

Examen de Matemáticas – Junio

1. Opera y simplifica extrayendo factores siempre que sea posible (recuerda que has de factorizar los números que no sean primos): **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**

a) $\sqrt{16}\sqrt[5]{64} =$ b) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50} =$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones: **(3 puntos; 1 punto por apartado)**

a) $\frac{2-3x}{2} - \frac{2+5x}{4} = \frac{5x-4}{6} - \frac{7x+11}{3}$ b) $\frac{x(x-3)}{2} - \frac{5x-1}{4} = \frac{x^2+2}{3} - \frac{x+5}{2}$
 c) $\sqrt{x-2} - x = -2x+8$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: **(1 punto)**

$$\left. \begin{aligned} \frac{3x-y}{2} - 2x &= \frac{-x-y}{3} - 1 \\ -x+y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

4. Una persona tiene en su caja fuerte 3950 euros en billetes de 20 euros y de 50 euros. Sabe que en total tiene 100 billetes. ¿Cuántos billetes de cada clase hay? **(1 punto)**
5. Factorizar el polinomio $x^3 - 3x^2 - 3x + 11x - 6$ y decir cuáles son sus raíces. **(1 punto)**
6. En la acera de una calle hay una escalera de 8 metros de longitud, cuyo extremo superior está apoyado en la fachada de una casa a una altura de 6 metros del suelo. Halla la distancia del pie de la escalera a la fachada y el ángulo que forma la escalera con el suelo. (Realiza un dibujo representando la situación). **(1 punto)**
7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (-2, 3)$ y $B = (5, -2)$ **(1 punto)**
8. Dada la función parabólica $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4}$, hallar:
- Vértice. **(0,25 puntos)**
 - Puntos de corte con los ejes. **(0,25 puntos)**
 - Tabla de valores y representación gráfica. **(0,5 puntos)**

Soluciones:

$$1. \text{ a) } \sqrt{16} \sqrt[5]{64} = \sqrt{2^4} \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{2^{20} \cdot 2^6} = \sqrt[5]{2^{26}} = \sqrt[10]{2^{26}} = 2^2 \sqrt[10]{2^6} = 4 \sqrt[5]{2^3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50} &= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2^3} - \sqrt{2^5} + \sqrt{2 \cdot 5^2} = \\ &= 3\sqrt{2} + 4 \cdot 2\sqrt{2} - 2^2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } \frac{2-3x}{2} - \frac{2+5x}{4} &= \frac{5x-4}{6} - \frac{7x+11}{3} \Rightarrow 6(2-3x) - 3(2+5x) = 2(5x-4) - 4(7x+11) \\ \Rightarrow 12 - 18x - 6 - 15x &= 10x - 8 - 28x - 44 \Rightarrow 6 - 33x = -18x - 52 \Rightarrow \\ \Rightarrow 18x - 33x &= -52 - 6 \Rightarrow -15x = -58 \Rightarrow x = \frac{-58}{-15} = \frac{58}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x(x-3)}{2} - \frac{5x-1}{4} &= \frac{x^2+2}{3} - \frac{x+5}{2} \Rightarrow \frac{x^2-3x}{2} - \frac{5x-1}{4} = \frac{x^2+2}{3} - \frac{x+5}{2} \Rightarrow \\ 6(x^2-3x) - 3(5x-1) &= 4(x^2+2) - 6(x+5) \Rightarrow \\ 6x^2 - 18x - 15x + 3 &= 4x^2 + 8 - 6x - 30 \Rightarrow 2x^2 - 27x + 25 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{27 \pm \sqrt{(-27)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25}}{2 \cdot 2} = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 200}}{4} = \frac{27 \pm \sqrt{529}}{4} = \\ &= \frac{27 \pm 23}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} \\ x_2 = \frac{4}{4} = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sqrt{x-2} - x = -2x + 8 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 8 - x \Rightarrow x - 2 = 64 - 16x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 17x + 66 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 66}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{2} =$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{17}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 11 \\ x_2 = 6 \end{array} \right.$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{3x-y}{2} - 2x = \frac{-x-y}{3} - 1 \\ -x+y=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3(3x-y) - 12x = 2(-x-y) - 6 \\ -x+y=2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9x - 3y - 12x = -2x - 2y - 6 \\ -x + y = 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -x - y = -6 \\ -x + y = 2 \end{array} \right.$$

Sumando ahora ambas ecuaciones (método de reducción), se tiene $-2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación: $-2 + y = 2 \Rightarrow y = 2 + 2 \Rightarrow y = 4$.

