

TEMA 2 – POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

2.1 COCIENTE DE POLINOMIOS

2.1.1 COCIENTE DE MONOMIOS

El cociente de un monomio entre otro monomio de grado igual o menor es un nuevo monomio cuyo grado es la diferencia de los grados de los polinomios que intervienen:

$$\frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b} x^{m-n}$$

Ejemplos: [1] $\frac{10x^5}{2x^2} = \frac{10}{2} x^{5-2} = 5x^3$

[2] $\frac{11x^4}{4x^3} = \frac{11}{4} x^{4-3} = \frac{11}{4} x^1 = \frac{11}{4} x$

[3] $\frac{6x^3}{5x^3} = \frac{6}{5} x^{3-3} = \frac{6}{5} x^0 = \frac{6}{5}$

2.1.2 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales: al dividir dos polinomios, se obtiene un cociente y un resto (El grado del resto es menor que el grado del divisor).

La relación entre $D(x)$, $d(x)$, $C(x)$ y $R(x)$ es:

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x), \text{ o bien, } \frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

Cuando el resto es cero, $R(x) = 0$, la división es exacta y se cumple:

$$D(x) = d(x) \cdot C(x), \text{ o bien, } \frac{D(x)}{d(x)} = C(x)$$

Ejemplos:

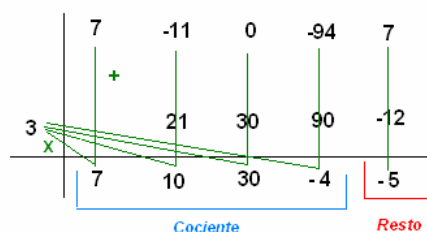
[1] $(6x^4 + 8x^2 + 7x + 40) : (2x^2 - 4x + 5) = 3x^2 + 6x + \frac{17}{2} + \frac{11x - 5}{2(2x^2 - 4x + 5)}$

[2] $(6x^3 + 13x^2 + 6x) : (2x + 3) = 3x^2 + 2x$

2.1.3 DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR $x - a$. REGLA DE RUFFINI

La **regla de Ruffini** sirve para dividir un polinomio por $x - a$. Las operaciones (sumas y multiplicaciones por a) se realizan una a una. Se obtienen, así, los coeficientes del cociente y el resto de la división.

Ejemplo: $(7x^4 - 11x^3 - 94x + 7) : (x - 3) =$



$$(7x^4 - 11x^3 - 94x + 7) : (x - 3) = 7x^3 + 10x^2 + 30x - 4 - \frac{5}{x - 3}$$

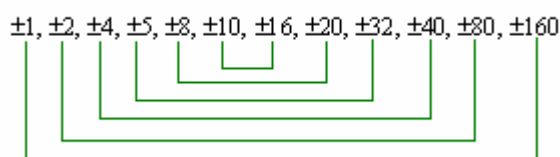
2.2 APLICACIONES DE LA REGLA DE RUFFINI

2.2.1 UN CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR $x - a$

Si un polinomio tiene coeficientes enteros, para que sea divisible por $x - a$ es necesario que su término independiente sea múltiplo de a .

Por tanto, para buscar expresiones $x - a$ que sean divisores de un polinomio, probaremos con los valores de a (positivos y negativos) que sean divisores del término independiente.

Ejemplo: Encontrar algún divisor $x - a$ del polinomio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 160$
Los posibles divisores son divisores de 160:



Aplicando Ruffini a cada uno de estos números 1, -1, 2, -2, El primero que da resto cero es el 5. Por tanto un divisor es $x - 5$.

2.2.2 VALOR DE UN POLINOMIO PARA $x = a$

El valor numérico de un polinomio, $P(x)$, para $x = a$, es el número que se obtiene al sustituir la x por a y efectuar las operaciones indicadas. A ese número se le llama $P(a)$.

