FRACCIONES ALGEBRÁICAS

EJERCICIO 1 : Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}:\dfrac{x-1}{x^2-9}$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2}{x^2-x}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}$

a) $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ b) $\dfrac{x^2+x}{2x+4}:\dfrac{x^2-1}{x+2}$

a) $\dfrac{2x+1}{x^2-9}+\dfrac{3}{x+3}$ b) $\dfrac{x^2+2x}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-4}$

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}-\dfrac{2x}{x+1}$ b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}$

a) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x-2x-2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-2x+1}{x+3}:\dfrac{x-1}{x^2-9}=\dfrac{(x-1)^2}{(x+3)}:\dfrac{(x-1)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{(x-1)^2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-1)}==(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2}{x^2-x}=\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}-\dfrac{x^2+2}{x(x-1)}=\dfrac{x^2+x-x^2-2}{x(x-1)}=\dfrac{x-2}{x^2-x}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

a) $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-4}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2+x-2+x^2+1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x^2+x}{2x+4}:\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{x(x+1)}{2(x+2)}:\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}=\dfrac{x(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{2(x-1)}=\dfrac{x}{2x-2}$

a) $\dfrac{2x+1}{x^2-9}+\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2x+1}{(x-3)(x+3)}+\dfrac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{2x+1+3x-9}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{5x-8}{x^2-9}$

b) $\dfrac{x^2+2x}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{x(x+2)}{x^3}\cdot\dfrac{x^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}$

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{3x^2+1}{x(x+1)}-\dfrac{2x^2}{x(x+1)}=\dfrac{3x^2+1-2x^2}{x(x+1)}=\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}\cdot\dfrac{x}{(x+1)}==\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$

EJERCICIO 2 : Calcula y simplifica si es posible:

a) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{x+3}{2x+2}+\dfrac{x}{(x+1)^2}$ b) $\dfrac{x^2-9}{2x^2+x}:\dfrac{x^2-6x+9}{4x^2+4x+1}$ c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{2x^2-6}{2x^3}$

d) $\left(\dfrac{2}{x}+x^2\right):\dfrac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}$ e) $\dfrac{2x+5}{x+5}+\dfrac{5x^2}{x-5}-\dfrac{6x-5}{3x-15}$ f) $\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{2x^2+x-6}$

g) $\dfrac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}$ h) $\dfrac{3x^3-3x}{x^5-x}$ i) $\dfrac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}$ j) $\dfrac{x^3-49x}{x^4-7x^3}$

a) Observa que $2x+2=2(x+1)$, por tanto:
m.c.m. $[x+1,\ 2x+2,\ (x+1)^2]=2(x+1)^2$

Así: $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{x+3}{2x+2}+\dfrac{x}{(x+1)^2}=\dfrac{4(x+1)}{2(x+1)^2}-\dfrac{(x+3)(x+1)}{2(x+1)^2}+\dfrac{2x}{2(x+1)^2}=$

$=\dfrac{4x+4}{2(x+1)^2}-\dfrac{x^2+4x+3}{2(x+1)^2}+\dfrac{2x}{2(x+1)^2}=\dfrac{4x+4-x^2-4x-3+2x}{2(x+1)^2}=$

b) $\dfrac{x^2-9}{2x^2+x}:\dfrac{x^2-6x+9}{4x^2+4x+1}=\dfrac{(x^2-9)(4x^2+4x+1)}{(2x^2+x)(x^2-6x+9)}$

Factorizamos para simplificar: $\left.\begin{array}{l} x^2-9=(x-3)(x+3) \\ 4x^2+4x+1=(2x+1)^2 \\ x^2-6x+9=(x-3)^2 \end{array}\right\}$ Productos notables