4. Llamemos x al número de billetes de 20 euros y llamemos y al número de billetes de 50 euros. Entonces, según el enunciado:
- $$\left. \begin{array}{l} 20x + 50y = 3950 \\ x + y = 100 \end{array} \right\} \text{Despejando } x \text{ de la segunda ecuación: } x = 100 - y. \text{ Sustituyendo este valor en la primera ecuación: } 20(100 - y) + 50y = 3950 \Rightarrow 2000 - 20y + 50y = 3950 \Rightarrow 30y = 3950 - 2000 \Rightarrow 30y = 1950 \Rightarrow y = \frac{1950}{30} \Rightarrow y = 65. \text{ Sustituyendo ahora en } x = 100 - y \text{ tenemos } x = 100 - 65 \Rightarrow x = 35. \text{ Por tanto, hay 35 billetes de 20 euros y 65 billetes de 50 euros.}$$

5. Apliquemos la regla de Ruffini:

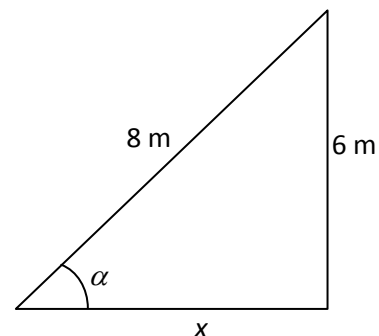
	1	-3	-3	11	-6
1		1	-2	-5	6
	1	-2	-5	6	0
1		1	-1	-6	
	1	-1	-6	0	
3		3	6		
	1	2	0		

Entonces $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = (x-1)^2(x-3)(x+2)$. Las raíces son $x_1 = 1$ (doble), $x_2 = 3$ y $x_3 = -2$.

6. Llamemos x a la distancia del pie de la escalera a la fachada y α al ángulo que forma la escalera con el suelo. Entonces:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{8} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 48,59^\circ$$

$$\cos 48,59^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 8 \cos 48,59^\circ \Rightarrow x \cong 5,29 \text{ m.}$$



7. La ecuación de la recta es $y = mx + n$. Como esta recta pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(5, -2)$, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3 = -2m + n \\ -2 = 5m + n \end{array} \right\} \text{Restando ambas ecuaciones se obtiene } 5 = -7m \Rightarrow m = -\frac{5}{7}. \text{ Sustituyendo en la 1ª ecuación:}$$

$$3 = -2 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) + n \Rightarrow 3 = \frac{10}{7} + n \Rightarrow 3 - \frac{10}{7} = n \Rightarrow n = \frac{21}{7} - \frac{10}{7} \Rightarrow n = \frac{11}{7}.$$

Por tanto la ecuación de la recta es $y = -\frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$.

8. a) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(1/4)} = 2$; $f(2) = \frac{1}{4}2^2 - 2 + \frac{3}{4} = 1 - 2 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$. Por tanto el vértice es el punto $V = \left(2, -\frac{1}{4}\right)$

b) Punto de corte con el eje Y: $\left(0, \frac{3}{4}\right)$. Para hallar los puntos de corte con el eje X resolvemos la ecuación

$$\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4} = 0:$$

$$\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ corta al eje X en los puntos } (3, 0) \text{ y } (1, 0).$$

c) Tabla de valores y representación gráfica: 2 – 5

x	2	0	3	1	4	5	-1
y	-1/4	3/4	0	0	3/4	2	2

Representación gráfica:

