$

$x_2=1 \rightarrow 1-\sqrt{1}=0\neq 2$

Solución: $x=4$

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

$(x - 1)^2 = (\sqrt{25 - x^2})^2 \longrightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2 \longrightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \longrightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

Comprobación: $x_1 = 4 \longrightarrow 4 - \sqrt{25 - 16} = 4 - 3 = 1$

$x_2 = -3 \longrightarrow -3 - \sqrt{25 - 9} = -3 - 4 = -7 \neq 1$

Solución: $x = 4$

c) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$

$(x - 17)^2 = (\sqrt{169 - x^2})^2 \longrightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x^2 + 289 - 34x = 169 - x^2 \longrightarrow 2x^2 - 34x + 120 = 0 \longrightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Comprobación: $x_1 = 12 \longrightarrow 12 - \sqrt{169 - 144} = 12 - 5 = 7 \neq 17$

$x_2 = 5 \longrightarrow 5 - \sqrt{169 - 25} = 5 - 12 = -7 \neq 17$

No tiene solución.

d) $x + \sqrt{5x + 10} = 8$

$(\sqrt{5x + 10})^2 = (8 - x)^2 \longrightarrow$ Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$5x + 10 = 64 + x^2 - 16x \longrightarrow x^2 - 21x + 54 = 0$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 216}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} \begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobación: $x_1 = 18 \longrightarrow 18 + \sqrt{5 \cdot 18 + 10} = 18 + 10 = 28 \neq 8$

$x_2 = 3 \longrightarrow 3 + \sqrt{5 \cdot 3 + 10} = 3 + 5 = 8$

Solución: $x = 3$

e) $\sqrt{2x^2 + 7} = \sqrt{5 - 4x}$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$2x^2 + 7 = 5 - 4x$

$2x^2 + 4x + 2 = 0 \longrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Comprobación: Si $x = -1 \longrightarrow \sqrt{2 \cdot (-1)^2 + 7} = \sqrt{5 - 4 \cdot (-1)} \longrightarrow \sqrt{9} = \sqrt{9}$ Cierto.

Solución: $x = -1$

f) $\sqrt{x+2} + 3 = x - 1$

$\sqrt{x+2} = x - 1 - 3 \rightarrow \sqrt{x+2} = x - 4$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x + 2 = (x-4)^2 \rightarrow x + 2 = x^2 + 8x + 16 \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = 7 \rightarrow \sqrt{7+2} + 3 = \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6 = 7 - 1$ Válida.

Si $x = 2 \rightarrow \sqrt{2+2} + 3 = \sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5 \neq 2 - 1$ No vale.

Solución: $x = 7$

18 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3x}{2}$ **b)** $\dfrac{800}{x} - 50 = \dfrac{600}{x+4}$

c) $\dfrac{1}{x^2} - 2 = \dfrac{3-x}{3x^2}$ **d)** $\dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{2x-4}{x+4}$

a) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3x}{2}$

Multiplicamos la ecuación por $2x$:

$4 - 1 = 3x^2 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Comprobación: Si $x = -1 \rightarrow \dfrac{2}{-1} - \dfrac{1}{2(-1)} = \dfrac{3(-1)}{2} \rightarrow -2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$ Válida.

Si $x = 1 \rightarrow 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ Válida.

Soluciones: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

b) $\dfrac{800}{x} - 50 = \dfrac{600}{x+4}$

Multiplicamos la ecuación por $x(x+4)$:

$800(x+4) - 50x(x+4) = 600x$

$800x + 3\,200 - 50x^2 - 200x = 600x \rightarrow -50x^2 + 3\,200 = 0 \rightarrow x^2 - 64 = 0$

$x^2 = 64 \rightarrow x = \pm 8$

Comprobación: Si $x = -8 \rightarrow \dfrac{800}{-8} - 50 = \dfrac{600}{-8+4} \rightarrow -150 = \dfrac{600}{-4}$ Válida.

Si $x = 8 \rightarrow 100 - 50 = \dfrac{600}{12} \rightarrow 50 = 50$ Válida.

Soluciones: $x_1 = -8,\ x_2 = 8$

c) $\frac{1}{x^2} - 2 = \frac{3-x}{3x^2}$

Multiplicamos la ecuación por $3x^2$:

$$3 - 6x^2 = 3 - x \rightarrow 6x^2 - x = 0 \rightarrow x(6x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 6x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = 0$, $\frac{1}{0}$ no existe, luego no es válida.

Si $x = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} - 2 = \frac{3 - \frac{1}{6}}{3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2} \rightarrow 36 - 2 = \frac{\frac{17}{6}}{\frac{3}{36}} \rightarrow$

$\rightarrow 34 = 17 \cdot 2$ Válida.

Solución: $x = \frac{1}{6}$

d) $\frac{x}{2} = 1 + \frac{2x-4}{x+4}$

Multiplicamos la ecuación por $2(x+4)$:

$x(x+4) = 2(x+4) \cdot 2(2x+4)$

$$x^2 + 4x = 2x + 8 + 4x - 8 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = 0 \rightarrow \frac{0}{2} = 1 + \frac{0-4}{0+4} \rightarrow 0 = 1 - 1$ Válida.

Si $x = 2 \rightarrow \frac{2}{2} = 1 + \frac{4-4}{2+4} \rightarrow 1 = 1 + 0$ Válida.

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

19 **Resuelve:**

a) $\frac{100}{x} + 5 = \frac{90}{x-4}$ **b)** $\frac{250}{x+1} - 5 = 3(4x-1)$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{5}{9}$ **d)** $\frac{2-x}{2} + \frac{4}{2+x} = 1$

a) $\dfrac{100}{x} + 5 = \dfrac{90}{x-4}$

Multiplicamos la ecuación por $x(x-4)$:

$100(x-4) + 5x(x-4) = 90x \rightarrow 100x - 400 + 5x^2 - 20x = 90x \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2 - 10x - 400 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} = \begin{cases} 10 \\ -8 \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = -8 \rightarrow \dfrac{100}{-8} + 5 = \dfrac{90}{-8-4} \rightarrow -\dfrac{25}{2} + 5 = \dfrac{90}{-12}$

$\rightarrow -\dfrac{15}{2} = -\dfrac{15}{2}$ Válida.

Si $x = 10 \rightarrow 10 + 5 = \dfrac{90}{10-4} \rightarrow 15 = 15$ Válida.

Soluciones: $x_1 = -8$, $x_2 = 10$

b) $\dfrac{250}{x+1} - 5 = 3(4x-1)$

Multiplicamos la ecuación por $x + 1$:

$250 - 5(x+1) = 3(4x+1)(x+1)$

$250 - 5x - 5 = 3(4x^2 + 4x - x - 1)$

$250 - 5x - 5 = 12x^2 + 9x - 3 \rightarrow 12x^2 + 14x - 248 = 0 \rightarrow 6x^2 + 7x - 124 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 2\,976}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{3\,025}}{12} = \frac{-7 \pm 55}{12} = \begin{cases} \dfrac{48}{12} = 4 \\[2mm] -\dfrac{62}{12} = -\dfrac{31}{6} \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = \dfrac{-31}{6} \rightarrow \dfrac{250}{-\dfrac{31}{6} + 1} - 5 = \dfrac{250}{-\dfrac{25}{6}} - 5 = 65$ Coincide.

$3\left(4 \cdot \left(-\dfrac{31}{6}\right) - 1\right) = 3 \cdot \left(-\dfrac{62}{3}\right) - 1 = 3 \cdot \left(-\dfrac{65}{3}\right) = -65$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 4 \rightarrow \dfrac{250}{5} - 5 = 50 - 5 = 45 \\ 3 \cdot (4 \cdot 4 - 1) = 3 \cdot 15 = 45 \end{array}\right\} \text{Coincide.}$$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{31}{6}$, $x_2 = 4$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{5}{9}$

Multiplicamos la ecuación por $9x^2$:

$9x + 18 = 5x^2 \to 5x^2 - 9x - 18 = 0$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 360}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{441}}{10} = \frac{9 \pm 21}{10} = \begin{cases} \dfrac{30}{10} = 3 \\ -\dfrac{12}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = -\dfrac{6}{5} \to \dfrac{1}{-\frac{6}{5}} + \dfrac{2}{\left(-\frac{6}{5}\right)^2} = -\dfrac{5}{6} + \dfrac{50}{36} = \dfrac{-30 + 50}{36} =$

$= \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$ Válida.

Si $x = 3 \to \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{3 + 2}{9} = \dfrac{5}{9}$ Válida.

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{6}{5}$, $x_2 = 3$

d) $\dfrac{2 - x}{2} + \dfrac{4}{2 + x} = 1$

Multiplicamos la ecuación por $2(2 + x)$:

$(2 - x)(2 + x) + 4 \cdot 2 = 2(2 + x)$

$4 - x^2 + 8 = 4 + 2x \to x^2 + 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = -4 \to \dfrac{6}{2} + \dfrac{4}{-2} = 3 - 2 = 1$ Válida.

Si $x = 2 \to \dfrac{0}{2} + \dfrac{4}{4} = 0 + 1 = 1$ Válida.

Soluciones: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

20 **Calcula la solución de las siguientes ecuaciones:**

a) $(x^2 - 9)(\sqrt{x} - 3) = 0$

b) $x(\sqrt{x} - x + 2) = 0$

c) $(2x^2 + 6)(\sqrt{x} - 2) = 0$

d) $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = 0$

a) $(x^2 - 9)(\sqrt{x} - 3) = 0 \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3 \\ \sqrt{x} - 3 = 0 \to \sqrt{x} = 3 \to x = 9 \end{cases}$

La solución $x = -3$ no es válida, por que $\sqrt{-3}$ no existe.

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = 9$

b) $x(\sqrt{x} - x + 2) = 0$. Igualamos a 0 cada factor:

$x = 0$

$\sqrt{x} - x + 2 = 0 \to \sqrt{x} = x - 2 \to x = (x-2)^2 \to x = x^2 - 4x + 4 \to x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación: Si $x = 1 \to \sqrt{1} - 1 + 2 = 2 \neq 0$ No vale.

Si $x = 4 \to \sqrt{4} - 4 + 2 = 2 - 4 + 2 = 0$ Válida.

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

c) $(2x^2 + 6)(\sqrt{x} - 2) = 0 \begin{cases} 2x^2 + 6 = 0 \to x^2 = -3 \text{ No hay solución.} \\ \sqrt{x} - 2 = 0 \to \sqrt{x} = 2 \to x = 4 \end{cases}$

Solución: $x = 4$

d) $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = 0 \to (\sqrt{x})^2 - 1^2 = 0 \to x - 1 = 0 \to x = 1$

Solución: $x = 1$

Inecuaciones

21 ■□□ **Resuelto en el libro de texto.**

22 ■□□ **Halla el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:**

a) $3x - 7 < 5$ **b)** $2 - x > 3$

c) $7 \geq 8x - 5$ **d)** $1 - 5x \leq -8$

e) $6 < 3x - 2$ **f)** $-4 \geq 1 - 10x$

a) $3x - 7 < 5$

$3x < 5 + 7 \to x < \frac{12}{3} \to x < 4 \to (-\infty, 4)$

b) $2 - x > 3$

$-x > 1 \to x < -1 \to (-\infty, -1)$

c) $7 \geq 8x - 5$

$8x \geq 7 + 5 \to x \geq \frac{12}{8} \to x \geq \frac{3}{2} \to \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

d) $1 - 5x \leq -8$

$-5x \leq -9 \to x \leq \frac{9}{5} \to \left[\frac{9}{5}, +\infty\right)$

e) $6 < 3x - 2 \to 6 + 2 < 3x \to 8 < 3x \to x > \frac{8}{3} \to \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$

f) $-4 \geq 1 - 10x \rightarrow 10x \geq 1 + 4 \rightarrow 10x \geq 5 \rightarrow x \geq \frac{5}{10} \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

23 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\frac{2(x+2)}{3} < 2x$ **b)** $\frac{x-1}{2} > x + 1$

c) $\frac{x-4}{4} + 1 \leq \frac{x+4}{8}$ **d)** $1 - x \leq \frac{x}{3}$

a) $\frac{2(x+2)}{3} < 2x$

$2x + 4 < 6x \rightarrow 4x > 4 \rightarrow x > 1 \rightarrow (1, +\infty)$

b) $\frac{x-1}{2} > x + 1$

$x - 1 > 2x + 2 \rightarrow x < -3 \rightarrow (-\infty, -3)$

c) $\frac{x-4}{4} + 1 \leq \frac{x+4}{8}$

$2x - 8 + 8 \leq x + 4 \rightarrow x \leq 4 \rightarrow (-\infty, 4]$

d) $1 - x \leq \frac{x}{3}$

$3 - 3x \leq x \rightarrow -4x \leq -3 \rightarrow x \leq \frac{3}{4} \rightarrow \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

24 **Traduce a lenguaje algebraico:**

a) El cuadrado de un número es menor que el doble de ese número más 15.

b) Si creciera 15 cm, superaría la estatura que se requiere para entrar en el equipo de baloncesto, que es 1,80 cm.

c) El perímetro de un cuadrado es menor que 15.

a) $x \rightarrow$ número

$x^2 < 2x + 15$

b) x = estatura actual $\rightarrow x + 15 > 1{,}80$

c) Llamamos x al lado del cuadrado $\rightarrow$ Perímetro $= 4x$

Por tanto $4x < 15 \rightarrow x < \frac{15}{4} \rightarrow x < 3{,}75$

El lado del cuadrado está en el intervalo (0; 3,75) ya que una longitud negativa no tiene sentido.

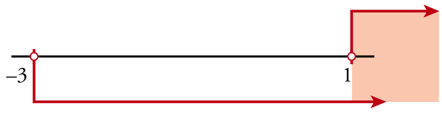
PÁGINA 110

25 ■□□ **Halla el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x \geq 0 \end{cases}$

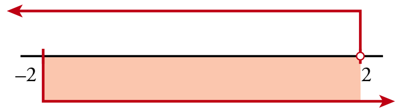
c) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x > 0 \\ 3 - x \leq 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -3 \end{cases}$



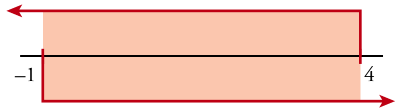
Soluciones: $(1, +\infty)$

b) $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -2 \end{cases}$



Soluciones: $[-2, 2)$

c) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$



Soluciones: $[-1, 4]$

d) $\begin{cases} x > 0 \\ 3 - x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3 \leq x \rightarrow x \geq 3 \end{cases}$

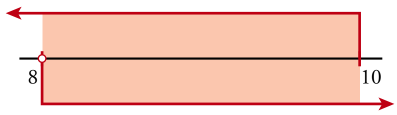
Soluciones: $[3, +\infty)$

26 ■■□ **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x + 4 > 20 \\ x - 25 \leq 5 - 2x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 6 \leq 2x + 16 \\ 3x + 2 \geq 2x + 5 \end{cases}$

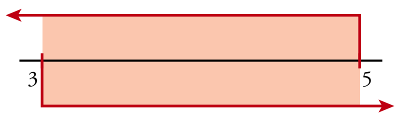
c) $\begin{cases} x - 3 < 2x + 1 \\ 5 - 2x > 3x \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x - 5 \geq 11 \\ x + 2 < 12 - x \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + 4 > 20 \\ x - 25 \leq 5 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x > 20 - 4 \\ x + 2x \leq 5 + 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x > 16 \\ 3x \leq 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x \leq 10 \end{cases}$



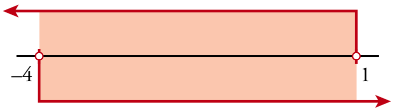
Soluciones: $(8, 10]$

b) $\begin{cases} 4x + 6 \leq 2x + 16 \\ 3x + 2 \geq 2x + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 2x \leq 16 - 6 \\ 3x - 2x \geq 5 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \leq 10 \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$



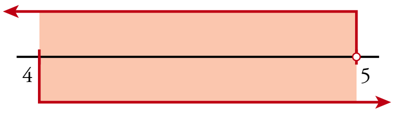
Soluciones: $[3, 5]$

c) $\begin{cases} x - 3 < 2x + 1 \\ 5 - 2x > 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2x < 1 + 3 \\ -2x - 3x > -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x < 4 \\ -5x > -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < 1 \end{cases}$



Soluciones: $(-4, 1)$

d) $\begin{cases} 4x - 5 \geq 11 \\ x + 2 < 12 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \geq 11 + 5 \\ x + x < 12 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x \geq 16 \\ 2x < 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 5 \end{cases}$



Soluciones: $[4, 5)$

PIENSA Y RESUELVE

27 ■■□ **Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,5 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada uno?**

Llamamos x = precio de compra del equipo de música.

El ordenador costó, pues, $2\,500 - x$.

Con el equipo de música perdio un 10% → el precio de venta fue entonces el 90% de $x = 0{,}9x$.

Con el ordenador perdió un 15% → el precio de venta fue $0{,}85(2\,500 - x)$.

La ecuación a resolver es:

$0{,}9x + 0{,}85(2\,500 - x) = 2\,157{,}5$ €

$0{,}9x + 2\,125 - 0{,}85x = 2\,157{,}5 \rightarrow 0{,}05x = 32{,}5 \rightarrow x = 650$

El equipo de música costó 650 €, y el ordenador, 2 500 – 650 = 1 850 €

28 ■□□ **Calcula la edad de Alberto sabiendo que dentro de 22 años tendrá el triple de su edad actual.**

x = "Edad actual de Alberto"

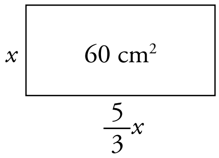
Dentro de 22 años tendrá $x + 22$ años.

$\underbrace{\text{Edad dentro de 22 años}}_{x + 22} = 3 \cdot \underbrace{\text{Edad actual}}_{x} \rightarrow x + 22 = 3x$

$22 = 2x \rightarrow x = 11$

Alberto tiene 11 años.

29 **El área de una lámina de bronce es de 60 cm² y su base mide 5/3 de su altura. Halla las dimensiones de la lámina.**



Área del rectángulo: $\frac{5}{3}x \cdot x = \frac{5}{3}x^2$

La ecuación a resolver es: $\frac{5}{3}x^2 = 60 \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2 = 180 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6$ (la solución negativa $x = -6$ no es válida, por ser x una longitud).

$\frac{5}{3}x = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10$

Las dimensiones de la lámina son: altura 6 cm y base 10 cm.

30 **Resuelto en el libro de texto.**

31 **Un granjero va al mercado para vender una partida de botellas de leche a 0,50 € la botella. En el camino se le rompen 60 botellas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,05 € el precio de cada botella. ¿Con cuántas botellas salió de la granja? ¿Cuánto dinero pretende ganar?**

Llamamos x = n.° de botellas de leche con las que salió de la granja.

x botellas a 0,50 € cada una $\rightarrow 0{,}50x$ es el dinero obtenido.

Se rompen 60 botellas. Le quedan para vender $x - 60$ a $0{,}50 + 0{,}05 = 0{,}55$ € cada una $\rightarrow 0{,}55(x - 60)$ es el dinero obtenido.

El dinero conseguido vendiendo x o $x - 60$ botellas es el mismo.

$0{,}50x = 0{,}55(x - 60) \rightarrow 0{,}50x = 0{,}55x - 33 \rightarrow 33 = 0{,}55x - 0{,}50x \rightarrow$

$\rightarrow 33 = 0{,}05x \rightarrow x = 660$

Salió de la granja con 660 botellas y pretende ganar $0{,}50 \cdot 660 = 330$ €.

32 **En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto mide 5 cm menos que esta. Halla el perímetro del triángulo.**

$$x^2 = \left(\frac{3}{5}x\right)^2 + (x - 5)^2 \rightarrow x^2 = \frac{9}{25}x^2 + x^2 + 25 - 10x \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 = 9x^2 + 25x^2 + 625 - 250x$$

$$9x^2 - 250x + 625 = 0$$

$$x = \frac{250 \pm \sqrt{62\,500 - 22\,500}}{18} = \frac{250 \pm 200}{18} \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = \frac{50}{18} = \frac{25}{9} < 5 \end{cases}$$

Para que la longitud de los lados sea positiva, se ha de tener $x > 5$, luego la solución es $x = 25$.

Perímetro $= \frac{3}{5} \cdot 25 + 25 - 5 + 25 = 15 + 20 + 25 = 60$ cm

33 ■■□ **Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm, respectivamente. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. ¿Qué cantidad es esa?**

$(18 - x)^2 = (16 - x)^2 + (9 - x)^2$

$324 + x^2 - 36x = 256 + x^2 - 32x + 81 + x^2 - 18x \rightarrow x^2 - 14x + 13 = 0$

$x = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} = \dfrac{14 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$x = 13$ no puede ser, porque nos quedaría una longitud negativa $(9 - 13 < 0)$.

Solución: $x = 1$ cm es la cantidad restada.

34 ■■■ **Si se aumenta en 3 m el lado de un cuadrado, la superficie aumenta en 75 m². ¿Cuál es su lado?**

$(x + 3)^2 = x^2 + 75 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 75 \rightarrow 6x = 66 \rightarrow x = 11$

El lado del cuadrado mide 11 m.

35 ■■□ **La suma de dos números es 40. Hállalos, sabiendo que el menor más la raíz cuadrada del mayor es 10.**

Llamamos x = n.° mayor y $40 - x$ = n.° menor.

$40 - x + \sqrt{x} = 10 \rightarrow \sqrt{x} = 10 - 40 + x \rightarrow \sqrt{x} = x - 30$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$x = (x - 30)^2$

$x = x^2 - 60x + 900 \rightarrow x^2 - 61x + 900 = 0$

$x = \dfrac{61 \pm \sqrt{121}}{2} = \dfrac{61 \pm 11}{2} = \begin{cases} 25 \\ 36 \end{cases}$

Comprobamos si ambas soluciones son válidas sustituyendo en la ecuación:

- Si $x = 25 \rightarrow 40 - 25 + \sqrt{25} = 15 + 5 = 20 \neq 10$ No vale
- Si $x = 36 \rightarrow 40 - 36 + \sqrt{36} = 4 + 6 = 10$

Los números son 36 y $40 - 36 = 4$.

36 ■■■ **Un grupo de estudiantes alquila un piso por 700 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 40 € menos. ¿Cuántos son?**

Si hubiese x estudiantes, cada uno pagaría $\dfrac{700}{x}$.

Si hubiese $x + 2$ estudiantes, cada uno pagaría 40 € menos $\rightarrow \dfrac{700}{x} - 40$

$$(x + 2)\left(\frac{700}{x} - 40\right) = 700$$

$700 - 40x + \dfrac{1\,400}{x} - 80 = 700 \rightarrow -40x^2 - 80x + 1\,400 = 0$

$$x^2 + 2x - 35 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 5 \\ -7 \quad \text{solución no válida.} \end{cases}$$

Han alquilado el piso 5 estudiantes.

37 **Resuelto en el libro de texto.**

38 **Un profesor de lengua calcula la nota final de sus alumnos mediante dos exámenes: uno escrito, que es el 75% de la nota final, y otro de lectura, que es el 25%. Un alumno obtiene en el de lectura un 6. ¿Qué nota tiene que sacar en el escrito para obtener como nota final al menos un notable (a partir de 7)?**

Llamamos x = nota obtenida en el examen escrito.

$$\text{Nota final} = 75\% \underbrace{\text{ESCRITO}}_{x} + 25\% \underbrace{\text{LECTURA}}_{6} \rightarrow 0{,}75x + 0{,}25 \cdot 6 \geq 7$$

$$0{,}75x + 1{,}5 \geq 7 \rightarrow 0{,}75x \geq 5{,}5 \rightarrow x \geq 7{,}33$$

En el examen escrito tiene que sacar al menos un 7,33.

PÁGINA 122

PRACTICA

Sistemas lineales

1 □□□ **Comprueba si el par (3, –1) es solución de alguno de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + \ \ y = 8 \end{cases}$

El par (3, –1) es solución de un sistema si al sustituir x por 3 e y por –1, se verifican ambas igualdades:

a) $\left.\begin{matrix} 2x + \ \ y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 9 + 2 = 11 \end{matrix}\right\} \to$ $(3, -1)$ es solución del sistema.

b) $\left.\begin{matrix} x - 2y = 5 \\ 4x + \ \ y = 8 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5 \\ 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 8 \end{matrix}\right\}$

La segunda ecuación no se cumple para $x = 3$, $y = -1$. El par (3, –1) no es solución de este sistema.

2 □□□ **Completa para que los siguientes sistemas tengan como solución $x = -1$, $y = 2$:**

a) $\begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + \ \ y = \dots \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + \ \ \ y = \dots \\ \dots + y/2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x - 3y = \dots \\ 2x + \ \ y = \dots \end{matrix}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} -1 - 3 \cdot 2 = -1 - 6 = -7 \\ 2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$

Así, $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + \ \ y = 0 \end{cases}$ es el sistema buscado.

b) $\left.\begin{matrix} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{matrix}\right\}$ Si $x = -1$, $y = 2$ $\to \begin{cases} 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \end{cases}$

El sistema que tiene como solución $x = -1$, $y = 2$ es: $\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y + x = 3 \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = \dots \\ \dots + \dfrac{y}{2} = 0 \end{array}\right\}$ Si $x = -1,\ y = 2 \ \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3 \cdot (-1) + 2 = -3 + 2 = -1 \\ \dots + \dfrac{2}{2} = 0 \rightarrow \dots = -1 \ \text{ luego} \dots \text{es } x \end{array}\right.$

El sistema buscado es:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y = -1 \\ x + \dfrac{y}{2} = 0 \end{array}\right.$$

d) $\left.\begin{array}{l} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{array}\right\}$ Si $x = -1,\ y = 2 \ \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dots -2(-1) = 4 \rightarrow \dots + 2 = 4 \rightarrow \dots = 2 = y \\ 3 \cdot 2 + \dots = 1 \rightarrow \dots = -5 \ \text{ luego} \dots \text{es } 5x \end{array}\right.$

El sistema buscado es:

$$\left\{\begin{array}{l} y - 2x = 4 \\ 3y + 5x = 1 \end{array}\right.$$

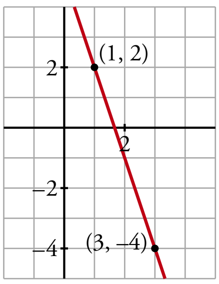
3 **Busca dos soluciones para cada una de estas ecuaciones y representa las rectas correspondientes:**

a) $\mathbf{3x + y = 5}$

b) $\mathbf{2x - y = 4}$

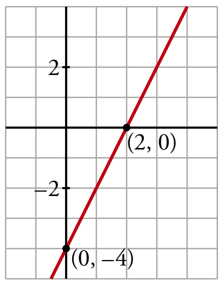
a) $3x + y = 5$

Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: $(1, 2)$ y $(3, -4)$



b) $2x - y = 4$

Soluciones de esta ecuación son, por ejemplo: $(0, -4)$ y $(2, 0)$



4 **Resuelve gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x + y = 5} \\ \mathbf{x + y = 1} \end{array}\right.$

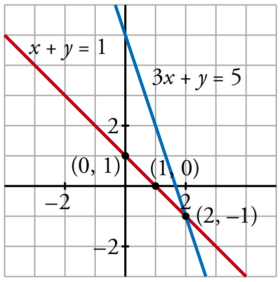
b) $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{4x - y = 7} \\ \mathbf{y - 1 = 0} \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{2x - y = 4} \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + 2y = 1} \\ \mathbf{x + \ \ 3 = 0} \end{array}\right.$

7 Soluciones a los ejercicios y problemas

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$



Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$3x + y = 5$

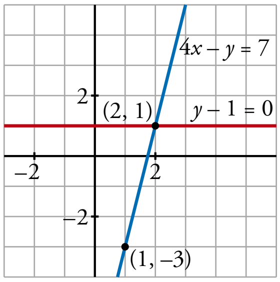
x	y
0	5
2	–1

$x + y = 1$

x	y
0	1
1	0

Las rectas se cortan en el punto (2, –1) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$.

b) $\begin{cases} 4x - y \quad = 7 \\ \quad\ \ y - 1 = 0 \end{cases}$



La segunda ecuación representa a una recta paralela al eje X, $y = 1$.

La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, –3) y (2, 1).

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$, punto de intersección de ambas rectas.

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

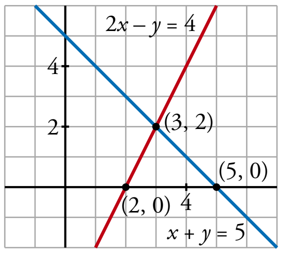
Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

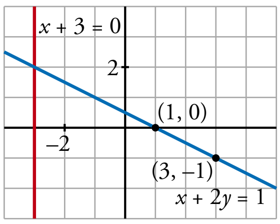
$2x - y = 4$

x	y
2	0
3	2



Las dos rectas se cortan en el punto (3, 2), luego $x = 3$, $y = 2$ es la solución del sistema.

d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$



La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, 0) y (3, –1).

La segunda ecuación es la de una recta paralela al eje Y, $x = -3$.

Las dos rectas se cortan en el punto (–3, 2) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = -3$, $y = 2$.

5 **Dos de los siguientes sistemas tienen solución única; uno de ellos es incompatible (no tiene solución) y otro es indeterminado (tiene infinitas soluciones). Intenta averiguar de qué tipo es cada uno, simplemente observando las ecuaciones. Después, resuélvelos gráficamente para comprobarlo:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

- El sistema c) tiene infinitas soluciones, pues la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2. Por tanto, las dos ecuaciones dicen lo mismo.
- El sistema b) es incompatible, sin solución, ya que las ecuaciones son contradictorias:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\} \text{ Imposible que se cumplan ambas a la vez.}$$

- Los sistemas a) y d) tienen solución.

Resolvemos gráficamente todos los sistemas para comprobarlo:

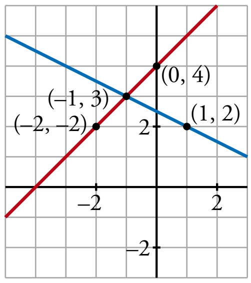
a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{array}\right\}$

$x + 2y = 5$

x	y
1	2
–1	3

$y - x = 4$

x	y
–2	2
0	4



Las dos rectas se cortan en (–1, 3) $\rightarrow$ La solución del sistema es $x = -1$, $y = 3$.

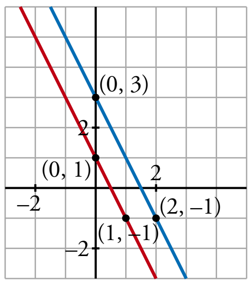
b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\}$

$2x + y = 3$

x	y
0	3
2	–1

$4x + 2y = 2$

x	y
0	1
1	–1



Las rectas son paralelas $\rightarrow$ El sistema no tiene solución.

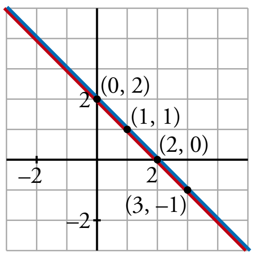
c) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{array}\right\}$

$x + y = 2$

x	y
0	2
2	0

$3x + 3y = 6$

x	y
1	1
3	–1



Se trata de la misma recta $\rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones.

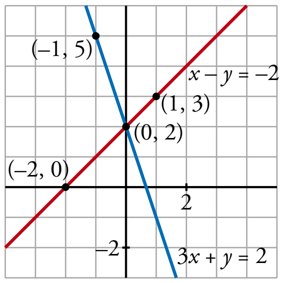
d) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{array}\right\}$

$3x + y = 2$

x	y
0	2
–1	5

$x - y = -2$

x	y
–2	0
1	3



El sistema tiene solución única $x = 0$, $y = 2$, punto de corte de ambas rectas.

6 **Dada la ecuación $x + 3y = 1$, busca otra ecuación que forme con ella un sistema cuya única solución sea $x = -2$, $y = 1$. Busca también otra ecuación que forme con ella un sistema incompatible y otra que forme con ella un sistema indeterminado.**

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ 2x + y = -3 \end{array}\right\}$ es un sistema que tiene como solución $x = -2$, $y = 1$.

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -1 \end{array}\right\}$ es un sistema que no tiene solución, es un sistema incompatible.

$$\begin{array}{r} -2x - 6y = -2 \\ 2x + 6y = -1 \\ \hline 0 = -3 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 1 \\ \dfrac{x}{3} + y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$ es un sistema que tiene infinitas soluciones, es un sistema indeterminado (la 2.ª ecuación es la tercera parte de la primera).

