

4 Inecuaciones y sistemas

ACTIVIDADES INICIALES

- 4.I. **¿Por qué girar a la derecha tiene tantas ventajas para un camión? ¿Cómo es posible que haciendo más kilómetros ahorren tiempo y combustible?**

Los giros en la carretera suponen un peligro para cualquier vehículo. Dado que en muchos países se debe circular por el carril derecho de la calzada, el sentido natural del giro es a la derecha, ya que el carril derecho es el más lento. Para los conductores, estas maniobras son las habituales y, por tanto, las que se realizan con mayor facilidad y seguridad. En muchos casos, en los giros a la derecha no hay necesidad de hacer un *stop*.

- 4.II. **Elabora el itinerario más corto posible que pasa por todas las aulas de Secundaria de tu centro, comenzando en la tuya.**

Pregunta abierta.

- 4.III. **¿En qué consisten los problemas del viajante y del cartero chino? Búscalos y enúncialos con tus propias palabras.**

Problema del cartero chino: Un cartero debe repartir la correspondencia a cada una de las manzanas de casas de su distrito, siendo la oficina de correos su punto de partida y fin. Encuentra una ruta óptima (distancia total recorrida mínima).

Es decir, diseñar un recorrido que pase por todos los segmentos.

Problema del viajante chino: Imaginad que sois viajeros de comercio y que debéis visitar 15 ciudades durante un viaje de negocios. Ciudades que están diseminadas por el mapa de forma aleatoria. La cuestión es: ¿cuál es el camino que conduce a cada ciudad una sola vez recorriendo la menor distancia posible?

Es decir, diseñar un recorrido que pase por todos los puntos.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- 4.1. **Plantea como ecuaciones o inecuaciones.**

- Tres cafés cuestan más de 4 euros.
 - Cuatro vasos de agua son menos de un litro.
 - Un bollo cuesta 1,20 euros y por tres cafés y un bollo he pagado 5,70 euros.
 - El perímetro de un triángulo equilátero es mayor que 10 centímetros.
- $3x > 4$
 - $4x < 1$
 - $1,20 + 3x = 5,70$
 - $3x > 10$

- 4.2. **Actividad interactiva.**

4.3. Partiendo siempre de la desigualdad $6x - 12 < 18$.

a) Copia y completa como en el ejemplo:

<u>Restar 6</u>	$6x - 18$	$<$	12
	$12x - 24$	\square	36
	$3x - 6$	\square	9
	$-2x + 4$	\square	-6

b) Halla las soluciones de la inecuación $6x - 12 < 18$.

a) Multiplicar por 2 $12x - 24 < 36$

Dividir entre 2 $3x - 6 < 9$

Dividir entre -3 $-2x + 4 > -6$

b) $x < 5$

4.4. (TIC) Resuelve las inecuaciones siguientes.

a) $3(x - 5) - 5 > 7(x + 1) - (2x + 3)$ d) $\left(\frac{x+1}{3}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2(x+4) \geq \frac{x(1+x)}{6}$

b) $x - 2(x + 3) - 1 > 2 - 4(1 - 5x) - (x + 4)$ e) $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \leq \frac{x+5}{6}$

c) $\frac{5x-2}{2} - 3(x-1) \geq -\frac{x+6}{10}$ f) $2\left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{2(x-1)+7}{6} < 3(x+2)$

a) $3(x - 5) - 5 > 7(x + 1) - (2x + 3) \Rightarrow 3x - 15 - 5 > 7x + 7 - 2x - 3 \Rightarrow -2x > 24 \Rightarrow x < -12 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in (-\infty, -12)$

b) $x - 2(x + 3) - 1 > 2 - 4(1 - 5x) - (x + 4) \Rightarrow x - 2x - 6 - 1 > 2 - 4 + 20x - x - 4 \Rightarrow -20x > 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x < -\frac{1}{20} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{20}\right)$

c) $\frac{5x-2}{2} - 3(x-1) \geq -\frac{x+6}{10} \Rightarrow 5(5x-2) - 30(x-1) \geq -x-6 \Rightarrow 25x - 10 - 30x + 30 \geq -x - 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 26 \geq 4x \Rightarrow \frac{13}{2} \geq x \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{13}{2}\right]$

d) $\left(\frac{x+1}{3}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2(x+4) \geq \frac{x(1+x)}{6} \Rightarrow x^2 - 1 + 12x + 48 \geq x + x^2 \Rightarrow 11x \geq -47 \Rightarrow x \geq -\frac{47}{11} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in \left[-\frac{47}{11}, +\infty\right)$

e) $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \leq \frac{x+5}{6} \Rightarrow 3(3x-1) - 2(2x+3) \leq x+5 \Rightarrow 9x - 3 - 4x - 6 \leq x+5 \Rightarrow 4x \leq 14 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \leq \frac{7}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

f) $2\left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{2(x-1)+7}{6} < 3(x+2) \Rightarrow 4(x-1) - 2(x-1) - 7 < 18(x+2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4x - 4 - 2x + 2 - 7 < 18x + 36 \Rightarrow -45 < 16x \Rightarrow -\frac{45}{16} < x \Rightarrow x \in \left(-\frac{45}{16}, +\infty\right)$

- 4.5. Isa ha sacado un 6,2 y un 8,1 en dos exámenes de Matemáticas. ¿Entre qué valores tiene que estar la nota del tercer examen si quiere que su media sea al menos 7,5?

