

EJERCICIOS ECUACIONES E INECUACIONES

Ejercicio nº 1.-

Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a)} \frac{x^2 - 16}{3} - x = \frac{2 - 3x}{3} - \frac{x^2}{3}$$

$$\text{b)} x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Solución:

$$\text{a)} \frac{x^2 - 16}{3} - x = \frac{2 - 3x}{3} - \frac{x^2}{3}$$

$$\frac{x^2 - 16}{3} - \frac{3x}{3} = \frac{2 - 3x}{3} - \frac{x^2}{3}$$

$$x^2 - 16 - 3x = 2 - 3x - x^2$$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$\text{Cambio: } x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$$

$$z^2 - 5z - 36 = 0$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ z = -4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Dos soluciones: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

Ejercicio nº 2.-

Resuelve:

$$\text{a)} \sqrt{x + 5} - x = 3$$

$$\text{b)} \frac{4x}{x + 2} + \frac{x}{x - 2} = \frac{14}{3}$$

Solución:

a) $\sqrt{x+5} - x = 3$

$$\sqrt{x+5} = 3+x$$

$$x+5 = 9+x^2+6x$$

$$0 = x^2 + 5x + 4$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} + 1 = 2 + 1 = 3 \rightarrow x = -1 \text{ sí vale}$$

$$x = -4 \rightarrow \sqrt{1} + 4 = 1 + 4 = 5 \neq 3 \rightarrow x = -4 \text{ no vale}$$

Hay una solución: $x = -1$

b) $\frac{4x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{14}{3}$

$$\frac{12x(x-2)}{3(x+2)(x-2)} + \frac{3x(x+2)}{3(x+2)(x-2)} = \frac{14(x+2)(x-2)}{3(x+2)(x-2)}$$

$$12x^2 - 24x + 3x^2 + 6x = 14(x^2 - 4)$$

$$15x^2 - 18x = 14x^2 - 56$$

$$x^2 - 18x + 56 = 0$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 224}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{18 \pm 10}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ejercicio nº 3.-**Factoriza y resuelve:**

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = 0$$

Solución:

Sacamos factor común:

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x(x^3 + x^2 - 9x - 9) = 0$$

Factorizamos $x^3 + x^2 - 9x - 9$:

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0
3		3	9	
	1	3	0	

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x(x+1)(x-3)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1=0 \rightarrow x = -1 \\ x-3=0 \rightarrow x = 3 \\ x+3=0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -3$$

Ejercicio nº 4.-

En un examen tipo test, que constaba de 40 preguntas, era obligatorio responder a todas. Cada pregunta acertada se valoró con un punto, pero cada fallo restaba medio punto. Sabiendo que la puntuación total que obtuvo Pablo fue de 32,5 puntos, ¿cuántas preguntas acertó?

Solución:

Llamamos x al número de preguntas que acertó.

$$\text{Así: } \begin{cases} \text{Acertó} \rightarrow x \\ \text{Falló} \rightarrow 40 - x \end{cases}$$

Como cada acierto vale un punto, y cada fallo resta medio punto, la puntuación total fue:

$$x + 0,5(40 - x) = 32,5$$

Resolvemos la ecuación:

$$x + 20 - 0,5x = 32,5$$

$$0,5x = 12,5$$

$$x = \frac{12,5}{0,5} = 25$$

Por tanto, acertó 25 preguntas.

Ejercicio nº 5.-

Resuelve analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones e interpreta gráficamente la solución:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y}{2} = 2 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

Solución:

- Resolvemos analíticamente el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y}{2} = 2 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x-2}{6} + \frac{3y}{6} = \frac{12}{6} \\ 3x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2 + 3y = 12 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

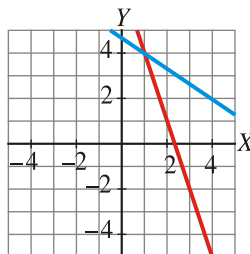
$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \rightarrow y = 7 - 3x; \quad 2x + 3(7 - 3x) = 14$$

$$2x + 21 - 9x = 14; \quad 2x - 9x = 14 - 21; \quad -7x = -7; \quad x = 1; \quad y = 7 - 3 \cdot 1 = 7 - 3 = 4$$

Solución: $x = 1$; $y = 4$

• Interpretación gráfica:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \rightarrow y = \frac{14 - 2x}{3} \\ 3x + y = 7 \rightarrow y = 7 - 3x \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estas dos rectas se cortan en el punto } (1, 4). \end{array} \right.$$



Ejercicio nº 6.-

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ \sqrt{x} - y = -3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ \sqrt{x} - y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ \sqrt{x} + 3 = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 - 2x = \sqrt{x} + 3 \\ 3 - 2x = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$(3 - 2x)^2 = (\sqrt{x})^2; \quad 9 + 4x^2 - 12x = x; \quad 4x^2 - 13x + 9 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{8} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{13 \pm 5}{8} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \rightarrow \text{no válida} \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$\left(\text{La solución } x = \frac{9}{4} \text{ no es válida, puesto que } 3 - 2 \cdot \frac{9}{4} = -\frac{3}{2} \neq \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \right)$$

La única solución del sistema es $x = 1$, $y = 4$.

Ejercicio nº 7.-

En una empresa obtienen 6 euros de beneficio por cada envío que hacen; pero si el envío es defectuoso, pierden por él 8 euros. En un día hicieron 2 100 envíos, obteniendo 9 688 euros de beneficio. ¿Cuántos envíos válidos y cuántos defectuosos hicieron ese día?

Solución:

Llamamos x al número de envíos válidos e y al número de envíos defectuosos. Así:

$$\begin{cases} x + y = 2\,100 \\ 6x - 8y = 9\,688 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2\,100 - x \\ 6x - 8(2\,100 - x) = 9\,688 \end{cases}$$

$$6x - 16\,800 + 8x = 9\,688; \quad 14x = 26\,488; \quad x = 1\,892$$

$$y = 2\,100 - 1\,892 = 208$$

Por tanto, el número de envíos válidos fue de 1 892 y el de envíos defectuosos, 208.

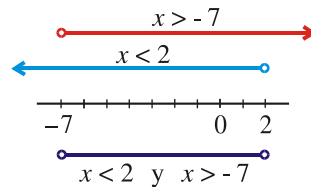
Ejercicio nº 8.-

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2 < 4 \\ 2x + 6 > x - 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3x - 2 < 4 \\ 2x + 6 > x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < 6 \\ x > -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x > -7 \end{cases}$$



Las soluciones del sistema son las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir:

$$\{x < 2 \text{ y } x > -7\} = \{x \mid -7 < x < 2\} = (-7, 2)$$

Ejercicio nº 9.-

Resuelve gráficamente:

$$2x + y \leq 3$$

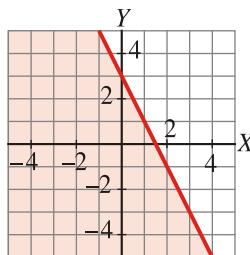
Solución:

$2x + y \leq 3$ es lo mismo que $2x + y - 3 \leq 0$.

Representamos la recta $2x + y - 3 = 0$ ($y = -2x + 3$) y vemos que divide el plano en dos mitades.

Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo (0, 0). En él, $2 \cdot 0 + 0 \leq 3$, se cumple la desigualdad.

Por tanto, las soluciones de la inecuación $2x + y - 3 \leq 0$ son todos los puntos de la región señalada, incluida la recta:



Ejercicio nº 10.-

Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x(x+4)-5 = \frac{x(x-1)}{3}$

b) $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

Solución:

a) $x(x+4)-5 = \frac{x(x-1)}{3}$

$$x^2 + 4x - 5 = \frac{x^2 - x}{3}$$

$$3x^2 + 12x - 15 = x^2 - x$$

$$2x^2 + 13x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{4} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{-13 \pm 17}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-30}{4} = \frac{-15}{2} \end{cases}$$

b) $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

Cambio: $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$

$$z^2 - 48z - 49 = 0$$

$$z = \frac{48 \pm \sqrt{2304 + 196}}{2} = \frac{48 \pm \sqrt{2500}}{2} = \frac{48 \pm 50}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 49 \rightarrow x = \pm 7 \\ z = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Dos soluciones: $x_1 = -7$, $x_2 = 7$ **Ejercicio nº 11.-**

Resuelve estas ecuaciones:

a) $\sqrt{3x+16} = 2x-1$

b) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$

Solución:

a) $\sqrt{3x+16} = 2x-1$

$$3x+16 = (2x-1)^2$$

$$3x+16 = 4x^2 + 1 - 4x$$

$$0 = 4x^2 - 7x - 15$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{7 \pm 17}{8} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$$x = 3 \rightarrow \sqrt{25} = 5 \rightarrow x = 3 \text{ sí vale.}$$

$$x = \frac{-5}{4} \rightarrow \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} \neq \frac{-7}{2} \rightarrow x = \frac{-5}{4} \text{ no vale.}$$

Hay una solución: $x = 3$

$$b) \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$$

$$\frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}$$

$$3x + 2 = x^2 + 4$$

$$0 = x^2 - 3x + 2$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 12.-

Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$$

Solución:

Factorizamos:

	1	4	-1	-4
1		1	5	4
	1	5	4	0
-1		-1	-4	
	1	4	0	

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x-1)(x+1)(x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x+4=0 \rightarrow x=-4 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -4$$

Ejercicio nº 13.-

Un grupo de amigos tiene que pagar una factura de 500 euros. Si fueran dos amigos más, cada uno de ellos tendría que pagar 12,5 euros menos. ¿Cuántos amigos son?

Solución:

Llamamos x al número de amigos. Cada uno tiene que pagar $\frac{500}{x}$ euros.

Si fueran $x + 2$ amigos (dos amigos más), cada uno tendría que pagar:

$$\frac{500}{x} - 12,5 \text{ euros (12,5 euros menos)}$$

$$\text{Como en total son 500 euros, } (x+2) \left(\frac{500}{x} - 12,5 \right) = 500$$

Resolvemos la ecuación:

$$500 - 12,5x + \frac{1000}{x} - 25 = 500$$

$$-12,5x + \frac{1000}{x} - 25 = 0$$

$$-12,5x^2 + 1000 - 25x = 0$$

$$12,5x^2 + 25x - 1000 = 0$$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 50000}}{25} = \frac{-25 \pm \sqrt{50625}}{25} = \frac{-25 \pm 225}{25} \rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -10 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Son, por tanto, 8 amigos.

Ejercicio nº 14.-

Resuelve analítica y gráficamente este sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y - 2x + 6 = 0 \end{cases}$$

Solución:

- Lo resolvemos analíticamente:

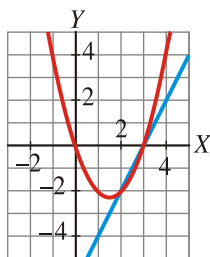
$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y - 2x + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 3x \\ x^2 - 3x - 2x + 6 = 0; \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

- Interpretación gráfica:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = 2x - 6 \end{cases} \quad \text{La parábola y la recta se cortan en los puntos (3, 0) y (2, -2)}$$



Ejercicio nº 15.-

Resuelve el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x+y} = \frac{2}{5} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x+y} = \frac{2}{5} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 = 2(x+y) \\ 2y + 2x = 5xy \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 = 2x + 2y \\ 5 = 5xy \end{array} \right\} \rightarrow 1 = xy \rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$5 = 2x + \frac{2}{x}; \quad 5x = 2x^2 + 2; \quad 0 = 2x^2 - 5x + 2$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2 \end{array} \right.$$

Hay dos soluciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} \\ y_2 = 2 \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 16.-

Se mezcla cierta cantidad de café de 6 euros/kg con otra cantidad de café de 4 euros/kg, obteniendo 8 kg de mezcla. Sabiendo que el precio del café mezclado es de 4,5 euros/kg, ¿cuántos kilogramos se han mezclado de cada clase?

Solución:

Llamamos x a la cantidad de café (en kg) del primer tipo e y a la cantidad de café (en kg) del segundo tipo. Así:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 8 \\ 6x + 4y = 4,5 \cdot 8 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 8 \\ 6x + 4y = 36 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 8 - x \\ 6x + 4(8 - x) = 36 \end{array} \right.$$

$$6x + 32 - 4x = 36; \quad 2x = 4; \quad x = 2 \rightarrow y = 8 - 2 = 6$$

Se han mezclado 2 kg de café de 6 euros/kg con 6 kg de café de 4 euros/kg.

Ejercicio nº 17.-

Resuelve:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y \geq 2 \\ x \leq 2 \end{array} \right\}$$

Solución:

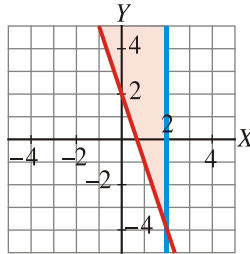
$3x + y \geq 2$ es lo mismo que $3x + y - 2 \geq 0$.

Representamos las rectas $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ ($y = -3x + 2$)

Sustituyendo (2, 1) en la desigualdad $3x + y \geq 2$, vemos que la cumple: $3 \cdot 2 + 1 \geq 2$.

Además, $x \leq 2$ corresponde a los puntos que se sitúan a la izquierda de la recta $x = 2$ (o sobre ella).

Tomando las soluciones comunes a las dos desigualdades, llegamos al recinto solución del sistema (la parte coloreada y las semirrectas que lo limitan):

**Ejercicio nº 18.-**

Un padre ha comprado un jersey para cada uno de sus cinco hijos, gastándose en total 108,75 euros. Tres de los jerseys tenían un 15% de descuento, y otro de ellos tenía un 20% de descuento. Sabiendo que inicialmente costaban lo mismo, ¿cuánto ha tenido que pagar por cada jersey?

Solución:

Llamamos x a lo que costaba cada jersey antes de los descuentos.

Los que tienen un 15% de descuento valdrán ahora $0,85x$.

El que está rebajado un 20% costará $0,8x$.

Por tanto, el total que ha pagado es:

$$3 \cdot 0,85x + 0,8x + x = 108,75$$

$$2,55x + 0,8x + x = 108,75$$

$$4,35x = 108,75$$

$$x = \frac{108,75}{4,35} = 25 \text{ euros}$$

Por el que no tiene descuento ha pagado 25 euros. El que tiene un 20% de descuento cuesta ahora 20 euros. Por cada uno de los tres que tenían rebaja de un 15% ha tenido que pagar 21,25 euros.

Ejercicio nº 19.-

Resuelve analíticamente e interpreta gráficamente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y + x - 6 = 0 \end{cases}$$

Solución:

- Resolvemos analíticamente el sistema:

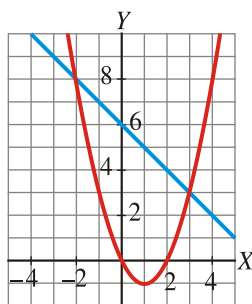
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y + x - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &y = x^2 - 2x \\ &x^2 - 2x + x - 6 = 0; \quad x^2 - x - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x=3 & \rightarrow y=3 \\ x=-2 & \rightarrow y=8 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=3 \end{cases} y \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=8 \end{cases}$

- Interpretación gráfica:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 6 - x \end{cases} \quad \text{La parábola y la recta se cortan en los puntos (3, 3) y (-2, 8).}$$



Ejercicio nº 20.-

Halla las soluciones de este sistema:

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ \sqrt{x + y + 4} = y - x \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ \sqrt{x + y + 4} = y - x \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x + 1 \\ \sqrt{x + 3x + 1 + 4} = 3x + 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+5} &= 2x+1; & 4x+5 &= (2x+1)^2 \\ 4x+5 &= 4x^2+1+4x; & 4 &= 4x^2; & x^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$x = \pm\sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} x = -1 & \rightarrow \text{no válida} \\ x = 1 & \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Hay una solución: $x = 1$; $y = 4$

Ejercicio nº 21.-

La suma de dos números es 12 y la de sus inversos es $\frac{3}{8}$. ¿Cuales son esos números?

Solución:

Llamamos x e y a los números que buscamos.

Así:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 8y + 8x = 3xy \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} y = 12 - x \\ 8(12 - x) + 8x = 3x(12 - x) \end{array}$$

$$96 - 8x + 8x = 36x - 3x^2; \quad 3x^2 - 36x + 96 = 0$$

$$x^2 - 12x + 32 = 0; \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 8 & \rightarrow y = 4 \\ x = 4 & \rightarrow y = 8 \end{cases}$$

Los números son el 4 y el 8.

Ejercicio nº 22.-

Resuelve gráficamente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1 \\ x - y \leq 3 \end{array} \right\}$$

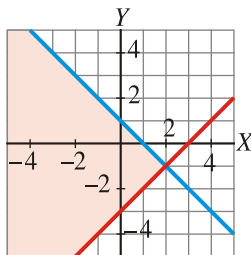
Solución:

$x + y \leq 1$ es lo mismo que $x + y - 1 \leq 0$

$x - y \leq 3$ es lo mismo que $x - y - 3 \leq 0$

Representamos las dos rectas: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 & (y = -x + 1) \\ x - y - 3 = 0 & (y = x - 3) \end{cases}$

Sustituyendo el punto $(0, 0)$ en las desigualdades, vemos que se cumplen. Y si tenemos en cuenta que las soluciones del sistema son las soluciones comunes a ambas inecuaciones, obtenemos que las soluciones del sistema son los puntos de la zona coloreada (incluyendo las semirrectas que la limitan):



Ejercicio n° 23.-

Encuentra las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x + 4 = \sqrt{4x + 12}$

b) $\frac{2x-1}{x} + \frac{4}{x-1} = \frac{11}{2}$

Solución:

a) $x + 4 = \sqrt{4x + 12}$

$$(x + 4)^2 = 4x + 12$$

$$x^2 + 16 + 8x = 4x + 12$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Comprobación:

$$x = -2 \rightarrow 2 = \sqrt{4} \rightarrow \text{sí es válida}$$

b) $\frac{2x-1}{x} + \frac{4}{x-1} = \frac{11}{2}$

$$\frac{2(2x-1)(x-1)}{2x(x-1)} + \frac{8x}{2x(x-1)} = \frac{11x(x-1)}{2x(x-1)}$$

$$2(2x^2 - 3x + 1) + 8x = 11x^2 - 11x$$

$$4x^2 - 6x + 2 + 8x = 11x^2 - 11x$$

$$0 = 7x^2 - 13x - 2$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 56}}{14} = \frac{13 \pm \sqrt{225}}{14} = \frac{13 \pm 15}{14} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-2}{14} = \frac{-1}{7} \end{cases}$$

Ejercicio n°24.-**Cristina tiene 8 años más que Carlos, y hace 2 años tenía el doble de edad que él. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?****Solución:**Llamamos x a la edad que tiene actualmente Carlos y hacemos un cuadro que resuma la información:

	AHORA	HACE 2 AÑOS
CRISTINA	$x + 8$	$x + 8 - 2 = x + 6$
CARLOS	x	$x - 2$

La edad de Cristina hace 2 años era el doble que la de Carlos, es decir:

$$x + 6 = 2(x - 2)$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}x + 6 &= 2x - 4 \\10 &= x\end{aligned}$$

Por tanto, Carlos tiene 10 años y Cristina, 18.

Ejercicio nº 25.-

Resuelve analíticamente el siguiente sistema e interprétalo gráficamente:

$$\begin{cases} y - 4x - 2 = 0 \\ y = x^2 + 3x \end{cases}$$

Solución:

- Lo resolvemos analíticamente:

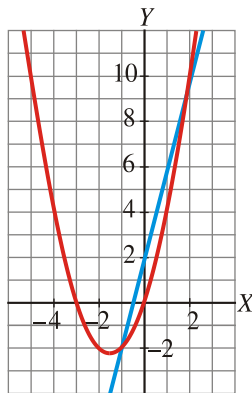
$$\begin{cases} y - 4x - 2 = 0 \\ y = x^2 + 3x \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= 4x + 2 \\ 4x + 2 &= x^2 + 3x; \quad 0 = x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow y = 10 \\ x = -1 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Solución : $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 10 \end{cases}$ y $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$

- Interpretación gráfica:

$$\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = x^2 + 3x \end{cases} \quad \text{La recta y la parábola se cortan en los puntos } (2, 10) \text{ y } (-1, -2).$$



Ejercicio nº26.-

Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3y - x^2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{3} \\ 2x - \frac{x^2}{3} = 3; \quad 6x - x^2 = 9 \end{array} \right.$$

$$0 = x^2 - 6x + 9; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow y = 3$$

Solución: $x = 3$; $y = 3$

Ejercicio nº 27.-

Alberto compró 3 bolígrafos y 2 cuadernos, pagando en total 2,9 euros. Una semana después, los bolígrafos tenían un 20% de descuento y los cuadernos, un 15%. Si los hubiera comprado con estas rebajas, habría tenido que pagar 2,42 euros. ¿Cuánto le costó a Alberto cada bolígrafo y cuánto cada cuaderno?

Solución:

Llamamos x al precio de cada bolígrafo e y al precio de cada cuaderno, antes de la rebaja.

Así:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 2,9 \\ 0,8 \cdot 3x + 0,85 \cdot 2y = 2,42 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 2,9 \\ 2,4x + 1,7y = 2,42 \end{array} \right\} y = \frac{2,9 - 3x}{2}$$

$$2,4x + 1,7 \left(\frac{2,9 - 3x}{2} \right) = 2,42$$

$$2,4x + \frac{4,93 - 5,1x}{2} = 2,42$$

$$4,8x + 4,93 - 5,1x = 4,84$$

$$-0,3x = -0,09$$

$$x = 0,3 \rightarrow y = 1$$

Antes de la rebaja, cada bolígrafo costaba 0,3 euros y cada cuaderno, 1 euro.

Ejercicio nº 28.-

Resuelve e interpreta gráficamente la inecuación:

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

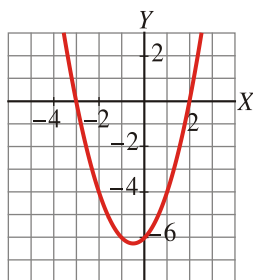
Solución:

$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

La parábola $y = x^2 + x - 6$ corta al eje X en -3 y en 2 .

En el intervalo $[-3, 2]$, toma valores negativos o nulos.

Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-3, 2]$.



Ejercicio nº 29.-

Resuelve gráficamente:

$$\begin{cases} -x + y \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

$-x + y \geq -2$ es lo mismo que $-x + y + 2 \geq 0$.

Representamos las rectas: $\begin{cases} -x + y + 2 = 0 & (y = x - 2) \\ y = 4 \end{cases}$

Si sustituimos el punto $(0, 0)$ en las dos desigualdades, vemos que se cumplen:

$$\begin{cases} 0 + 0 \geq -2 \\ 0 \leq 4 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones del sistema corresponden al recinto coloreado (incluyendo las dos semirrectas que lo limitan):