7 **Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y = -1 - 4x$

$3x - 5(-1 - 4x) = 5 \ \to \ 3x + 5 + 20x = 5 \ \to \ 23x = 0 \ \to \ x = 0$

$y = -1 - 4 \cdot 0 = -1$

Solución: $x = 0$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{array}\right\}$ Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = -5 - 6y$

$8(-5 - 6y) - 7y = 15 \ \to \ -40 - 48y - 7y = 15 \ \to \ -55y = 55 \ \to \ y = -1$

$x = -5 - 6 \cdot (-1) = -5 + 6 = 1$

Solución: $x = 1$, $y = -1$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = -1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $y = 3x - 7$

$2x + 5(3x - 7) = -1 \ \rightarrow \ 2x + 15x - 35 = -1 \ \rightarrow \ 17x = 34 \ \rightarrow \ x = 2$

$y = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$

Solución: $x = 2$, $y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = \dfrac{3x - 2}{2}$

$5x + 4 \cdot \left(\dfrac{3x - 2}{2}\right) = 7 \ \rightarrow \ 5x + 2(3x - 2) = 7 \ \rightarrow \ 5x + 6x - 4 = 7 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 11x = 11 \ \rightarrow \ x = 1$

$y = \dfrac{3 \cdot 1 - 2}{2} = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2}$

8 □□□ **Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:**

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x - 3}{2} \end{array}\right\}$ Igualamos las y: $2x - 3 = \dfrac{x - 3}{2} \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 4x - 6 = x - 3 \ \rightarrow \ 3x = 3 \ \rightarrow \ x = 1$

$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

Solución: $x = 1$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{array}\right\}$ Despejamos y de cada una de las ecuaciones e igualamos:

$\left.\begin{array}{l} y = 8 - 5x \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 8 - 5x = 2x + 1 \ \rightarrow \ 7 = 7x \ \rightarrow \ x = 1 \\ y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{array}$

Solución: $x = 1$, $y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 - 6y \\ x = 1 + 3y \end{array}\right\} \to -2 - 6y = 1 + 3y \to -3 = 9y \to y = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$x = -2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 + 2 = 0$$

Solución: $x = 0$, $y = -\frac{1}{3}$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{array}\right\}$ Despejamos x de cada ecuación e igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5y - 2}{4} \\[2ex] x = \dfrac{10 - 2y}{3} \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \dfrac{5y - 2}{4} = \dfrac{10 - 2y}{3} \\ 3(5y - 2) = 4(10 - 2y) \\ 15y - 6 = 40 - 8y \to 23y = 46 \to y = 2 \end{array}$$

$$x = \frac{5 \cdot 2 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Solución: $x = 2$, $y = 2$

9 **Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{array}\right\}$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos $8x = 8 \to x = 1$

$$3 \cdot 1 + 2y = 4 \to 2y = 1 \to y = \frac{1}{2}$$

Solución: $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{array}{r} -4x - 10y = -22 \\ 4x - 3y = -4 \\ \hline -13y = -26 \end{array} \to y = 2$

$$2x + 5 \cdot 2 = 11 \to 2x = 1 \to x = \frac{1}{2}$$

Solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{array}{r} -3x - 18y = 12 \\ 3x - 5y = 11 \\ \hline -23y = 23 \end{array} \rightarrow y = -1$

$x + 6 \cdot (-1) = -4 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{array}\right\}$

Multiplicamos la primera ecuación por –2 y sumamos:

$\begin{array}{r} -10x + 4y = -6 \\ 10x + 3y = -1 \\ \hline 7y = -7 \\ y = -1 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} 5x - 2 \cdot (-1) = 3 \\ 5x + 2 = 3 \\ 5x = 1 \\ x = \frac{1}{5} \end{array}$ $\qquad$ Solución: $x = \frac{1}{5},\ y = -1$

10 □□□ **Resuelve por el método que consideres más adecuado:**

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$ $\qquad$ d) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3 = 2y - 21 \\ 3y = \frac{15 - x}{2} \end{cases}$ $\qquad$ f) $\begin{cases} \frac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \frac{3y - 10}{5} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{array}\right\}$ Despejamos y de la segunda ecuación y la sustituimos en la primera: $y = -2$

$7x + 6 \cdot (-2) = 2 \rightarrow 7x - 12 = 2 \rightarrow 7x = 14 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\times 2} \\ \xrightarrow{\times 3} \end{array} \begin{array}{r} 10x - 6y = 2 \\ 12x + 6y = 42 \\ \hline 22x = 44 \end{array} \rightarrow x = 2$

$5 \cdot 2 - 3y = 1 \rightarrow 9 = 3y \rightarrow y = 3$

Solución: $x = 2,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{r} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 6 = y + 7 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

Despejamos y de la primera ecuación y sustituimos en la segunda: $y = 3x - 1$

$x + 2(3x - 1) = -2 \;\rightarrow\; x + 6x - 2 = -2 \;\rightarrow\; 7x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$

Solución: $x = 0,\; y = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 18 \\ x + \;\; y = 8 \end{array}\right\}$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera: $x = 8 - y$

$2 \cdot (8 - y) + 3y = 18 \;\rightarrow\; 16 - 2y + 3y = 18 \;\rightarrow\; y = 2$

$x = 8 - 2 = 6$

Solución: $x = 6,\; y = 2$

e) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3 = 2y - 21 \\ 3y = \dfrac{15 - x}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x - 2y = 3 - 21 \\ 6y = 15 - x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x - 2y = -18 \\ x + 6y = 15 \end{array}\right\}$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$x = 15 - 6y$

$4(15 - 6y) - 2y = -18 \rightarrow 60 - 24y - 2y = -18 \rightarrow 60 + 18 = 26y \rightarrow 78 = 26y \rightarrow$

$\rightarrow\; y = \dfrac{78}{26} = 3$

$x = 15 - 6 \cdot 3 = 15 - 18 = -3$

Solución: $x = -3,\; y = 3$

f) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -x + 7 = 2(y + 4) \\ 10x = 3y - 10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -x + 7 = 2y + 8 \\ 10x - 3y = -10 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -x - 2y = 1 \\ 10x - 3y = -10 \end{array}\right\}$

Aplicamos el método de reducción: multiplicamos la primera ecuación por 10 y sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -10x - 20y = 10 \\ 10x - 3y = -10 \\ \hline -23y = 0 \end{array} \;\rightarrow\; y = 0$$

$-x - 2 \cdot 0 = 1 \;\rightarrow\; -x = 1 \;\rightarrow\; x = -1$

Solución: $x = -1,\; y = 0$

11 □□□ **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que consideres oportuno y comprueba la solución que obtengas:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1,25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la 1ª ecuación por (–2) y sumamos:

$$\begin{array}{r} -4x + 2y = -8 \\ 4x + 3y = -7 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5y = -15 \;\rightarrow\; y = -3 \\ x = \dfrac{4+y}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Solución: } x = \frac{1}{2},\; y = -3$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{2} - (-3) = 1 + 3 = 4 \\ 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot (-3) = 2 - 9 = -7 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1,25 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{r} x + 2y = -1 \\ 6x - 2y = -2,5 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x = -3,5 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-3,5}{7} = -0,5 \\ y = \dfrac{-1-x}{2} \;\rightarrow\; y = -0,25 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Solución: } x = -0,5,\; y = -0,25$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} -0,5 + 2(-0,25) = -0,5 - 0,5 = -1 \\ 3(-0,5) - (-0,25) = -1,5 + 0,25 = -1,25 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por –3 y sumamos:

$$\begin{array}{r} 3x - \ \ 2y = 2 \\ -3x - 12y = 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -14y = 7 \ \ \to \ \ y = \dfrac{-1}{2} \\ x = \dfrac{-5}{3} - 4y \ \ \to \ \ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \to \text{ Solución: } x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{2}$$

Comprobación: $\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 \\ \dfrac{1}{3} + 4 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{3} - 2 = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} 2 - 3y = 7 - 8y \ \to \ 5y = 5 \ \to \ y = 1 \\ x = 7 - 8 \cdot 1 \ \to \ x = -1 \end{array}$$

Solución: $x = -1,\ y = 1$

Comprobación: $\begin{cases} \dfrac{-1+1}{3} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \dfrac{-1-3}{4} + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{cases}$

PÁGINA 123

12 ■□□ **Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:**

a) $\begin{cases} 4(x-3) + y = 0 \\ 3(x+3) - y = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y+1}{5} = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5} - y = -1 \\ \dfrac{x-6}{5} + y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \dfrac{y-4}{3} + 1 \\ y + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x+4}{3} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4(x-3) + y = 0 \\ 3(x+3) - y = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 12 + y = 0 \\ 3x + \ \ 9 - y = 18 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} 4x + y = 12 \\ 3x - y = \ \ 9 \\ \hline 7x \qquad = 21 \end{array} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 3 \cdot 3 - 9 = 0$$

Solución: $x = 3,\ y = 0$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y+1}{5} = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x + 4y + 4}{20} = \dfrac{20}{20} \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 5x + 4y = 16 \\ x + 3y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-5)} \begin{array}{r} 5x + \ \ 4y = 16 \\ -5x - 15y = -5 \\ \hline -11y = 11 \end{array} \rightarrow y = -1$$

$x + 3 \cdot (-1) = 1 \rightarrow x - 3 = 1 \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4,\ y = -1$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{5} - y = -1 \\ \dfrac{x-6}{5} + y = -1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \ \ x + 4 - 5y = -5 \\ \ \ x - 6 + 5y = -5 \\ \hline 2x - 2 \qquad = -10 \end{array} \rightarrow x = -4$$

$-4 + 4 - 5y = -5 \rightarrow -5y = -5 \rightarrow y = 1$

Solución: $x = -4,\ y = 1$

d) $\begin{cases} x = \dfrac{y-4}{3} + 1 \\ y + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x+4}{3} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} 3x = y - 4 + 3 \\ 3y + 1 = x + 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x - \ \ y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$

$y = 3x + 1$

$-x + 3(3x + 1) = 3 \rightarrow -x + 9x + 3 = 3 \rightarrow 8x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$

Solución: $x = 0,\ y = 1$

Sistemas no lineales

13 **Halla las soluciones de estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

$x = 1 - y$

$(1 - y)y + 2y = 2 \rightarrow y - y^2 + 2y = 2 \rightarrow -y^2 + 3y - 2 = 0$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = 0,\ y_1 = 1 \\ x_2 = -1,\ y_2 = 2 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

$y = 3 - 2x$

$x^2 + (3 - 2x)^2 = 2 \rightarrow x^2 + 9 + 4x^2 - 12x = 2 \rightarrow 5x^2 - 12x + 7 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2 \cdot 5} = \frac{12 \pm 2}{10} \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7}{5} \rightarrow y_1 = 3 - 2 \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{1}{5} \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5},\ y_1 = \dfrac{1}{5} \\ x_2 = 1,\ y_2 = 1 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

$y = 3 - 2x$

$x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \rightarrow (3 - 2x)(x - (3 - 2x)) = 0$

$$(3 - 2x) \cdot (3x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3}{2} \rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2},\ y_1 = 0 \\ x_2 = 1,\ y_2 = 1 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

$y = 3x - 3$

$2x^2 + (3x - 3)^2 = 9 \rightarrow 2x^2 + 9x^2 + 9 - 18x = 9 \rightarrow 11x^2 - 18x = 0$

$x(11x - 18) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 18/11 \end{cases}$

Si $x_1 = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow$ Solución: $x_1 = 0,\ y_1 = -3$

Si $x_2 = \dfrac{18}{11} \rightarrow y = \dfrac{21}{11} \rightarrow$ Solución: $x_2 = \dfrac{18}{11},\ y_2 = \dfrac{21}{11}$

14 **Resuelve los sistemas siguientes por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array}\right\}$ Multiplicamos por –2 la primera ecuación:

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 2y^2 = -148 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \\ \hline -5y^2 = -125 \end{array}$$

$-5y^2 = -125 \rightarrow y^2 = \dfrac{125}{5} = 25 \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$

Si $y_1 = 5 \rightarrow x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

Si $y_2 = -5 \rightarrow x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_3 = 7 \\ x_4 = -7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 7,\ y_1 = 5;\ x_2 = -7,\ y_2 = 5;\ x_3 = 7,\ y_3 = -5;\ x_4 = -7,\ y_4 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{array}\right\}$ Lo resolvemos por el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por –3.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 10y^2 = 14 \\ -6x^2 + 33y^2 = 9 \\ \hline 23y^2 = 23 \end{array}$$

$23y^2 = 23 \rightarrow y^2 = 1 \quad 3x^2 - 5 \cdot 1 = 7 \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 = 7 + 5 \rightarrow 3x^2 = 12 \begin{cases} x^2 = 4 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Por tanto si $y = 1 \rightarrow x = \pm 2$

$y = -1 \rightarrow x = \pm 2$

Las soluciones son: $x_1 = -2,\ y_1 = -1;\ x_2 = -2,\ y_2 = 1;\ x_3 = 2,\ y_3 = -1;\ x_4 = 2,\ y_4 = 1$

15 **Resuelve los siguientes sistemas (no olvides comprobar las soluciones):**

a) $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x+2} \\ x - 2y = 1 \end{array}\right\} \to x = 1 + 2y$

Luego, sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = \sqrt{1 + 2y + 2} \to y = \sqrt{3 + 2y}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $y^2 = 3 + 2y \to y^2 - 2y - 3 = 0$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \to x = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ -1 \to x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \end{cases}$$

Comprobamos si las soluciones obtenidas cumplen la primera ecuación del sistema:

$x = 7,\ y = 3 \to 3 = \sqrt{7 + 2} \to 3 = \sqrt{9} \to 3 = 3 \to$ Solución válida

$x = -1,\ y = -1 \to -1 = \sqrt{-1 + 2} \to -1 = \sqrt{1} \to -1 \neq 1 \to$ Solución no válida

Por tanto, la solución es $x = 7,\ y = 3$.

b) $\left.\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{array}\right\} x + 1 = \sqrt{x} + 7 \to x - 6 = \sqrt{x} \to (x - 6)^2 = x \to$

$\to x^2 - 12x + 36 = x \to x^2 - 13x + 36 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \to y = 9 + 1 = 10 \\ 4 \to y = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

Comprobación (de la 2.ª ecuación)

$x_1 = 9,\ y_1 = 10 \to \sqrt{9} + 7 = 3 + 7 = 10 \to$ Solución válida

$x_2 = 4,\ y_2 = 5 \to \sqrt{4} + 7 = 9 \neq 5 \to$ Solución no válida

Solución: $x = 9,\ y = 10$

c) $\begin{cases} xy = 2 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{25}{2} \end{cases} \to x = \dfrac{25}{2}y$

$xy = 2 \to \dfrac{25}{2}y \cdot y = 2 \to \dfrac{25}{2}y^2 = 2 \to y^2 = \dfrac{4}{25} \to y = \pm\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \pm\dfrac{2}{5}$

Si $y = \dfrac{2}{5} \to x = \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 5$ Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = \dfrac{2}{5}$

$y = -\dfrac{2}{5} \to x = -5$ $x_2 = -5,\ y_2 = -\dfrac{2}{5}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2xy = 3 \\ x + 2y = 4 \;\;\rightarrow\;\; x = 4 - 2y \end{array}\right\}$

$2xy = 3 \;\rightarrow\; 2(4 - 2y) \cdot y = 3 \;\rightarrow\; 8y - 4y^2 = 3 \;\rightarrow\; 4y^2 - 8y + 3 = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = \begin{cases} \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; x = 4 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 1 \\[2mm] \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = 4 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1,\ y_1 = \dfrac{3}{2}$

$x_2 = 3,\ y_2 = \dfrac{1}{2}$

16 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$

$x = 1 + y$

$(1 + y)^2 + y^2 = 11 - 3(1 + y) \;\rightarrow\; 1 + y^2 + 2y + y^2 = 11 - 3 - 3y$

$$2y^2 + 5y - 7 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 9}{4} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \;\rightarrow\; x_1 = 2 \\ y_2 = \dfrac{-7}{2} \;\rightarrow\; x_2 = \dfrac{-5}{2} \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = 2,\ y_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-5}{2},\ y_2 = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

$y = \dfrac{-3x}{2}$

$$x^2 - x\left(\frac{-3x}{2}\right) = 2\left(\frac{9x^2}{4} - 4\right) \;\rightarrow\; x^2 + \frac{3x^2}{2} = \frac{9x^2}{2} = -8$$

$2x^2 + 3x^2 = 9x^2 - 16 \;\rightarrow\; 4x^2 = 16$

$$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Si $x_1 = 2 \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_1 = 2,\ y_1 = -3$

Si $x_2 = -2 \;\rightarrow\; y = 3 \;\rightarrow\;$ Solución: $x_2 = -2,\ y_2 = 3$

PIENSA Y RESUELVE

Sistemas lineales

17 □□□ **Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,80 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,70 €.**

¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

$$\left.\begin{array}{l} x \;\rightarrow\; \text{precio de una barra de pan} \\ y \;\rightarrow\; \text{precio de un litro de leche} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 6{,}8 \\ 3x + 4y = 4{,}7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 3} \\ \xrightarrow{\times (-4)} \end{array} \begin{array}{r} 12x + 18y = 20{,}4 \\ -12x - 16y = -18{,}8 \\ \hline 2y = 1{,}6 \;\rightarrow\; y = 0{,}8 \end{array}$$

$$4x + 6 \cdot 0{,}8 = 6{,}8 \;\rightarrow\; 4x + 4{,}8 = 6{,}8 \;\rightarrow\; 4x = 2 \;\rightarrow\; x = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Una barra de pan cuesta 0,50 €, y un litro de leche, 0,80 €.

18 □□□ **Una empresa aceitera ha envasado 3 000 *l* de aceite en 1 200 botellas de 2 *l* y de 5 *l*. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?**

Llamamos:

x = n.º de botellas de aceite de 2 *l*

y = n.º de botellas de aceite de 5 *l*

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1\,200 \\ 2x + 5y = 3\,000 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times (-2)} \begin{array}{r} -2x - 2y = -2\,400 \\ 2x + 5y = 3\,000 \\ \hline 3y = 600 \;\rightarrow\; y = 200 \;\rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow\; x = 1\,200 - 200 = 1\,000$$

Se han utilizado 1 000 botellas de 2 *l* y 200 de 5 *l*.

19 □□□ **Un test consta de 48 preguntas. Por cada acierto se suma 0,75 puntos y por cada error se resta 0,25. Mi puntuación fue de 18 puntos. ¿Cuántos aciertos y errores tuve?**

x = n.º de aciertos

y = n.º de errores

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 48 \\ 0{,}75x - 0{,}25y = 18 \end{array}\right\} \quad x = 48 - y$$

$0{,}75(48 - y) - 0{,}25y = 18$

$36 - 0{,}75y - 0{,}25y = 18$

$18 = y$

$x = 48 - 18 = 30$

Tuve 30 aciertos y 18 errores.

20 ■□□ **La suma de dos números es 14. Añadiendo uno al mayor se obtiene el doble del menor. Halla los dos números.**

x = n.º mayor $\quad$ y = n.º menor

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 14 \\ x + 1 = 2y \end{array}\right\} \rightarrow x = 2y - 1$$

$2y - 1 + y = 14 \rightarrow 3y = 15 \rightarrow y = 5 \rightarrow x = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

Los números son 5 y 9.

21 ■□□ **Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0,80 € por cada pieza que sale de su taller para la venta, pero sufre una pérdida de 1 € por cada pieza defectuosa que debe retirar. En un día ha fabricado 2 255 bombillas, obteniendo unos beneficios de 1 750 €. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se fabricaron ese día?**

Llamamos:

x = n.º de bombillas válidas

y = n.º de bombillas defectuosas

$$\left.\begin{array}{l} \text{En un día fabrica 2 255 bombillas} \rightarrow x + y = 2\,255 \\ \text{En un día obtiene 1 750 € de benficio} \rightarrow 0{,}80x - y = 1\,750 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 2\,255 \\ 0{,}80x - y = 1\,750 \\ \hline 1{,}80x = 4\,005 \end{array} \rightarrow x = \frac{4\,005}{1{,}80} = 2\,225 \rightarrow y = 2\,255 - 2\,225 = 30$$

Hay 2 225 bombillas válidas y 30 defectuosas.

22 ■■□ **El perímetro de un rectángulo es de 14 cm y sabemos que su base es 3 cm más larga que su altura. Halla las dimensiones del rectángulo.**

Llamamos x, y a las dimensiones del rectángulo:

x = base $\quad y$ = altura

$$\left.\begin{array}{l} \text{Perímetro} = 14 \rightarrow x + y = 7 \\ \text{Base} = \text{altura} + 3 \rightarrow x = y + 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y + 3 + y = 7 \rightarrow 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ x = 2 + 3 = 5 \end{array}$$

Las dimensiones del rectángulo son: base = 5 cm, altura = 2 cm.

23 ■□□ **Encuentra dos números tales que añadiendo tres al primero se obtenga el segundo y en cambio, añadiendo dos al segundo se obtenga el doble del primero.**

Llamamos x, y a los números pedidos: x es el primero e y el segundo.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 = y \\ y + 2 = 2x \end{array}\right\} \quad x + 3 + 2 = 2x \rightarrow 5 = x \rightarrow y = 5 + 3 = 8$$

Los números son 5 y 8.

24 **La suma de dos números es 15. La mitad de uno de ellos más la tercera parte del otro es 6. ¿De qué números se trata?**

Llamamos x, y a los números buscados.

La suma es 15 $\rightarrow$ $x + y = 15$

La mitad de x + tercera parte de y es 6 $\rightarrow$ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6$

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 15 \\ 3x + 2y = 36 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = 15 - x \\ 3x + 2(15 - x) = 36 \ \rightarrow \ 3x + 30 - 2x = 36 \ \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \ x = 6 \ \rightarrow \ y = 15 - 6 = 9$$

Los números buscados son 6 y 9.

25 **Resuelto en el libro de texto.**

PÁGINA 124

26 **Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8%, y el cuaderno tiene una rebaja del 10%. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €.**

¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?

	ANTES DE LA SUBIDA O REBAJA	CON SUBIDA O REBAJA
CALCULADORA	x	$1{,}08x$
CUADERNO	y	$0{,}9y$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 10{,}8 \\ 1{,}08x + 0{,}9y = 11{,}34 \end{array}\right\} \rightarrow \ y = 10{,}8 - x$$

$$1{,}08x + 0{,}9(10{,}8 - x) = 11{,}34 \ \rightarrow \ 1{,}08x + 9{,}72 - 0{,}9x = 11{,}34 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 0{,}18x = 1{,}62 \ \rightarrow \ x = \frac{1{,}62}{0{,}18} = 9 \ \rightarrow \ y = 10{,}8 - 9 = 1{,}8$$

Hace tres días, la calculadora costaba 9 €, y el cuaderno, 1,80 €.

27 **Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €. Después de algún tiempo, los vende por 2 157,50 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%.**

¿Cuánto le costó cada uno?

	PRECIO COMPRA	PRECIO VENTA
EQUIPO MÚSICA	x	$0{,}9x$
ORDENADOR	y	$0{,}85y$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 2\,500 \\ 0{,}9x + 0{,}85y = 2\,157{,}5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0{,}9x + 0{,}85\,(2\,500 - x) = 2\,157{,}5 \end{array}\right\}$$

$0{,}9x = 2\,125 - 0{,}85x = 2\,157{,}5 \;\rightarrow\; 0{,}05x = 32{,}5$

$x = 650, \;\; y = 1\,850$

Le costó 650 € el equipo de música y 1 850 € el ordenador.

28 **En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg.**
¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE
CAFÉ INFERIOR	x	6	$6x$
CAFÉ SUPERIOR	y	8,5	$8{,}5y$
MEZCLA	20	7	140

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 20 \\ 6x + 8{,}5y = 140 \end{array}\right\} \rightarrow \; x = 20 - y$$

$6 \cdot (20 - y) + 8{,}5y = 140 \;\rightarrow\; 120 - 6y + 8{,}5y = 140 \;\rightarrow\; 2{,}5y = 20 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; y = \frac{20}{2{,}5} = 8 \;\rightarrow\; x = 20 - 8 = 12$$

Necesitan 12 kg de café inferior y 8 kg de café superior.

29 **¿Cuántos litros de leche con un 10% de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4% de grasa para obtener 18 litros con un 6% de grasa?**

$x \;\rightarrow\;$ litros de leche con un 10% de grasa

$y \;\rightarrow\;$ litros de leche con un 4% de grasa

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 18 \\ 0{,}1x + 0{,}04y = 0{,}06\,(x + y) \end{array}\right\} \; 0{,}04x = 0{,}02y \;\rightarrow\; y = 2x$$

$x + 2x = 18 \;\rightarrow\; 3x = 18 \;\rightarrow\; x = 6, \;\; y = 12$

Hemos de mezclar 6 litros de leche de un 10% de grasa con 12 litros de leche de un 4% de grasa.

30 **Resuelto en el libro de texto.**

31 **La edad de un padre es hoy siete veces la edad del hijo y dentro de 10 años será solo el triple. Calcula la edad actual de cada uno.**

Recogemos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 10 AÑOS
PADRE	x	$x + 10$
HIJO	y	$y + 10$

$$\left.\begin{array}{l} x = 7y \\ x + 10 = 3(y + 10) \end{array}\right\} \; 7y + 10 = 3y + 30 \;\rightarrow\; 4y = 20 \;\rightarrow\; y = 5$$

Luego: $x = 7 \cdot 5 = 35$

El padre tiene 35 años, y el hijo, 5 años.

32 **Se sabe que Noelia le saca 27 años a Marcos y que dentro de 12 años le doblará en edad. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Recogemos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 12 AÑOS
NOELIA	x	$x + 12$
MARCOS	y	$y + 12$

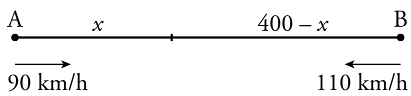
$$\left.\begin{array}{l} x = y + 27 \\ x + 12 = 2(y + 12) \end{array}\right\} \; y + 27 + 12 = 2y + 24 \;\rightarrow\; y + 39 = 2y + 24 \;\rightarrow\; 15 = y$$

Luego: $x = 15 + 27 = 42$

Noelia tiene 42 años, y Marcos, 15 años.

33 **La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?**

☞



	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
A	x	90 km/h	t
B	$400 - x$	110 km/h	t

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\left.\begin{array}{l} 90 = \dfrac{x}{t} \;\rightarrow\; x = 90t \\ 110 = \dfrac{400 - x}{t} \;\rightarrow\; 400 - x = 110t \end{array}\right\} \begin{array}{l} 400 - 90t = 110t \\ 400 = 200t \;\rightarrow\; t = 2 \end{array}$$

Se encontrarán al cabo de 2 h a $90 \cdot 2 = 180$ km de A.

Sistemas no lineales

34 **La diferencia de dos números es 6, y la de sus cuadrados, 144. Halla los números.**

Llamamos x, y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^2 - y^2 = 144 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} x = 6 + y \\ (6 + y)^2 - y^2 = 144 \to 36 + 12y + y^2 - y^2 = 144 \to 12y = 108 \to \end{array}$$

$$\to y = \frac{108}{12} = 9$$

Luego: $x = 6 + 9 = 15$

Los números son 15 y 9.

35 **Calcula dos números cuya suma sea 24, y su producto, 135.**

Llamamos x, y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 24 \\ xy = 135 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} y = 24 - x \\ x(24 - x) = 135 \to 24x - x^2 = 135 \to x^2 - 24x + 135 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 540}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \to y = 24 - 15 = 9 \\ 9 \to y = 24 - 9 = 15 \end{cases}$$

Los números son 9 y 15.

36 **Halla dos números cuya suma sea 20, y la de sus cuadrados, 232.**

Llamamos x, y a los números buscados.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 232 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} y = 20 - x \\ x^2 + (20 - x)^2 = 232 \to x^2 + 400 - 40x + x^2 = 232 \end{array}$$

$$2x^2 - 40x + 168 = 0 \to x^2 - 20x + 84 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 336}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2} = \begin{cases} 14 \to y = 20 - 14 = 6 \\ 6 \to y = 20 - 6 = 14 \end{cases}$$

Los números son 6 y 14.

37 **La edad actual de Rosa es el cuadrado de la de su hija y dentro de 9 años será solamente el triple. ¿Qué edad tiene cada una?**

Organizamos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 9 AÑOS
ROSA	x	$x + 9$
HIJA	y	$y + 9$

$$\left.\begin{array}{l} x = y^2 \\ x + 9 = 3(y + 9) \end{array}\right\} \quad y^2 + 9 = 3y + 27 \;\rightarrow\; y^2 - 3y - 18 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} = \begin{cases} 6 \;\rightarrow\; x = 6^2 = 36 \\ -3 \;\; \text{No es válida.} \end{cases}$$

Rosa tiene 36 años, y su hija, 6 años.

38 **La edad actual de una madre es el cuadrado de la que tendrá su hija dentro de dos años, momento en el que la edad de la hija será la sexta parte de la edad que tiene actualmente la madre. Calcula la edad de ambas.**

Organizamos los datos en la siguiente tabla:

	EDAD ACTUAL	EDAD DENTRO DE 2 AÑOS
MADRE	x	$x + 2$
HIJA	y	$y + 2$

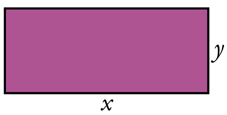
$$\left.\begin{array}{l} x = (y + 2)^2 \\ y + 2 = \dfrac{1}{6}x \end{array}\right\} \quad x = \left(\frac{1}{6}x\right)^2 \;\rightarrow\; \frac{1}{36}x^2 - x = 0 \;\rightarrow\; x\left(\frac{1}{36}x - 1\right) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{1}{36}x - 1 = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{36}x = 1 \;\rightarrow\; x = 36 \;\rightarrow\; y = 4$$

La madre tiene 36 años, y su hija, 4 años.

39 **Resuelto en el libro de texto.**

40 **El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?**



$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 20 \\ x \cdot y = 21 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; y = 10 - x$$

$$x(10 - x) = 21 \;\rightarrow\; -x^2 + 10x - 21 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{-2} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-10 \pm 4}{-2} \begin{cases} x_1 = 7 \;\rightarrow\; y_1 = 10 - 7 = 3 \\ x_2 = 3 \;\rightarrow\; y_2 = 10 - 3 = 7 \end{cases}$$

Las dimensiones del rectángulo son 3 cm y 7 cm.

41 **En un rombo, una diagonal es el triple de la otra y el área es de 6 cm^2. ¿Cuánto mide cada diagonal?**

Llamamos x, y a la longitud de cada una de las diagonales del rombo.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ \dfrac{xy}{2} = 6 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \frac{3y \cdot y}{2} = 6 \;\rightarrow\; 3y^2 = 12 \;\rightarrow\; y^2 = 4 \begin{cases} y = -2 \;\; \text{No es válida.} \\ y = 2 \;\rightarrow\; x = 3 \cdot 2 = 6 \end{cases}$$

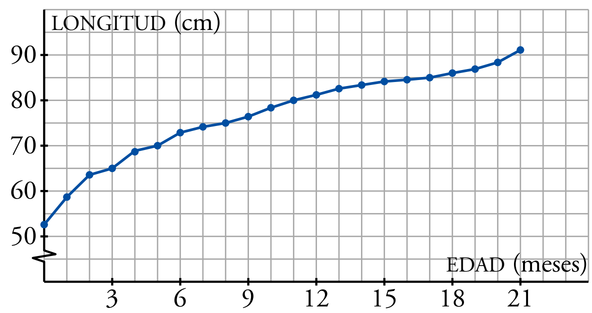
Las diagonales miden 2 cm y 6 cm.

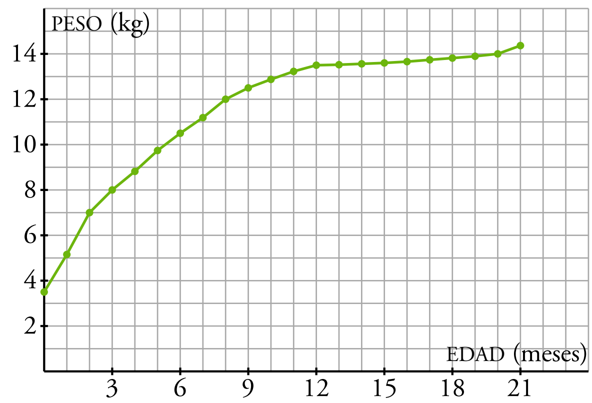
PÁGINA 138

PRACTICA

Interpretación de gráficas

1 **Pepe y Susana han medido y pesado a su hijo, David, cada mes desde que nació hasta los 21 meses. Estas son las gráficas de la longitud y del peso de David en función de la edad:**





a) ¿Cuánto medía y pesaba David cuando nació?

b) ¿Cuánto creció David los seis primeros meses? ¿Y de los seis a los veintiún meses? ¿En qué meses fue mayor su crecimiento?

c) ¿Cuánto aumentó de peso David los dos primeros meses? ¿Y del mes 12 al mes 18?

d) ¿Cuánto pesaba David cuando medía 80 cm? ¿Qué edad tenía entonces?

a) Al nacer, David medía 52 cm y pesaba 3,5 kg.

b) En los seis primeros meses creció, aproximadamente, 20 cm.

De los meses 6 a 21 creció, aproximadamente, 18 cm.

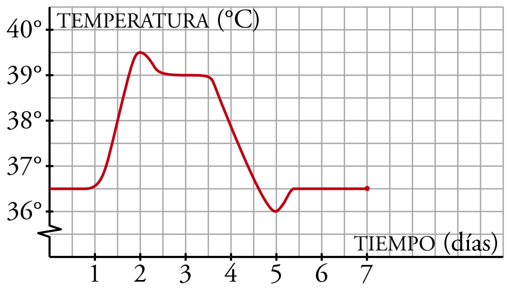
Su crecimiento fue mayor en los dos primeros meses.

c) Los dos primersos meses aumentó su peso 3,5 kg.

Del mes 12 al mes 18 aumentó su peso, aproximadamente, 400 gramos.

d) Cuando David medía 80 cm tenía 11 meses y a esa edad pesaba 13,2 kg.

2 ▢▢▢ **Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo:**



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

d) ¿Qué tendencia tiene la temperatura?

e) Elabora un pequeño informe interpretando tus resultados.

a) Estuvo en observación 7 días.

b) El segundo día la temperatura alcanzó un máximo.

El quinto día la temperatura alcanzó un mínimo.

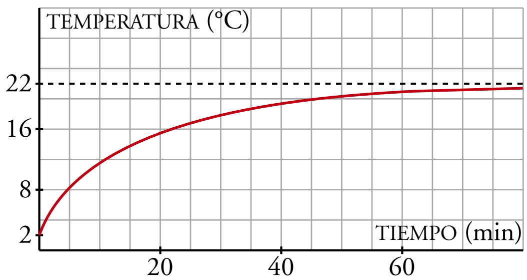
c) La temperatura crece en $(1, 2) \cup (5; 5{,}5)$.

La temperatura decrece en $(2; 2{,}5) \cup (3{,}5; 5)$.

d) La temperatura tiende a estabilizarse en torno a los 36,5 °C.

e) Durante el primer día de observación, la temperatura del paciente se mantiene constante en 36,5 °C. A lo largo del segundo día sube hasta alcanzar, al final del día, una temperatura máxima de 39,5 °C. El tercer día, comienza a bajar hasta situarse en 39 °C a la mitad del día. Permanece constante en esos 39 °C hasta mediodía del día siguiente (cuarto día de la observación). A partir de este momento baja paulatinamente hasta que se sitúa, al final del quinto día, en una temperatura mínima de 36 °C. En el inicio del día sexto, la temperatura sube medio grado y, a partir de ahí, se estabiliza en 36,5 °C hasta el final del séptimo día, momento en el que finaliza la observación.

3 ▢▢▢ **Hemos sacado de la nevera un vaso con agua y lo hemos dejado sobre la mesa de la cocina. Esta gráfica muestra la temperatura del agua en grados centígrados al pasar el tiempo.**



a) ¿A qué temperatura está el interior de la nevera?

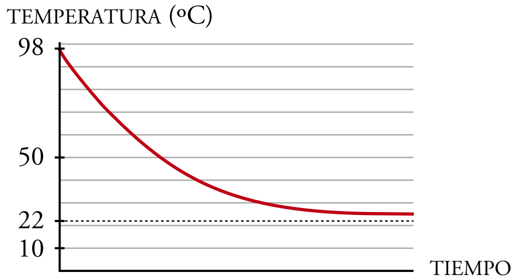
b) ¿A qué temperatura está la habitación?

c) Imagina que en ese mismo momento sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C y lo dejamos sobre la mesa. Dibuja una gráfica aproximada que muestre la temperatura del agua en este segundo vaso al pasar el tiempo.

a) El interior de la nevera está a 2 °C.

b) La habitación está a 22 °C.

c)



Gráficas, fórmulas y tablas

4 **Un nadador se deja caer desde un trampolín. Su entrenador ha medido el espacio que recorre cada cuatro décimas de segundo mediante un método fotográfico. Obtiene la siguiente tabla:**

TIEMPO (s)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4
ESPACIO (m)	0	0,78	3,13	7,05	12,5	12,58	16,6

El nadador se ha detenido a los 17 metros.

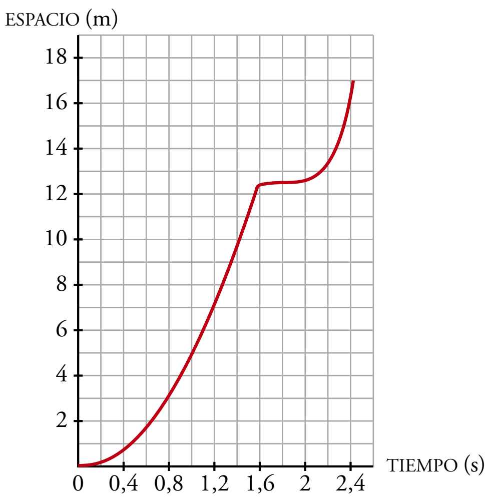
a) Representa la gráfica espacio-tiempo.

b) ¿Sabrías decir en qué momento entró en el agua?

c) ¿Qué velocidad estimas que llevaba en el momento de entrar en el agua?

d) ¿Qué altura tiene el trampolín?

a)



b) Entró en el agua a los 1,6 segundos de haber saltado.

c) Estimamos la velocidad calculando la T.V.M. en el intervalo [1,2; 1,6]:

$$\text{T.V.M. } [1{,}2;\ 1{,}6] = \frac{12{,}5 - 7{,}05}{1{,}6 - 1{,}2} = \frac{5{,}45}{0{,}4} = 13{,}625$$

Estimamos que la velocidad era de 13,625 m/s.

d) El trampolín tiene unos 12 m de altura.

PÁGINA 139

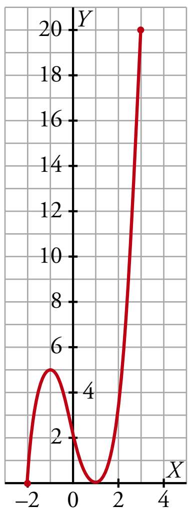
5 **Representa la función $y = x^3 - 3x + 2$ definida en [–2, 3]. Para ello, completa la tabla:**

x	–2	–1	0	1	2	3
y						

¿Cuál es el recorrido de la función?

x	–2	–1	0	1	2	3
y	0	4	2	0	4	20

Recorrido = [0, 20]



6 **Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha medido las distancias recorridas cada 5 minutos y ha obtenido los siguientes datos:**

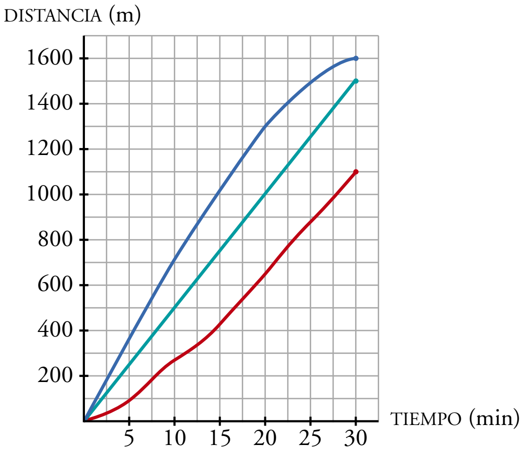
TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

a) Dibuja la gráfica que relaciona la distancia y el tiempo de cada nadador y descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento durante la media hora?

c) Calcula la velocidad media de cada uno en todo el recorrido.

d) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada una de las tres funciones?

a) 

b) No ha habido ningún adelantamiento.

c) $V_m\ (A) = \dfrac{1\,100}{30} = 36{,}67$ m/min

$V_m\ (B) = \dfrac{1\,500}{30} = 50$ m/min

$V_m\ (C) = \dfrac{1\,600}{30} = 53{,}3$ m/min

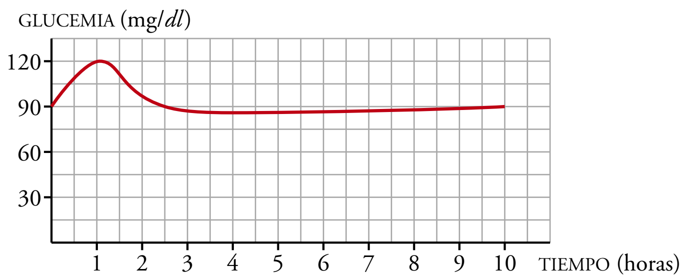
d) *Dom* A = *Dom* B = *Dom* C = [0, 30]

Rec A = [0, 1 100] *Rec* B = [0, 1 500] *Rec* C = [0, 1 600]

7 **Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. Luego, en las 3 horas siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 horas.**

a) Representa la curva de glucemia de una persona sana.

b) Di cuál es su máximo, su mínimo y explica su tendencia.

a) 

b) El máximo es de 120 mg/*dl* al cabo de 1 h de iniciar la toma. El mínimo está ligeramente por debajo de 90 mg/*dl* y se alcanza a las 4 h de iniciar la toma.

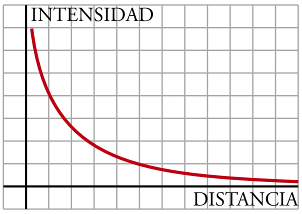
La tendencia de la función es 90 mg/*dl* (tener la glucemia en un nivel normal).

8 **La intensidad del sonido de un foco sonoro es menor a medida que nos alejamos de él.**

a) Representa la intensidad del sonido en función de la distancia al foco sonoro.

b) ¿Cuál es la tendencia?

a) Una posible gráfica es:



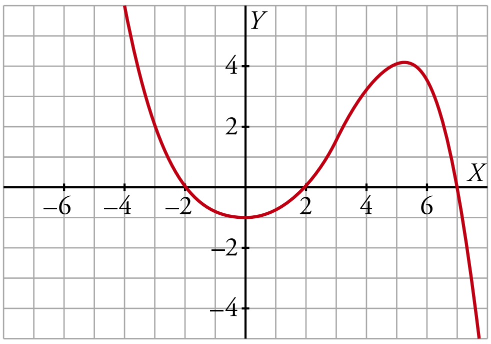
b) La tendencia de la función es cero: la intensidad del sonido es prácticamente nula a medida que nos alejamos del foco.

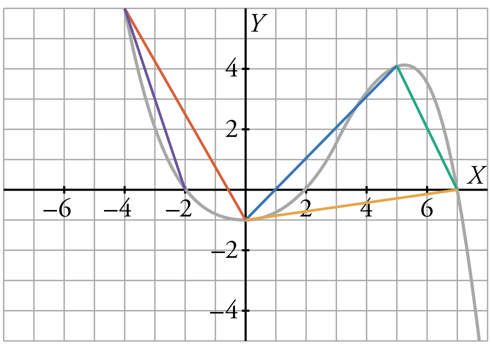
PIENSA Y RESUELVE

9 **Observa esta función dada gráficamente:**

Calcula su T.V.M. en los intervalos [0, 4], [0, 5], [5, 7], [0, 7], [–4, 0] y [–4, –2].

Copia en tu cuaderno la gráfica y dibuja en cada caso el segmento del cual estás hallando la pendiente.





$$\text{T.V.M. } [0, 4] = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [0, 5] = \frac{4+1}{5} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [5, 7] = \frac{0-4}{7-5} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [0, 7] = \frac{0+1}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, 0] = \frac{-1-6}{0+4} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \frac{0-6}{-2+4} = -3$$

10 □□□ **Halla la T.V.M. de la función:**

$$y = 3x^3 + 9x^2 - 3x - 9$$

en los intervalos [–2, 0], [–1, 0], [–3, –1], [0, 1].

T.V.M. $[-2, 0] = \dfrac{-9-9}{0+2} = -9$ T.V.M. $[-1, 0] = \dfrac{-9-0}{0+1} = -9$

T.V.M. $[-3, -1] = \dfrac{0-0}{-1+3} = 0$ T.V.M. $[0, 1] = \dfrac{0+9}{1} = 9$

11 □□□ **La posición de una partícula viene dada por la función:**

$$s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$$

Calcula la velocidad media de dicha partícula en los intervalos [2, 4], [1, 2], [1, 3], [2, 3].

T.V.M. $[2, 4] = \dfrac{16-12}{4-2} = 2$

T.V.M. $[1, 2] = \dfrac{12-11/2}{1} = \dfrac{13}{2}$

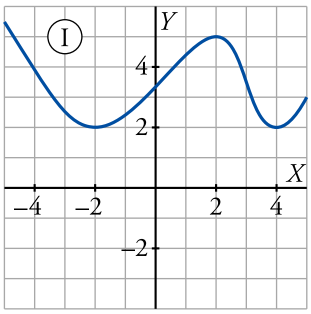
T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{27/2-11/2}{2} = 4$

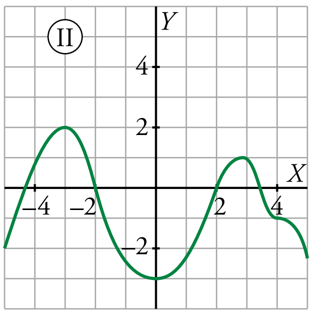
T.V.M. $[2, 3] = \dfrac{27/2-12}{1} = \dfrac{3}{2}$

12 □□□ **De cada una de las siguientes funciones di:**

a) En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente.

b) Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos.





a) I crece en $(-2, 2) \cup (4, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, -2) \cup (2, 4)$.

II crece en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$. Decrece en $(-3, 0) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$.

b) I Mínimos relativos en los puntos (–2, 2) y (4, 2). Máximo relativo en el punto (2, 5).

II Mínimo relativo en el punto (0, –3). Máximos relativos en los puntos (–3, 2) y (3, 1).

PÁGINA 140

13 **La gráfica adjunta describe el valor de una empresa desde que abrió. Responde:**

a) ¿Cuál era su valor en el momento de la apertura?

b) ¿A cuánto se redujo su valor después de 4 meses?

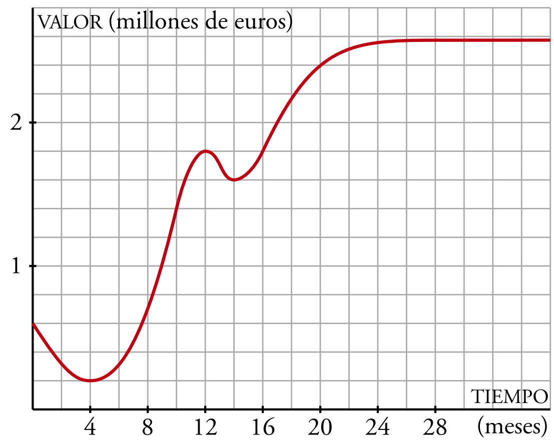
c) ¿Cuál es la T.V.M. en el intervalo [4, 12]? Da el resultado en miles de euros por mes.

d) ¿Cuál es la T.V.M. en [12, 14] y en [14, 20]?

e) Esta función tiene un máximo y dos mínimos relativos. Descríbelos.

f) ¿Cuál parece la tendencia de esta función para los próximos meses?

g) Haz una descripción global del valor de esta empresa en sus tres primeros años.



a) El valor de la empresa en el momento de la apertura era de 600 000 €.

b) Después de 4 meses su valor se redujo a 200 000 €.

c) T.V.M. [4, 12] = $\frac{1\,800\,000 - 200\,000}{12 - 4} = 200\,000$ €/mes

d) T.V.M. [12, 14] = $\frac{1\,600\,000 - 1\,800\,000}{14 - 12} = -100\,000$ €/mes

T.V.M. [14, 20] = $\frac{2\,400\,000 - 1\,600\,000}{20 - 14} = 133\,333$ €/mes

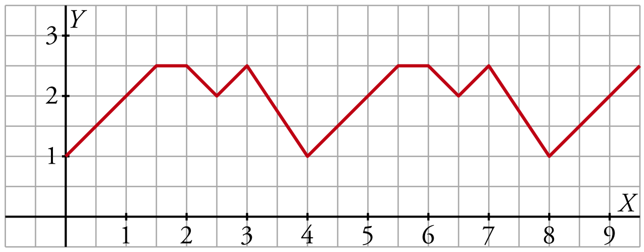
e) Máximo relativo en (12, 1 800 000)

Mínimos relativos en (4, 200 000) y (14, 1 600 000)

f) Parece que el valor de la empresa, para los próximos meses, tiende a 2 600 000 €.

g) El valor de la empresa tiene un brusco descenso en los cuatro primeros meses. A partir de aquí crece rápidamente durante 8 meses y tiene una ligera caída en los dos meses siguientes. A partir del mes 14.° crece rápidamente durante otros 6 meses y después cada vez más despacio. Su precio se aproxima a 2 600 000 €.

14 ■□□ **¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su periodo?**

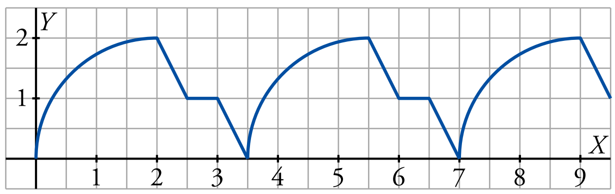


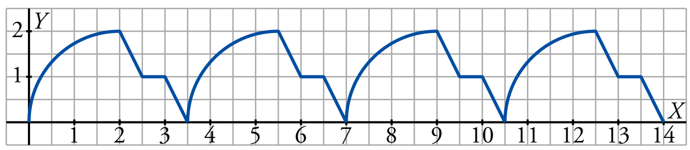
Averigua los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

La función es periódica de periodo 4.

$f(1) = 2$; $f(3) = 2{,}5$; $f(20) = f(0) = 1$; $f(23) = f(3) = 2{,}5$; $f(42) = f(2) = 2{,}5$

15 ■□□ **Continúa esta gráfica sabiendo que se trata de una función periódica. Di cuál es su periodo.**





Su periodo es 3,5.

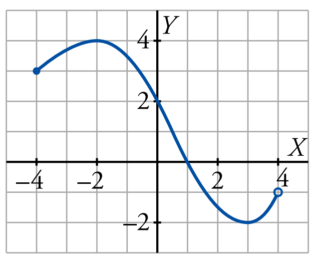
16 ■□□ **Averigua si los puntos $A(0, 3)$, $B(1, 5)$ y $C(-1, 1)$ pertenecen a la gráfica de la función:**

$$y = 3x^2 - x + 3$$

$A(0, 3)$	$x = 0$	$\rightarrow$	$y = 3 \cdot 0^2 - 0 + 3 = 3$	Sí pertenece.
$B(1, 5)$	$x = 1$	$\rightarrow$	$y = 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 5$	Sí pertenece.
$C(-1, 1)$	$x = -1$	$\rightarrow$	$y = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3 = 7$	No pertenece

Los puntos A y B pertenecen a la función. El C, no

17 ■□□ **Observa la gráfica de la función y responde:**



a) ¿Cuáles son su dominio de definición y su recorrido?

b) ¿Tiene máximo y mínimo relativos? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

c) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

d) ¿En qué intervalos es la función creciente y en cuáles es decreciente?

a) Dominio = $[-4, 4)$.

Recorrido = $[-2, 4]$.

b) Tiene un máximo relativo en el punto $(-2, 4)$ y un mínimo relativo en $(3, -2)$.

c) Corta a los ejes en los puntos $(0, 2)$ y $(1, 0)$.

d) Crece en $(-4, -2) \cup (3, 4)$.

Decrece en $(-2, 3)$.

18 ■■□ **a) Calcula la T.V.M. de la función $y = 2x - 3$ en los intervalos [0, 1], [5, 6], [1, 5], [0, 7].**

b) Observa que en todos los intervalos el valor obtenido es igual. ¿Con qué elemento característico de la recta coincide ese valor?

c) Generaliza completando la frase:

"En las funciones lineales, la T.V.M. en cualquier intervalo es igual a ....".

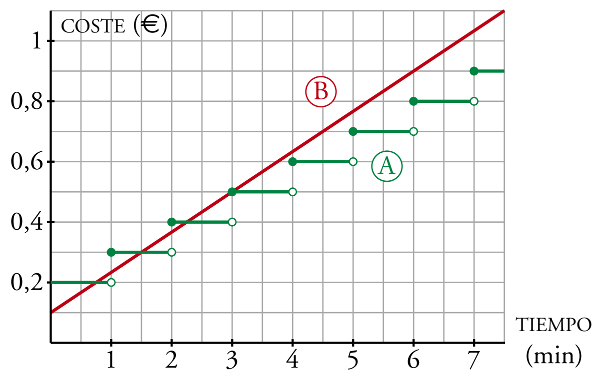
a) T.V.M. $[0, 1] = \dfrac{-1+3}{1} = 2$ T.V.M. $[5, 6] = \dfrac{9-7}{1} = 2$

T.V.M. $[1, 5] = \dfrac{7+1}{5-1} = 2$ T.V.M. $[0, 7] = \dfrac{11+3}{7} = 2$

b) Coincide con la pendiente de la recta $y = 2x - 3$.

c) En las funciones lineales, la T.V.M. en cualquier intervalo es igual a su pendiente.

19 ■■□ **Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:**



a) ¿Qué dos variables se relacionan en estas gráficas? ¿Cuál es la independiente y cuál la dependiente?

b) Di si cada una de estas funciones es continua. Escribe los puntos de discontinuidad si es que los hay.

c) Di cuánto vale una llamada de 3 minutos con cada una de las dos compañías. ¿Y una de media hora?

a) Tiempo: variable independiente.

Coste: variable dependiente.

b) A es discontinua en los puntos de abscisas $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$

B es continua.

c) Tanto en A como en B el punto de abscisa 3 es $(3; 0{,}5)$. Por tanto, en ambas compañías el coste de una llamada de 3 min es de 0,50 €.

Llamadas de media hora:

En A, $0{,}2 + 0{,}1 \cdot 30 = 3{,}20$ €.

En B, cada 3 min aumenta 0,4 €. Por tanto, en 30 min:

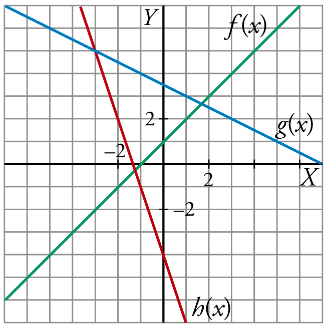
$$0{,}1 + 4 = 4{,}10 \text{ €}$$

PÁGINA 150

PRACTICA

Pendiente de una recta

1 □□□ **Halla la pendiente de cada una de las rectas dibujadas:**

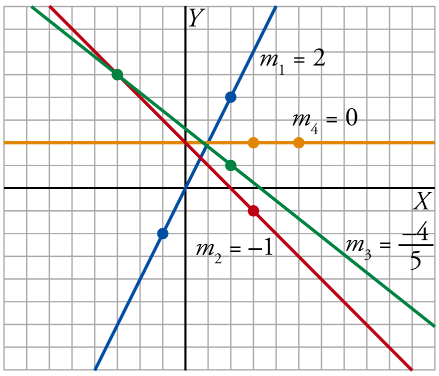


$f(x) \to 1$ $\quad g(x) \to -\dfrac{1}{2}$ $\quad h(x) \to -3$

2 □□□ **Halla gráficamente la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes puntos:**

a) **(2, 4) y (–1, –2)** **b)** **(–3, 5) y (3, –1)**

c) **(–3, 5) y (2, 1)** **d)** **(3, 2) y (5, 2)**



3 □□□ **Halla numéricamente las pendientes de las rectas descritas en el ejercicio anterior.**

a) $\dfrac{-2-4}{-1-2} = \dfrac{-6}{-3} = 2$ b) $\dfrac{-1-5}{3+3} = \dfrac{-6}{6} = -1$

c) $\dfrac{1-5}{2+3} = \dfrac{-4}{5}$ d) $\dfrac{2-2}{5-3} = 0$

4 □□□ **La pendiente de la recta $r: y = 5x - 1$ es 5.**

Compruébalo hallando dos puntos de r y dividiendo la variación de y entre la variación de x.

$(0, -1); (1, 4) \rightarrow m = \frac{4+1}{1-0} = 5$

5 □□□ **Halla las pendientes de las siguientes rectas, obteniendo dos de sus puntos:**

a) $y = 4x - 2$ **b)** $y = -\frac{4}{5}x$

c) $y = \frac{5x}{4} + 3$ **d)** $y = 8 - 5x$

Comprueba, en cada caso, que coinciden con el coeficiente de la x (puesto que la y está despejada).

¿Qué relación existe entre el crecimiento o el decrecimiento de una recta y su pendiente?

a) $(0, -2); (1, 2) \rightarrow m = \frac{2+2}{1-0} = 4$

b) $(0, 0); (1, -4/5) \rightarrow m = \frac{-4/5}{1} = -\frac{4}{5}$

c) $(0, 3); (4, 8) \rightarrow m = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}$

d) $(0, 8); (1, 3) \rightarrow m = \frac{3-8}{1-0} = -5$

Si crece, la pendiente es positiva.

Si decrece, la pendiente es negativa.

6 □□□ **Di cuál es la pendiente de las siguientes rectas observando el coeficiente de la x:**

a) $y = x - 4$ **b)** $y = -x$ **c)** $y = -4$

d) $y = \frac{4x-5}{2}$ **e)** $y = \frac{3-2x}{4}$ **f)** $y = \frac{7}{3}$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{4}{2} = 2$ e) $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ f) 0

7 □□□ **Halla las pendientes de las siguientes rectas obteniendo el coeficiente de la x al despejar la y:**

a) $6x + 3y - 4 = 0$ **b)** $x + 4y - 2 = 0$

c) $3x - 2y + 6 = 0$ **d)** $-3x + 2y = 0$

e) $3y - 12 = 0$ **f)** $\frac{3}{4}x - 2y + 1 = 0$

a) $y = \dfrac{4 - 6x}{3} \rightarrow m = -\dfrac{6}{3} = -2$

b) $y = \dfrac{2 - x}{4} \rightarrow m = -\dfrac{1}{4}$

c) $y = \dfrac{6 + 3x}{2} \rightarrow m = \dfrac{3}{2}$

d) $y = \dfrac{3x}{2} \rightarrow m = \dfrac{3}{2}$

e) $y = 4 \rightarrow m = 0$

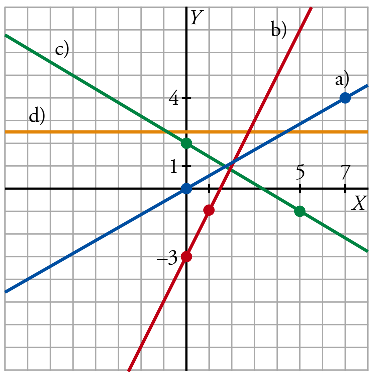
f) $y = \dfrac{1 + (3/4)x}{2} \rightarrow m = \dfrac{3}{8}$

Ecuación y representación de funciones lineales

8 ■□□ **Representa las siguientes rectas:**

a) $y = \dfrac{4}{7}x$ **b)** $y = 2x - 3$

c) $y = \dfrac{-3x + 10}{5}$ **d)** $y = 2,5$



9 ■□□ **Halla la ecuación de las rectas que pasan por los puntos que se indican y represéntalas:**

a) (2, 3) y (7, 0)

b) (–2, 5) y por el origen de coordenadas

c) (–3, 2) y (3, 2)

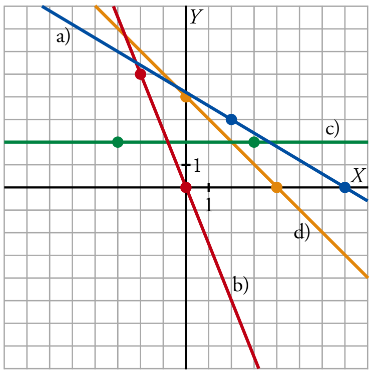
d) (0, 4) y (4, 0)

a) $m = \dfrac{0-3}{7-2} = -\dfrac{3}{5} \rightarrow y = -\dfrac{3}{5}(x-7)$

b) $m = -\dfrac{5}{2} \rightarrow y = -\dfrac{5}{2}x$

c) $m = \dfrac{2-2}{3+3} = 0 \rightarrow y = 2$

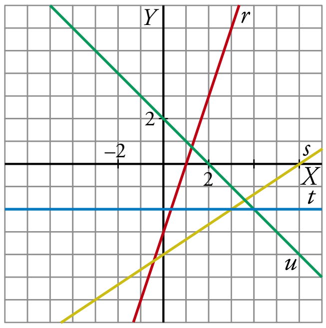
d) $m = \dfrac{0-4}{4-0} = -1 \rightarrow y = -x + 4$

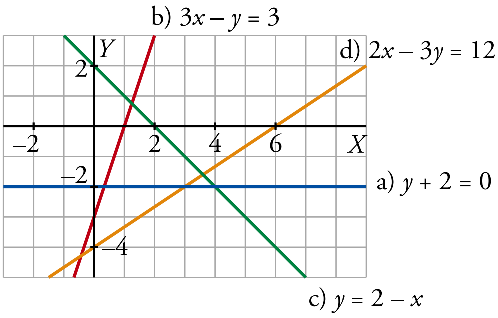


10 **Asocia a cada recta su ecuación. Di, en cada caso, cuál es su pendiente.**

a) $\boldsymbol{y + 2 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{3x - y = 3}$

c) $\boldsymbol{y = 2 - x}$ **d)** $\boldsymbol{2x - 3y = 12}$





Pendientes:

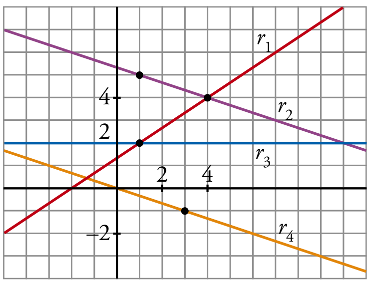
a) $m = 0$

b) $m = 3$

c) $m = -1$

d) $m = 2/3$

11 **Halla la ecuación de las rectas** r_1, r_2, r_3 **y** r_4 **en la forma punto-pendiente.**



- r_1 pasa por $(1, 2)$ y $(4, 4) \rightarrow m = \dfrac{4-2}{4-1} = \dfrac{2}{3}$

  $r_1 \rightarrow y = \dfrac{2}{3}(x-1) + 2$

- r_2 pasa por (1, 5) y (4, 4) $\rightarrow m = \dfrac{4-5}{4-1} = \dfrac{-1}{3}$

  $r_2 \rightarrow y = -\dfrac{1}{3}(x-1) + 5$

- r_3 pasa por (1, 2) y su pendiente es 0 (es paralela al eje X).

  $r_3 \rightarrow y = 0(x-1) + 2 \rightarrow y = 2$

- r_4 pasa por (0, 0) y (3, –1) $\rightarrow m = \dfrac{-1}{3}$

  $r_4 \rightarrow y = -\dfrac{1}{3}(x-0) + 0 \rightarrow y = -\dfrac{1}{3}x$

PÁGINA 151

12 **Halla la ecuación de las rectas que cumplen las siguientes condiciones y dibújalas:**

a) Pasa por (5, 3) y tiene una pendiente de 3/5.

b) Pasa por el punto (5, 3) y tiene pendiente –1/2.

c) Pasa por (–4, 6) y tiene una pendiente de –2/3.

d) Pasa por el punto (5, 6) y tiene la misma pendiente que la recta $2x + y = 0$.

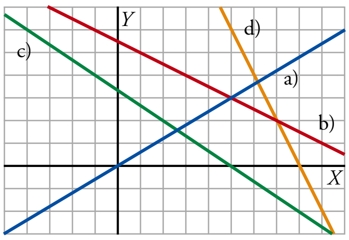
a) $y = \dfrac{3}{5}(x-5) + 3 \rightarrow y = \dfrac{3}{5}x$

b) $y = -\dfrac{1}{2}(x-5) + 3 \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{2}$

c) $y = -\dfrac{2}{3}(x+4) + 6 \rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$

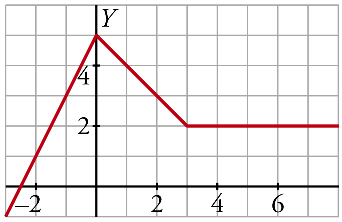
d) Hallamos la pendiente de $2x + y = 0 \rightarrow y = -2x \rightarrow m = -2$

$y = -2(x-5) + 6 \rightarrow y = -2x + 16$



Funciones definidas a trozos

13 ■□□ **¿A cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica dibujada?**



$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } -3 \le x \le -1 \\ x + 5 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 \le x \le 8 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2 & \text{si } 3 \le x \le 8 \end{cases}$$

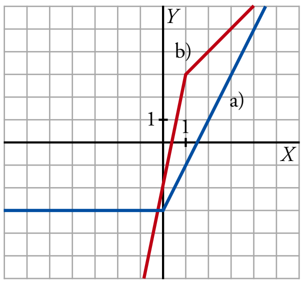
$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -3 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } 3 < x < 8 \end{cases}$$

La gráfica corresponde a la función $g(x)$.

La función que describe la pendiente de la gráfica en cada punto es $h(x)$.