Ejemplo: Calcular el valor del polinomio $11x^5 - 170x^3 + 2x - 148$ para $x = 4$
 $P(4) = 11 \cdot 4^5 - 170 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - 148 = 244$

2.2.3 TEOREMA DEL RESTO

El valor que toma un polinomio, $P(x)$, cuando hacemos $x = a$, coincide con el resto de la división $P(x) : (x - a)$. Es decir, $P(a) = r$

Ejemplo: Hallar el resto de la división $(x^3 - 4x + 3) : (x + 1)$

Modo 1: Aplicando la regla de Ruffini

	1	0	-4	3
-1		-1	1	3
	1	-1	-3	6

Modo 2: Aplicando el teorema del resto: $P(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 3 = -1 + 4 + 3 = 6$

2.3 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

2.3.1 PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

Método para factorizar un polinomio:

- Sacar factor común
- Recordar los productos notables
- Si es un polinomio de grado > 2 : Por Ruffini, probando con los divisores del término independiente, hasta obtener resto cero: $P(x) = (x - a).C(x)$
- Si es un polinomio de grado $= 2$: Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ soluciones distintas} \Rightarrow a.(x - x_1).(x - x_2) \\ 1 \text{ solución doble} \Rightarrow a.(x - x_1)^2 \\ \text{No tiene solución} \Rightarrow ax^2 + bx + c \end{cases}$$

2.3.2 RAÍCES DE UN POLINOMIO

Un número a se llama **raíz** de un polinomio $P(x)$, si $P(a) = 0$. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Método para calcular las raíces de un polinomio:

- Se factoriza el polinomio
- Se iguala cada uno de los factores a cero.

Ejemplos: Factorizar y hallar las raíces de los siguientes polinomios:

[1] $P(x) = 12x^5 - 36x^4 + 27x^3$

Sacamos factor común: $3x^3(4x^2 - 12x + 9)$

Es un cuadrado perfecto: $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

Solución:

Factorización: $P(x) = 3x^3.(2x - 3)^2$

Raíces: $P(x) = 3x^3.(2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raíz triple), $x = 3/2$ (raíz doble)

[2] $P(x) = x^3 - x + 6$

No se puede sacar factor común. Como es de grado 3, aplicamos la regla de Ruffini con los divisores de 6 ($\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$)

Con 1, -1 y 2 no sale resto cero. Con -2

	1	0	-1	6
-2		-2	4	-6
	1	-2	3	0

Obtenemos un polinomio de segundo grado: $x^2 - 2x + 3$.

Calculamos sus raíces resolviendo la ecuación: $x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \Rightarrow \text{No tiene soluciones.}$$

Solución:

Factorización: $(x + 2).(x^2 - 2x + 3)$

Raíces: $x = -2$

$$[3] P(x) = 10x^4 - 3x^3 - 41x^2 + 12x + 4$$

No podemos sacar factor común. Como es de grado 4, aplicamos la regla de Ruffini con los divisores de 4: $(\pm 1, \pm 2, \pm 4)$

Con 1 y -1 no sale resto cero. Probamos con 2

	10	-3	-41	12	4
2		20	34	-14	-4
	10	17	-7	-2	0
-2		-20	6	2	
	10	-3	-1	0	

(Nota: una vez que hemos obtenido el 2, volvemos a probar con el 2. Como no sale resto cero, pasamos a probar con el -2)

Obtenemos un polinomio de grado 2: $10x^2 - 3x - 1$

Calculamos sus raíces resolviendo la ecuación: $10x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{20} = \frac{3 \pm 7}{20} = \left\{ \begin{array}{l} 10/20 = 1/2 \\ -4/20 = -1/5 \end{array} \right.$$

Solución:

Factorización: $10 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1/2) \cdot (x + 1/5)$

Raíces: $x = 2, x = -2, x = 1/2, x = -1/5$

2.4 DIVISIBILIDAD DE

2.4.1 MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Un polinomio, $D(x)$, es **divisor** de otro, $P(x)$, si la división $P(x) : D(x)$ es exacta.

En tal caso, se dice también que $P(x)$ es **múltiplo** de $D(x)$, ya que $P(x) = D(x) \cdot C(x)$

2.4.2 POLINOMIOS IRREDUCIBLES

Un **polinomio** se llama **irreducible** cuando no tiene ningún divisor de grado inferior al suyo.

