



BLOQUE II

Álgebra

3. Polinomios y fracciones algebraicas
4. Resolución de ecuaciones
5. Sistemas de ecuaciones
6. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

3

Polinomios y fracciones algebraicas



1. Binomio de Newton

PIENSA Y CALCULA

Desarrolla mentalmente:

a) $(x + 1)^2$

b) $(x - 1)^2$

c) $(x + 1)(x - 1)$

Solución:

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 - 2x + 1$

c) $x^2 - 1$

APLICA LA TEORÍA

1 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x + 1)^3$$

Solución:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

2 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x - 2)^4$$

Solución:

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

3 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x + y)^5$$

Solución:

$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

4 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(\frac{x}{2} - y\right)^6$$

Solución:

$$\frac{x^6}{64} - \frac{3x^5y}{16} + \frac{15x^4y^2}{16} - \frac{5x^3y^3}{2} + \frac{15x^2y^4}{4} - 3xy^5 + y^6$$

5 Halla el término séptimo en el desarrollo de:

$$(2x - y)^{10}$$

Solución:

Como se pide el término 7, $r = 6$

$$T_7 = T_{6+1} = (-1)^6 \binom{10}{6} (2x)^4 y^6 = 3360x^4 y^6$$

6 Calcula el término en el que el grado de x es 2

en el desarrollo de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

Solución:

$$T_{r+1} = \binom{12}{r} x^{12-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{12}{r} x^{12-2r}$$

Luego

$$12 - 2r = 2 \Rightarrow r = 5$$

El término que se pide es:

$$T_6 = T_{5+1} = \binom{12}{5} x^2 = 792x^2$$

2. Teorema del resto y del factor

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el valor del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 9$ para los valores siguientes:

a) $x = 0$

b) $x = 1$

Solución:

a) $P(0) = 9$

b) $P(1) = 11$

APLICA LA TEORÍA

7 Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 8$$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 1$$

Solución:

$$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 20$$

$$R(x) = 48x + 28$$

8 Halla $P(x) : Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$$P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3x - 1$$

$$Q(x) = x + 3$$

Solución:

$$C(x) = 2x^2 - 3$$

$$R(x) = 8$$

9 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 4$$

a) Para $x = 2$

b) Para $x = -2$

Solución:

a) $P(2) = -2$

b) $P(-2) = 26$

10 ¿Cuál de estos números: 2 o -2 es raíz del polinomio $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 12x - 24$?

Solución:

$$P(2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es raíz de } P(x)$$

$$P(-2) = -96 \neq 0 \Rightarrow x = -2 \text{ no es raíz de } P(x)$$

11 Halla, sin hacer la división, el resto de dividir:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5 \text{ entre } x - 3$$

Solución:

$$\text{Resto} = P(3) = 23$$

12 Comprueba mentalmente, y sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ es divisible entre $x - 1$

Solución:

$$\text{Resto} = P(1) = 0$$

13 Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 5

$$(x^4 + kx^2 - 6x + 2) : (x + 1)$$

Solución:

Por el teorema del resto:

$$P(-1) = 5 \Rightarrow k + 9 = 5 \Rightarrow k = -4$$

14 Halla el valor de k para que el polinomio

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 8$$

sea divisible entre $x - 2$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2k - 4 = 0 \Rightarrow k = 2$$

3. Factorización de polinomios

PIENSA Y CALCULA

Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^2 + 2x$ b) $x^2 + 6x + 9$ c) $x^2 - 4x + 4$ d) $x^2 - 4$

Solución:

- | | | | |
|---|---------------------------------------|--------------------------------------|---|
| a) $x(x + 2)$
Raíces:
$x = 0, x = -2$ | b) $(x + 3)^2$
Raíces:
$x = -3$ | c) $(x - 2)^2$
Raíces:
$x = 2$ | d) $(x + 2)(x - 2)$
Raíces:
$x = -2, x = 2$ |
|---|---------------------------------------|--------------------------------------|---|

APLICA LA TEORÍA

15 Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

- a) $x^2 + 5x$ b) $x^2 - 9$
c) $x^2 + 2x + 1$ d) $x^2 - 6x + 9$

Solución:

- a) $x(x + 5)$ b) $(x + 3)(x - 3)$
c) $(x + 2)^2$ d) $(x - 3)^2$

16 Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^3 - 4x$ b) $x^3 - 2x^2 + x$
c) $x^4 - 25x^2$ d) $x^3 + 6x^2 + 9x$