14 ■□□ **Representa las siguientes funciones definidas a trozos:**

a) $y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x + 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

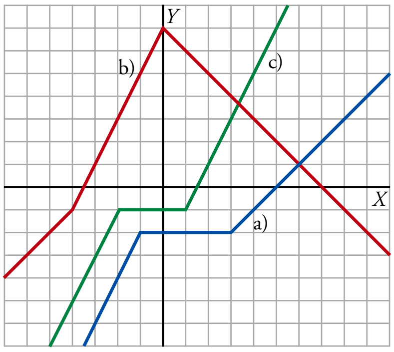


15 ■□□ **Representa las siguientes funciones definidas a trozos:**

a) $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le -1 \\ -2 & \text{si } -1 < x \le 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

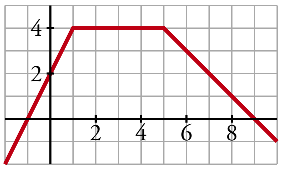
b) $y = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -4 \\ 2x + 7 & \text{si } -4 \le x \le 0 \\ 7 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \le -2 \\ -1 & \text{si } -2 < x \le 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



PIENSA Y RESUELVE

16 ■■□ **Queremos hallar la expresión analítica de esta función formada por tres tramos de rectas.**



a) Para $x \le 1$, la recta pasa por (0, 2) y (1, 4). Escribe su ecuación.

b) Para $1 \le x \le 5$, es una función constante. Escribe su ecuación.

c) Para $x \ge 5$, la recta pasa por (5, 4) y (9, 0). Escribe su ecuación.

d) Completa la expresión analítica de la función:

$$y = \begin{cases} \dots & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } 1 \le x \dots \\ \dots & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

a) $m = \dfrac{4 - 2}{1 - 0} = 2 \rightarrow y = 2x + 2, \ x \le 1$

b) $y = 4, \ 1 \le x \le 5$

c) $m = \dfrac{0 - 4}{9 - 5} = -1 \rightarrow y = -(x - 9) \rightarrow y = -x + 9$

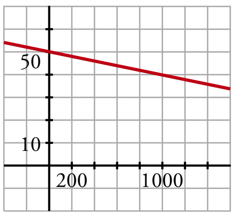
d) $y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } 1 \le x \le 5 \\ 9 - x & \text{si } x > 5 \end{cases}$

17 **Representa las siguientes rectas tomando una escala adecuada en cada eje:**

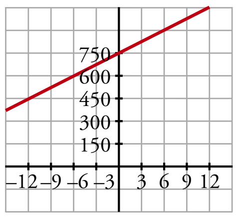
a) $y = 50 - 0{,}01x$ **b)** $y = 25x + 750$

c) $y = \dfrac{x}{150} - 5$ **d)** $x - 70y = 840$

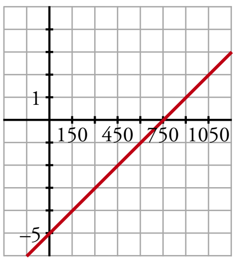
a)



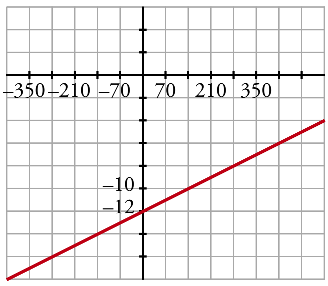
b)



c)



d)



18 **Halla el valor que tiene que tener** a **para que el punto** $A(a, 7)$ **esté sobre la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (–1, –1).**

- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por (0, 1) y (–1, –1):

  $m = \dfrac{-1 - 1}{-1 - 0} = 2 \rightarrow y = 2(x - 0) + 1 \rightarrow y = 2x + 1$

- Si $A(a, 7)$ está sobre la recta anterior, tiene que verificar su ecuación. Por tanto:

  $7 = 2 \cdot a + 1 \rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3$

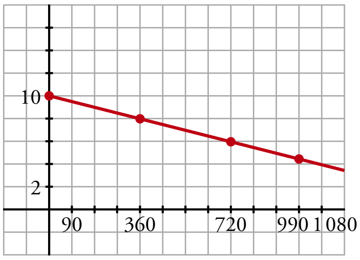
19 **Mientras ascendíamos por una montaña, medimos la temperatura y obtuvimos los datos de esta tabla:**

ALTURA (m)	0	360	720	990
TEMPERATURA (°C)	10	8	6	4,5

a) Representa los puntos en una gráfica.

b) Suponiendo que se sigue la misma pauta, halla la expresión analítica de la función *altura-temperatura*.

c) ¿A partir de qué altura la temperatura es menor que 0 °C?

a) 

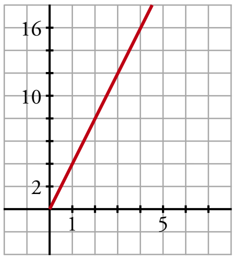
b) La recta pasa por (0, 10) y su pendiente es $m = \dfrac{8-10}{360-0} = \dfrac{-1}{180} \rightarrow y = 10 - \dfrac{x}{180}$

c) $0 > 10 - \dfrac{x}{180} \rightarrow \dfrac{x}{180} > 10 \rightarrow x > 1\,800$

A partir de 1 800 °C.

20 ■■□ **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? Dibújala.**

Si el lado es x y el perímetro es y: $y = 4x$



PÁGINA 152

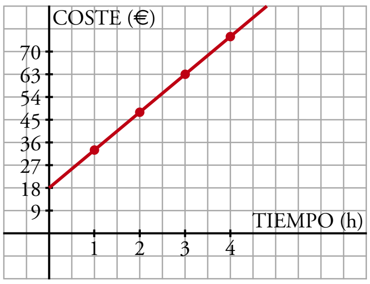
21 ■■□ **Un fontanero cobra 18 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.**

a) Haz una tabla de valores de la función *tiempo-coste* y represéntala gráficamente.

b) Si ha cobrado por una reparación 70,50 €, ¿cuánto tiempo ha invertido en la reparación?

a)

TIEMPO (h)	1	2	3	4	…
COSTE (€)	33	48	63	78	…

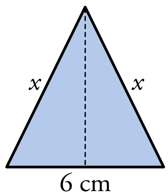


b) La función que nos da el coste es $y = 18 + 15x$.

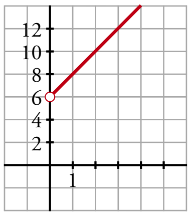
Si $y = 70{,}50 \rightarrow 70{,}50 = 18 + 15x \rightarrow x = \dfrac{70{,}50 + 18}{15} = 3{,}5$

La reparación le ha llevado 3 horas y media.

22 **Sabemos que el lado desigual de un triángulo isósceles mide 6 cm. Llama *x* al otro lado y escribe la ecuación de la función que nos da su perímetro. Represéntala.**



$y = 6 + x + x = 6 + 2x, \;\; x > 0$



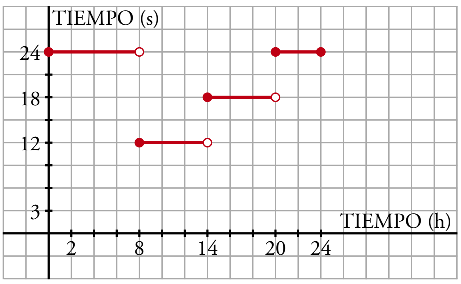
23 **En las llamadas telefónicas interurbanas, el tiempo que dura un paso del contador depende de la hora de la llamada:**

De 8 h a 14 h	**12 segundos**
De 14 h a 20 h	**18 segundos**
De 20 h a 8 h del día siguiente ..	**24 segundos**

a) Representa gráficamente la función que da la duración del paso del contador según la hora de la llamada para un día completo.

b) Busca la expresión analítica de esa función.

a)



b)

$$f(x) = \begin{cases} 24, & 0 \le x < 8 \\ 12, & 8 \le x < 14 \\ 18, & 14 \le x < 20 \\ 24, & 20 \le x \le 24 \end{cases}$$

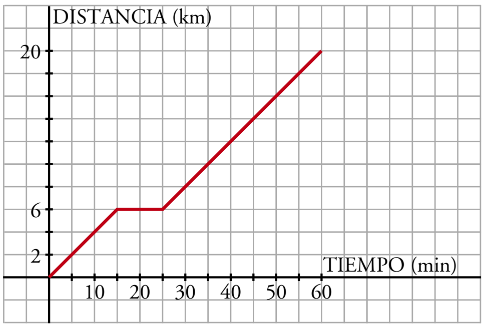
24 **Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.**

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa.*

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? (Suponemos que en cada etapa la velocidad es constante).

c) Busca la expresión analítica de la función que has representado.

a)



b) Sí, no hay más que observar que la pendiente de la gráfica en ambos casos es la misma.

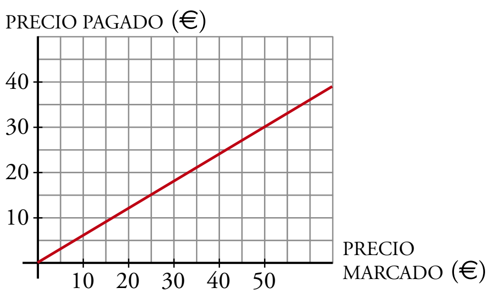
c) La pendiente de los dos tramos no constantes es la misma: $m = \dfrac{2}{5}$

Teniendo en cuenta que la función pasa por (0, 0) y por (25, 6), escribimos la expresión buscada:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}x, & 0 \le x < 15 \\ 6, & 15 \le x < 25 \\ \dfrac{2}{5}(x - 25) + 6, & 25 \le x \le 60 \end{cases}$$

25 **En una tienda rebajan el 40% en todas las compras que se hagan.**

Esta es la gráfica de la función que muestra la relación entre el precio marcado, *x*, y el que pagamos, *y*:



a) ¿Cuál es la ecuación de esa recta?

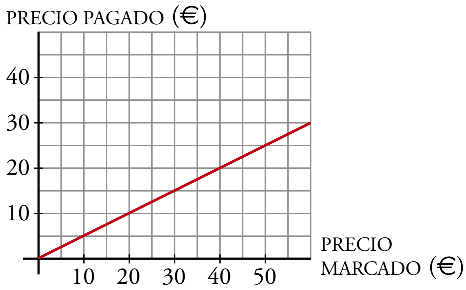
b) Si la rebaja fuese de un 50%, ¿cómo sería la gráfica? ¿Cuál sería su ecuación?

a) La recta pasa por (0, 0) y (25, 15). Su pendiente es $m = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

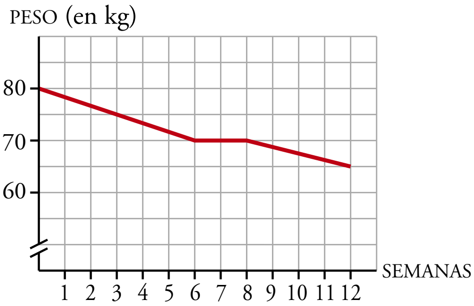
La ecuación de la recta es: $y = \frac{3}{5}x \rightarrow y = 0{,}6x$

b) En este caso, la ecuación sería: $y = 0{,}5x$

La representamos:



26 **El médico ha puesto a Ricardo un régimen de adelgazamiento y ha hecho esta gráfica para explicarle lo que espera conseguir en las 12 semanas que dure la dieta.**



a) ¿Cuál era su peso al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto tiene que adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la sexta y la octava semanas?

c) Halla la expresión analítica de la función anterior.

a) Ricardo pesaba 80 kg al comenzar el régimen.

b) $\frac{5}{3} = 1{,}67$ kg por semana

Entre la sexta y octava semana no tiene que adelgazar nada.

c) Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos:

- Para $0 \leq x \leq 6$, la pendiente $m = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ y $n = 80 \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 80$
- Para $6 < x \leq 8$, $y = 70$
- Para $8 < x \leq 12$, $m = -\frac{5}{4}$ y pasa por (12, 65)

$$y - 65 = -\frac{5}{4}(x - 12) \to y = -\frac{5}{4}x + 80$$

Luego, la expresión analítica de esta función será:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{5}{3}x + 80 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 70 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ -\dfrac{5}{4}x + 80 & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases}$$

27 **Un móvil, en el instante inicial, está a 2 m del origen y se aleja de este a una velocidad constante de 3 m/s.**

a) ¿Cuál es la ecuación que ofrece su posición en función del tiempo?

b) ¿A qué distancia del origen está el móvil al minuto de empezar a contar? ¿Cuánto recorre en ese tiempo?

c) Representa la función.

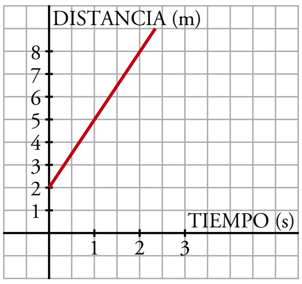
a) Se trata de una recta que pasa por (0, 2) y su pendiente ("su velocidad") es $m = 3$. Por tanto:

$y = 3x + 2$

b) 1 min = 60 s $\to y(60) = 3 \cdot 60 + 2 = 182$

El móvil está a 182 m del origen.

Como en el instante inicial estaba a 2 m, ha recorrido 180 m.

c) 

10 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 162

PRACTICA

Funciones cuadráticas

1 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:**

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 4$

c) $y = 2x^2$ **d)** $y = 0{,}5x^2$

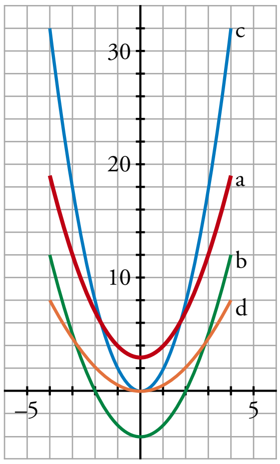
	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
a)	y	19	12	7	4	3	4	7	12	19
b)	y	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12
c)	y	32	18	8	2	0	2	8	18	32
d)	y	8	9/2	2	1/2	0	1/2	2	9/2	8

a) Vértice: (0, 3)

b) Vértice: (0, –4)

c) Vértice: (0, 0)

d) Vértice: (0, 0)



2 **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 4)^2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$ **d)** $y = -x^2 + 5$

a) Vértice: (–4, 0)

Cortes con los ejes: (–4, 0)

Otros puntos(–5, 1), (–6, 4), (–3, 1), (–2, 4)

b) Vértice: (–3, –3)

Cortes con los ejes: (–6, 0), (0, 0)

Otros puntos: $\left(-5, -\frac{5}{3}\right)$, $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

c) Vértice: (1, 0)

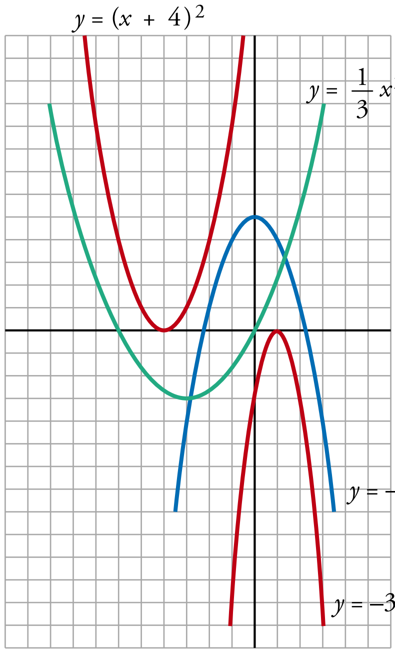
Cortes con los ejes: (1, 0)

Otros puntos: (0, –3), (2, –3), (–1, –12), (3, –12)

d) Vértice: (0, 5)

Cortes con los ejes: (0, 5), $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$

Otros puntos: (–1, 4), (–2, 1), (1, 4), (2, 1)



3 **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de estas parábolas señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo:**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = 3 - x^2$

c) $y = -2x^2 - 4x + 6$ **d)** $y = 3x^2 - 6x$

e) $y = x^2 + 4x + 4$ **f)** $y = -5x^2 + 10x - 3$

a) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = -5 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (0, –5). Es un mínimo.

b) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 3 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (0, 3). Es un máximo.

c) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-4} = -1 \\ x = -1 \rightarrow y = 8 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (–1, 8). Es un máximo.

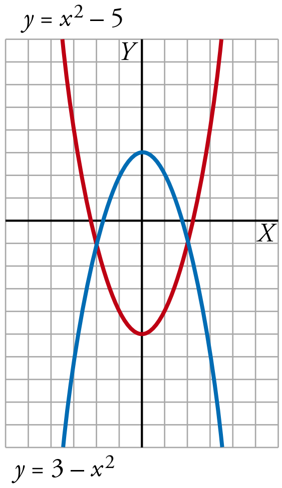
d) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = -3 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (1, –3). Es un mínimo.

e) $\left.\begin{array}{l} p = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x = -2 \rightarrow y = 0 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (–2, 0). Es un mínimo.

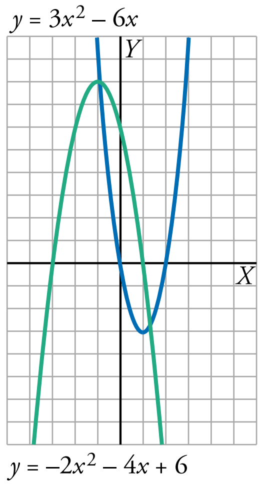
f) $\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-10}{-10} = 1 \\ y = -5 + 10 - 3 = 2 \end{array}\right\}$ Vértice en el punto (1, 2). Es un máximo.

4 **Representa cada una de las parábolas del ejercicio anterior.**

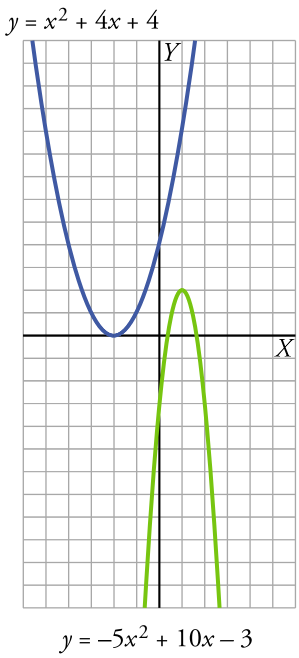
a) y b)



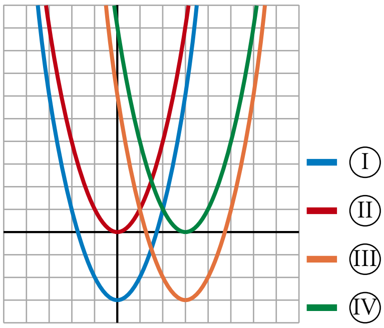
c) y d)



e) y f)



5 **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**



a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$

a) $y = x^2 \leftrightarrow$ II

b) $y = (x - 3)^2 \leftrightarrow$ IV

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow$ I

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow$ III

Otras funciones

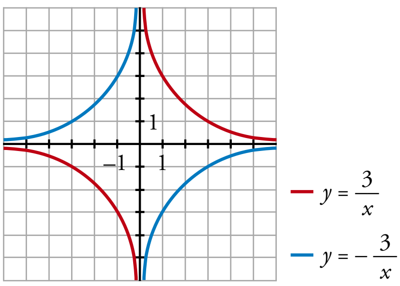
6 **Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:**

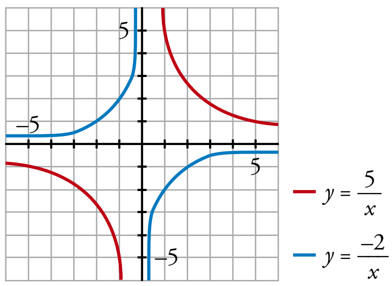
a) $y = \dfrac{3}{x}$ $\quad x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

b) $y = -\dfrac{3}{x}$ $\quad x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

c) $y = \dfrac{5}{x}$ $\quad x = -5; -1; -1/2; 1/2; 1; 5$

d) $y = -\dfrac{2}{x}$ $\quad x = -2; -1; -1/2; 1/2; 1; 2$





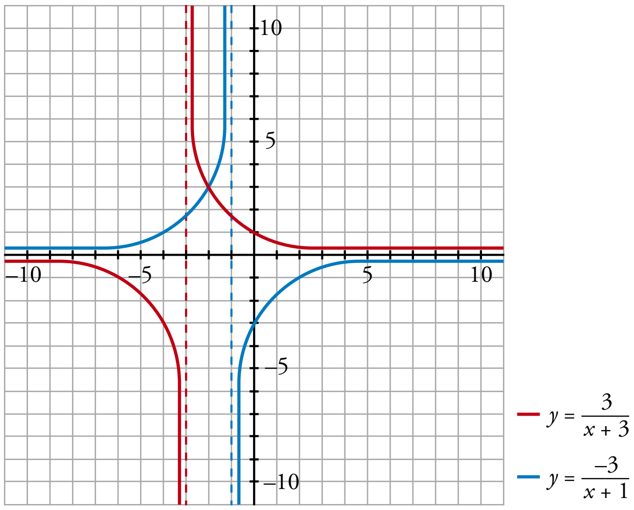
7 **Halla las asíntotas de cada una de estas funciones hiperbólicas y represéntalas gráficamente ayudándote de una tabla de valores:**

a) $y = \dfrac{3}{x+3}$ **b)** $y = \dfrac{-3}{x+1}$

c) $y = \dfrac{5}{1-x}$ **d)** $y = \dfrac{-7}{x-1}$

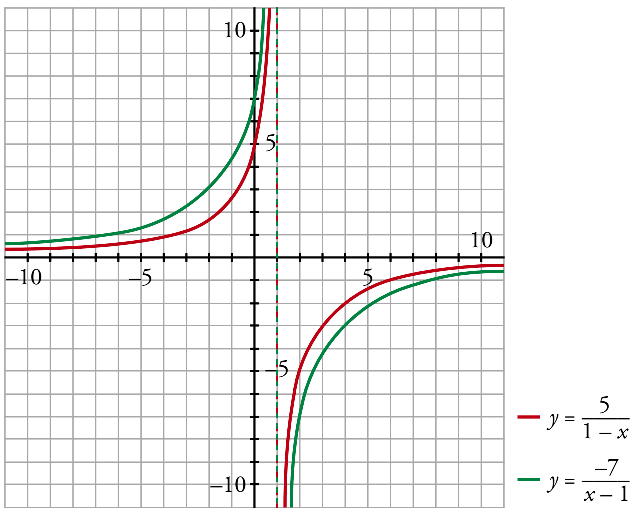
a) Asíntota → $x = -3$

b) Asíntota → $x = -1$

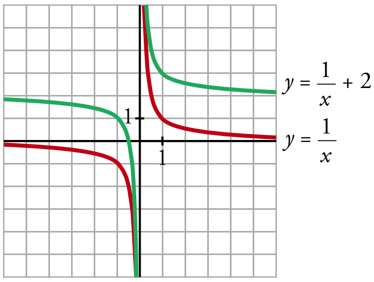


c) Asíntota → $x = 1$

d) Asíntota → $x = 1$



8 ■■□ **Observa estas hipérbolas y contesta:**



a) ¿A qué valor se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más grandes?

b) ¿A qué valores se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más próximos a cero?

c) ¿Cuál es la asíntota horizontal de cada función?

d) Dibuja la gráfica de $y = \frac{1}{x+2}$. ¿Cuáles son sus asíntotas?

a) Roja → 0

Verde → $x = 2$

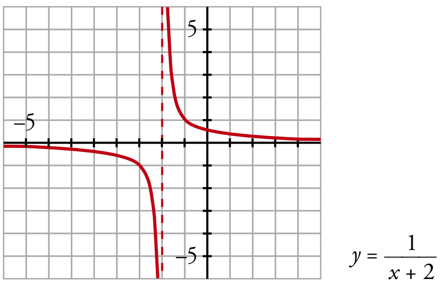
b) Roja → infinito o menos infinito

Verde → infinito o menos infinito

c) Roja → $y = 0$

Verde → $y = 2$

d)



Asíntotas: $x = -2$, $y = 0$

9 ■■□ **Halla las asíntotas de cada una de estas hipérbolas y represéntalas gráficamente:**

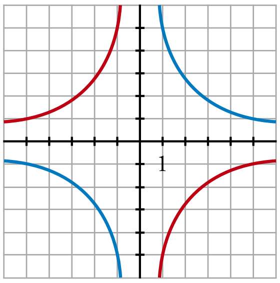
a) $y = \frac{-5}{x}$ **b)** $y = \frac{5}{x}$

c) $y = \frac{-5}{x-2}$ **d)** $y = \frac{-5}{x} - 2$

e) $y = \frac{5}{x} + 2$ **f)** $y = \frac{-5}{x-2} - 2$

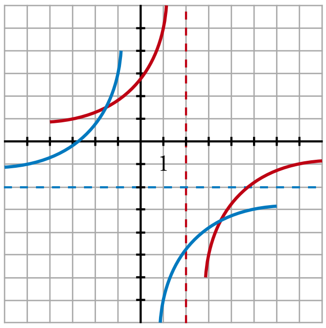
Asíntotas → a) $x = 0$, $y = 0$ b) $x = 0$, $y = 0$ c) $x = 2$, $y = 0$

d) $x = 0$, $y = -2$ e) $x = 0$, $y = 2$ f) $x = 2$, $y = -2$



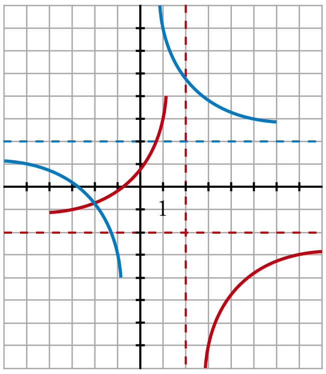
— $y = \frac{-5}{x}$

— $y = \frac{5}{x}$



— $y = \frac{-5}{x-2}$

— $y = \frac{-5}{x} - 2$

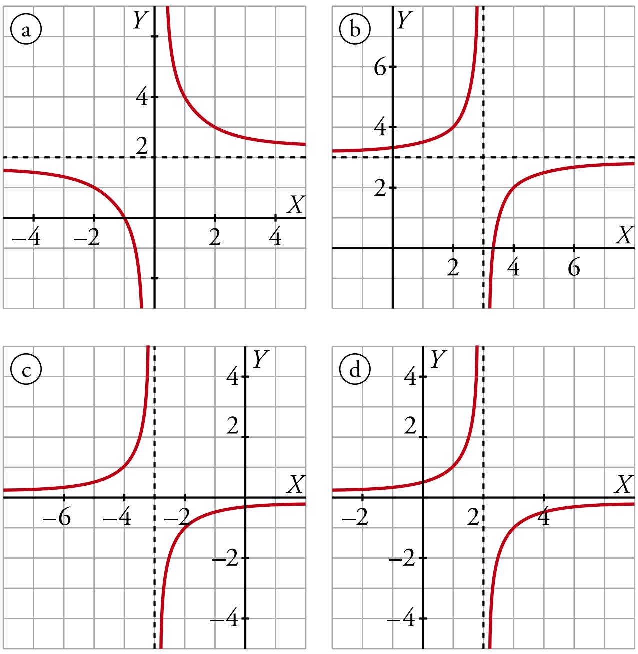


— $y = \frac{5}{x} + 2$

— $y = \frac{-5}{x-2} - 2$

PÁGINA 163

10 **Asocia a cada gráfica una de las fórmulas que aparecen abajo:**



I) $y = \frac{1}{2 - x}$ **II)** $y = 3 - \frac{1}{x - 3}$ **III)** $y = 2 + \frac{2}{x}$ **IV)** $y = \frac{-1}{x + 3}$

I → d) II → b) III → a) IV → c)

11 ■□□ **Ayudándote de una tabla de valores, representa gráficamente las siguientes funciones. Para los apartados a) y b), da valores positivos a la x, y para los apartados c) y d), negativos. Di cuál es el dominio de definición de cada una de ellas:**

a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$

c) $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

a) $y = \sqrt{x} + 2$

x	0	1	4	9	16
y	2	3	4	5	6

Dominio = $[0, +\infty)$

b) $y = 2 - \sqrt{x}$

x	0	1	4	9	16
y	2	1	0	–1	–2

Dominio = $[0, +\infty)$

c) $y = 2\sqrt{-x}$

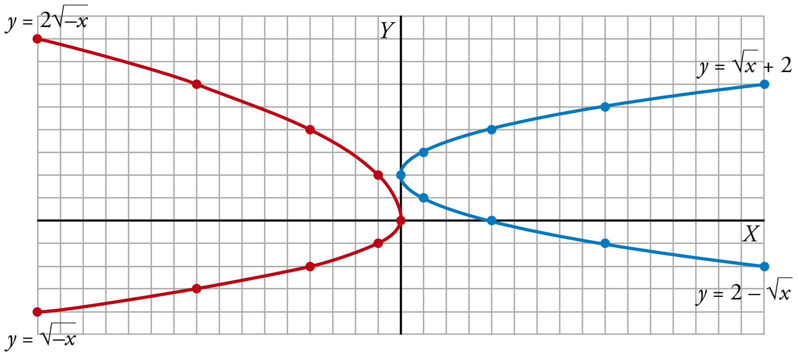
x	0	–1	–4	–9	–16
y	0	2	4	6	8

Dominio = $(-\infty, 0]$

d) $y = -\sqrt{-x}$

x	0	–1	–4	–9	–16
y	0	–1	–2	–3	–4

Dominio = $(-\infty, 0]$



12 ■□□ **Representa gráficamente cada una de estas funciones, dando los valores que se indican en cada caso. Di cuál es el dominio de definición de cada una de ellas:**

a) $y = \sqrt{2 - x}$ $\quad x = 2; -2; -7$

b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$ $\quad x = -2; 0; 6$

c) $y = \sqrt{-x}$ $\quad x = 0; -4; -9$

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3}$ $\quad x = -3; 1; 6$

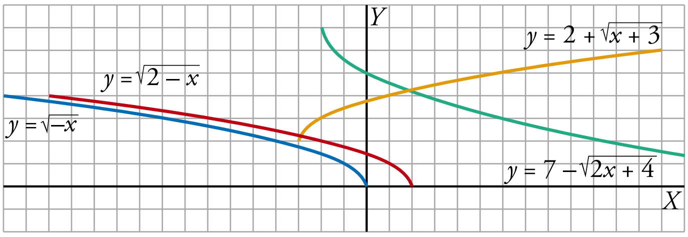
Date cuenta de que para cada una de las funciones hay valores que no se pueden dar y fíjate después en que estos valores no se encuentran en su dominio de definición.

a) $y = \sqrt{2 - x} \longrightarrow (2, 0), (-2, 2), (-7, 3)$. Dominio = $(-\infty, 2]$

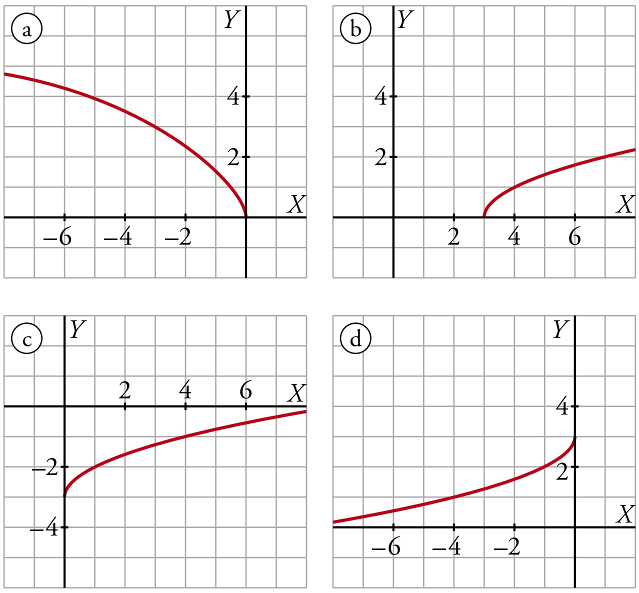
b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4} \longrightarrow (-2, 7), (0, 5), (6, 3)$. Dominio = $[-2, +\infty)$

c) $y = \sqrt{-x} \longrightarrow (0, 0), (-4, 2), (-9, 3)$. Dominio = $(-\infty, 0]$

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3} \longrightarrow (-3, 2), (1, 4), (6, 5)$. Dominio = $[-3, +\infty)$

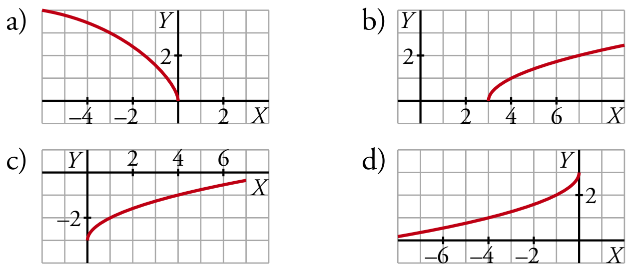


13 **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponda:**



I) $y = \sqrt{x - 3}$ **II)** $y = \sqrt{x} - 3$

III) $y = 3 - \sqrt{-x}$ **IV)** $y = \sqrt{-3x}$



I ↔ b)

II ↔ c)

III ↔ d)

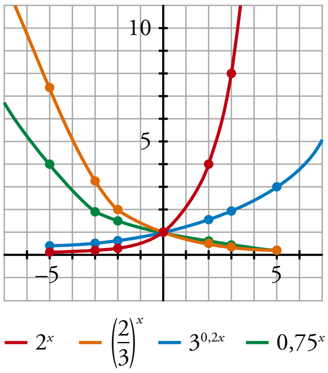
IV ↔ a)

14 □□□ **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores.**

(Ayúdate de la calculadora).

a) $y = 2^x$ **b)** $y = 3^{0,2x}$

c) $y = (2/3)^x$ **d)** $y = 0,75^x$

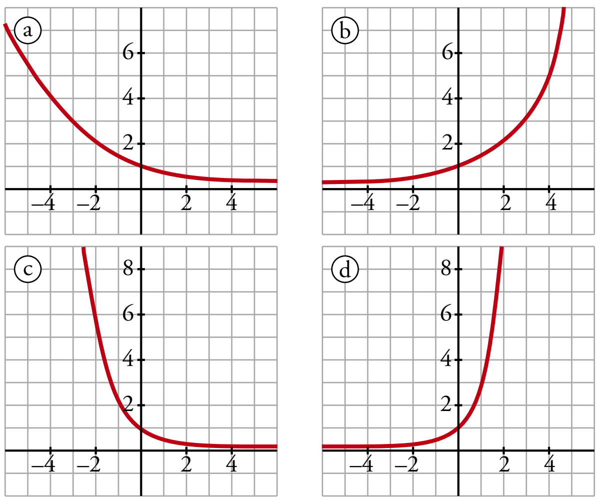


	x						
	–5	–3	–2	0	2	3	5
$y = 2^x$	1/32	1/8	1/4	1	4	8	32
$y = 3^{0,2x}$	1/3	0,52	0,64	1	1,55	1,9	3
$y = (2/3)^x$	7,59	3,37	2,25	1	$0,\widehat{4}$	0,296	0,132
$y = 0,75^x$	4,21	2,37	$1,\widehat{7}$	1	0,56	0,42	0,24

15 □□□ **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1,5^x$

III) $y = 0,4^x$ **IV)** $y = 0,7^x$



Di para cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I ↔ d) Creciente

II ↔ b) Creciente

III ↔ c) Decreciente

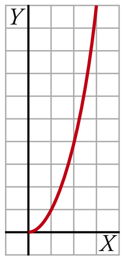
IV ↔ a) Decreciente

PÁGINA 164

PIENSA Y RESUELVE

16 **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el área de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? Dibújala.**

Si el lado del cuadrado es l, $A = l^2$



17 **Rocío ha comprado un regalo de cumpleaños para Paz, que ha costado 100 €. Como el resto de los amigos del grupo no han comprado nada, deciden pagar el regalo entre todos.**

a) Construye una función que nos dé el dinero que debe poner cada uno, dependiendo del número de personas que haya, y dibújala.