2.4.3 MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE DOS POLINOMIOS.

Un polinomio, $D(x)$, es el **máximo común divisor** de dos polinomios, $P(x)$, $Q(x)$, si es divisor de ambos y no hay otro polinomio divisor común con mayor grado que él. Se denota: $D(x) = \text{M.C.D.}[P(x), Q(x)]$

Método para calcularlo:

- Se factorizan los dos polinomios: $P(x)$ y $Q(x)$
- Se toman los factores comunes al menor exponente

Un polinomio, $M(x)$, es el **mínimo común múltiplo** de dos polinomios, $P(x)$, $Q(x)$, si es múltiplo de ambos y no hay otro polinomio múltiplo común con menor grado que él. Se denota: $M(x) = \text{m.c.m.}[P(x), Q(x)]$

Método para calcularlo:

- Se factorizan los dos polinomios: $P(x)$ y $Q(x)$
- Se toman los factores comunes y no comunes al mayor exponente

Ejemplos: Calcular el m.c.d y el m.c.m de los siguientes pares de polinomios

[1] $x^2 - 1$; $(x + 1)^2$

Los factorizamos:

$$x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$$

$$(x + 1)^2 = (x + 1)^2$$

$$\text{m.c.d} = x + 1$$

$$\text{m.c.m} = (x - 1) \cdot (x + 1)^2$$

[2] $x^2 + 1$, x^2

Los factorizamos:

$$x^2 + 1: \text{Resolvemos la ecuación } x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución} \Rightarrow x^2 + 1$$

$$x^2: \text{Ya está factorizado}$$

$$\text{m.c.d.} = 1$$

$$\text{m.c.m.} = x^2 \cdot (x^2 + 1)$$

2.5 FRACCIONES ALGEBRAICAS

2.5.1 DEFINICIÓN

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios. $\frac{P(x)}{Q(x)}$

2.5.2 SIMPLIFICACIÓN

Para simplificar una fracción, se factorizan numerador y denominador y se eliminan los factores comunes obteniéndose otra fracción equivalente.

$$\text{Ejemplo: } \frac{2x^3 - 17x + 3}{3x^2 + 5x - 12} = \frac{(2x^2 - 6x + 1) \cdot (x + 3)}{3(x - 4/3)(x + 3)} = \frac{2x^2 - 6x + 1}{3x - 4}$$

2.5.3 FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos fracciones algebraicas son equivalentes si:

- Una de ellas se obtiene simplificando la otra.
- O bien, ambas, al simplificarse, dan lugar a la misma fracción.

$$\text{Ejemplo: Comprobar si son equivalentes: } \frac{x + 4}{x^2 + x - 12}, \frac{2x + 5}{2x^2 - x - 15}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x + 4}{x^2 + x - 12} &= \frac{x + 4}{(x - 3)(x + 4)} = \frac{1}{x - 3} \\ \frac{2x + 5}{2x^2 - x - 15} &= \frac{2x + 5}{2(x - 3)(x + 5/2)} = \frac{1}{x - 3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Son equivalentes}$$

2.5.4 REDUCCIÓN A COMÚN DENOMINADOR

Se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador, que será el mínimo común múltiplo de los denominadores

Ejemplo: Reducir a común denominador $\frac{3}{x+1}, \frac{2}{x^2-1}$

Factorizamos los denominadores:

$$x+1 = x+1$$

$$x^2-1 = (x-1).(x+1)$$

$$\text{m.c.m} = (x-1).(x+1)$$

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x-3}{x^2-1}$$

$$\frac{2}{x^2-1}$$

2.7.4 OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

- **Suma y resta:** Para sumar o restar fracciones algebraicas, estas se reducen a común denominador y se suman o restan los numeradores, dejando el mismo denominador. Después se simplifica la fracción resultante.
- **Producto :** El producto de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.
- **Fracción inversa de otra :** La fracción inversa de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es $\frac{Q(x)}{P(x)}$.
- **Cociente :** El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda (Producto cruzado de términos).

Ejemplos: Opera:

$$[1] \frac{3x+1}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{3x+1-3x}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$[2] \frac{x^2}{x^2-25} : \frac{x}{x-5} = \frac{x^2.(x-5)}{(x-5)(x+5)x} = \frac{x}{x+5}$$