

NOMBRE: _____

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\frac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2 \sqrt[3]{x^4}}$ (0,5 puntos)

b) $\frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}$ (0,5 puntos)

2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 7$; $a_2 = 14$; $a_3 = 28$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 2 para obtener el que le sigue. Se pide:

a) ¿Qué tipo de sucesión es? (0,1 punto)

b) Empleando alguna fórmula adecuada al tipo de sucesión que es, sumar sus 12 primeros términos. (0,9 puntos)

3) Calcular 37^2 . (0 puntos)

a) Hallar el valor de m para que el resto de dividir $P(x)$ entre $x - 2$ sea -45 , siendo $P(x) = mx^3 - 13x^2 - 48x + 55$ (0,5 puntos)

b) Sin usar la calculadora, factorizar $Q(x) = 6x^3 - 13x^2 - 48x + 55$ (0,5 puntos)

4) Resolver las ecuaciones:

a) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-2}{x+3}$ (1 punto)

b) $5 \log x = 3 + \log \frac{x^3}{10}$ (1 punto)

c) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ (1 punto)

d) $2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x}$ (1 punto)

5) Resolver la inecuación $\frac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$ (1 punto)

6) Contestar las siguientes cuestiones:

a) Sin calculadora, siendo $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α . A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. (1 punto)

b) Hallar sin calculadora el valor exacto de $\operatorname{sen} 1650^\circ$. (0,5 puntos)

c) Convertir a radianes 150° , expresándolo mediante una expresión simplificada que en la que aparezca π . (0,5 puntos)

SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\frac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2 \sqrt[3]{x^4}}$ (0,5 puntos)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{x^{10}}}{x^2 \sqrt[3]{x^4}} &= \frac{\sqrt{x^5}}{x^2 \sqrt[3]{x^3 x}} = \frac{\sqrt{x^4 x}}{x^2 x \sqrt[3]{x}} = \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^3 \sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2}}{x \sqrt[3]{x^3}} = \\ &= \frac{\sqrt[6]{x^3} \sqrt[6]{x^4}}{x x} = \frac{\sqrt[6]{x^7}}{x^2} = \frac{x \sqrt[6]{x}}{x^2} = \boxed{\frac{\sqrt[6]{x}}{x}} \end{aligned}$$

b) $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ (0,5 puntos)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{5})^2} = \frac{3-4\sqrt{15}+4\cdot 5}{3-4\cdot 5} = \\ &= \frac{23-4\sqrt{15}}{-17} = \boxed{\frac{4\sqrt{15}-23}{17}} \end{aligned}$$

2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 7$; $a_2 = 14$; $a_3 = 28$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 2 para obtener el que le sigue. Se pide:

a) ¿Qué tipo de sucesión es? (0,1 punto)

Es una progresión geométrica, con $a_1 = 7$ y $r = 2$.

b) Empleando alguna fórmula adecuada al tipo de sucesión que es, sumar sus 12 primeros términos. (0,9 puntos)

$$s_{12} = \frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1} = \frac{7(2^{12}-1)}{2-1} = \boxed{28665}$$

3) Calcular 37^2 . (0 puntos)

$$\boxed{37^2 = 1369}$$

a) Hallar el valor de m para que el resto de dividir $P(x)$ entre $x-2$ sea -45 , siendo $P(x) = mx^3 - 13x^2 - 48x + 55$ (0,5 puntos)

Según el Teorema del Resto, el resto de la citada división es:

$$P(2) = -45 \Leftrightarrow 8m - 13 \cdot 4 - 48 \cdot 2 + 55 = -45 \Leftrightarrow 8m - 93 = -45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8m = 93 - 45 \Leftrightarrow m = \frac{48}{8} \Leftrightarrow \boxed{m = 6}$$

b) Sin usar la calculadora, factorizar $Q(x) = 6x^3 - 13x^2 - 48x + 55$ (0,5 puntos)

Intentamos, inicialmente, Ruffini:

1	6	-13	-48	55
		6	-7	-55
	6	-7	-55	0

Como no encontramos cómo continuar, resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado para averiguar si tiene más raíces:

$$6x^2 - 7x - 55 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 1320}}{12} = \frac{7 \pm 37}{12} = \left\langle \begin{aligned} &= \frac{-30}{12} = -\frac{5}{2} \\ &= \frac{44}{12} = \frac{11}{3} \end{aligned} \right.$$

Luego $P(x) = 6(x-1)(x+5/2)(x-11/3)$

4) Resolver las ecuaciones:

a) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-2}{x+3}$ (1 punto)

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} &= \frac{x-2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2 - (x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - (x^2 + 6x + 9) &= x^2 - 3x - 2x + 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - x^2 - 6x - 9 &= x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -12x &= x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 6 + 12x &\Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} &= \frac{-7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{-12}{2} = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Ambas soluciones son válidas, puesto que no anulan los denominadores iniciales: $x = -1$ ó $x = -6$.