Todos los amigos se van a cenar a un restaurante en el que la comida vale 10 €.

b) ¿Cuál será, en este caso, la función que da el dinero que tiene que poner cada uno, sin incluir a Paz, dependiendo del número de personas que son?

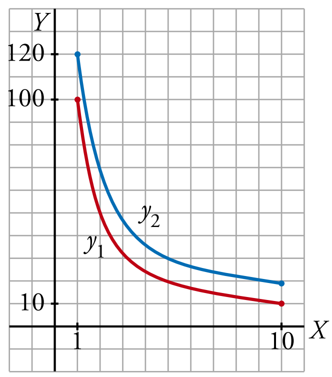
c) Dibuja esta última función en los mismos ejes que la anterior.

d) Teniendo en cuenta que x solo toma valores naturales y suponiendo que el número de amigos no supera el de 10, di el dominio de definición de cada una de las funciones descritas.

Si el número de amigos es x, $x \in \mathbb{N}$, la función que da lo que debe pagar cada uno es $y_1 = \dfrac{100}{x}$.

Si van a un restaurante, entonces la función es $y_2 = \dfrac{100 + 10(x + 1)}{x}$.

El dominio de definición de ambas funciones es $Dom = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



18 □□□ **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x \quad \text{en euros}$$

y los ingresos que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2 \quad \text{en euros}$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0{,}1x^2 - (20\,000 + 250x) \quad \to \quad B(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0{,}1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

19 □□□ **El coste por unidad de fabricación de ciertos sobres disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la función?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para 10 sobres.

c) Calcula, también, el coste por unidad y el coste total para 100 000 sobres.

d) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de sobres se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) Para 10 sobres:

Coste por unidad = $\dfrac{1\,003}{10} = 100{,}3$

Coste total de 10 unidades = 1 003

c) Para 100 000 sobres:

Coste por unidad = $\dfrac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

d) El coste por unidad se acerca a 0,3.

20 □□□ **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\to$ $3 = ka^0$ $\to$ $k = 3$

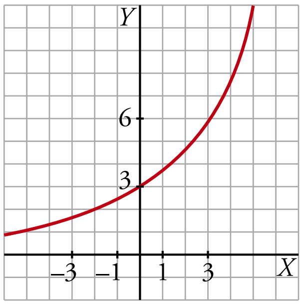
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\to$ $3{,}6 = ka^1$ $\to$ $3{,}6 = 3a$ $\to$ $a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



21 **La altura, *h*, a la que se encuentra en cada instante, *t*, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s es:**

$$h = 20t - 5t^2$$

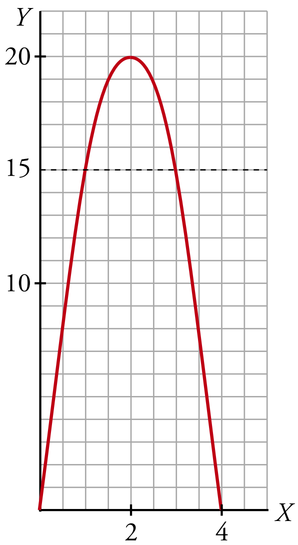
a) Haz una representación gráfica.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a) 

b) Dominio de definición = [0, 4]

c) La piedra alcanza la altura máxima a los 2 segundos de haberla lanzado, y es de 20 m.

d) A los 4 segundos.

e) $20t - 5t^2 = 15$

$5t^2 - 20t + 15 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

$-5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \ \to \ 1 \leq t \leq 3$

22 ■■□ **En el contrato de alquiler de un apartamento figura que el precio subirá un 5% anual.**

a) Si el precio es de 250 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?

b) Escribe la función que da el precio del alquiler según los años transcurridos.

a) $250 \cdot 1{,}05^5 = 319$ €

b) $250 \cdot 1{,}05^t = 11$

23 ■■□ **Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual.**

a) ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?

b) Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos.

c) Calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

a) $20\,000 \cdot 0{,}88^4 = 11\,994$ €

b) $P = 20\,000 \cdot 0{,}88^t$

c) $20\,000 \cdot 0{,}88^t = 10\,000 \to 0{,}88^t = \dfrac{1}{2} \to t \approx 5{,}3$

24 ■■□ **En un bosque, en etapa de crecimiento, se ha medido el volumen total de madera y se ha obtenido la cantidad de 10 250 m³.**

Se observa que el bosque crece a un ritmo de un 2% anual.

a) ¿Cuánta madera tendrá dentro de 10 años?

b) ¿Cuál es la función que da la cantidad de madera según los años transcurridos, suponiendo que se mantenga el ritmo de crecimiento?

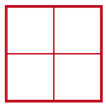
a) $10\,250 \cdot 1{,}02^{10} = 12\,495$

b) $10\,250 \cdot 1{,}02^t = V$

PÁGINA 165

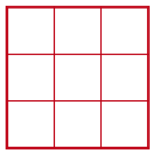
A contar cuadrados

AQUÍ HAY 5 CUADRADOS
1 de tamaño 2 × 2
4 de tamaño 1 × 1
5 en total



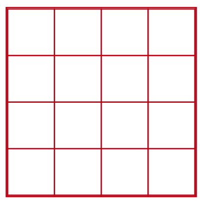
$f(2) = 5$

AQUÍ HAY 14 CUADRADOS
1 de tamaño 3 × 3
4 de tamaño 2 × 2
9 de tamaño 1 × 1
14 en total



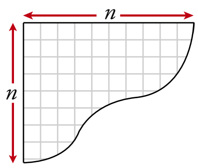
$f(3) = 14$

¿CUÁNTOS CUADRADOS HAY EN UNA CUADRÍCULA DE 4 × 4 CUADRADOS?



$f(4) = ?$

- **Calcula también $f(5)$.**
- **Y, por último, generaliza: ¿CUÁNTOS CUADRADOS HAY EN UNA CUADRÍCULA DE $n \times n$?**



UNA FÓRMULA QUE PUEDE VENIRTE BIEN

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

¿Cuál es la expresión de $f(n)$?

$f(2) = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$

$f(3) = 1 + 4 + 9 = 1^2 + 2^2 + 3^2$

$f(4) = 1 + 4 + 9 + 16 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

$f(5) = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

…

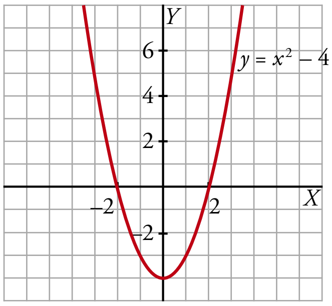
$$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

PÁGINA 165

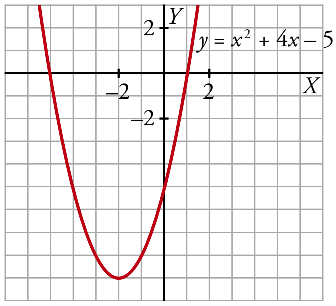
1 **Halla el vértice de estas parábolas y represéntalas:**

a) $y = x^2 - 4$ **b)** $y = x^2 + 4x - 5$

a) Vértice en el punto (0, –4)



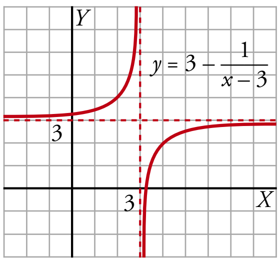
b) Vértice en el punto (–2, –9)



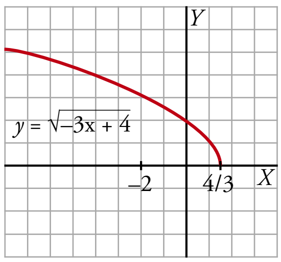
2 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 3 - \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $y = \sqrt{-3x + 4}$ **c)** $y = 2^x - 3$

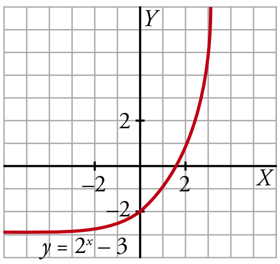
a)



b)



c)

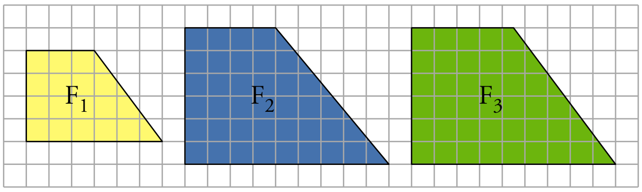


PÁGINA 180

PRACTICA

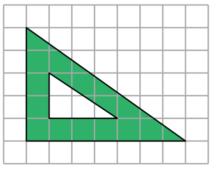
Figuras semejantes

1 **¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?**



F_1 es semejante a F_3. La razón de semejanza es $\frac{3}{2}$.

2 **a) ¿Son semejantes los triángulos interior y exterior?**



b) ¿Cuántas unidades medirán los catetos de un triángulo semejante al menor cuya razón de semejanza sea 2,5?

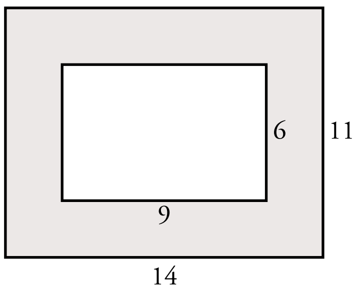
a) No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

b) $2 \cdot 2{,}5 = 5$

$3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$

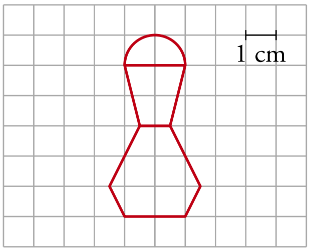
Los catetos medirán 5 y 7,5 unidades.

3 **Una fotografía de 9 cm de ancho y 6 cm de alto tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**



$\frac{14}{9} \neq \frac{11}{6} \rightarrow$ No son semejantes.

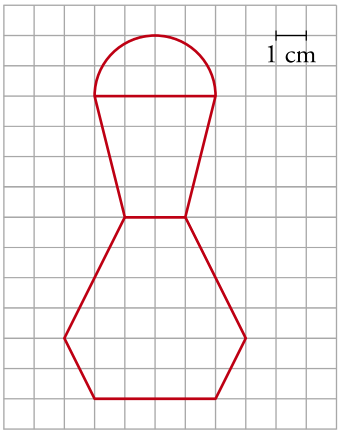
4 □□□ **Un joyero quiere reproducir un broche como el de la figura duplicando su tamaño.**



a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

b) Calcula su superficie.

a)



b) • El área de las dos partes inferiores se puede hallar sin más que contar cuadraditos:

$$26 + 12 = 38 \text{ cm}^2$$

• La parte de arriba es medio círculo de radio 2. Por tanto, su superficie es:

$$\frac{1}{2}(\pi \cdot r^2) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi \text{ cm}^2$$

• La superficie total de la figura es:

$$S = (38 + 2\pi) \text{ cm}^2$$

5 □□□ **Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?**

Área $= \dfrac{275 \cdot 150}{2} = 20\,625 \text{ cm}^2$

En el plano ocupará $\dfrac{20\,625}{25^2} = 33 \text{ cm}^2$.

6 □□□ **Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:**

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm^2.

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm^3 de agua.

a) $\left.\begin{array}{lcc} 1 \text{ cm} & \rightarrow & 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} & \rightarrow & h \\ 4 \text{ cm} & \rightarrow & d \end{array}\right\} \begin{array}{l} h = 1\,500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1\,000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array}$

La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.

b) $40 \cdot 250^2 = 2\,500\,000 \text{ cm}^2 = 250 \text{ m}^2$

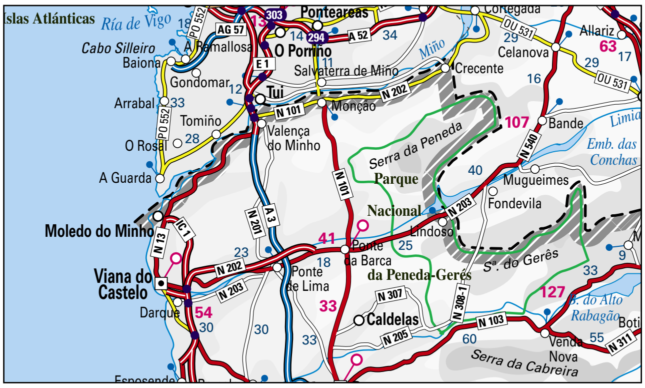
c) $20 \cdot 250^3 = 312\,500\,000 \text{ cm}^3 = 312{,}5 \text{ m}^3$

7 ■□□ **En este mapa de escala 1:1 500 000, la distancia entre Monçao y Ponte da Barca es 2 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real?

b) Calcula la distancia entre Viana do Castelo y Valença do Minho.

c) ¿Qué distancia habrá en el plano entre dos ciudades que distan 180 km?



a) Distancia real = $2 \cdot 1\,500\,000 = 3\,000\,000$ cm = 30 km

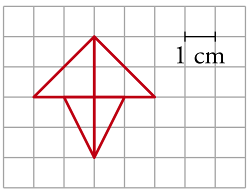
b) En el mapa, midiendo, vemos que la distancia entre las dos localidades mencionadas es 2,5 cm. Por tanto:

Distancia real = $2{,}5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000$ cm = 37,5 km

c) 180 km = 18 000 000 cm

Distancia en el mapa = $\dfrac{18\,000\,000}{1\,500\,000} = 12$ cm

8 ■■□ **Esta figura es el logotipo de una empresa automovilística. Quieren reproducirlo de forma que ocupe 54 cm² de superficie. ¿Cuáles serán sus dimensiones? Dibújalo.**

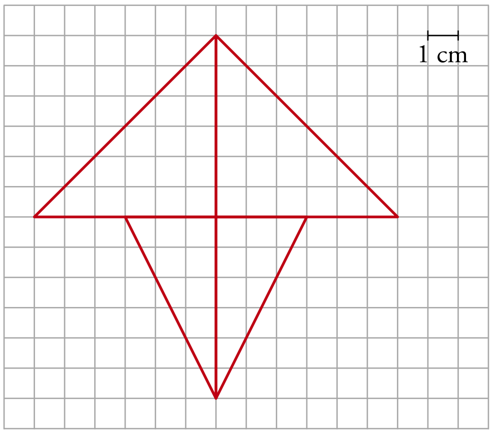


La superficie del logotipo es, siempre, de 6 cuadraditos (consideramos que al hacer la ampliación, también se amplían en la misma proporción los cuadraditos).

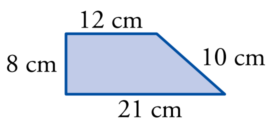
Necesitamos que la superficie de 6 cuadraditos de lado l sea 54 cm^2. Por tanto:

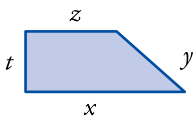
$$6\,l^2 = 54 \rightarrow l^2 = 9 \rightarrow l = 3 \text{ cm}$$

Esto es, tenemos que hacer una ampliación en la que 1 cm se convierte en 3 cm. Luego las dimensiones de la figura serán:



9 **¿Cuánto medirán los lados de un trapecio semejante al de la figura, cuyo perímetro sea 163,2 cm?**





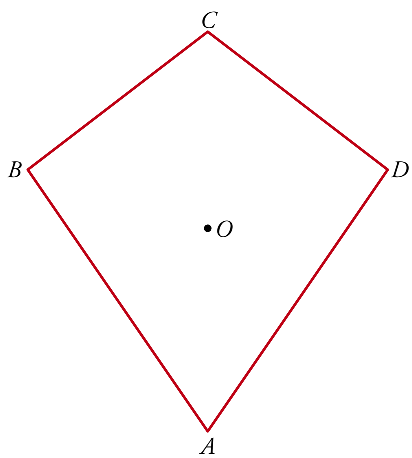
El perímetro de la figura inicial mide 21 + 10 + 12 + 8 = 51 cm.

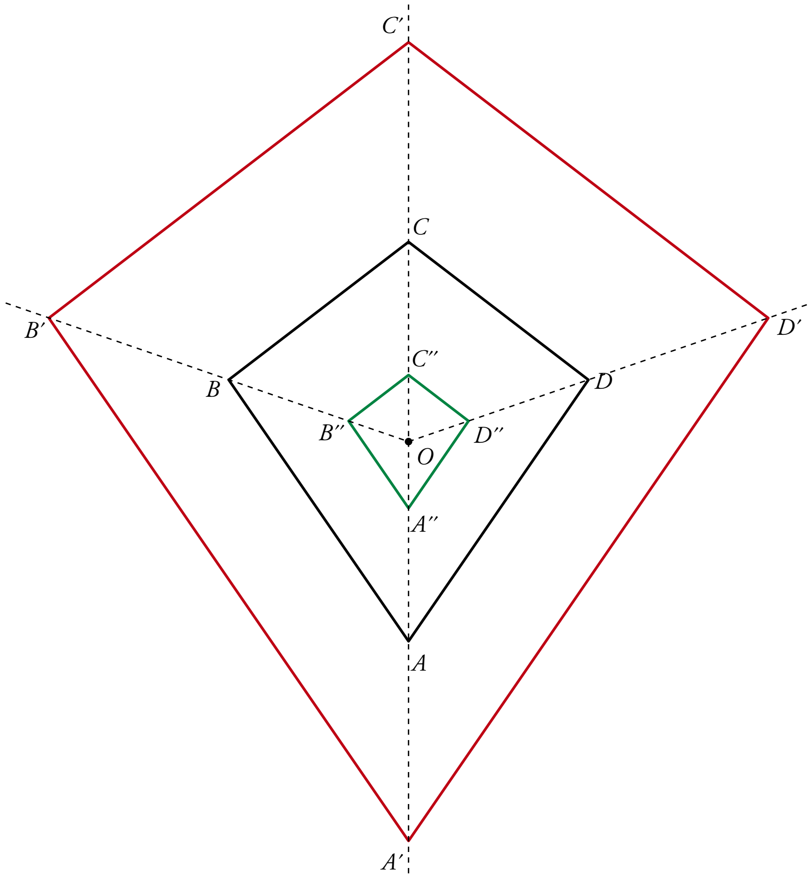
Por tanto: $\dfrac{163{,}2}{51} = \dfrac{x}{21} = \dfrac{y}{10} = \dfrac{z}{12} = \dfrac{t}{8}$

$x = 67{,}2$ cm; $y = 32$ cm; $z = 38{,}4$ cm; $t = 25{,}6$ cm

10 **a) Copia esta figura en tu cuaderno y amplíala al doble tomando *O* como centro de homotecia.**

b) Redúcela a 1/3 tomando *A* como centro de homotecia.





PÁGINA 181

Semejanza de triángulos

11 **Comprueba si son semejantes dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* que cumplen las condiciones siguientes:**

a) $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 18$; $\overline{CA} = 12$

$\overline{A'B'} = 25$; $\overline{B'C'} = 45$; $\overline{C'A'} = 30$

b) $\overline{AB} = 20$; $\overline{BC} = 30$; $\overline{CA} = 40$

$\overline{A'B'} = 40$; $\overline{B'C'} = 50$; $\overline{C'A'} = 60$

c) $\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97°$

$\hat{A}' = 58°$; $\hat{C}' = 35°$

a) Comprobamos si los lados son proporcionales. Esto es, si:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \rightarrow \frac{10}{25} = \frac{18}{45} = \frac{12}{30} = 2,5$$

Sí son semejantes.

b) Procediendo como en el apartado anterior, es claro que no son semejantes:

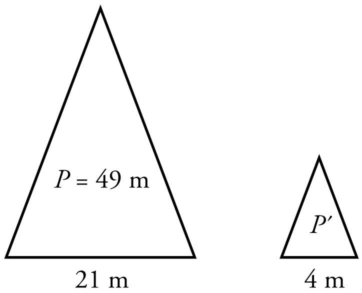
$$\frac{20}{40} \neq \frac{30}{50} \neq \frac{40}{60}$$

c) Comprobamos si los dos triángulos tienen sus ángulos iguales:

$\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97° \rightarrow \hat{C} = 180° - 58° - 97° = 25°$

Como $\hat{C} \neq \hat{C}'$, los triángulos no son semejantes.

12 **El perímetro de un triángulo isósceles es 49 m y su base mide 21 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante, cuya base mide 4 m. ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo mayor y el menor?**



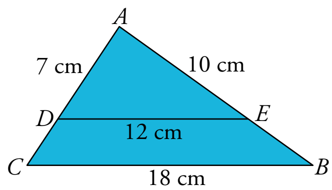
$$\frac{21}{4} = 5{,}25$$

Perímetro del triángulo semejante:

$$P' = \frac{49}{5{,}25} = 9{,}33 \text{ m}$$

La razón de semejanza es 5,25.

13 **En el triángulo *ABC* hemos trazado $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CB}$.**



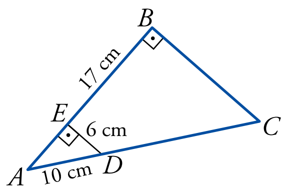
¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *ADE*? Calcula $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

Los triángulos son semejantes porque están en posición de Tales.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{7 \cdot 18}{12} = 10{,}5 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{10 \cdot 18}{12} = 15 \text{ cm}$$

14 **¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *AED*?**



Halla el perímetro del trapecio *EBCD*.

Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, $\hat{A}$. Tienen los tres ángulos iguales.

- Hallamos $\overline{EA}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

  $\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm; $\overline{AB} = 8 + 17 = 25$ cm

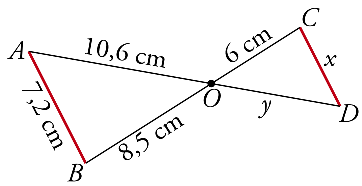
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \rightarrow \dfrac{10 + x}{10} = \dfrac{25}{8} \rightarrow 80 + 8x = 250 \rightarrow 8x = 170$

  $x = 21{,}25 \rightarrow \overline{DC} = 21{,}25$ cm

- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{6} = \dfrac{25}{8} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{150}{8} = 18{,}75$ cm

- Perímetro de $EBCD = 17 + 18{,}75 + 21{,}25 + 6 = 63$ cm

15 **Observa esta figura, en la que el segmento *AB* es paralelo a *CD*.**



a) Di por qué son semejantes los triángulos *OAB* y *ODC*.

b) Calcula *x* e *y*.

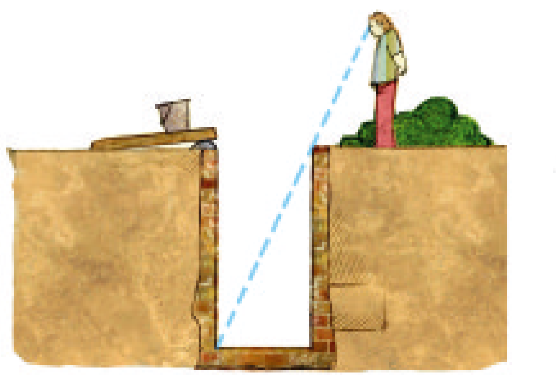
a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

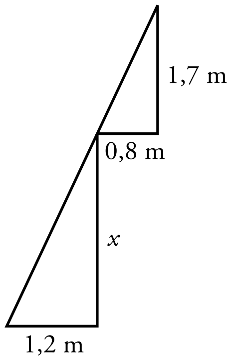
b) $\dfrac{x}{7{,}2} = \dfrac{6}{8{,}5} \rightarrow x = \dfrac{7{,}2 \cdot 6}{8{,}5} \approx 5{,}08$ cm

$\dfrac{6}{8{,}5} = \dfrac{y}{10{,}6} \rightarrow y = \dfrac{10{,}6 \cdot 6}{8{,}5} \approx 7{,}48$ cm

PIENSA Y RESUELVE

16 **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

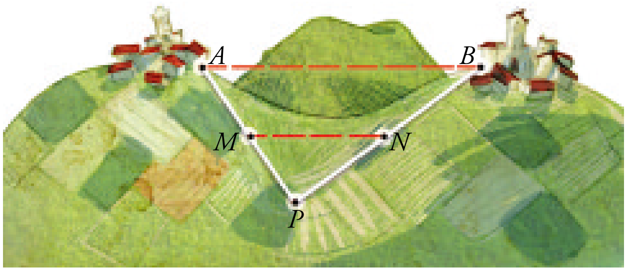


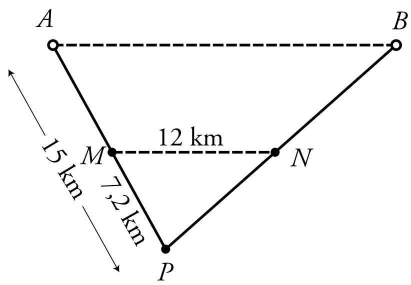


$$\frac{x}{1{,}7} = \frac{1{,}2}{0{,}8} \rightarrow x = \frac{1{,}2 \cdot 1{,}7}{0{,}8} \rightarrow x = 2{,}55 \text{ m}$$

La profundidad es de 2,55 m.

17 **Entre dos pueblos *A* y *B* hay una colina. Para medir la distancia *AB*, fijamos un punto *P* desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas:**
$\overline{AP}$ = 15 km, $\overline{PM}$ = 7,2 km y $\overline{MN}$ = 12 km. (*MN* es paralela a *AB*). Calcula la distancia $\overline{AB}$.

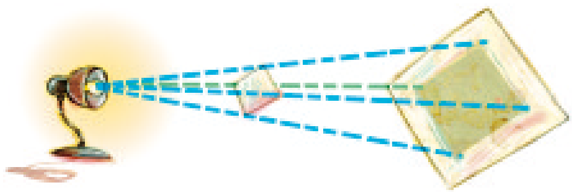




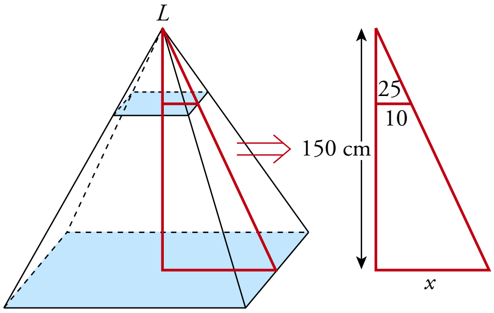
Los triángulos *APB* y *MPN* son semejantes. Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{12} = \frac{15}{7{,}2} \rightarrow \overline{AB} = \frac{15 \cdot 12}{7{,}2} = 25 \text{ km}$$

18 **Una lámpara situada a 25 cm de una lámina cuadrada de 20 cm de lado, proyecta una sombra sobre una pantalla paralela que está a 1,5 m de la lámpara.**



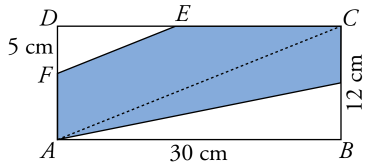
¿Cuánto mide el lado del cuadrado proyectado?

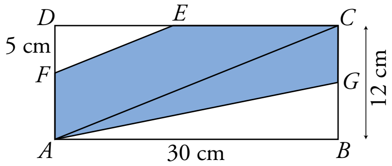


$\rightarrow \dfrac{x}{150} = \dfrac{10}{25} \rightarrow x = \dfrac{10 \cdot 150}{25} = 60$

Por tanto, el lado del cuadrado proyectado mide $2 \cdot 60 = 120$ cm.

19 **Si $\overline{DF} = 5$ cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono *FECGA*?**





$\overline{AC}^{\,2} = 30^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} \approx 32{,}31$ cm

Los triángulos *FDE* y *ADC* son semejantes. Por ello:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\overline{FE}}{32{,}31} \rightarrow \overline{FE} \approx 13{,}46 \text{ cm}$$

En el triángulo *FDE*, $\overline{DE}^{\,2} = \overline{FE}^{\,2} - \overline{DF}^{\,2} = 13{,}46^2 - 5^2 \rightarrow \overline{DE} \approx 12{,}5$ cm

$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 30 - 12{,}5 = 17{,}5$ cm

$\overline{CG} = 6$ cm

$\overline{AG}^{\,2} = 30^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AG} \approx 30{,}59$ cm

$\overline{AF} = 7$ cm

Área del triángulo $FDE = \dfrac{12{,}5 \cdot 5}{2} = 31{,}25 \text{ cm}^2$

Área del triángulo $ABG = \dfrac{30 \cdot 6}{2} = 90 \text{ cm}^2$

Área del pentágono $\approx 30 \cdot 12 - 31{,}25 - 90 = 238{,}75 \text{ cm}^2$

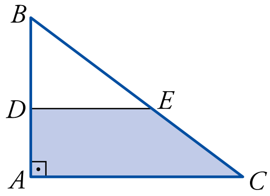
Perímetro del pentágono:

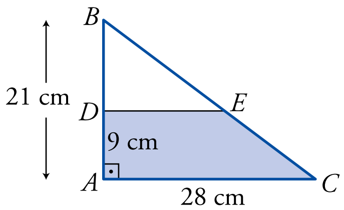
$$\overline{FE} + \overline{EC} + \overline{CG} + \overline{GA} + \overline{AF} \approx 13{,}46 + 17{,}5 + 6 + 30{,}59 + 7 = 74{,}55 \text{ cm}$$

PÁGINA 182

20 **Los catetos del triángulo rectángulo ABC miden $\overline{AC} = 28$ cm y $\overline{AB} =$ $= 21$ cm.**

Desde el punto D tal que $\overline{AD} = 9$ cm, se traza una paralela a AC. Halla el área y el perímetro del trapecio $ADEC$.





Los triángulos ABC y DBE son semejantes.

Por ello:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{21}{12} = \frac{28}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 28}{21} = 16 \text{ cm}$$

Calculamos la hipotenusa de cada uno de los triángulos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BC} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35 \text{ cm} \\ \overline{BE} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm} \end{array}\right\} \overline{EC} = 35 - 20 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Área del trapecio} = \frac{28 + 16}{2} \cdot 9 = 198 \text{ cm}^2$$

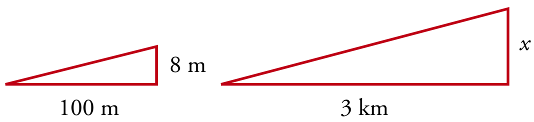
Perímetro del trapecio $ADEC = 9 + 16 + 15 + 28 = 68$ cm

21 **En una carretera de montaña, nos encontramos una señal que nos advierte que la pendiente es del 8%; es decir, por cada 100 m que recorremos, el desnivel es de 8 m.**

a) ¿Cuál es el desnivel que se produce cuando recorremos 3 km?

b) Para que el desnivel sea de 500 m, ¿cuántos kilómetros tendremos que recorrer?

a)

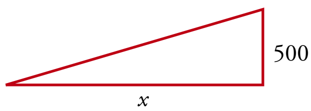


$$\rightarrow \frac{x}{3\,000} = \frac{8}{100} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{8 \cdot 3\,000}{100} = 240 \text{ m}$$

Se produce un desnivel de 240 m.

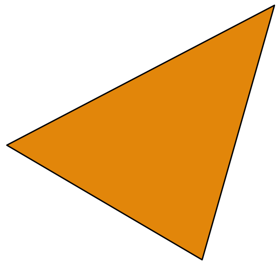
b)

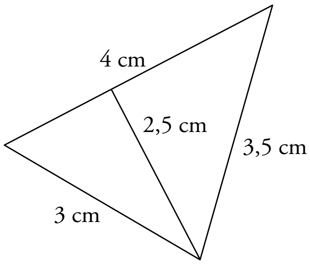


$$\rightarrow \frac{x}{500} = \frac{100}{8} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 500}{8} = 6\,250 \text{ m}$$

Tendremos que recorrer 6,25 km.

22 **Esta figura representa, a escala 1:2 000, una parcela de terreno. Calcula su perímetro y su área, tomando las medidas necesarias.**





<u>PLANO</u>		<u>REALIDAD</u>
3 cm	$\rightarrow$	$3 \cdot 2\,000 = 6\,000$ cm = 60 m
3,5 cm	$\rightarrow$	$3{,}5 \cdot 2\,000 = 7\,000$ cm = 70 m
4 cm	$\rightarrow$	$4 \cdot 2\,000 = 8\,000$ cm = 80 m
2,5 cm	$\rightarrow$	$2{,}5 \cdot 2\,000 = 5\,000$ cm = 50 m

$P = 60 + 70 + 80 = 210$ m

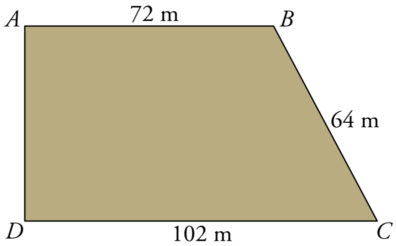
$S = \frac{1}{2}(80 \cdot 50) = 2\,000 \text{ m}^2$

23 **Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del menor es 26 cm^2, ¿cuál es el área del mayor?**

Razón de semejanza $= \frac{13{,}6}{8} = 1{,}7$

Área del segundo $= 26 \cdot 1{,}7^2 = 75{,}14 \text{ cm}^2$

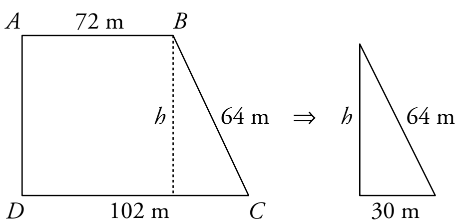
24 **Una parcela tiene forma de trapecio rectángulo con las dimensiones que se ven en la figura.**



a) Calcula su área.