Solución:

- a) $x(x + 2)(x - 2)$
Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$
- b) $x(x - 1)^2$
Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$
- c) $x^2(x + 5)(x - 5)$
Las raíces son: $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 5$
- d) $x(x + 3)^2$
Las raíces son: $x_1 = 0, x_2 = x_3 = -3$

17 Factoriza los siguientes polinomios y calcula sus raíces:

- a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
b) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
c) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$
d) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

Solución:

- a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
 $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$
- b) $(x - 1)^2(x - 3)$
 $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3$
- c) $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$
 $x_1 = -1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$
- d) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$
 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5$

18 Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

- a) $x_1 = -1, x_2 = 3$
b) $x_1 = 2, x_2 = 0$
c) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$
d) $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$

Solución:

- a) $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$
b) $x(x - 2) = x^2 - 2x$
c) $(x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
d) $x(x - 2)^2(x + 3) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x$

19 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

- a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
 $Q(x) = x^2 - x$
- b) $P(x) = x^2 - 4$
 $Q(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$
- c) $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$
 $Q(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(x) &= x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ Q(x) &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x) &= (x-1)^2(x-2) \\ Q(x) &= x(x-1) \\ \text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) &= x-1 \\ \text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) &= x(x-1)^2(x-2) \\ \text{b) } P(x) &= (x-2)(x+2) \\ Q(x) &= (x+2)^2(x-3) \\ \text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) &= x+2 \\ \text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) &= (x-2)(x+2)^2(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(x) &= x^2(x+1)(x-2) \\ Q(x) &= x(x+1)^2(x-3) \\ \text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) &= x(x+1) \\ \text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) &= x^2(x+1)^2(x-2)(x-3) \\ \text{d) } P(x) &= (x-2)^2(x+3) \\ Q(x) &= (x-2)^2(x-1) \\ \text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) &= (x-2)^2 \\ \text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) &= (x-2)^2(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

4. Fracciones algebraicas

PIENSA Y CALCULA

Factoriza mentalmente el numerador y el denominador, y simplifica la siguiente fracción:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{x(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(x+1)}{x-1}$$

APLICA LA TEORÍA

20 Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador, y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$\text{a) } \frac{x^2 - x}{3x - 3} \quad \text{b) } \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x(x-1)}{3(x-1)} &= \frac{x}{3} \\ \text{b) } \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} &= \frac{x-2}{x+2} \end{aligned}$$

21 Completa para que se verifique la igualdad:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x+1}{x^2-2x-3} &= \frac{2x-4}{\dots} \\ \text{b) } \frac{x^2-x-2}{x^2-6x+8} &= \frac{\dots}{x-4} \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x^2 - 10x + 12 \\ \text{b) } x + 1 \end{aligned}$$

22 Calcula:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \\ \text{b) } \frac{3}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3x+2}{x(x-1)} \\ \text{b) } \frac{-x^2-2x+3}{x^2-4} \end{aligned}$$

23 Efectúa:

a) $\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x^2}{x^2-1}$

b) $\frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4}$

Solución:

a) $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

b) $\frac{x}{x-2}$

24 Calcula:

a) $\frac{x+3}{x+2} : \frac{x^2-9}{x^2-4}$

b) $\frac{2x^2+x}{x^2-1} : \frac{2x+1}{3x^2-4}$

Solución:

a) $\frac{x-2}{x-3}$

b) $\frac{3x^3-4x}{x^2-1}$

25 Opera y simplifica:

a) $\left(x + \frac{4x-1}{x-4}\right) \frac{2}{x-1}$

b) $\left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x-2}\right) : \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)$

Solución:

a) $\frac{2(x+1)}{x-4}$

b) $\frac{x+3}{x(x+2)}$

Ejercicios y problemas

1. Binomio de Newton

- 26** Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(2x - y)^3$$

Solución:

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

- 27** Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^5$$

Solución:

$$\frac{5}{x} + \frac{10}{x^2} + \frac{10}{x^3} + \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x^5} + 1$$

- 28** Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$(x + 2y)^6$$

Solución:

$$x^6 + 12x^5y + 60x^4y^2 + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192xy^5 + 64y^6$$

- 29** Halla el término octavo en el desarrollo de:

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^{12}$$

Solución:

Como se pide el término 8, $r = 7$

$$T_8 = T_{7+1} = (-1)^7 \binom{12}{7} x^5 \left(\frac{y}{2}\right)^7 = -\frac{99}{16} x^5 y^7$$

- 30** Halla el coeficiente de x^5 en el desarrollo de:

$$\left(3x - \frac{1}{x}\right)^7$$

Solución:

$$T_{r+1} = (-1)^r \binom{7}{r} (3x)^{7-r} \frac{1}{x^r} = (-1)^r \binom{7}{r} 3^{7-r} x^{7-2r}$$

Luego

$$7 - 2r = 5 \Rightarrow r = 1$$

El término que se pide es:

$$T_2 = T_{1+1} = -\binom{7}{1} (3x)^6 = -5103x^5$$

2. Teorema del resto y del factor

- 31** Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 20x - 25$$

$$Q(x) = 2x^3 - 4x + 1$$

Solución:

$$C(x) = 2x^2 + x - 2$$

$$R(x) = 12x^2 + 11x - 23$$

- 32** Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$P(x) = 2x^7 + x^6 - 8x^5 - 3x^4 + x^2 + 4$$

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

Solución:

$$C(x) = 2x^4 + 5x^3 - 6x - 7$$

$$R(x) = -7x^2 + x - 3$$

- 33** Calcula $P(x) : Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 2x - 6$$

$$Q(x) = x - 3$$

Solución:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 25$$

$$R(x) = -81$$

- 34** Halla $P(x) : Q(x)$ por Ruffini, siendo:

$$P(x) = x^5 - 8x^3 + 2x - 4$$

$$Q(x) = x + 2$$

Solución:

$$C(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x - 14$$

$$R(x) = 24$$

- 35** Calcula el valor numérico del siguiente polinomio, para los valores que se indican:

$$P(x) = x^5 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

a) Para $x = 2$

b) Para $x = -2$

Solución:

a) $P(2) = 29$

b) $P(-2) = -3$

- 36** Halla si los valores 5 y 3 son raíces del siguiente polinomio:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

Solución:

$P(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ es raíz de $P(x)$

$P(3) = -24 \neq 0 \Rightarrow x = 3$ no es raíz de $P(x)$

Ejercicios y problemas

- 37** Halla, sin hacer la división, el resto de dividir $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x + 5$ entre $x + 3$

Solución:

Por el teorema del resto:

$$\text{Resto} = P(-3) = 44$$

- 38** Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea -3

$$(x^4 + kx^3 - kx + 5) : (x - 2)$$

Solución:

Por el teorema del resto:

$$P(2) = -3 \Rightarrow 6k + 21 = -3 \Rightarrow k = -4$$

- 39** Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x + 21$ es divisible entre $x + 3$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$\text{Resto} = P(-3) = 0$$

- 40** Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - kx^2 + x - 6$ sea divisible entre $x + 2$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow -4k - 24 = 0 \Rightarrow k = -6$$

3. Factorización de polinomios

- 41** Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 25$ b) $x^2 - 8x + 16$
c) $x^4 - 2x^2 + 1$ d) $x^2 + 10x + 25$

Solución:

a) $(x - 5)(x + 5)$
b) $(x - 4)^2$
c) $(x^2 - 1)^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2$
d) $(x + 5)^2$

- 42** Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $16x^3 - 4x$ b) $x^4 + 2x^3 + x^2$
c) $2x^4 - 18x^2$ d) $2x^3 + 12x^2 + 18x$

Solución:

a) $4x(4x^2 - 1) = 4x(2x + 1)(2x - 1)$

Las raíces son:

$$x_1 = 0, x_2 = -1/2, x_3 = 1/2$$

b) $x^2(x + 1)^2$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = -1$$

c) $2x^2(x + 3)(x - 3)$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = -3, x_4 = 3$$

d) $2x(x + 3)^2$

Las raíces son:

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = -3$$

- 43** Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
b) $x^3 - 2x^2 - 3x$
c) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$
d) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2$

Solución:

a) $(x - 3)(x + 1)^2$

Las raíces son:

$$x_1 = 3, x_2 = x_3 = -1$$

b) $x(x + 1)(x - 3)$

Las raíces son:

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$$

c) $(x - 1)(x - 2)^2(x + 3)$

Las raíces son:

$$x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = -3$$

d) $x^2(x - 1)^2(x - 2)$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 = 1, x_5 = 2$$

- 44** Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = 2, x_2 = -3$
b) $x_1 = -2, x_2 = 1$
c) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$
d) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 2$

Solución:

a) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

b) $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

c) $(x + 1)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

d) $x(x - 1)(x - 2)^2 = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$

45 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 4x$

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

b) $P(x) = x^2 + 2x - 3$

$Q(x) = x^2 - 3x + 2$

c) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Solución:

a) $P(x) = x(x - 2)^2$

$Q(x) = x(x + 2)(x - 2)$

M.C.D.($P(x)$, $Q(x)$) = $x(x - 2)$

m.c.m.($P(x)$, $Q(x)$) = $x(x - 2)^2(x + 2)$

b) $P(x) = (x - 1)(x + 3)$

$Q(x) = (x - 1)(x - 2)$

M.C.D.($P(x)$, $Q(x)$) = $x - 1$

m.c.m.($P(x)$, $Q(x)$) = $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

c) $P(x) = x^2(x - 1)(x - 3)$

$Q(x) = x(x - 1)^2$

M.C.D.($P(x)$, $Q(x)$) = $x(x - 1)$

m.c.m.($P(x)$, $Q(x)$) = $x^2(x - 1)^2(x - 3)$

d) $P(x) = (x - 1)^2(x - 2)$

$Q(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

M.C.D.($P(x)$, $Q(x)$) = $(x - 1)(x - 2)$

m.c.m.($P(x)$, $Q(x)$) = $(x - 1)^2(x - 2)^2$

4. Fracciones algebraicas

46 Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{(x + 2)^2}{x^2 - 4}$

b) $\frac{x^2}{x^2 - x}$

c) $\frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

d) $\frac{9x^2 + 6x + 1}{3x + 1}$

Solución:

a) $\frac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 2}$

b) $\frac{x^2}{x(x - 1)} = \frac{x}{x - 1}$

c) $\frac{(2x + 3)(2x - 3)}{2x - 3} = 2x + 3$

d) $\frac{(3x + 1)^2}{3x + 1} = 3x + 1$

47 Calcula:

a) $\frac{2}{x + 3} + \frac{2}{x - 3}$

b) $\frac{8}{x^2 + 2x} - \frac{4x}{2x + 4}$

c) $\frac{1}{x^2} - \frac{x + 1}{x^2 + x}$

d) $\frac{1}{2x - 1} - \frac{x + 1}{(2x - 1)^2}$

Solución:

a) $\frac{4x}{(x + 3)(x - 3)}$

b) $\frac{2(2 - x)}{x}$

c) $\frac{1 - x}{x^2}$

d) $\frac{x - 2}{(2x - 1)^2}$

48 Efectúa:

a) $\frac{2x}{x - 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{2}$

b) $\frac{3x + 3}{3x} \cdot \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $x(x + 2)$

b) $\frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{x^3 - 9x}$

49 Calcula:

a) $\frac{3x}{2x - 2} : \frac{2x}{x - 1}$

b) $\frac{x^2 - x}{x - 3} : \frac{4x - 4}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{x(x + 3)}{4}$

50 Opera y simplifica:

a) $\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \frac{3x^2}{x + 2}$

b) $\left(x + \frac{x}{1 - x}\right) : \left(x - \frac{x}{1 - x}\right)$

Solución:

a) 3

b) $\frac{x - 2}{x}$

Ejercicios y problemas

Para ampliar

- 51** Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)^5$$

Solución:

$$x^5 + \frac{5x^4}{y} + \frac{10x^3}{y^2} + \frac{10x^2}{y^3} + \frac{5x}{y^4} + \frac{1}{y^5}$$

- 52** Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton:

$$\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^4$$

Solución:

$$\frac{x^8}{16} + \frac{x^7}{2} + \frac{3x^6}{2} - 2x^5 + x^4$$

- 53** Halla el término séptimo en el desarrollo de:

$$\left(\frac{x}{2} + y\right)^{11}$$

Solución:

Como se pide el término 7, $r = 6$

$$T_7 = T_{6+1} = \binom{11}{6} \left(\frac{x}{2}\right)^5 y^6 = \frac{231}{16} x^5 y^6$$

- 54** Halla el término decimosegundo en el desarrollo de:

$$\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^{15}$$

Solución:

Como se pide el término 12, $r = 12$

$$T_{12} = T_{11+1} = (-1)^{11} \binom{15}{11} (2x)^4 \left(\frac{1}{2x}\right)^{11} = -\frac{1365}{128x^7}$$

- 55** Calcula el coeficiente del término que tiene grado 9 en el desarrollo de:

$$(x - 2x^2)^5$$

Solución:

$$T_{r+1} = (-1)^r \binom{5}{r} x^{5-r} (2x^2)^r = (-1)^r \binom{5}{r} 2^r x^{5+r}$$

Luego

$$5 + r = 9 \Rightarrow r = 4$$

El término que se pide es:

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{5}{4} x(2x^2)^4 = 80x^9$$

- 56** Halla un polinomio que al ser dividido entre:

$$x^3 - 4x + 2$$

se obtenga de cociente

$$x^2 + 2x - 3$$

y de resto

$$5x + 4$$

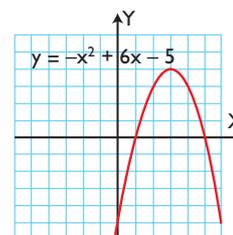
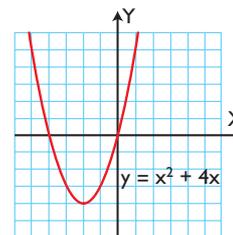
Solución:

$$(x^3 - 4x + 2)(x^2 + 2x - 3) + 5x + 4 = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 21x - 2$$

- 57** Observando las gráficas siguientes, halla las raíces de los polinomios:

$$P(x) = x^2 + 4x$$

$$Q(x) = -x^2 + 6x - 5$$



Solución:

Las raíces de $P(x)$ son: $x_1 = -4, x_2 = 0$

Las raíces de $Q(x)$ son: $x_1 = 1, x_2 = 5$

- 58** Halla el valor de k para que el polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x^2 + kx + 3$$

sea divisible por $x + 3$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-3) = 0 \Rightarrow 102 - 3k = 0 \Rightarrow k = 34$$

59 Halla el valor de k para que el resto de la división del polinomio

$$P(x) = 2x^3 - x + k$$

entre $x - 2$ sea 3

Solución:

Por el teorema del resto:

$$\text{Resto} = P(2) = 3 \Rightarrow k + 14 = 3 \Rightarrow k = -11$$

60 Di si son exactas las siguientes divisiones sin hacer la división:

a) $(x^4 - 1) : (x + 1)$

b) $(x^5 - 32) : (x + 2)$

Solución:

a) Resto = $(-1)^4 - 1 = 0 \Rightarrow$ Es exacta.

b) Resto = $(-2)^5 - 32 = -64 \Rightarrow$ No es exacta.

Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

61 $x^4 - 2x^3 - x + 2$

Solución:

$$(x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)$$

Las raíces reales son:

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

62 $x^4 - 2x^2 + 1$

Solución:

$$(x + 1)^2(x - 1)^2$$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = -1, x_3 = x_4 = 1$$

63 $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$

Solución:

$$(x - 2)(x + 3)(x^2 + 2x - 1)$$

Las raíces reales son:

$$x_1 = 2, x_2 = -3$$

64 $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Solución:

$$(x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

Las raíces son:

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 4$$

65 $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

Solución:

$$(x - 1)^2(x + 2)(x - 3)$$

Las raíces son:

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 3$$

66 $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

Solución:

$$(x + 2)(x - 1)^3$$

Las raíces son:

$$x_1 = -2, x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

67 $\frac{2x - 1}{4x^2 - 2x}$

Solución:

$$\frac{1}{2x}$$

68 $\frac{x^2 - x}{x^4 - x^2}$

Solución:

$$\frac{1}{x(x + 1)}$$

69 $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 6x + 5}$

Solución:

$$\frac{x + 2}{x + 5}$$

70 $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + x + 10}$

Solución:

$$\frac{x + 3}{x^2 - 2x + 5}$$

71 $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - 4x}$

Solución:

$$\frac{x + 5}{x(x + 2)}$$

Ejercicios y problemas

Efectúa las operaciones siguientes y simplifica los resultados:

$$72 \quad \frac{2x+1}{x+4} - \frac{2x-3}{x-2}$$

Solución:

$$\frac{-8x+10}{x^2+2x-8}$$

$$73 \quad \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{1}{x^3-x}$$

Solución:

$$\frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$74 \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}$$