b) $5 \log x = 3 + \log \frac{x^3}{10}$ (1 punto)

$$\begin{aligned} 5 \log x &= 2 + \log \frac{x^3}{10} \Leftrightarrow 5 \log x = 2 + \log x^3 - \log 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5 \log x &= 2 + 3 \log x - 1 \Leftrightarrow 5 \log x - 3 \log x = 1 \Leftrightarrow 2 \log x = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log x &= 1/2 \Leftrightarrow x = 10^{1/2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{10}} \end{aligned}$$

La solución hallada es válida porque no anula los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial. En realidad, habría dos soluciones: $x = \pm \sqrt{10}$, pero $-\sqrt{10}$ no es válida, porque haría negativo el argumento del logaritmo del primer miembro de la ecuación original, lo que no es posible.

c) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ (1 punto)

$$5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$$

Llamando $t = 5^x$:

$$t^2 - 30t + 125 = 0 \Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 500}}{2} = \frac{30 \pm 20}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

- Si $t = 5 \Rightarrow$ Como $t = 5^x$, $5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$
- Si $t = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

d) $2\sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{3x}$ (1 punto)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x+3} &= 3 + \sqrt{3x} \Rightarrow (2\sqrt{2x+3})^2 = (3 + \sqrt{3x})^2 \Rightarrow \\ 4(2x+3) &= 9 + 6\sqrt{3x} + 3x \Rightarrow 8x + 12 = 9 + 6\sqrt{3x} + 3x \Rightarrow \\ 8x + 12 - 9 - 3x &= 6\sqrt{3x} \Rightarrow 5x + 3 = 6\sqrt{3x} \Rightarrow (5x+3)^2 = (6\sqrt{3x})^2 \Rightarrow \\ 25x^2 + 30x + 9 &= 36 \cdot 3x \Rightarrow 25x^2 - 78x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{78 \pm \sqrt{6084 - 900}}{50} = \end{aligned}$$

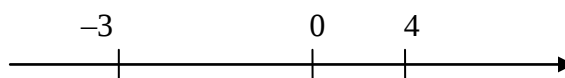
$$= \frac{78 \pm 72}{50} = \left\langle \begin{aligned} &= \frac{78-72}{50} = \frac{3}{25} \\ &\frac{78+72}{50} = 3 \end{aligned} \right.$$

Ambas son válidas, como puede comprobarse sustituyendo en la ecuación original.

5) Resolver la inecuación $\frac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$ (1 punto)

- Raíces del numerador: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$. Factorizado: $x+3$.
- Raíces del denominador: $x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0$ ó $x=4$. Factorizado: $x(x-4)$.
- Inecuación resultante con los polinomios factorizados:

$$\frac{x+3}{x(x-4)} \geq 0$$



División de $\mathbb{R}$ en intervalos mediante las raíces:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$x+3$	-	0	+	...	+	...	+
$x-0$	-	...	-	0	+	...	+
$x-4$	-	...	-	...	-	0	+
$\frac{x-3}{x(x-4)}$	-	0	+	$\nexists$	-	$\nexists$	+
¿Sirven? $\rightarrow$	No	Si	Si	No	No	No	Si

Luego la solución son los puntos de: $[-3, 0) \cup (4, +\infty]$.

6) Contestar las siguientes cuestiones:

- a) Sin calculadora, siendo $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 270^\circ$, hallar el resto de razones trigonométricas de α . A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos. (1 punto)

Como la tangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el segundo cuadrante.

$$\bullet \quad \cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ negativo por ser del segundo cuadrante.}$$

$$\bullet \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = -2 \frac{-\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\bullet \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-1/\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

$$\bullet \quad \boxed{\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que $\operatorname{tg} \alpha = -2$), que $\alpha = -63,43^\circ$.
Como es del II cuadrante: $\boxed{\alpha = -63,43^\circ + 180^\circ = 116,57^\circ = 116^\circ 33' 54''}$

b) Hallar sin calculadora el valor exacto de $\operatorname{sen} 1650^\circ$. (0,5 puntos)

$\operatorname{sen} 1650^\circ = \operatorname{sen} 210^\circ = -\operatorname{sen} (210^\circ - 180^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = \boxed{-1/2}$ ya que ésa es la relación entre el coseno de ángulos del tercer y primer cuadrante. El valor de 210° es el resto de dividir 1650° entre 360° (son 4 vueltas completas más dicho resto).

c) Convertir a radianes 150° , expresándolo mediante una expresión simplificada que en la que aparezca π . (0,5 puntos)

Usamos una simple regla de 3:

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{150^\circ} \Rightarrow x = \frac{150\pi}{180} = \boxed{\frac{5\pi}{6} \text{ rad}}$$