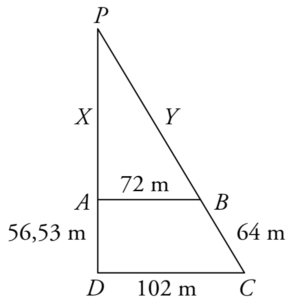
b) Se quiere hacer un pozo en el punto donde se cortan las prolongaciones de los lados *AD* y *BC*. ¿A qué distancia de *A* y de *B* estará el pozo?

a)



$\Rightarrow \; h = \sqrt{64^2 - 30^2} = 56{,}53$ m

$$A = \frac{(72 + 102) \cdot 56{,}33}{2} = 4\,918{,}11 \text{ m}^2$$

b) 

$$\frac{x}{72} = \frac{x + 56{,}53}{102} \rightarrow 102x = 72x + 4\,070{,}16 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{4\,070{,}16}{30} = 135{,}67 \text{ m}$$

$$\frac{y}{72} = \frac{y + 64}{102} \rightarrow 102y = 72y + 4\,608 \rightarrow$$

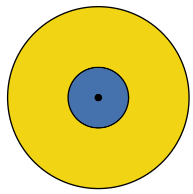
$$\rightarrow y = \frac{4\,608}{30} = 153{,}6 \text{ m}$$

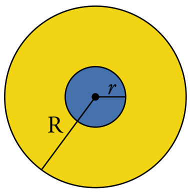
El pozo estará a 135,67 m de A y a 153,6 m de B.

25 ■□□ **En estos dos círculos concéntricos, el radio del mayor es el triple del menor.**

a) Si el área del mayor es 951 cm², ¿cuál es el área del menor?

b) Calcula el radio de cada círculo.



a) 

$R = 3r$

Si los radios están en proporción de 3 a 1, las áreas lo están en proporción $3^2 = 9$ a 1.

Por tanto, el área del menor es 951 : 9 = 105,67 cm².

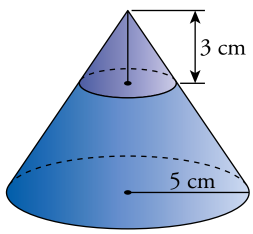
b) $\pi R^2 = 951 \rightarrow R = \sqrt{\dfrac{951}{\pi}} = 17{,}4$ cm

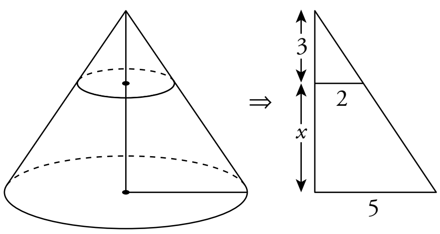
$$r = \frac{R}{3} = \frac{17{,}4}{3} = 5{,}8 \text{ m}$$

26 ■■□ **Para hacer un embudo de boca ancha, hemos cortado un cono de 5 cm de radio a 3 cm del vértice.**

La circunferencia obtenida tiene 2 cm de radio.

Halla el volumen del embudo.





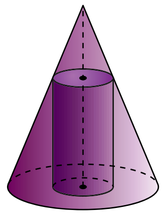
$$\frac{3 + x}{5} = \frac{3}{2} \rightarrow 3 + x = \frac{15}{2} \rightarrow$$

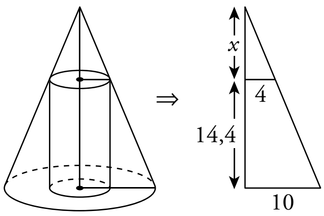
$$\rightarrow x = \frac{15}{2} - 3 = 4{,}5 \text{ cm}$$

El volumen del embudo será la diferencia entre el volumen de un cono de 5 cm de radio y 7,5 cm de altura, y el volumen de otro cono de 2 cm de radio y 3 cm de altura.

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}5) - \frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2 \cdot 3) = \frac{1}{3}\pi\,(25 \cdot 7{,}5 - 4 \cdot 3) = 58{,}5\pi \text{ cm}^3$$

27 □□□ **Hemos recubierto con un tejado cónico un depósito cilíndrico de 4 m de radio y 14,4 m de altura. Si el radio del cono es 10 m, ¿cuál es el volumen de la zona comprendida entre el cono y el cilindro?**





$\rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{x + 14{,}4}{10} \rightarrow 10x = 4x + 57{,}6 \rightarrow$

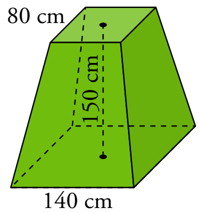
$\rightarrow x = \dfrac{57{,}6}{6} = 9{,}6$ m

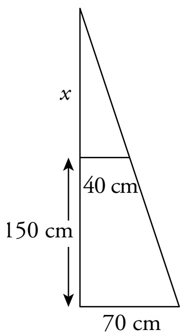
$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 10^2) \cdot (14{,}4 + 9{,}6) = 800\pi \text{ m}^3$$

$$V_{\text{CILINDRO}} = (\pi \cdot 4^2) \cdot 14{,}4 = 230{,}4\pi \text{ m}^3$$

$$V = V_{\text{CONO}} - V_{\text{CILINDRO}} = 800\pi - 230{,}4\pi = 569{,}6\pi \text{ m}^3$$

28 □□□ **La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm. Halla su volumen.**





Calculamos la altura de la pirámide:

$\dfrac{x + 150}{x} = \dfrac{70}{40} \rightarrow 40x + 6\,000 = 70x \rightarrow 30x = 6\,000 \rightarrow$

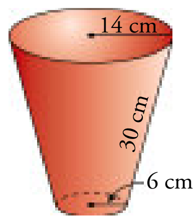
$\rightarrow x = 200$ cm

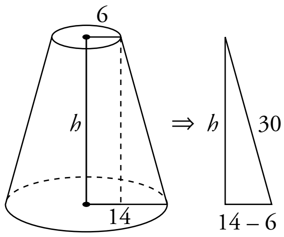
Altura = 200 + 150 = 350 cm

Volumen tronco = $V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}}$

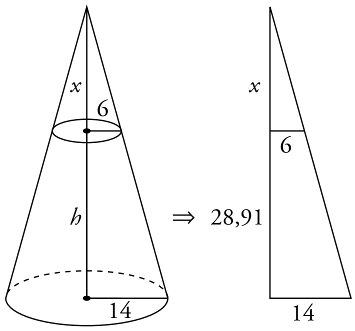
$$V = \frac{1}{3}\, 140^2 \cdot 350 - \frac{1}{3}\, 8^2 \cdot 200 = 1\,860\,000 \text{ cm}^3 = 1\,860 \text{ dm}^3$$

29 □□□ **Halla el volumen de una maceta como la de la figura, en la que los radios de las bases miden 6 cm y 14 cm, y la generatriz, 30 cm.**





$$h = \sqrt{30^2 - 8^2} = 28{,}91 \text{ cm}$$



$$\frac{x}{6} = \frac{x + 28{,}91}{14} \rightarrow 14x = 6x + 173{,}46 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{173{,}46}{8} = 21{,}68 \text{ m}$$

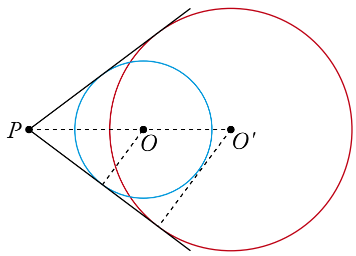
$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 14^2) \cdot (28{,}91 + 21{,}68) = 3\,305{,}21\pi \text{ cm}^3$$

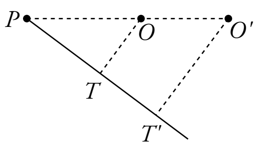
$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}(\pi \cdot 6^2) \cdot (21{,}68) = 260{,}16\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{MACETA}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = (3\,305{,}21 - 260{,}16)\,\pi = 3\,045{,}05\pi \text{ cm}^3$$

La maceta tiene un volumen de 9 561,46 cm^3.

30 **Desde un punto *P*, trazamos las tangentes comunes a dos circunferencias. Las distancias de *P* a los centros son $\overline{PO} = 17$ cm y $\overline{PO'} = 30$ cm. Si el radio de la mayor mide 18 cm, ¿cuánto mide el radio de la menor?**





$$\frac{\overline{OT}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{O'T'}}{\overline{PO'}} \rightarrow \frac{\overline{OT}}{17} = \frac{18}{30} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{OT} = \frac{18 \cdot 17}{30} = 10{,}2 \text{ cm}$$

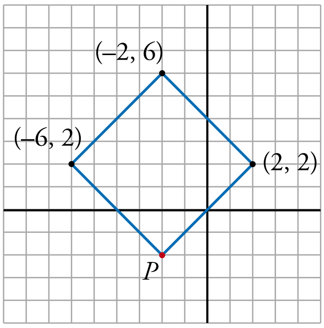
El radio de la menor mide 10,2 cm.

PÁGINA 194

PRACTICA

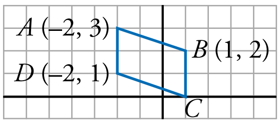
Puntos

1 □□□ **Si los puntos (–6, 2), (–2, 6) y (2, 2) son vértices de un cuadrado, ¿cuál es el cuarto vértice?**



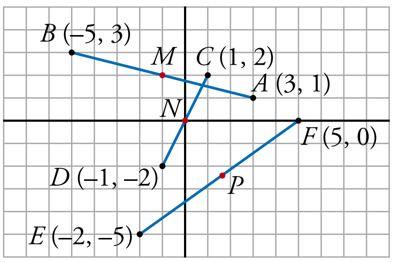
$P(-2, 2)$

2 □□□ **Los puntos (–2, 3), (1, 2) y (–2, 1) son vértices de un paralelogramo. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice?**



$C = (1, 0)$

3 □□□ **Representa los puntos $A(3, 1)$, $B(-5, 3)$, $C(1, 2)$, $D(-1, -2)$, $E(-2, -5)$, $F(5, 0)$ y halla las coordenadas del punto medio de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.**

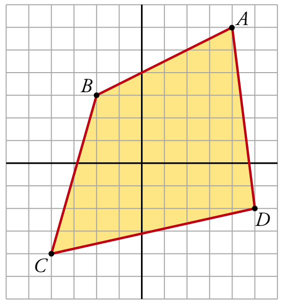


$M = (-1, 2)$

$N = (0, 0)$

$P = \left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}\right)$

4 □□□ **Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*.**



$$A(4, 6),\ B(-2, 3),\ C(-4, -4),\ D(5, -2)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+6}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right) \qquad M_{BC} = \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$$

$$M_{CD} = \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-4-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -3\right) \qquad M_{AD} = \left(\frac{5+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$$

$$M_{AC} = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = (0, 1) \qquad M_{BD} = \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5 □□□ **Halla, en cada caso, el punto simétrico de *A*(–3, –5) respecto de:**

a) *P*(–2, 0) b) *Q*(2, –3) c) *O*(0, 0)

a) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (-2, 0);\ \left.\begin{cases} \frac{-3+x}{2} = -2 \ \rightarrow\ x = -1 \\ \frac{-5+y}{2} = 0 \ \rightarrow\ y = 5 \end{cases}\right\}\ A'(-1, 5)$

b) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (2, -3);\ \left.\begin{cases} \frac{-3+x}{2} = 2 \ \rightarrow\ x = 7 \\ \frac{-5+y}{2} = -3 \ \rightarrow\ y = -1 \end{cases}\right\}\ A'(7, -1)$

c) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (0, 0);\ \left.\begin{cases} \frac{-3+x}{2} = 0 \ \rightarrow\ x = 3 \\ \frac{-5+y}{2} = 0 \ \rightarrow\ y = 5 \end{cases}\right\}\ A'(3, 5)$

6 □□□ **Si *M*(–3, 5) es el punto medio del segmento *AB*, halla el punto *B* en cada uno de los siguientes casos:**

a) *A*(–1, 5) b) *A*(6, –4) c) *A*(–4, –7)

a) $\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = (-3, 5) \ \rightarrow\ x = -5;\ y = 5 \ \rightarrow\ B(-5, 5)$

b) $\left(\frac{6+x}{2}, \frac{-4+y}{2}\right) = (-3, 5) \ \rightarrow\ x = -12;\ y = 14 \ \rightarrow\ B(-12, 14)$

c) $\left(\frac{-4+x}{2}, \frac{-7+y}{2}\right) = (-3, 5) \ \rightarrow\ x = -2;\ y = 17 \ \rightarrow\ B(-2, 17)$

7 □□□ **Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen el mismo punto medio. Halla las coordenadas del punto D, sabiendo que $A(-2, 3)$, $B(-3, -1)$, $C(4, -2)$.**

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-3+x}{2} = 1 \;\rightarrow\; x = 5 \\ \dfrac{-1+y}{2} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; y = 2 \end{array}\right\} \; D(5, 2)$$

8 □□□ **Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:**

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

a) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \rightarrow \dfrac{3-2}{4-1} = \dfrac{8-3}{19-4} \rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{15}$ Cierto.

b) $\dfrac{0+3}{2+2} = \dfrac{-21-0}{-26-2} \rightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{28}$ Cierto.

9 □□□ **Comprueba, en cada caso, si los puntos dados están alineados:**

a) $A(-1, 3)$, $B\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $C(-4, -2)$

b) $A(1, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(5, 2)$

a) $\dfrac{1/2 - 3}{-5/2 + 1} = \dfrac{-2 - 1/2}{-4 + 5/2} \rightarrow \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$ Sí están alineados.

b) $\dfrac{-2-0}{-3-1} = \dfrac{2+2}{5+3} \rightarrow \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{4}{8}$ Sí están alineados.

10 □□□ **Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.**

$$\frac{-2-1}{5+1} = \frac{m-1}{2+1} \rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{m-1}{3} \rightarrow m = -\frac{3}{2} + 1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Rectas

11 □□□ **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:**

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$ **b) $A(0, -2)$, $B(5, -2)$**

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$ **d) $A(-2, -4)$, $B(10, 24)$**

a) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{x+1}{0+1} \rightarrow y = 3x + 3$

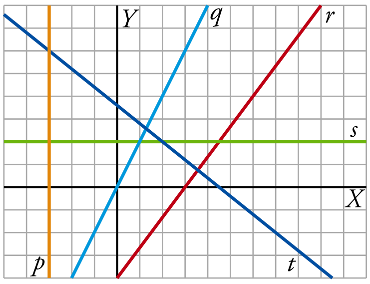
b) $\dfrac{y+2}{-2+2} = \dfrac{x-0}{5-0} \rightarrow \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{x}{5} \rightarrow y + 2 = 0 \rightarrow y = -2$

c) $\dfrac{y-3}{-1-3} = \dfrac{x+2}{4+2} \rightarrow 6(y-3) = -4(x+2) \rightarrow 6y - 18 = -4x - 8 \rightarrow$

$\rightarrow 4x + 6y - 10 = 0 \rightarrow 2x + 3y - 5 = 0$

d) $\dfrac{y+4}{24+4} = \dfrac{x+2}{10+2} \rightarrow 7x - 3y + 2 = 0$

12 **Escribe la ecuación de las rectas *p*, *q*, *r*, *s* y *t*.**



r: $(0, -4)$ y $(3, 0)$

$\dfrac{y+4}{0+4} = \dfrac{x-0}{3-0} \rightarrow 3y + 12 = 4x \rightarrow 4x - 3y - 12 = 0$

s: $y = 2$

t: $(2, 2)$ y $(-3, 6)$

$\dfrac{y-2}{6-2} = \dfrac{x-2}{-3-2} \rightarrow -5y + 10 = 4x - 4 \rightarrow 4x + 5y - 14 = 0$

p: $x = -3$

q: $(0, 0)$ y $(2, 4)$

$\dfrac{y-0}{4-0} = \dfrac{x-0}{2-0} \rightarrow 2y = 4x \rightarrow y = 2x$

13 **Escribe la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Pasa por $(-4, 2)$ y su pendiente es $\dfrac{1}{2}$.

b) Pasa por $(1, 3)$ y su pendiente es -2.

c) Pasa por $(5, -1)$ y su pendiente es 0.

a) $y = 2 + \dfrac{1}{2}(x + 4)$

b) $y = 3 - 2(x - 1)$

c) $y = -1 + 0(x - 5) \rightarrow y = -1$

14 **Halla la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por $(4, 0)$.

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por $(0, -3)$.

a) $m = -2$; $y = 5 - 2(x - 4)$

b) $m = \frac{1}{2}$; $y = 0 + \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 4)$

c) $m = -\frac{3}{2}$; $y = -3 - \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = -3 - \frac{3}{2}x$

15 □□□ **Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:**

a) $r: y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

c) $r: x = 3$; $P(0, 4)$

a) $m = \frac{1}{2}$; $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 3)$

b) $m = -\frac{2}{3}$; $y = -1 - \frac{2}{3}(x - 4)$

c) $y = 4$

16 □□□ **Dados los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, 0)$, halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**

r: pasa por A y es perpendicular a AB.

s: pasa por B y es perpendicular a AB.

$m_{AB} = \frac{0 - 2}{5 + 3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

r: pendiente = 4; $y = 2 + 4(x + 3) \rightarrow y = 4x + 14$

s: pendiente = 4; $y = 0 + 4(x - 5) \rightarrow y = 4x - 20$

17 □□□ **Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.**

A: $18 - 3 \cdot 15 + 27 = 0 \rightarrow A \in r$

B: $-43 - 3 \cdot (-5) + 27 \neq 0 \rightarrow B \notin r$

18 □□□ **Calcula n y m para que las rectas**

$$r: 3x + my - 8 = 0 \qquad s: nx - 2y + 3 = 0$$

se corten en el punto $P(1, 5)$.

r: $3x + my - 8 = 0 \rightarrow 3 \cdot 1 + m \cdot 5 - 8 = 0 \rightarrow m = 1$

s: $nx - 2y + 3 = 0 \rightarrow n \cdot 1 - 10 + 3 = 0 \rightarrow n = 7$

PÁGINA 195

19 **Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:**

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 19 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 3x + 6 = 0 \\ s: 2y - 5 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \xrightarrow{\cdot 7} & 21x - 35y + 119 = 0 \\ s: 7x + 3y - 19 = 0 \xrightarrow[\cdot(-3)]{} & -21x - 9y + 57 = 0 \end{cases}$

$$-44y + 176 = 0 \to y = 4$$

$3x - 5 \cdot 4 + 17 = 0 \to 3x - 3 = 0 \to x = 1$

r y s se cortan en el punto $P(1, 4)$.

b) $\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5/2 \end{array}\right\} P\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$

20 **Estudia la posición relativa de las rectas:**

r: $3x - 5y + 15 = 0$ y s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$

r: $3x - 5y + 15 = 0$

s: $m = \dfrac{3 + 3}{8 + 2} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$; $y = -3 + \dfrac{3}{5}(x + 2) \to$

$\to 5y = -15 + 3x + 6 \to 3x - 5y - 9 = 0$

Las rectas r y s son paralelas.

21 **Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.**

$A(-5, 3)$, $B(2, 7) \to m = \dfrac{7 - 3}{2 + 5} = \dfrac{4}{7}$; $m' = -\dfrac{7}{4}$

$M_{AB} = \left(\dfrac{-5 + 2}{2}, \dfrac{3 + 7}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, 5\right)$

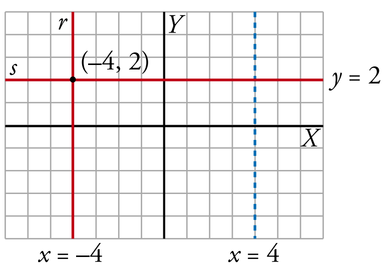
$y = 5 - \dfrac{7}{4}\left(x + \dfrac{3}{2}\right) \to y = 5 - \dfrac{7}{4}x - \dfrac{21}{8} \to 8y = 40 - 14x - 21 \to 14x + 8y - 19 = 0$

22 **Las rectas r y s pasan por el punto $(-4, 2)$; r es paralela a $3x - 12 = 0$ y s es perpendicular a ella. Representa r y s, y halla su ecuación.**

$3x - 12 = 0 \to x = 4$

Paralela a $x = 4$ que pasa por $(-4, 2) \to r$: $x = -4$

Perpendicular a $x = 4$ que pasa por $(-4, 2) \to s$: $y = 2$



23 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

a) • s: $P(3, 1)$, $Q(-2, 3)$

$m = \dfrac{3-1}{-2-3} = \dfrac{2}{-5} = -\dfrac{2}{5}$

$y = 1 - \dfrac{2}{5}(x-3) \rightarrow 5y = 5 - 2x + 6 \rightarrow 2x + 5y - 11 = 0$

• r: $2x - 5y + 3 = 0$

s: $2x + 5y - 11 = 0$

$4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$

$2 \cdot 2 - 5y + 3 = 0 \rightarrow 5y = 7 \rightarrow y = \dfrac{7}{5}$

r y s se cortan en el punto $\left(2, \dfrac{7}{5}\right)$.

b) • s: $A(4, 7)$, $B(0, 2)$

$m = \dfrac{2-7}{-4} = \dfrac{5}{4}$; $y = 2 + \dfrac{5}{4}(x - 0) \rightarrow y = 2 + \dfrac{5}{4}x \rightarrow$

$\rightarrow 4y = 8 + 5x \rightarrow 5x - 4y + 8 = 0$

r: $5x - 4y + 8 = 0$

r y s son la misma recta.

24 **La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto (1, 3). Escribe las ecuaciones de las rectas r y s.**

$5x - 4y + 3 = 0 \rightarrow m = \dfrac{5}{4}$

r es la recta de pendiente $\dfrac{5}{4}$ que pasa por (1, 3):

r: $y = 3 + \dfrac{5}{4}(x-1) \rightarrow 4y = 12 + 5x - 5 \rightarrow 5x - 4y + 7 = 0$

s es la recta de pendiente $-\dfrac{4}{5}$ que pasa por (1, 3):

s: $y = 3 - \dfrac{4}{5}(x-1) \rightarrow 5y = 15 - 4x + 4 \rightarrow 4x + 5y - 19 = 0$

Distancias entre dos puntos

25 **Calcula la distancia entre P y Q.**

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$

b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$

d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

a) $d = \sqrt{(3-3)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $d = \sqrt{(-8+6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $d = \sqrt{5^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $d = \sqrt{(-3-15)^2 + 0^2} = 18$

26 **a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(6, 4)$.**

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

a) $M\left(\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$

b) $A(-2, 0) \rightarrow \overline{AM} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$B(6, 4) \rightarrow \overline{MB} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

27 **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?**

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ \overline{AC} = \sqrt{(-1-7)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ \overline{BC} = \sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \overline{AB} = \overline{BC}$$

28 **Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 6)$ es rectángulo. Halla su perímetro y su área.**

$\overline{AB} = \sqrt{(-2-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

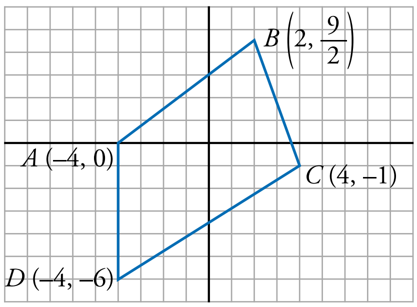
$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\sqrt{58}^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{29}^2$

Perímetro $= (\sqrt{29} + \sqrt{20} + \sqrt{80})$ u

Área $= \dfrac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2} = \dfrac{29}{2}$ u^2

29 **Representa el cuadrilátero de vértices $A(-4, 0)$, $B(2, 9/2)$, $C(4, -1)$, $D(-4, -6)$ y halla su perímetro.**



$\overline{AB} = \sqrt{6^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \dfrac{15}{2}$ u

$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + \left(-\dfrac{11}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{137}}{2}$ u

$\overline{CD} = \sqrt{(-8)^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}$ u

$\overline{AD} = 6$ u

Perímetro = 7,5 + 5,85 + 9,43 + 6 = 28,78 u

PIENSA Y RESUELVE

30 □□□ **Los puntos $A(4, 5)$ y $B(7, 0)$ son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X.**

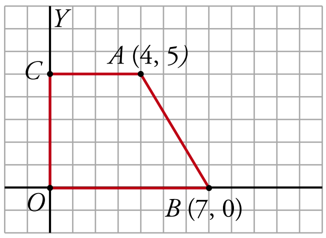
Dibuja el trapecio y halla:

a) Las ecuaciones de los lados.

b) Su perímetro.

c) Su área.

a)



OC: $x = 0$

OB: $y = 0$

AC: $y = 5$

$$AB: \frac{y-0}{5-0} = \frac{x-7}{4-7} \rightarrow -3y = 5x - 35 \rightarrow 5x + 3y - 35 = 0$$

b) $\overline{AC} = 4$; $\overline{OC} = 5$; $\overline{OB} = 7$; $\overline{AB} = \sqrt{(7-4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$P = 4 + 5 + 7 + \sqrt{34} = 16 + \sqrt{34}$ u

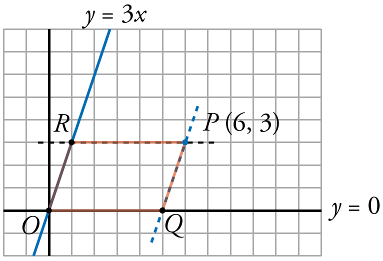
c) $A = \dfrac{7+4}{2} \cdot 5 = \dfrac{11}{2} \cdot 5 = \dfrac{55}{2}$ u^2

31 □□□ **Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$, y un vértice en el punto $P(6, 3)$.**

a) Halla las ecuaciones de los otros lados.

b) Halla las coordenadas de los otros vértices.

a)



OR: $y = 3x$

OQ: $y = 0$

PR: $y = 3$

PQ: $y = 3 + 3(x - 6) \rightarrow$

$\rightarrow y = 3 + 3x - 18 \rightarrow 3x - y - 15 = 0$

b) $O(0, 0)$, $Q(5, 0)$, $R(1, 3)$, $P(6, 3)$

32 □□□ **Determina los puntos que dividen al segmento de extremos $A(-5, -2)$ y $B(7, 2)$ en cuatro partes iguales.**

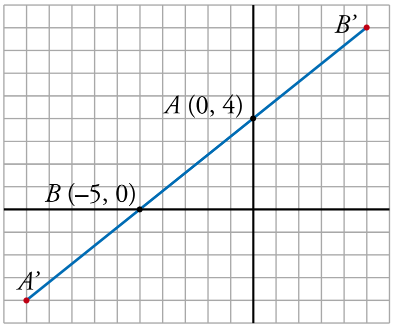
Punto medio de AB, $M\left(\dfrac{-5+7}{2}, \dfrac{-2+2}{2}\right) = (1, 0)$

Punto medio de AM, $P\left(\dfrac{-5+1}{2}, \dfrac{-2+0}{2}\right) = (-2, -1)$

Punto medio de BM, $Q\left(\frac{7+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, 1)$

Los puntos buscados son $M(1, 0)$, $P(-2, -1)$ y $Q(4, 1)$.

33 **Dados los puntos $A(0, 4)$ y $B(-5, 0)$, halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.**



Simétrico de A respecto de B:

$$A'\left(\frac{0+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) = (-5, 0) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{2} = -5 \ \rightarrow \ x = -10 \\ 4 + y = 0 \ \rightarrow \ y = -4 \end{cases} \quad A'(-10, -4)$$

Simétrico de B respecto de A:

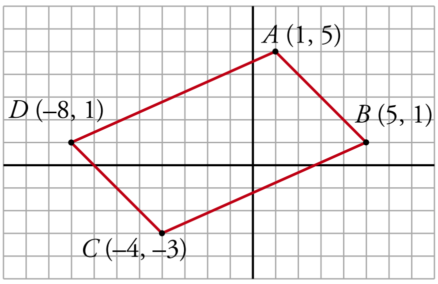
$$B'\left(\frac{-5+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) = (0, 4) \quad \begin{cases} -5 + x = 0 \ \rightarrow \ x = 5 \\ y = 8 \end{cases} \quad B'(5, 8)$$

34 **Los segmentos AC y BD tienen el mismo punto medio. Halla las coordenadas del punto D sabiendo que $A(-2, 3)$, $B(-3, -1)$ y $C(4, -2)$.**

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \quad \begin{cases} \dfrac{-3+x}{2} = 1 \ \rightarrow \ x = 5 \\ \dfrac{-1+y}{2} = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ y = 2 \end{cases} \quad D(5, 2)$$

35 **Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.**



- Punto medio de AC:

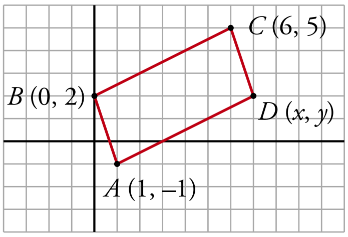
$$M_{AC} = \left(\frac{1-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

- Punto medio de BD:

$$M_{BD} = \left(\frac{5-8}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

Los puntos medios de las diagonales coinciden.

36 □□□ **Halla las coordenadas del punto *D*, de modo que *ABCD* sea un paralelogramo, siendo *A*(1, –1), *B*(0, 2) y *C*(6, 5).**



- Punto medio de *AC*:

$$M_{AC} = \left(\frac{6+1}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

- Punto medio de *BD*:

$$M_{BD} = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

Los puntos medios de las diagonales deben coincidir.

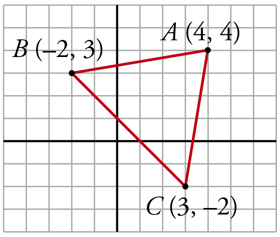
$$\frac{x}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow x = 7$$

$$\frac{y+2}{2} = 2 \rightarrow y = 4 - 2 = 2$$

El punto *D* tiene coordenadas *D*(7, 2).

37 □□□ **Comprueba que el triángulo de vértices *A*(4, 4), *B*(–2, 3) y *C*(3, –2) es isósceles y calcula su área.**

☞ ***Ten en cuenta que una altura corta al lado desigual en su punto medio.***



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \sqrt{(4+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37} \\ \overline{AC} = \sqrt{(4-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}\end{array}\right\} \overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Calculamos la altura sobre el lado *BC*:

$$M_{BC} = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

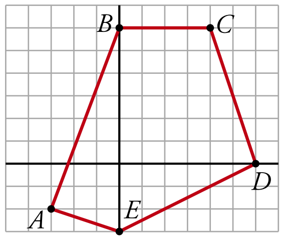
La altura es la distancia entre A y el punto medio de BC:

$$h = \sqrt{\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} \cdot 2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{Área} = \frac{5\sqrt{2} \cdot (7/2)\sqrt{2}}{2} = \frac{35}{2}\ \text{u}^2$$

38 **a) Calcula el perímetro del pentágono $ABCDE$.**

b) Descomponlo en figuras más simples y halla su área.



a) $\overline{BC} = 4$; $\overline{CD} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$; $\overline{DE} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$; $\overline{AE} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} =$

$= \sqrt{10}$; $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

Perímetro $= 4 + \sqrt{40} + \sqrt{45} + \sqrt{10} + \sqrt{73} \approx 28{,}74$ u

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } A_{BCDO} = \dfrac{(6 + 4) \cdot 6}{2} = 30\ \text{u}^2 \\[2ex] A_{ODE} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9\ \text{u}^2 \\[2ex] A_{ABE} = \dfrac{9 \cdot 3}{2} = 13{,}5\ \text{u}^2 \end{array}\right\} \quad A_{ABCDE} = 30 + 9 + 13{,}5 = 52{,}5\ \text{u}^2$$

PÁGINA 196

39 **Resuelto en el libro de texto.**

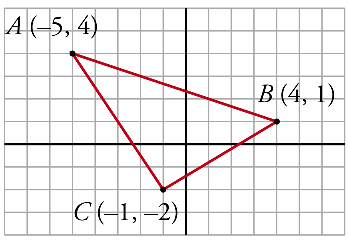
40 **Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, -2)$, halla:**

a) Las ecuaciones de los tres lados.

b) El punto medio del lado AC.

c) La ecuación de la mediana del vértice B.

a)



- Lado AB:

$$m = \frac{4 - 1}{-5 - 4} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$y = 1 - \frac{1}{3}(x - 4) \rightarrow 3y = 3 - x + 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + 3y - 7 = 0$$

- Lado AC:

$$m = \frac{4 + 2}{-5 + 1} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$y = -2 - \frac{3}{2}(x + 1) \rightarrow 2y = -4 - 3x - 3 \rightarrow 3x + 2y + 7 = 0$$

- Lado BC:

  $m = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$

  $y = 1 + \frac{3}{5}(x-4) \rightarrow 5y = 5 + 3x - 12 \rightarrow 3x - 5y - 7 = 0$

b) $M_{AC} = \left(\frac{-5-1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (-3, 1)$

c) La mediana que corresponde a B pasa, también, por el punto medio de AC, M_{AC}.

$m = \frac{1-1}{4+3} = 0$

$y = 1 + 0(x+3) \rightarrow y = 1$

41 **En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(3, 0)$, halla:**

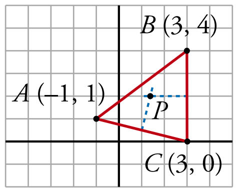
a) La ecuación de la mediatriz de BC.

b) La ecuación de la mediatriz de AC.

c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).

a) La mediatriz de BC es la perpendicular a BC por su punto medio, M_{BC}.

$M_{BC} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (3, 2)$



La recta que contiene a BC es $x = 3$. Su perpendicular por $(3, 2)$ es $y = 2$, mediatriz de BC.

b) $M_{AC} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Pendiente de la recta que contiene a AC, $m = \frac{1-0}{-1-3} = -\frac{1}{4}$.

Pendiente de la perpendicular a AC, $m' = 4$.

Mediatriz de AC: $y = \frac{1}{2} + 4(x-1) \rightarrow 2y = 1 + 8x - 8 \rightarrow 2y - 8x + 7 = 0$

c) Circuncentro, P:

$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 2y - 8x + 7 = 0 \end{array}\right\} \; 4 - 8x + 7 = 0 \rightarrow 8x = 11 \rightarrow x = 11/8$

Las coordenadas de P son $\left(\frac{11}{8}, 2\right)$.

42 **Dadas estas rectas:**

$$r: 3x + by - 12 = 0$$
$$s: ax - y + 6 = 0$$

calcula los valores de a y de b sabiendo que r y s son perpendiculares entre sí y que r pasa por el punto (9, –15/2).

• Como r: $3x + by - 12 = 0$ pasa por $\left(9, -\frac{15}{2}\right)$:

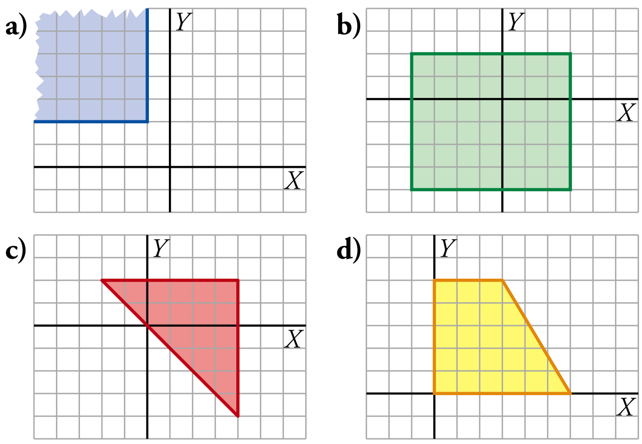
$$3 \cdot 9 + b \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) - 12 = 0 \rightarrow 27 - \frac{15b}{2} - 12 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 15 = \frac{15b}{2} \rightarrow \frac{2 \cdot 15}{15} = b \rightarrow b = 2$$

• r y s son perpendiculares:

$$m_r = -\frac{3}{2} \rightarrow m_s = \frac{2}{3} = a \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

43 **Resuelto en el libro de texto.**

44 **Describe, mediante inecuaciones o sistemas de inecuaciones, los siguientes recintos:**



a) $\left.\begin{array}{l} x \leq -1 \\ y \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 1 \leq 0 \\ y - 2 \geq 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} -4 \leq x \leq 3 \\ -4 \leq y \leq 2 \end{array}\right.$

c) $\left.\begin{array}{l} y \leq 2 \\ x \leq 4 \\ x \geq -y \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 2 \leq 0 \\ x - 4 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \end{array}\right.$

d) El lado oblicuo del trapecio pasa por (6, 0) y (3, 5). Su ecuación es:

$$\frac{y - 5}{0 - 5} = \frac{x - 3}{6 - 3} \rightarrow 3y - 15 = -5x + 15 \rightarrow 5x + 3y = 30$$

Probamos con el punto (1, 1) que está dentro del recinto:

$5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 < 30$

Las ecuaciones del recinto son:

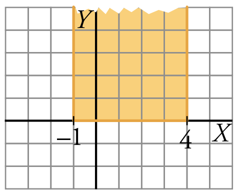
$$\begin{cases} 5x + 3y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

45 **Representa gráficamente los siguientes recintos:**

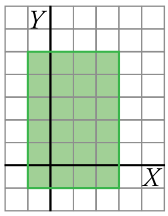
a) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq y \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \leq 0 \\ -5 \leq y \leq 0 \\ 5x - 2y \geq -10 \end{cases}$

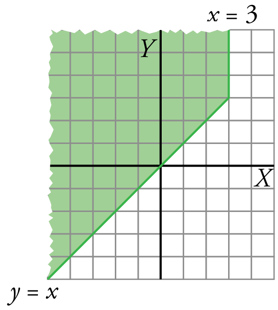
a)



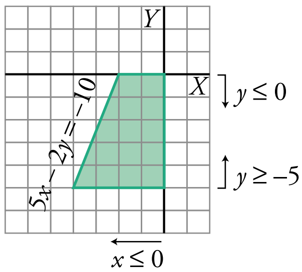
b)



c)



d)



PÁGINA 213

PRACTICA

Tablas de frecuencias

1 **El número de faltas de ortografía que cometieron un grupo de estudiantes en un dictado fue:**

0	**3**	**1**	**2**	**0**	**2**	**1**	**3**	**0**	**4**
0	**1**	**1**	**4**	**3**	**5**	**3**	**2**	**4**	**1**
5	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**1**
2	**1**	**0**	**0**	**3**	**0**	**5**	**3**	**2**	**1**

a) Di cuál es la variable y de qué tipo es.

b) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama adecuado.

a) Variable: "Número de faltas de ortografía"

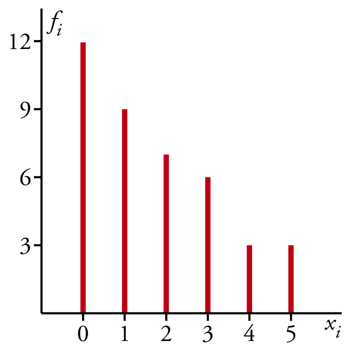
Es una variable cuantitativa discreta.

Llamamos x_i a dicha variable y sus valores son 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

b) Tabla de frecuencias:

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3
	40

Diagrama de barras:



2 **Las urgencias atendidas durante un mes en un centro de salud fueron:**

1	**5**	**3**	**2**	**1**	**6**	**4**	**2**	**2**	**3**
4	**3**	**5**	**1**	**0**	**1**	**5**	**3**	**3**	**6**
2	**4**	**6**	**3**	**2**	**4**	**3**	**2**	**1**	**5**

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos.

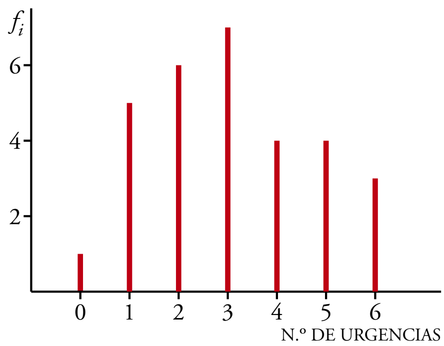
a) Variable: n.° de urgencias atendidas.

Tipo: cuantitativa discreta.

b)

x_i = URGENCIAS ATENDIDAS	f_i
0	1
1	5
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3

Representamos los datos en un diagrama de barras:



3 **En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:**

2,8	**3,2**	**3,8**	**2,5**	**2,7**	**3,7**	**1,9**	**2,6**	**3,5**	**2,3**
3,0	**2,6**	**1,8**	**3,3**	**2,9**	**2,1**	**3,4**	**2,8**	**3,1**	**3,9**
2,9	**3,5**	**3,0**	**3,1**	**2,2**	**3,4**	**2,5**	**1,9**	**3,0**	**2,9**
2,4	**3,4**	**2,0**	**2,6**	**3,1**	**2,3**	**3,5**	**2,9**	**3,0**	**2,7**
2,9	**2,8**	**2,7**	**3,1**	**3,0**	**3,1**	**2,8**	**2,6**	**2,9**	**3,3**

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos de 1,65 a 4,05.

c) Representa gráficamente esta distribución.

Localizamos los valores extremos: 1,8 y 3,9.

Recorrido = 3,9 – 1,8 = 2,1

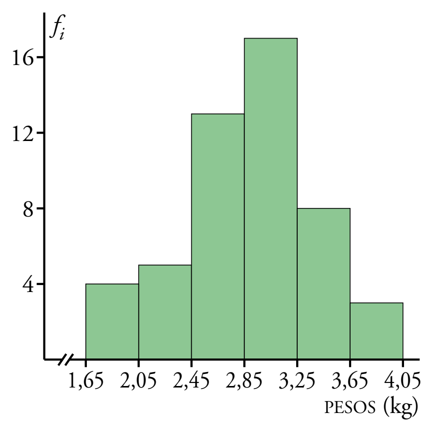
a) Variable: peso de los recién nacidos.

Tipo: cuantitativa continua.

b)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE (x_i)	f_i
1,65 - 2,05	1,85	4
2,05 - 2,45	2,25	5
2,45 - 2,85	2,65	13
2,85 - 3,25	3,05	17
3,25 - 3,65	3,45	8
3,65 - 4,05	3,85	3
		50

c) Representamos los datos en un histograma; al ser los intervalos de la misma amplitud, la altura de cada barra corresponde a la frecuencia (f_i) de cada intervalo.



4 ■□□ **A un grupo de 30 personas se les ha tomado el número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) obteniéndose los siguientes resultados:**

87	**85**	**61**	**51**	**64**	**75**	**80**	**70**	**69**	**82**
80	**79**	**82**	**74**	**92**	**76**	**72**	**73**	**63**	**65**
67	**71**	**88**	**76**	**68**	**73**	**70**	**76**	**71**	**86**

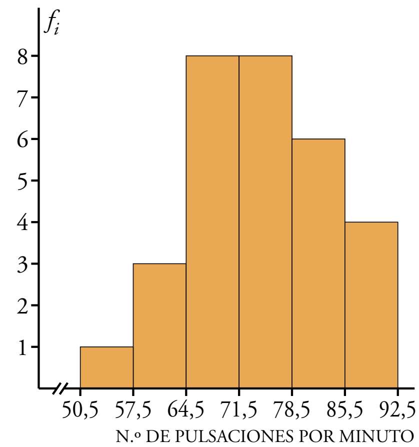
Representa gráficamente esta distribución agrupando los datos en 6 intervalos (desde 50,5 a 92,5).

Cada intervalo medirá $\frac{92,5 - 50,5}{6} = 7$.

Tabla de frecuencias:

INTERVALO	MARCAS DE CLASE	FRECUENCIA
50,5 - 57,5	54	1
57,5 - 64,5	61	3
64,5 - 71,5	68	8
71,5 - 78,5	75	8
78,5 - 85,5	82	6
85,5 - 92,5	89	4

Histograma:



Puesto que los intervalos son de la misma longitud, la altura de cada barra en este histograma coincide con la frecuencia.

Media, desviación típica y C.V.

Halla la media, la desviación típica y el coeficiente de variación en las siguientes distribuciones:

5

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	9	9	9
2	7	14	28
3	6	18	54
4	3	12	48
5	3	15	75
	40	68	214

MEDIA: $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{68}{40} = 1,7$

VAR.: $\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{214}{40} - 1,7^2 = 2,46$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{2,46} = 1,57$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,9235 \rightarrow 92,35\%$

6

x_i	f_i
0	1
1	5
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	1	1	0
1	5	5	5
2	6	12	24
3	7	21	63
4	4	16	64
5	4	20	100
6	3	18	108
	30	93	364

MEDIA: $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{93}{30} = 3,1$

VAR.: $\frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{364}{30} - 3,1^2 = 2,52$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{2,52} = 1,59$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,5129 \rightarrow 51,29\%$

7 □□□

INTERVALO	f_i
1,65-2,05	4
2,05-2,45	5
2,45-2,85	13
2,85-3,25	17
3,25-3,65	8
3,65-4,05	3

INTERVALOS	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
1,65 - 2,05	1,85	4	7,4	13,69
2,05 - 2,45	2,25	5	11,25	25,31
2,45 - 2,85	2,65	13	34,45	91,29
2,85 - 3,25	3,05	17	51,85	158,14
3,25 - 3,65	3,45	8	27,6	95,22
3,65 - 4,05	3,85	3	11,55	44,47
		50	144,1	428,12

$\bar{x} = \dfrac{144,1}{50} = 2,9$

$\text{VAR.} = \dfrac{428,12}{50} - 2,8^2 = 0,1524$

$\sigma = \sqrt{0,1524} = 0,39$

$\text{C.V.} = \dfrac{0,39}{2,9} = 0,1345 \rightarrow 13,45\%$

8 □□□

INTERVALO	f_i
50,5-57,5	1
57,5-64,5	3
64,5-71,5	8
71,5-78,5	8
78,5-85,5	6
85,5-92,5	4

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
50,5-57,5	54	1	54	2 916
57,5-64,5	61	3	183	11 163
64,5-71,5	68	8	544	36 992
71,5-78,5	75	8	600	45 000
78,5-85,5	82	6	492	40 344
85,5-92,5	89	4	356	31 684
		30	2 229	168 099

$\bar{x} = \dfrac{2\,229}{30} = 74,3$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{168\,099}{30} - 74,3^2} = 9,1$

$\text{C.V.} = \dfrac{9,1}{74,3} = 0,1225 \rightarrow 12,25\%$

9 □□□ **Los gastos mensuales de una empresa *A* tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa *B* la media es 15 000 euros, y la desviación típica, 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene más variación relativa.**

Empresa *A*: $\left.\begin{array}{l} \bar{x} = 100\,000 \text{ €} \\ \sigma = 12\,500 \text{ €} \end{array}\right\}$ $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{12\,500}{100\,000} = 0,125$ o bien 12,5%

Empresa *B*: $\left.\begin{array}{l} \bar{x} = 15\,000 \text{ €} \\ \sigma = 2\,500 \text{ €} \end{array}\right\}$ $\text{C.V.} = \dfrac{2\,500}{15\,000} = 0,1\widehat{6}$ o bien 16,67%

Tiene mayor variación relativa la empresa *B*.

10 **El peso medio de los alumnos de una clase es de 58,2 kg, y su desviación típica, 3,1 kg. El de las alumnas de esa clase es 52,4 kg y su desviación típica es 5,2 kg. Calcula el coeficiente de variación y compara la dispersión de ambos grupos.**

Alumnos $\left\{\begin{array}{l}\bar{x} = 58{,}2 \text{ kg} \\ \sigma = \ \ 3{,}1 \text{ kg}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{3{,}1}{58{,}2} = 0{,}053 \rightarrow 5{,}3\%$

Alumnas $\left\{\begin{array}{l}\bar{x} = 52{,}4 \text{ kg} \\ \sigma = \ \ 5{,}2 \text{ kg}\end{array}\right\}$ C.V. $= \dfrac{5{,}2}{52{,}4} = 0{,}099 \rightarrow 9{,}9\%$

El peso medio de las alumnas es más variable que el peso de los alumnos.

11 **Se han medido los pesos y las alturas de 6 personas, obteniéndose los siguientes datos:**

Calcula el coeficiente de variación y di si están más dispersos los pesos o las alturas.

PESO (kg)	ALTURA (m)
65	1,70
60	1,50
63	1,70
63	1,70
68	1,75
68	1,80

PESOS (x_i)	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
60	1	60	3 600
63	2	126	7 938
65	1	65	4 225
68	2	136	9 248
	6	387	25 011

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{387}{6} = 64{,}5 \text{ kg}$$

$$\text{VAR.} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2 = \frac{25\,011}{6} - 64{,}5^2 = 8{,}25 \rightarrow \sigma = \sqrt{8{,}25} = 2{,}87 \text{ kg}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2{,}87}{64{,}5} = 0{,}044 \text{ o bien } 4{,}4\%$$

ALTURAS (y_i)	f_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
1,5	1	1,5	2,25
1,7	3	5,1	8,67
1,75	1	1,75	3,06
1,8	1	1,8	3,24
	6	10,15	17,22

$$\bar{y} = \frac{\Sigma f_i y_i}{\Sigma f_i} = \frac{10{,}15}{6} = 1{,}69 \text{ m}$$

$$\text{VAR.} = \frac{\Sigma f_i y_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{y}^2 = \frac{17{,}22}{6} - 1{,}69^2 = 0{,}0139 \rightarrow \sigma = \sqrt{20{,}0139} = 0{,}12 \text{ m}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{y}} = \frac{0{,}12}{1{,}69} = 0{,}071 \text{ o bien } 7{,}1\%$$

Están más dispersas las alturas que los pesos.

PÁGINA 214

Medidas de posición

12 □□□ **La mediana y los cuartiles de la distribución de "Aptitud para la música" (escala 1-100) en un colectivo de personas son $Q_1 = 31$, $Me = 46$ y $Q_3 = 67$.**

Completa las siguientes afirmaciones:

a) El 75% tiene una aptitud superior o igual a ____.

b) El 25% tiene una aptitud superior o igual a ____.

c) El ____% tiene una aptitud igual o menor a 46 puntos.

d) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 46 e inferior o igual a 67.

e) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 31 e inferior o igual a 67.

a) $Q_1 = 31$ b) $Q_3 = 67$ c) 50%

d) 25% e) 50%

13 □□□ **La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:**

150	**169**	**171**	**172**	**172**	**175**	**181**
182	**183**	**177**	**179**	**176**	**184**	**158**

Calcula la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

Colocamos los datos en orden creciente:

150 - 158 - 169 - 171 - 172 - 172 - 175 - 176 - 177 - 179 - 181 - 182 - 183 - 184

Hay 14 datos:

$\frac{14}{2} = 7 \rightarrow$ Mediana: valor intermedio de los dos centrales situados en séptima y octava posición:

$$Me = \frac{175 + 176}{2} = 175{,}5 \text{ cm}$$

Significa que la mitad de los alumnos tiene una estatura inferior a 175,5 cm.

$\frac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow$ $Q_1 = 171$ cm (4.° lugar)

El 25% de los alumnos mide menos de 171 cm de altura.

$14 \cdot \frac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow$ $Q_3 = 181$ cm (posición 11)

El 75% de los alumnos tiene una estatura inferior a 181 cm.

14 **Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:**

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

x_i	f_i	F_i	EN %
0	12	12	30
1	9	21	52,5
2	7	28	70
3	6	34	85
4	3	37	92,5
5	3	40	100

- $Me = 1$, porque para $x_i = 1$ la F_i supera el 50%
- $Q_1 = 0$, porque F_i supera el 25% para $x_i = 0$
- $Q_3 = 3$, porque F_i supera el 75% para $x_i = 3$

15 **Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones, correspondientes a las notas obtenidas en un test que han hecho dos grupos de estudiantes:**

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18
24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21
29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Colocamos en orden creciente los datos:

A 18 - 20 - 22 - 22 - 23 - 24 - 25 - 25 - 27 - 28 - 30 - 30 - 31 - 32 - 35

Hay 15 datos:

- La mediana es el valor central (posición 8) $\rightarrow$ $Me = 25$
- $\dfrac{15}{4} = 3{,}75 \rightarrow Q_1 = 22$ (4.ª posición)
- $15 \cdot \dfrac{3}{4} = 11{,}25 \rightarrow Q_3 = 30$ (12.ª posición)
- $15 - \dfrac{60}{100} = 9 \rightarrow p_{60}$ será el valor intermedio de los datos situados en 9.ª y 10.ª posición, es decir:

$$p_{60} = \frac{27+28}{2} \rightarrow p_{60} = 27{,}5$$

B 18 - 19 - 20 - 21 - 21 - 22 - 23 - 25 - 27 - 27 - 29 - 30 - 31 - 32

Hay 14 datos:

- Los dos valores centrales son 23 y 25 $\rightarrow Me = \dfrac{23+25}{2} = 24$
- $\dfrac{14}{4} = 3{,}5 \rightarrow Q_1 = 21$ (4.ª posición)
- $14 \cdot \dfrac{3}{4} = 10{,}5 \rightarrow Q_3 = 29$ (11.ª posición)
- $14 \cdot \dfrac{60}{100} = 8{,}4 \rightarrow p_{60} = 27$ (9.ª posición)

16 **En la fabricación de cierto tipo de bombillas se han detectado algunas defectuosas. Se han estudiado 200 cajas de 100 bombillas cada una, obteniéndose la siguiente tabla:**

DEFECTUOSAS	1	2	3	4	5	6	7	8
N.° DE CAJAS	5	15	38	42	49	31	18	2

Calcula la mediana, los cuartiles y los percentiles p_{10}, p_{90} y p_{95}.

Hacemos la tabla de frecuencias acumuladas.

x_i	f_i	F_i	EN %
1	5	5	2,5
2	15	20	10
3	38	58	29
4	42	100	50
5	49	149	74,5
6	31	180	90
7	18	198	99
8	2	200	100

Para $x_i = 4$, F_i iguala el 50%, luego la mediana será el valor intermedio entre 4 y el siguiente, 5, esto es, $Me = 4,5$.

$Q_1 = p_{25} = 3$

$Q_3 = p_{75} = 6$

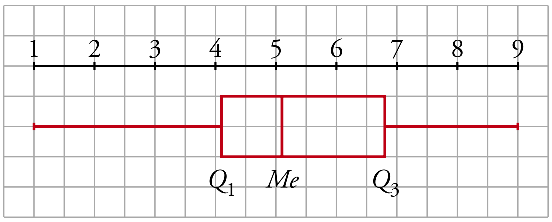
$p_{10} = 2,5$

$p_{90} = 6,5$

$p_{95} = 7$

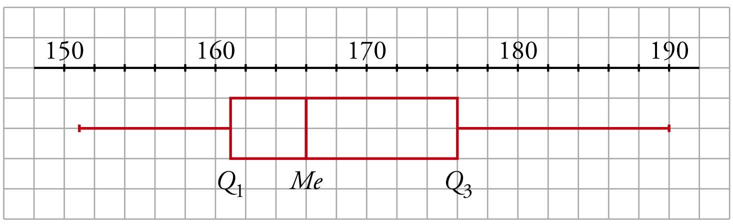
Diagramas de caja

17 **Las puntuaciones obtenidas por 87 personas tienen los siguientes parámetros de posición: $Q_1 = 4,1$; $Me = 5,1$ y $Q_3 = 6,8$. Todas las puntuaciones están en el intervalo 1 a 9. Haz el diagrama de caja.**



18 **Las estaturas de 35 alumnos de una clase están comprendidas entre 153 y 188. Los tres restantes miden 151, 152 y 190. Conocemos los siguientes parámetros: $Q_1 = 161$; $Me = 166$ y $Q_3 = 176$.**

Haz un diagrama de caja para esta distribución.

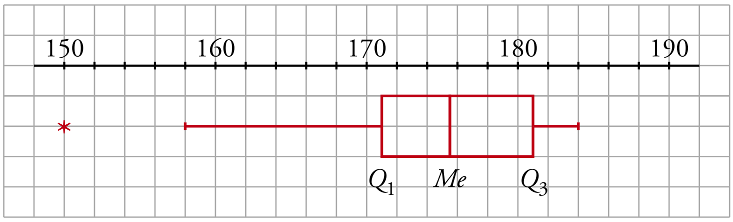


Haz el diagrama de caja correspondiente a las siguientes distribuciones.

19 **La misma que la del ejercicio 13 anterior.**

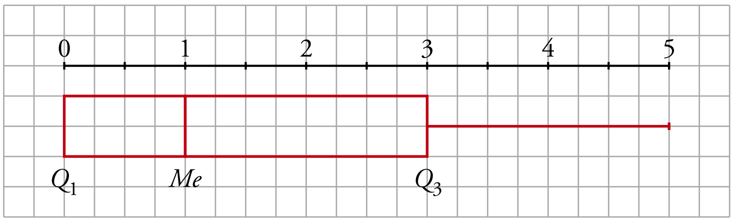
$Q_1 = 171;\ \ Me = 175,5;\ \ Q_3 = 181$

$(Q_3 - Q_1) \cdot 1,5 = (181 - 171) \cdot 1,5 = 10 \cdot 1,5 = 15 \ \begin{cases} 171 - 15 = 156 \\ 181 + 15 = 196 \end{cases}$



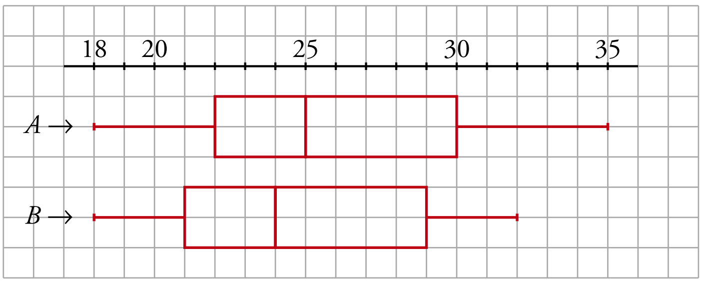
20 **La misma que la del ejercicio 14 anterior.**

$Q_1 = 0;\ \ Me = 1;\ \ Q_3 = 3$



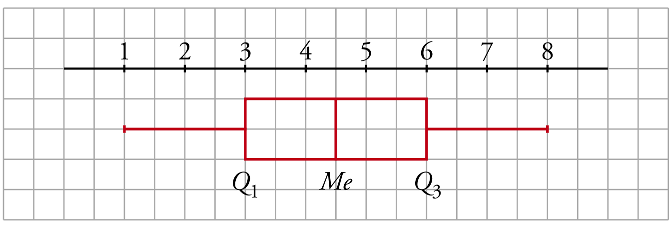
21 **La A y la B que se propusieron en el ejercicio 15 anterior.**

A: $Q_1 = 22;\ \ Me = 25;\ \ Q_3 = 30$ B: $Q_1 = 21;\ \ Me = 24;\ \ Q_3 = 29$



22 **La misma que la del ejercicio 16 anterior.**

$Q_1 = 3;\ \ Me = 4,5;\ \ Q_3 = 6$



Muestreo

23 □□□ **Se quiere realizar los siguientes estudios:**

I. Tipo de transporte que utilizan los vecinos de un barrio para acudir a su trabajo.

II. Estudios que piensan seguir los alumnos y alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

III. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

IV. Número de horas diarias que ven la televisión los niños y niñas de tu comunidad autónoma con edades comprendidas entre 5 y 10 años.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población.

b) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

a) I → Los vecinos del barrio.

II → Alumnos y alumnas de la ESO de un centro.

III → Personas que han visto la obra.

IV → Niños y niñas de mi comunidad autónoma de entre 5 y 10 años.

b) I → Dependiendo del número de vecinos del barrio: si son pocos, población; si son muchos, una muestra. Aunque teniendo en cuenta que es difícil cogerlos a todos y que todos contesten a la encuesta, quizás sería mejor una muestra.

II → Población. Con encuestas en clase en las que participan todos (obviamente, siempre falta alguno).

III → Muestra. Son muchas personas y sería inoportuno molestar a tanta gente, se formarían colas…

IV → Muestra. Son demasiadas personas.

PÁGINA 215

24 □□□ **¿Cómo se puede contar el número aproximado de palabras que tiene un cierto libro?**

— Se seleccionan, abriendo al azar, unas cuantas páginas y se cuentan las palabras en cada una.

— Se calcula el número medio de palabras por página.

— Se da un intervalo en el que pueda estar comprendido el número total de palabras.

Hazlo con algún libro. O si no, imagina que lo has hecho e inventa los resultados.

- En un libro de 200 páginas, seleccionamos al azar 5 páginas. Contamos el número de palabras de estas páginas: 537, 562, 548, 324, 600.

- Calculamos el número medio de palabras:

$$\frac{537 + 562 + 548 + 324 + 600}{5} = 514{,}2$$

En 200 páginas, habrá 102 840 palabras.

- El número de palabras del libro estará entre 100 000 y 105 000.

25 **Para hacer un sondeo electoral en un pueblo de 400 electores, aproximadamente, se va a elegir una muestra de 200 individuos. Di si te parece válido cada uno de los siguientes modos de seleccionarlos y explica por qué.**

a) Se le pregunta al alcalde, que conoce a todo el pueblo, qué individuos le parecen más representativos.

b) Se eligen 200 personas al azar entre las que acuden a la verbena el día del patrón.

c) Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.

d) Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 200 de ellos.

a) No es válido. Se trata de una elección subjetiva.

b) No es válido. Probablemente haya grupos de edades mucho más representados que otros.

c) Sí es válido.

d) Sí es válido.

PIENSA Y RESUELVE

26 **Deseamos hacer una tabla con datos agrupados a partir de 384 datos, cuyos valores extremos son 19 y 187.**

a) Si queremos que sean 10 intervalos de amplitud 17, ¿cuáles serán esos intervalos?

b) Haz otra distribución en 12 intervalos de la amplitud que creas conveniente.

Recorrido: $r = 187 - 19 = 168$

a) Buscamos un número algo mayor que el recorrido y que sea múltiplo de 10. Por ejemplo, $r' = 170$. De este modo, cada intervalo tendrá una longitud de 17.

Los intervalos son:

[18, 35); [35, 52); [52, 69); [69, 86); [86, 103); [103, 120)

[120, 137); [137, 154); [154, 171); [171, 188)

b) Buscamos ahora un número que sea múltiplo de 12, que es el número de intervalos en este caso.

$168 = 12 \cdot 14 \;\rightarrow\;$ la amplitud de cada intervalo será 14.

Los intervalos son:

[19, 33); [33, 47); [47, 61); [61, 75); [75, 89); [89, 103)

[103, 117); [117, 131); [131, 145); [145, 159); [159, 173); [173, 187)

27 **En una urbanización de 25 familias se ha observado la variable "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:**

0	**1**	**2**	**3**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**4**	**0**	**1**	**1**	**1**	**4**
3	**2**	**2**	**1**	**1**					

a) Construye la tabla de frecuencias de la distribución.

b) Haz el diagrama de barras.

c) Calcula la media y la desviación típica.

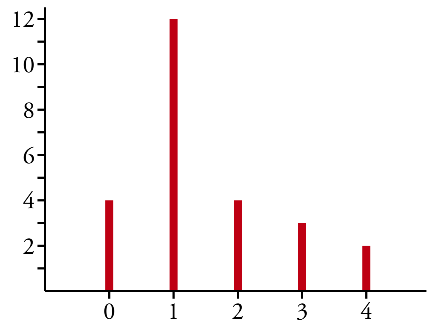
d) Halla la mediana y los cuartiles.

e) Haz el diagrama de caja.

a)

x_i	f_i
0	4
1	12
2	4
3	3
4	2

b)



c)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	4	0	0
1	12	12	12
2	4	8	16
3	3	9	27
4	2	8	32
	25	37	87

$$\bar{x} = \frac{37}{25} = 1,48$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{87}{25} - 1,48^2} = 1,14$$

d)

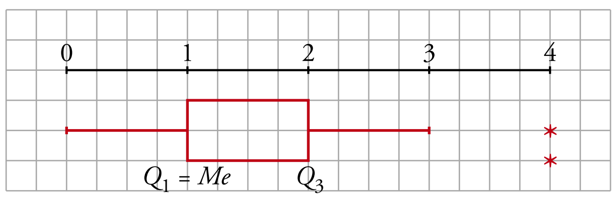
x_i	f_i	F_i	EN %
0	4	4	16
1	12	16	64
2	4	20	80
3	3	23	92
4	2	25	100

$Me = 1$

$Q_1 = 1$

$Q_3 = 2$

e)



28 **El número de personas que acudieron cada día a las clases de natación de una piscina municipal fueron:**

38	**31**	**54**	**47**	**50**	**56**	**52**	**48**	**55**	**60**
58	**46**	**47**	**55**	**60**	**53**	**43**	**52**	**46**	**55**
43	**60**	**45**	**48**	**40**	**56**	**54**	**48**	**39**	**50**
53	**59**	**48**	**39**	**48**					

a) Haz una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos.

b) Representa gráficamente la distribución.

c) Halla $\bar{x}$ y σ.

Localizamos los valores extremos: 31 y 60.

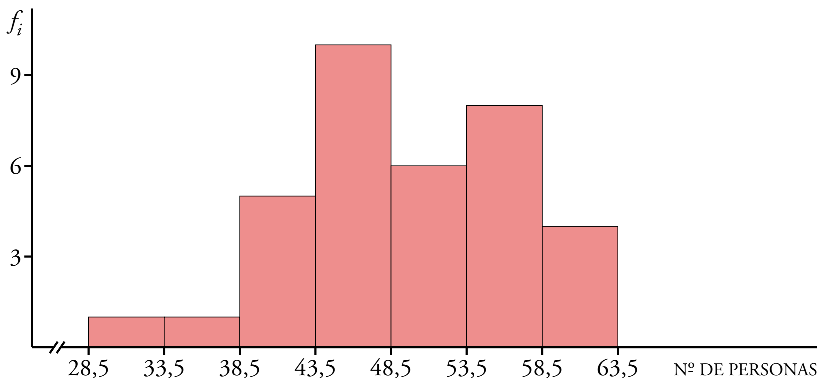
Recorrido = 60 – 31 = 29

Agrupamos los datos en 7 intervalos de longitud 5.

a)

INTERVALOS	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
28,5 - 33,5	31	1	31	961
33,5 - 38,5	36	1	36	1 296
38,5 - 43,5	41	5	205	8 405
43,5 - 48,5	46	10	460	21 160
48,5 - 53,5	51	6	306	15 606
53,5 - 58,5	56	8	448	25 088
58,5 - 63,5	61	4	244	14 884
		35	1 730	87 400

b) Representamos los datos en un histograma. La altura de cada rectángulo coincidirá con la frecuencia absoluta, por ser los intervalos de igual amplitud.



c) MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{1\,730}{35} \approx 49,43$

VAR. $= \dfrac{87\,400}{35} - 49,43^2 = 53,82$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{53,82} \approx 7,34$

29 □□□ **Un dentista observa el número de caries en cada uno de los 100 niños de un colegio y obtiene los resultados resumidos en esta tabla:**

N.° DE CARIES	F. ABSOLUTA	F. RELATIVA
0	**25**	**0,25**
1	**20**	**0,2**
2	y	z
3	**15**	**0,15**
4	x	**0,05**

a) Completa la tabla obteniendo x, y, z.

b) Calcula el número medio de caries.

a) La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de individuos (100, en nuestro caso).

$$0{,}05 = \frac{x}{100} \rightarrow x = 5$$

$$25 + 20 + y + 15 + 5 = 100 \rightarrow y = 35$$

$$z = \frac{y}{100} = \frac{35}{100} \rightarrow z = 0{,}35$$

b)

N.° DE CARIES (x_i)	f_i	$f_i x_i$
0	25	0
1	20	20
2	35	70
3	15	45
4	5	20
	100	155

$$\bar{x} = \frac{155}{100} = 1{,}55$$

El número medio de caries es de 1,55.

30 □□□ **El número de errores cometidos en un test por un grupo de personas viene reflejado en la siguiente tabla:**

NÚMERO DE ERRORES	0	1	2	3	4	5	6
NÚMERO DE PERSONAS	10	12	8	7	5	4	3

a) Halla la mediana y los cuartiles inferior y superior, y explica su significado.

b) ¿Cuál es el número medio de errores por persona?

Construimos la tabla de frecuencias acumuladas:

N.° DE ERRORES (x_i)	N.° DE PERSONAS (f_i)	$x_i f_i$	F_i	EN %
0	12	0	12	23,53
1	12	12	24	47,06
2	8	16	32	62,75
3	7	21	39	76,47
4	5	20	44	86,27
5	4	20	48	94,12
6	3	18	51	100
	51	107		

a) $Me = 2$. Significa que el 50% de las personas cometen 0, 1 ó 2 errores.

$Q_1 = 1$. El 25% de las personas comete 1 error o ninguno.

$Q_3 = 3$. El 75% de las personas comente 3 errores o menos de 3 errores.

b) $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{107}{51} \approx 2,1$

El número medio de errores por persona es ligeramente superior a 2.

31 **Al preguntar a un grupo de personas cuánto tiempo dedicaron a ver televisión durante un fin de semana, se obtuvieron estos resultados:**

TIEMPO EN HORAS	N.° DE PERSONAS
[0; 0,5)	**10**
[0,5; 1,5)	**10**
[1,5; 2,5)	**18**
[2,5; 4)	**12**
[4; 8)	**12**

Dibuja el histograma correspondiente y halla la media y la desviación típica.

Como los intervalos no son de la misma longitud, para representar la distribución mediante un histograma pondremos en cada barra una altura tal que el área sea proporcional a la frecuencia:

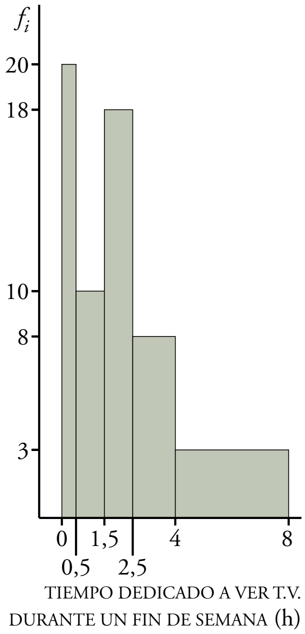
[0; 0,5) → $a_1 = 0,5$ $f_1 = 10$ → $h_1 = \dfrac{10}{0,5} = 20$

[0,5; 1,5) → $a_2 = 1$ $f_2 = 10$ → $h_2 = 10$

[1,5; 2,5) → $a_3 = 1$ $f_3 = 18$ → $h_3 = 18$

[2,5; 4) → $a_4 = 1,5$ $f_4 = 12$ → $h_4 = \dfrac{12}{1,5} = 8$

[4; 8) → $a_5 = 4$ $f_5 = 12$ → $h_5 = \dfrac{12}{4} = 3$



TIEMPO	MARCA (x_i)	f_i	$x_i f_i$	$x_i f_i^2$
[0; 0,5)	0,25	10	2,5	0,625
[0,5; 1,5)	1	10	10	10
[1,5; 2,5)	2	18	36	72
[2,5; 4)	3,25	12	39	126,75
[4; 8)	6	12	72	432
		62	159,5	641,375

$$\bar{x} = \frac{159,5}{62} = 2,57$$

$$\sigma^2 = \frac{641,375}{62} - 2,57^2 = 3,74 \;\rightarrow\; \sigma = \sqrt{3,74} = 1,93$$

PÁGINA 216

32 **Estas tablas recogen la frecuencia de cada signo en las quinielas durante las 20 primeras jornadas:**

JORNADA	1	X	2
1.ª	4	4	6
2.ª	9	3	2
3.ª	11	2	1
4.ª	10	2	2
5.ª	8	4	2
6.ª	9	4	1
7.ª	10	4	0
8.ª	8	4	2
9.ª	9	5	0
10.ª	5	6	3

JORNADA	1	X	2
11.ª	9	3	2
12.ª	5	6	3
13.ª	7	5	2
14.ª	4	9	1
15.ª	7	3	4
16.ª	6	4	4
17.ª	8	2	4
18.ª	6	7	1
19.ª	7	4	3
20.ª	7	5	2

a) Haz una tabla de frecuencias para el número de veces que sale el "1" en cada una de las 20 jornadas:

x_i	4	5	6	7	8	9	10	11
f_i								

Halla su media y su desviación típica.

b) Haz lo mismo para la "X" y para el "2".

c) Halla el C.V. en los tres casos y compáralos.

a) TABLA DE FRECUENCIAS PARA LOS UNOS

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
4	2	8	32
5	2	10	50
6	2	12	72
7	4	28	196
8	3	24	192
9	4	36	324
10	2	20	200
11	1	11	121
	20	149	1 187

$$\bar{x} = \frac{149}{20} = 7{,}45$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1\,187}{20} - 7{,}45^2} = \sqrt{3{,}8475} = 1{,}96$$

b) TABLA DE FRECUENCIAS PARA LAS EQUIS

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
2	3	6	12
3	3	9	27
4	7	28	112
5	3	15	75
6	2	12	72
7	1	7	49
9	1	9	81
	20	86	428

$$\bar{x} = \frac{86}{20} = 4{,}3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{428}{20} - 4{,}3^2} = \sqrt{2{,}91} = 1{,}71$$

TABLA DE FRECUENCIAS PARA LOS DOSES

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	2	0	0
1	4	4	4
2	7	14	28
3	3	9	27
4	3	12	48
6	1	6	36
	20	45	143

$$\bar{x} = \frac{45}{20} = 2{,}25$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{143}{20} - 2{,}25^2} = \sqrt{2{,}0875} = 1{,}44$$

c) UNOS $\rightarrow$ $\text{C.V.} = \dfrac{1{,}96}{7{,}45} = 0{,}2631 \rightarrow 26{,}31\%$

EQUIS $\rightarrow$ $\text{C.V.} = \dfrac{1{,}71}{4{,}3} = 0{,}3977 \rightarrow 39{,}77\%$

DOSES $\rightarrow$ $\text{C.V.} = \dfrac{1{,}44}{2{,}25} = 0{,}64 \rightarrow 64\%$

33 **Cada alumno de un grupo cuenta el número de personas y el número de perros que viven en su portal.**

Suman sus resultados y obtienen una muestra con la que se puede estimar el número de perros que hay en su ciudad.

Por ejemplo, supongamos que en su observación obtienen un total de 747 personas y 93 perros. Y saben que en su ciudad viven 75 000 personas.

a) ¿Cuántos perros estiman que habrá en la ciudad?

b) ¿Cómo es de fiable esta estimación?

c) ¿Es aleatoria la muestra que han utilizado?

a) $\dfrac{93}{747} = \dfrac{x}{75\,000} \rightarrow x = \dfrac{93 \cdot 75\,000}{747} = 9\,337{,}3$

Estiman que habrá unos 9 337 perros, aproximadamente.

b) No es fiable. La muestra estudiada no es representativa de la ciudad.

c) No es aleatoria.

34 **Para hacer un estudio sobre los hábitos ecológicos de las familias de una ciudad, se han seleccionado por sorteo las direcciones, calle y número, que serán visitadas.**

Si en un portal vive más de una familia, se sorteará entre ellas la que será seleccionada.

¿Obtendremos con este procedimiento una muestra aleatoria?

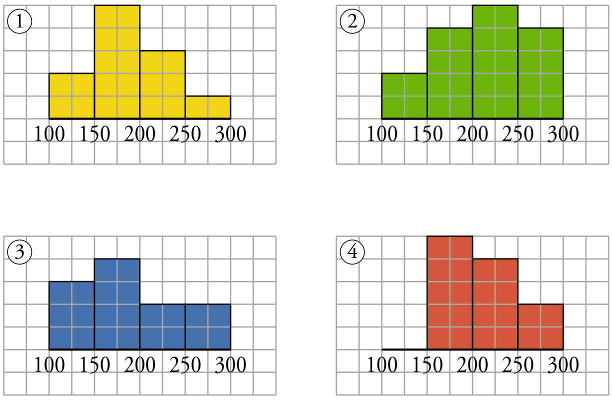
☞ ***Piensa si tiene la misma probabilidad de ser incluida en la muestra una familia que vive en una vivienda unifamiliar que otra que vive, por ejemplo, en un bloque de 32 viviendas.***

No se obtiene una muestra aleatoria, porque una familia que vive en una vivienda unifamiliar tiene más probabilidades de ser elegida que una familia que vive en un bloque de viviendas.

35 **Se ha medido el nivel de colesterol en cuatro grupos de personas sometidas a diferentes dietas. Las medias y las desviaciones típicas son las que figuran en esta tabla:**

DIETA	*A*	*B*	*C*	*D*
$\bar{x}$	211,4	188,6	211,7	188,6
σ	37,5	52,6	49,9	43,1

Las gráficas son, no respectivamente:



Asocia a cada dieta la gráfica que le corresponde.

Fijándonos en las gráficas, se observa que los grupos 1 y 3 tienen una media inferior a 200, mientras que las medias de 2 y 4 son superiores a ese número. Luego podemos asociar:

$$\text{A y C} \;\rightarrow\; \text{2 y 4}$$

$$\text{B y D} \;\rightarrow\; \text{1 y 3}$$

Por otra parte, las personas de 2 tienen el nivel de colesterol más disperso que las de 4. Según esto, su desviación típica será mayor, por lo que C $\leftrightarrow$ 2 y A $\leftrightarrow$ 4. Análogamente, B $\leftrightarrow$ 3 y D $\leftrightarrow$ 1.

PÁGINA 228

PRACTICA

Relaciones entre sucesos

1 **En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el "gordo".**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe los sucesos: A = MENOR QUE 5; B = PAR.

c) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, A', B', $A' \cap B'$.

a) El espacio muestral es: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) A = "MENOR QUE 5" $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

B = "PAR" $= \{0, 2, 4, 6, 8\}$

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cap B = \{0, 2, 4\}$

$A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A' \cap B' = \{5, 7, 9\}$

2 **Escribimos cada una de las letras de la palabra PREMIO en una ficha y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.**

a) Escribe los sucesos elementales de este experimento. ¿Tienen todos la misma probabilidad?

b) Escribe el suceso "obtener vocal" y calcula su probabilidad.

c) Si la palabra elegida fuera SUERTE, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

a) Los sucesos elementales son: {P}, {R}, {E}, {M}, {I}, {O}.

Todas tienen la misma probabilidad, porque todas aparecen una sola vez.

b) V = "obtener vocal" $\rightarrow$ V = {E, I, O}

$P[\text{V}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) Los sucesos elementales son: {S}, {U}, {E}, {R}, {T}

$P[\text{V}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

En este caso el suceso elemental {E} tiene más probabilidad que el resto, por aparecer dos veces.

3 **Lanzamos un dado rojo y otro verde. Anotamos el resultado. Por ejemplo, (3, 4) significa 3 en el rojo y 4 en el verde.**

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

b) Describe los siguientes sucesos:

A: la suma de puntos es 6; A = {(5, 1), (4, 2), …}

B: En uno de los dados ha salido 4; B = {(4, 1), …}

C: En los dados salió el mismo resultado.

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$.

d) Calcula la probabilidad de los sucesos de los apartados b) y c).

e) Calcula la probabilidad de A', B' y C'.

a) Como tenemos dos dados, cada uno con 6 caras, tenemos 6 resultados en uno para cada uno de los 6 resultados del otro. Es decir, en total, 36 elementos en el espacio muestral.

b) $A = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

c) $A \cup B \rightarrow$ En uno de los dados ha salido un 4 o la suma de los dos es 6.

$A \cap B \rightarrow$ Habiendo salido un 4, la suma de los dos es 6, es decir, $\{(4, 2), (2, 4)\}$.

$A \cap C \rightarrow$ Habiendo salido dos números iguales, la suma es 6, es decir, $\{(3, 3)\}$.

d) $P[A] = \frac{5}{36}$ $\quad P[B] = \frac{11}{36}$ $\quad P[C] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P[A \cup B] = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$ $\quad P[A \cap B] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\quad P[A \cap C] = \frac{1}{36}$

e) $P[A'] = 1 - P[A] = \frac{31}{36}$

$P[B'] = 1 - P[B] = \frac{25}{36}$

$P[C'] = 1 - P[C] = \frac{5}{6}$

4 **El juego del dominó consta de 28 fichas. Sacamos una al azar y anotamos la suma (x) de las puntuaciones.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral? Di la probabilidad de cada uno de los 13 casos que pueden darse.

b) Describe los sucesos:

A: x es un número primo. $\quad$ B: x es mayor que 4. $\quad$ $A \cup B$, $A \cap B$, A'

c) Calcula las probabilidades de los sucesos descritos en el apartado b).

a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P[0] = \frac{1}{28}$; $P[1] = \frac{1}{28}$; $P[2] = \frac{2}{28}$

$P[3] = \frac{2}{28}$; $P[4] = \frac{3}{28}$; $P[5] = \frac{3}{28}$

$P[6] = \frac{4}{28}$; $P[7] = \frac{3}{28}$; $P[8] = \frac{3}{28}$

$P[9] = \frac{2}{28}$; $P[10] = \frac{2}{28}$; $P[11] = \frac{1}{28}$; $P[12] = \frac{1}{28}$

b) $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ $\quad B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $\quad A \cap B = \{5, 7, 11\}$

$A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

c) $P[A] = P[2] + P[3] + P[5] + P[7] + P[11] = \frac{11}{28}$

$P[B] = \frac{19}{28}$ $\quad P[A \cup B] = \frac{23}{28}$

$P[A \cap B] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ $\quad P[A'] = 1 - P[A] = \frac{17}{28}$

Probabilidades sencillas

5 □□□ **En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída :**

a) Sea un número de una sola cifra.

b) Sea un número múltiplo de 7.

c) Sea un número mayor que 25.

a) $P[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] = \frac{9}{49}$

b) $P[7, 14, 21, 28, 35, 42, 49] = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$

c) $P[26, 27, 28, \ldots, 49] = \frac{24}{49}$

6 □□□ **Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:**

a) REY o AS. **b) FIGURA y OROS.** **c) NO SEA ESPADAS.**

a) $P[\text{REY O AS}] = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

b) $P[\text{FIGURA Y OROS}] = P[\text{FIGURA DE OROS}] = \frac{3}{40} = \frac{1}{10}$

c) $P[\text{NO SEA ESPADAS}] = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

7 **En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 1 000 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola blanca en 411 ocasiones, bola negra en 190, bola verde en 179 y bola azul en 220.**

Al hacer una nueva extracción, di qué probabilidad asignarías a:

a) Sacar bola blanca.

b) No sacar bola blanca.

c) Sacar bola verde o azul.

d) No sacar bola negra ni azul.

Si en la bolsa hay 22 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada uno de los colores?

Como se han hecho 1 000 extracciones:

$P[\text{BOLA BLANCA}] = \dfrac{411}{1\,000} = 0{,}411 \qquad P[\text{BOLA VERDE}] = \dfrac{179}{1\,000} = 0{,}179$

$P[\text{BOLA NEGRA}] = \dfrac{190}{1\,000} = 0{,}19 \qquad P[\text{BOLA AZUL}] = \dfrac{220}{1\,000} = 0{,}22$

a) $P[\text{BOLA BLANCA}] = 0{,}411$

b) $P[\text{NO BOLA BLANCA}] = 1 - 0{,}411 = 0{,}589$

c) $P[\text{BOLA VERDE O AZUL}] = 0{,}179 + 0{,}22 = 0{,}399$

d) $P[\text{NO BOLA NEGRA NI AZUL}] = 1 - (0{,}19 + 0{,}22) = 0{,}59$

Si hay 22 bolas:

- El 41% son blancas $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}41 = 9$ bolas blancas.
- El 19% son negras $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}19 = 4$ bolas negras.
- El 18% son verdes $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}18 = 4$ bolas verdes.
- El 22% son azules $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}22 = 5$ bolas azules.

8 **Ana tira un dado y su hermana Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea superior a la de Ana?**

EVA \ ANA	1	2	3	4	5	6
1	1–1	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6
2	2–1	2–2	2–3	2–4	2–5	2–6
3	3–1	3–2	3–3	3–4	3–5	3–6
4	4–1	4–2	4–3	4–4	4–5	4–6
5	5–1	5–2	5–3	5–4	5–5	5–6
6	6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	6–6

$P[\text{PUNTUACIÓN DE EVA SUPERIOR A LA DE ANA}] = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

9 □□□ **Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación del mayor (si coinciden, la de uno de ellos).**

a) Completa la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

***A*: n.° par, *B*: n.° menor que 4, $A \cap B$.**

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

a)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	2	3	4	5	6
⚂	3	3	3	4	5	6
⚃	4	4	4	4	5	6
⚄	5	5	5	5	5	6
⚅	6	6	6	6	6	6

$P[1] = \frac{1}{36}$; $P[2] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$; $P[3] = \frac{5}{36}$

$P[4] = \frac{7}{36}$; $P[5] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; $P[6] = \frac{11}{36}$

b) $P[A] = \frac{3}{36} + \frac{7}{36} + \frac{11}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

$P[B] = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P[A \cap B] = P[2] = \frac{1}{12}$

PÁGINA 229

Experiencias compuestas

10 □□□ **a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?**

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

a) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$

$P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$

b) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1\,560} = \frac{1}{130}$

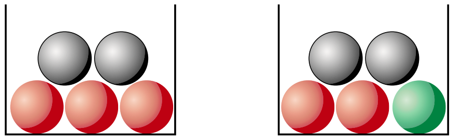
$P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{132}{1\,560} = \frac{11}{130}$

11 **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?**

$P[\text{las tres menores que } 5] = P[\text{menor que } 5] \cdot P[\text{menor que } 5] \cdot P[\text{menor que } 5] =$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$$

12 **Sacamos una bola de cada urna. Calcula:**



a) La probabilidad de que ambas sean rojas.

b) La probabilidad de que ambas sean negras.

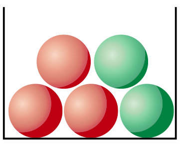
c) La probabilidad de que alguna sea verde.

a) $P[\text{ROJA y ROJA}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

b) $P[\text{NEGRA y NEGRA}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

c) $P[\text{alguna VERDE}] = P[\text{VERDE}] + P[\text{VERDE}] = 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

13 **Sacamos dos bolas. Calcula:**



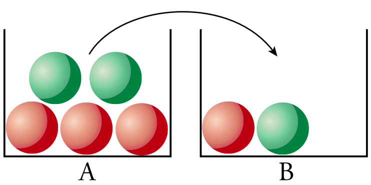
a) *P*[2 rojas]

b) *P*[2 verdes]

a) $P[2 \text{ ROJAS}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

b) $P[2 \text{ VERDES}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

14 **Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:**

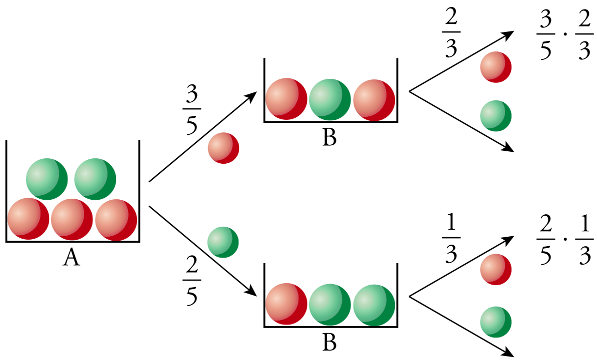


a) P**[1.ª roja y 2.ª roja]** **b)** P**[1.ª roja y 2.ª verde]**

c) P**[2.ª roja / 1.ª verde]** **d)** P**[2.ª roja / 1.ª roja]**

e) P**[2.ª roja]** **f)** P**[2.ª verde]**

☞ ***e) Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el diagrama.***



a) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

b) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

c) $P[2.^a \text{ roja / } 1.^a \text{ verde}] = \frac{1}{3}$

d) $P[2.^a \text{ roja / } 1.^a \text{ roja}] = \frac{2}{3}$

e) $P[2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

f) $P[2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$

Tablas de contingencia

15 **En un centro escolar hay 1 000 alumnos y alumnas repartidos así:**

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	147	135
NO USAN GAFAS	368	350

Llamamos: A ↔ chicas, O ↔ chicos, G ↔ tiene gafas, no G ↔ no tiene gafas. Calcula:

a) P**[A],** P**[O],** P**[G],** P**[no G]**

b) Describe los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades: A y G, O y no G, A/G, G/A, G/O.

a) $P[\text{A}] = \frac{135 + 350}{1\,000} = \frac{485}{1\,000} = 0{,}485$

$P[\text{O}] = 1 - P[\text{A}] = 1 - 0{,}485 = 0{,}515$

$P[\text{G}] = \frac{147 + 135}{1\,000} = \frac{282}{1\,000} = 0,282$

$P[\text{no G}] = 1 - P[\text{G}] = 1 - 0,282 = 0,718$

b) A y G $\rightarrow$ Chica con gafas.

$P[\text{A y G}] = \frac{135}{1\,000} = 0,135$

O y no G $\rightarrow$ Chico sin gafas

$P[\text{O y no G}] = \frac{368}{1\,000} = 0,368$

A/G $\rightarrow$ De los que llevan gafas, cuántas son chicas.

$P[\text{A/G}] = \frac{135}{282} = 0,479$

G/A $\rightarrow$ De todas las chicas, cuántas llevan gafas.

$P[\text{G/A}] = \frac{135}{485} = 0,278$

G/O $\rightarrow$ De todos los chicos, cuántos llevan gafas.

$P[\text{G/O}] = \frac{147}{515} = 0,285$

16 **En una empresa hay 200 empleados, 100 hombres y 100 mujeres. Los fumadores son 40 hombres y 35 mujeres.**

a) Haz con los datos una tabla de contingencia.

b) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y no fume: *P*[H y no F].

c) Calcula también: *P*[M y F], *P*[M / F], *P*[F / M]

a)

	HOMBRE	MUJER
FUMADOR	40	35
NO FUMADOR	60	65

b) $P[\text{H y no F}] = \frac{60}{200} = 0,3$

c) $P[\text{M y F}] = \frac{35}{200} = 0,175$

$P[\text{M/F}] = \frac{35}{75} = 0,467$

$P[\text{F/M}] = \frac{35}{100} = 0,35$

17 ■■□ **Los 1000 socios de un club deportivo se distribuyen de la forma que se indica en la tabla.**

	HOMBRES	MUJERES
JUEGAN AL BALONCESTO	147	135
NO JUEGAN AL BALONCESTO	368	350

Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea un hombre.

b) Sea una mujer.

c) Juegue al baloncesto.

d) Sea una mujer que practique baloncesto.

e) Sea un hombre que no practique baloncesto.

f) Juegue al baloncesto, sabiendo que es hombre.

g) Sea mujer, sabiendo que no juega al baloncesto.

a) $P[\text{H}] = \frac{147 + 368}{1\,000} = \frac{515}{1\,000} = 0{,}515$

b) $P[\text{M}] = 1 - P[\text{H}] = 0{,}485$

c) $P[\text{B}] = \frac{147 + 135}{1\,000} = \frac{282}{1\,000} = 0{,}282$

d) $P[\text{M y B}] = \frac{135}{1\,000} = 0{,}135$

e) $P[\text{H y no B}] = \frac{368}{1\,000} = 0{,}368$

f) $P[\text{B/H}] = \frac{147}{515} = 0{,}285$

g) $P[\text{M/no B}] = \frac{350}{718} = 0{,}487$

PÁGINA 230

PIENSA Y RESUELVE

18 ■□□ **Una urna contiene 100 bolas numeradas así: 00, 01, 02 … 99**

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades del número que tiene cada bola. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) $x = 3$	**b)** $y = 3$	**c)** $x \neq 7$	**d)** $x > 5$
e) $x + y = 9$	**f)** $x < 3$	**g)** $y > 7$	**h)** $y < 7$

UNIDADES / DECENAS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

a) $x = 3 \;\rightarrow\; P[x = 3] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

b) $y = 3 \;\rightarrow\; P[y = 3] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

c) $x \neq 7 \;\rightarrow\; P[x \neq 7] = \dfrac{90}{100} = \dfrac{9}{10}$

d) $x > 5 \;\rightarrow\; P[x > 5] = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$

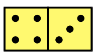
e) $x + y = 9 \;\rightarrow\; P[x + y = 9] = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

f) $x < 3 \;\rightarrow\; P[x < 3] = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$

g) $y > 7 \;\rightarrow\; P[y > 7] = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

h) $y < 7 \;\rightarrow\; P[y < 7] = \dfrac{7}{100} = \dfrac{7}{10}$

19 **Sacamos dos fichas de un dominó. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas la suma de sus puntuaciones sea un número primo (2, 3, 5, 7 u 11)?**



4 + 3 = 7 es primo

Tenemos:

$A = \{(1, 1), (2, 0), (1, 2), (3, 0), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (6, 1), (5, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

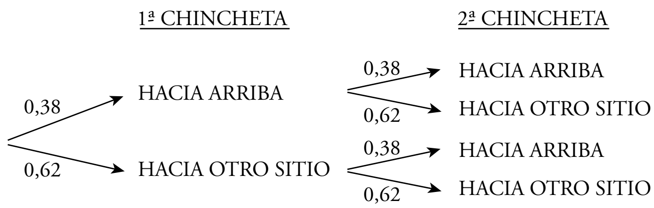
$P[A] = \dfrac{11}{28}$

Por tanto:

$P[\text{en ambas la suma es un primo}] = \dfrac{11}{28} \cdot \dfrac{10}{27} = \dfrac{110}{756} = 0{,}146$

20 **Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.**

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?



P[DISTINTA FORMA] = 0,38 · 0,62 + 0,62 · 0,38 = 0,47

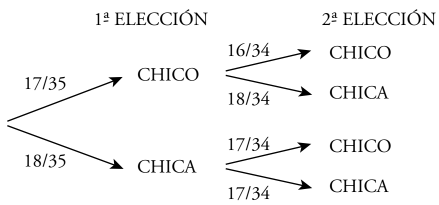
21 **En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase.**

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.



a) P[DOS CHICOS] $= \frac{17}{35} \cdot \frac{16}{34} = \frac{8}{35}$

b) P[DOS CHICAS] $= \frac{18}{35} \cdot \frac{17}{34} = \frac{9}{35}$

c) P[UN CHICO Y UNA CHICA] $= \frac{17}{35} \cdot \frac{18}{34} + \frac{18}{35} \cdot \frac{17}{34} = \frac{18}{35}$

22 **Extraemos una tarjeta de cada una de estas bolsas.**

a) Calcula la probabilidad de obtener una S y una I, "SI".

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener "NO"?

c) ¿Son sucesos contrarios "SI" y "NO"?

Resuélvelo rellenando esta tabla.

	S	S	N
I	SI		
O			
O		SO	

	S	S	N
I	SI	SI	NI
O	SO	SO	NO
O	SO	SO	NO

a) $P[\text{SÍ}] = \dfrac{2}{9}$ b) $P[\text{NO}] = \dfrac{2}{9}$

c) No, no son sucesos contrarios, porque $P[\text{SÍ}] \neq 1 - P[\text{NO}]$.

23 **En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0,89, la de pasar el segundo es 0,93 y la de pasar el tercero es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto pase las tres pruebas?**

Las tres pruebas son independientes una de otra.

$P[\text{PASAR EL PRIMER CONTROL}] = 0{,}89$

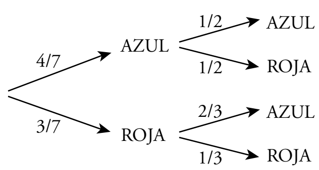
$P[\text{PASAR EL SEGUNDO CONTROL}] = 0{,}93$

$P[\text{PASAR EL TERCER CONTROL}] = 0{,}85$

$P[\text{PASAR LOS TRES CONTROLES}] = 0{,}89 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}85 = 0{,}703$

24 **Se extraen dos bolas de esta bolsa.**

Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.

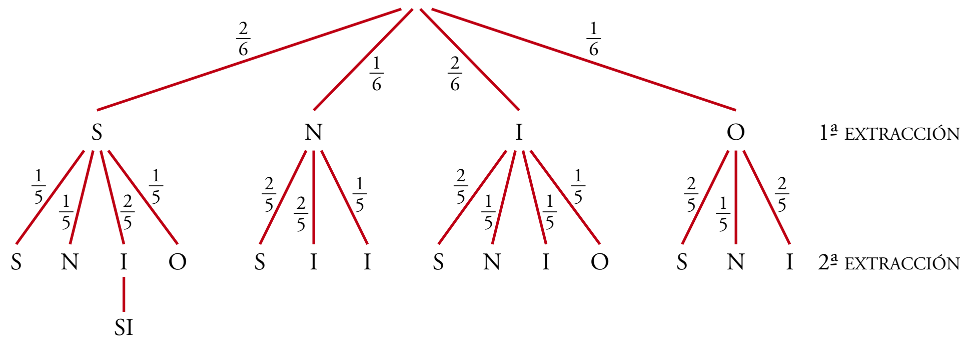


$P[\text{AZUL Y AZUL}] = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{7}$

$P[\text{ROJA Y ROJA}] = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{7}$

$P[\text{AMBAS DEL MISMO COLOR}] = \dfrac{2}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7}$

25 **En una bolsa tenemos las letras S, S, N, I, I, O. Sacamos dos letras. ¿Cuál es la probabilidad de que con ellas se pueda escribir SI?**



$P[\text{“SI”}] = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

26 **Javier tiene en su monedero 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al azar.**

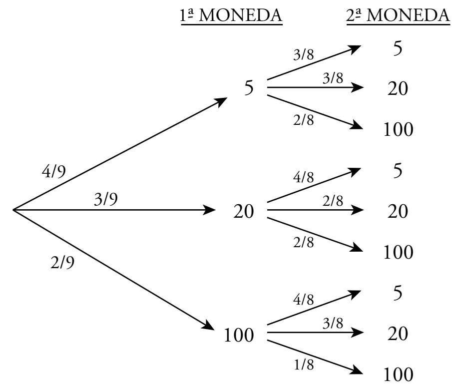
¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Que las dos sean de cinco céntimos.

b) Que ninguna sea de un euro.

c) Que saque 1,20 €.

En el diagrama de árbol, las monedas aparecen en céntimos. 1 € = 100 cent.



a) $P[\text{DOS DE 5 CENT.}] = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{NINGUNA DE 1 €}] = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{9}\left(\frac{4}{8} + \frac{2}{8}\right) = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$

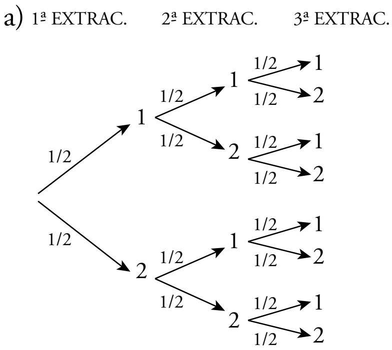
c) $P[\text{SACAR 1,20 €}] = P[100, 20] = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{6}$

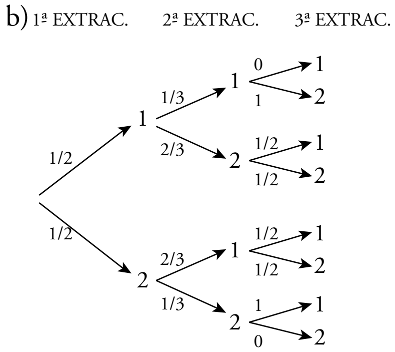
27 **En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden.**

Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que:

a) La bola se reintegra a la bolsa.

b) La bola no se devuelve a la bolsa.





a) $P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

28 **Un jugador de baloncesto suele acertar el 75% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo.**

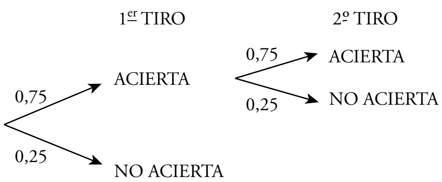
Calcula la probabilidad de que:

a) Haga dos puntos.

b) Haga un punto.

c) No haga ningún punto.

P[ACERTAR] = 0,75



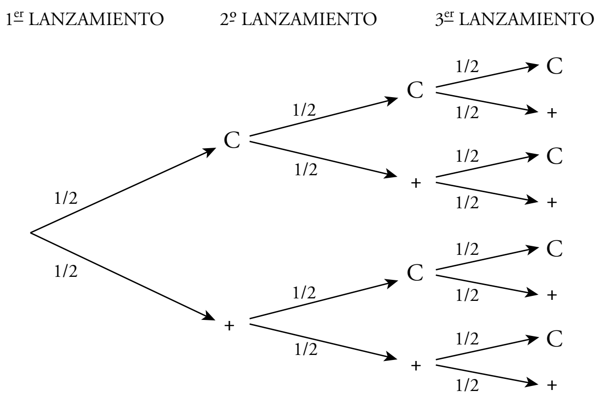
a) P[DOS PUNTOS] = 0,75 · 0,75 = 0,56

b) P[UN PUNTO] = 0,75 · 0,25 = 0,19

c) P[NO HAGA NINGÚN PUNTO] = 0,25

29 **Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.**

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.



$P[\text{GANE MATÍAS}] = P[C, C, +] + P[C, +, C] + P[+, C, C] + P[+, +, C] +$

$$+ P[+, C, +] + P[C, +, +] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$P[\text{GANE ELENA}] = P[C, C, C] + P[+, +, +] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$