$2x^2+x=x(2x+1)$

Así: $\frac{(x^2-9)(4x^2+4x+1)}{(2x^2+x)(x^2-6x+9)}=\frac{(x-3)(x+3)(2x+1)^2}{x(2x+1)(x-3)^2}=\frac{(x+3)(2x+1)}{x(x-3)}=\frac{2x^2+7x+3}{x^2-3x}$

c) m.c.m. $[x, x^2, 2x^3] = 2x^3$

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2}-\frac{2x^2-6}{2x^3}=\frac{2x^2}{2x^3}+\frac{2x(x+1)}{2x^3}-\frac{2x^2-6}{2x^3}==\frac{2x^2}{2x^3}+\frac{2x^2+2x}{2x^3}-\frac{2x^2-6}{2x^3}=\frac{2x^2+2x+6}{2x^3}=\frac{x^2+x+3}{x^3}$$

d) $\left(\frac{2}{x}+x^2\right):\frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}=\frac{2+x^3}{x}:\frac{4x^4+8x}{x^2+5x^3}=\frac{(2+x^3)(x^2+5x^3)}{x(4x^4+8x)}$

Factorizamos para simplificar:

$x^2+5x^3 = x^2(1+5x)$

$4x^4+8x = 4x(x^3+2)$

Luego: $\frac{(2+x^3)(x^2+5x^3)}{x(4x^4+8x)}=\frac{(2+x^3)x^2(1+5x)}{x\cdot 4x(x^3+2)}=\frac{1+5x}{4}$

e) Como $3x-15=3(x-5)$, se tiene que: m.c.m. $[x+5, x-5, 3(x-5)] = 3(x-5)(x+5)$

Así: $\frac{2x+5}{x+5}+\frac{5x^2}{x-5}-\frac{6x-5}{3x-15}=\frac{3(2x+5)(x-5)}{3(x-5)(x+5)}+\frac{15x^2(x+5)}{3(x-5)(x+5)}-\frac{(6x-5)(x+5)}{3(x-5)(x+5)}=$

$$=\frac{3(2x^2-5x-25)}{3(x-5)(x+5)}+\frac{15x^3+75x^2}{3(x-5)(x+5)}-\frac{6x^2+25x-25}{3(x-5)(x+5)}=$$

$$=\frac{6x^2-15x-75+15x^3+75x^2-6x^2-25x+25}{3(x-5)(x+5)}=\frac{15x^3+75x^2-40x-50}{3(x-5)(x+5)}==\frac{15x^3+75x^2-40x-50}{3(x^2-25)}$$

f) Factorizamos ambos polinomios:

$2x^3-5x^2+3x = x\cdot(2x^2-5x+3)$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm1}{4}\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt] \frac{4}{4}=1\end{cases}$$

Luego: $2x^3-5x^2+3x=x(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$2x^2+x-6=(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ya que: $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-1\pm7}{4}\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt] \frac{-8}{4}=-2\end{cases}$

Por tanto: $\frac{2x^3-5x^2+3x}{2x^2+x-6}=\frac{x(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{x(x-1)}{x+2}$

g)

- Numerador → Sacamos factor común y descomponemos en factores el polinomio de grado 2 que nos queda: $x^3+7x^2+12x = x(x^2+7x+12)$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{-7\pm1}{2}\begin{cases}-\frac{8}{2}=-4\\[4pt] \frac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

Así: $x^3+7x^2+12x = x(x+4)(x+3)$

- Denominador → Descomponemos aplicando Ruffini:

	1	3	–16	–48
4		4	28	48
	1	7	12	0

$x^2+7x+12$ es una expresión de 2º grado cuyas raíces se calculan resolviendo la ecuación: $x^2+7x+12=0$, que coincide con la del numerador. Así, finalmente, el denominador descompuesto en factores será: $x^3+3x^2-16x-48=(x-4)(x+4)(x+3)$

- Simplificación de la fracción algebraica: $\frac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}=\frac{x(x+4)(x+3)}{(x-4)(x+4)(x+3)}=\frac{x}{x-4}$

h) $\frac{3x^3-3x}{x^5-x}=\frac{3x(x^2-1)}{x(x^4-1)}=\frac{3x(x^2-1)}{x(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{3}{x^2+1}$

En el primer paso sacamos factor común y en el segundo paso aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$ a la expresión $x^4 - 1$.

i) Descomponemos factorialmente el numerador y el denominador:

- Numerador $\rightarrow$ Sacamos factor común 2 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

$$2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -2 & & -2 & -6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} \dfrac{-4}{2} = -2 \\ \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Así: $2x^3 + 10x^2 + 16x + 8 = 2\,(x + 2)^2\,(x + 1)$

- Denominador $\rightarrow$ Sacamos factor común 4 y aplicamos la regla de Ruffini hasta llegar a un polinomio de 2º grado:

$$4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4(x^3 + 2x^2 - x - 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm 1$$

Así: $4x^3 + 8x^2 - 4x - 8 = 4\,(x + 2)\,(x + 1)\,(x - 1)$

- Simplificación: $\dfrac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8} = \dfrac{2(x+2)^2(x+1)}{4(x+2)(x+1)(x-1)} = \dfrac{(x+2)}{2(x-1)} = \dfrac{x+2}{2x-2}$

  Se obtiene dividiendo numerador y denominador entre el M.C.D. del ambos, que es $2(x + 2)\,(x + 1)$.

j) $\dfrac{x^3-49x}{x^4-7x^3} = \dfrac{x\left(x^2-49\right)}{x^3(x-7)} = \dfrac{x(x-7)(x+7)}{x^3(x-7)} = \dfrac{x+7}{x^2}$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ a la expresión $x^2 - 49$, y finalmente dividimos numerador y denominador entre el M.C.D. de ambos, que es $x\,(x - 7)$.

EJERCICIO 3 : Opera y simplifica: **a)** $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ **b)** $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{2+x}{x^2-4x+x}$

a) Observamos que tenemos el producto notable $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Así: $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right) = x^2 - \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{x^6-1}{x^4}$

b) Calculamos el m.c.m.$\left[(x-2),\ \left(x^2-4x+4\right)\right]$ que es $(x-2)^2$.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Luego: $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{2+x}{(x-2)^2} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}+\dfrac{2+x}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-2x+x-2+2+x}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

EJERCICIO 4 : Calcula y simplifica: **a)** $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{3x-1}{x}$ **b)** $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\dfrac{2x-10}{x^2-25}$

a) m.c.m.$\left[\left(x^2-x\right),(x-1),x\right] = x(x-1)$

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}+\frac{x(2x-1)}{x(x-1)}-\frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x^2-x}{x(x-1)}-\frac{3x^2-3x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1+2x^2-x-3x^2+3x+x-1}{x(x-1)} = = \frac{-x^2+3x}{x(x-1)} = \frac{x(-x+3)}{x(x-1)} = \frac{-x+3}{x-1}$$

b) Efectuamos el cociente: $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\dfrac{2x-10}{x^2-25} = \dfrac{\left(x^2-6x+9\right)\left(x^2-25\right)}{\left(x^2+2x-15\right)(2x-10)}$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2 - 25 = (x - 5)\,(x + 5) \rightarrow$ Producto notable

$2x - 10 = 2(x - 5)$

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, ya que las raíces de $x^2 - 6x + 9 = 0$ son:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \text{Raíz doble}$$

- $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)\,(x - 3)$, ya que las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$ son:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{cases} \dfrac{-10}{2} = -5 \\[2ex] \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Así: $\dfrac{\left(x^2 - 6x + 9\right)\left(x^2 - 25\right)}{\left(x^2 + 2x - 15\right)\left(2x - 10\right)} = \dfrac{(x - 3)^2\,(x - 5)(x + 5)}{(x + 5)(x - 3)2(x - 5)} = \dfrac{x - 3}{2}$