Solución:

$$\frac{2}{x^3-x}$$

$$75 \quad 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{x+1}{x^2+x}$$

Solución:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2}$$

$$76 \quad \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Solución:

$$\frac{-x^2+x+2}{2}$$

$$77 \quad \frac{2x+2}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-x}{x+2}$$

Solución:

$$\frac{2x}{x+2}$$

$$78 \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{x}{x+1}\right) : (x+2)$$

Solución:

$$\frac{1}{x}$$

$$79 \quad \left(\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x^2-4}\right) : \left(4 + \frac{12}{x-2}\right)$$

Solución:

$$\frac{2x-1}{4x^2+12x+8}$$

$$80 \quad \left(\frac{x+1}{2} + \frac{1-x}{2x}\right) : \left(\frac{x+1}{x^2} - \frac{2}{x^2+x}\right)$$

Solución:

$$\frac{x^2+x}{2}$$

$$81 \quad \left(\frac{9-6x}{x^2} + 1\right) : \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right)$$

Solución:

$$\frac{-3x+9}{x^2+3x}$$

$$82 \quad \frac{3x+9}{x+6} \left(\frac{4}{3x-3} - \frac{x+2}{x^2+2x-3}\right)$$

Solución:

$$\frac{1}{x-1}$$

Problemas

- 83** Calcula los valores de m y n para que el polinomio:

$$P(x) = x^4 + x^3 + mx^2 - 3x + n$$

sea divisible por $x + 1$ y $x - 2$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-1) = 0 \Rightarrow m + n + 3 = 0$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow 4m + n + 18 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$m = -5, n = 2$$

- 84** Calcula los valores de m y n para que el polinomio:

$$P(x) = x^4 + mx^3 + 2x^2 + nx - 24$$

sea divisible por $x + 2$ y $x - 3$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow -8m - 2n = 0$$

$$P(3) = 0 \Rightarrow 27m + 3n + 75 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$m = -5, n = 20$$

- 85** Escribe un polinomio cuyas raíces sean los valores $2, -1, 5$

Solución:

$$(x - 2)(x + 1)(x - 5) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

- 86** Escribe dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que:

$$\text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) = x - 2$$

Solución:

$$P(x) = x - 2$$

$$Q(x) = x(x - 2)$$

- 87** Escribe dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que:

$$\text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) = x(x^2 - 1)(x - 2)$$

Solución:

$$P(x) = x(x^2 - 1)$$

$$Q(x) = x - 2$$

- 88** Escribe en forma de polinomio en una variable cada uno de los enunciados siguientes:

- El cubo de un número menos el cuadrado del número, más 4 unidades.
- El área de un rectángulo cuya base mide 5 unidades más que la altura x
- El área de un triángulo cuya altura mide 2 unidades menos que la base x

Solución:

$$\text{a) } P(x) = x^3 - x^2 + 4$$

$$\text{b) } A(x) = x(x + 5) = x^2 + 5x$$

$$\text{c) } A(x) = \frac{x(x - 2)}{2} = \frac{x^2 - 2x}{2}$$

- 89** Dos números suman 8 unidades. Escribe el polinomio que expresa el producto de dichos números en función del número menor x

Solución:

$$P(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$$

- 90** Dados dos números enteros consecutivos, escribe el polinomio que expresa en función del número menor x :

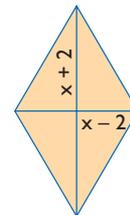
- la suma de los números.
- el producto de los números.

Solución:

$$\text{a) } S(x) = x + x + 1 = 2x + 1$$

$$\text{b) } P(x) = x(x + 1) = x^2 + x$$

- 91** Dado el rombo siguiente, halla su área en función de x

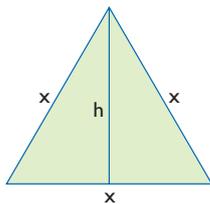


Solución:

$$A(x) = \frac{x^2 - 4}{2} = \frac{x^2}{2} - 2$$

Ejercicios y problemas

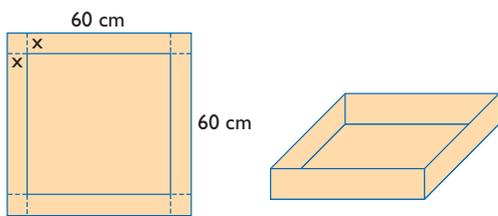
- 92** Escribe el polinomio que da el área de un triángulo equilátero en función del lado x



Solución:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$$

- 93** En una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se recorta un cuadrado de lado x en las esquinas, para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de x

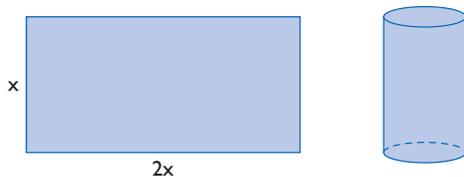


Solución:

$$V(x) = (60 - 2x)^2 x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

- 94** Con una cartulina como la de la figura, se construye un cilindro sin tapas. Escribe:

- el área lateral del cilindro en función de x
- el volumen del cilindro en función de x

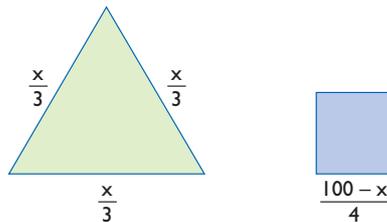


Solución:

a) $A(x) = x \cdot 2x = 2x^2$

b) $V(x) = \pi \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 x = \frac{x^3}{\pi}$

- 95** Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos trozos, y se forman el triángulo equilátero y el cuadrado siguientes.



Escribe el polinomio que expresa la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función de x

Solución:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{(100-x)^2}{4}$$

Para profundizar

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

96 $\frac{4x^2y}{6xy^3}$

Solución:

$$\frac{2x}{3y^2}$$

97 $\frac{2x^2 - 4xy}{2x^4 - 8x^2y^2}$

Solución:

$$\frac{1}{x(x+2y)}$$

98 $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2b^2 - b^2}$

Solución:

$$\frac{a-1}{b^2(a+1)}$$

99 $\frac{4x^2 + 4xy + y^2}{4x^3 + 4x^2y + xy^2}$

Solución:

$$\frac{1}{x}$$

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

100 $\frac{2x}{x-y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2}$

Solución:

$$x(x + y)$$

$$101 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) \frac{x^2}{2x + y}$$

Solución:

$$\frac{x}{y}$$

$$102 \frac{xy}{2x + 2y} \cdot \frac{8y^3}{x} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2xy^3}$$

Solución:

$$\frac{2y(x - y)}{x}$$

$$103 \frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y}$$

Solución:

$$\frac{4xy}{(x + y)(x - y)}$$

$$104 \frac{x}{x - y} - \frac{x}{x + y} - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}$$

Solución:

$$\frac{2y}{x + y}$$

Aplica tus competencias

105 Halla el polinomio que define un movimiento uniformemente acelerado en el que:

$$a = 4 \text{ m/s}^2, v_0 = 5 \text{ m/s y } e_0 = 2 \text{ m}$$

Solución:

$$e(t) = \frac{1}{2} \cdot 4t^2 + 5t + 2$$

$$e(t) = 2t^2 + 5t + 2$$

106 Halla el monomio que define el movimiento de un cuerpo que se deja caer en el vacío en el que:

$$a = 9,8 \text{ m/s}^2, v_0 = 0 \text{ m/s y } e_0 = 0 \text{ m}$$

Solución:

$$e(t) = \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2$$

$$e(t) = 4,9t^2$$

Comprueba lo que sabes

1 Enuncia el teorema del resto y pon un ejemplo.

Solución:

El **resto** que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ entre el binomio $x - a$ es el valor numérico del polinomio para $x = a$

$$R = P(a)$$

Ejemplo

Halla el resto de la siguiente división:

$$P(x) = x^3 - 5x + 17 \text{ entre } x + 3$$

$$\begin{aligned} \text{Resto} &= P(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3) + 17 = \\ &= -27 + 15 + 17 = 5 \end{aligned}$$

2 Desarrolla el siguiente binomio aplicando la fórmula de Newton: $(2x - 3)^4$

Solución:

$$16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$$

3 Halla el coeficiente de x^{12} en el desarrollo de: $(x^2 + x)^8$

Solución:

$$T_{r+1} = \binom{8}{r} (x^2)^{8-r} \cdot x^r$$

Luego

$$16 - 2r + r = 12 \Rightarrow 16 - r = 12 \Rightarrow r = 4$$

El término que se pide es:

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4} (x^2)^{8-4} x^4 = 70 x^{12}$$

4 Factoriza el siguiente polinomio y halla sus raíces: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Solución:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$$

$$\text{Raíces: } x = -1; x = 2$$

5 Halla el M.C.D. y el m.c.m. de los polinomios siguientes:

$$P(x) = x^3 - 4x, Q(x) = x^3 + 2x^2$$

Solución:

$$P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$$

$$\text{M.C.D.}(P(x), Q(x)) = x(x + 2)$$

$$\text{m.c.m.}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 2)(x - 2)$$

6 Efectúa la operación siguiente y simplifica el resultado:

$$\left(\frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-9} \right) \frac{1}{x+1}$$

Solución:

$$\frac{x+1}{x^2-9}$$

7 Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 6$ sea divisible por $(x + 2)$

Solución:

Por el teorema del factor:

$$P(-2) = 0$$

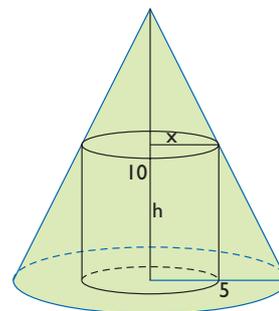
$$(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2)k + 6 = 0$$

$$-8 - 12 - 2k + 6 = 0$$

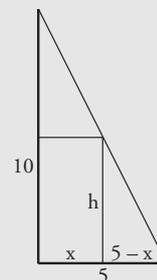
$$-14 - 2k = 0$$

$$k = -7$$

8 Dado el cilindro inscrito en el cono de la figura siguiente, halla el polinomio que expresa el volumen del cilindro en función del radio x



Solución:



Se tiene:

$$\frac{10}{5} = \frac{h}{5-x} \Rightarrow h = 2(5-x)$$

El volumen es:

$$V(x) = \pi x^2 \cdot 2(5-x) = 10\pi x^2 - 2\pi x^3$$

Paso a paso**107** Desarrolla:

$$(x + 2)^4$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

108 Divide

$$P(x) = 6x^4 + 5x^2 + 17x + 15$$

entre

$$Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

109 Halla el valor numérico del polinomio

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 9$$

para $x = 2$ **Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

110 Factoriza:

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

111 Calcula:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{4x-5}{x^2-x} - \frac{x+2}{x}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

*Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:***112** Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 3

$$(x^3 + kx - 10) : (x - 2)$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

113 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.****Practica****114** Desarrolla el siguiente binomio:

$$(x + y)^5$$

Solución:

$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

115 Calcula $P(x) : Q(x)$, siendo:

$$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 8$$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 1$$

Solución:

$$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 20$$

$$R(x) = 48x + 28$$

116 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 4$$

a) Para $x = 2$ b) Para $x = -2$ **Solución:**a) $P(2) = -2$ b) $P(-2) = 26$ **117** Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

Solución:

- a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
 b) $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$

118 Halla las raíces de los siguientes polinomios:

- a) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
 b) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$

Solución:

- a) $(x - 1)^2(x - 3)$
 $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3$
 b) $(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$
 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5$

119 Calcula:

- a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x + 1}$ b) $\frac{x}{x - 2} - \frac{3}{x^2 - 4}$

Solución:

- a) $\frac{3x + 2}{x^2 + x}$
 b) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4}$

120 Calcula:

- a) $\frac{x + 1}{x - 2} \cdot \frac{x^2}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x + 2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - 4}$

Solución:

- a) $\frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$
 b) $\frac{x}{x - 2}$

121 Calcula:

$$\frac{x + 3}{x + 2} : \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$$

Solución:

$$\frac{x - 2}{x - 3}$$

122 Calcula:

$$\frac{2x^2 + x}{x^2 - 1} : \frac{2x + 1}{3x^2 - 3}$$

Solución:

$$3x$$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o Derive:

123 Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 5

$$(x^4 + kx^2 - 6x + 2) : (x + 1)$$

Solución:

$$P(-1) = 5$$

$$k = -4$$

124 Halla el valor de **k** para que el polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + kx + 8$ sea divisible entre $x - 2$

Solución:

$$P(2) = 0$$

$$k = 2$$