Si x es la nota del tercer examen, tenemos $x \leq 10$. Por otro lado, $\frac{6,2+8,1+x}{3} \geq 7,5$, es decir, $x \geq 8,2$.

Por tanto, la nota debe estar entre 8,2 y 10.

- 4.6. Resuelve $\frac{2x-3}{5} - \frac{x+1}{4} \geq \frac{x-1}{10}$ sabiendo que 15 es la solución de la ecuación asociada.

El conjunto de soluciones puede ser $(-\infty, 15]$ o $[15, +\infty)$. Como para $x = 0$ obtenemos que

$-\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{17}{20} < -\frac{1}{10}$, el conjunto de soluciones no puede contener el cero, luego es $[15, +\infty)$.

- 4.7. ¿Qué condiciones debe cumplir el tercer lado de un triángulo si los otros dos lados miden 2 y 5 centímetros, respectivamente?

Como la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo debe ser mayor que el tercer lado, si llamamos x al tercer lado, se deben cumplir las condiciones $x + 2 > 5$ y $2 + 5 > x$ (pues $x + 5 > 2$ se cumple siempre) que nos da el intervalo $(3, 7)$, es decir, el tercer lado debe medir más de 3 y menos de 7 centímetros.

- 4.8. Actividad interactiva.

- 4.9. (TIC) Determina las soluciones de estas inecuaciones.

- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $2x^2 < 6$ | e) $2x^2 + 5x > 8 - x$ | i) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 < -6x$ |
| b) $x^4 + 4 < 3x^2$ | f) $x^2 + 1 < 2x$ | j) $2x^3 - 4x^2 > 5x(1 + x)$ |
| c) $3x^2 - 2x \geq 2x^2 + 15$ | g) $x^3 + 4x^2 \geq 6 - x$ | k) $15x^2 + 8 \geq x^4 - 8$ |
| d) $1 - x^2 \leq -3$ | h) $x^4 - 3x^3 \leq 10x^2$ | l) $x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0$ |

- a) Las raíces del polinomio son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$, que determinan los intervalos $(-\infty, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
- b) El polinomio no tiene raíces, por lo que queda determinado un único intervalo en la recta, $(-\infty, +\infty)$. Eligiendo un valor para x se obtiene que la inecuación no tiene solución.
- c) Las raíces del polinomio son -3 y 5 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$.
- d) Las raíces del polinomio son -2 y 2 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
- e) Las raíces del polinomio son -4 y 1 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$.
- f) La raíz del polinomio es 1 , que determina dos intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene que la inecuación no tiene solución.
- g) Las raíces del polinomio son -3 , -2 y 1 , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-3, -2] \cup [1, +\infty)$.
- h) Las raíces del polinomio son -2 , 0 y 5 , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-2, 5]$.

- i) Las raíces del polinomio son $-3, -2, -1$ y 0 , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-3, -2) \cup (-1, 0)$.
- j) Las raíces del polinomio son $-\frac{1}{2}, 0$ y 5 , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (5, +\infty)$.
- k) Las raíces del polinomio son -4 y 4 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-4, 4]$.
- l) Las raíces del polinomio son $-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

NOTA: Hay un error en el enunciado del apartado l del libro.

4.10. (TIC) Resuelve estas inecuaciones racionales.

- a) $\frac{x-4}{x+5} > 0$
- b) $\frac{x^2}{x+1} \geq 0$
- c) $\frac{x+3}{x+2} < 6$
- d) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4} \leq 0$
- e) $\frac{x-2}{x^3-4x} \leq 0$
- f) $\frac{x-2}{x+2} < \frac{3-2x}{2x-1}$

- a) Las raíces del numerador y del denominador son -5 y 4 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$.
- b) Las raíces del numerador y del denominador son -1 y 0 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-1, +\infty)$.
- c) $\frac{x+3}{x+2} < 6 \Rightarrow \frac{-5x-9}{x+2} < 0$. Las raíces del numerador y del denominador son -2 y $-\frac{9}{5}$, que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -2) \cup (-\frac{9}{5}, +\infty)$.
- d) Las raíces del numerador y del denominador son $-3, 2$ y 3 , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-3, 2) \cup (2, 3]$.
- e) Las raíces del numerador y del denominador son $-2, 0$ y 2 , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-2, 0)$.
- f) $\frac{x-2}{x+2} < \frac{3-2x}{2x-1} \Rightarrow \frac{4(x^2-x-1)}{(x+2)(2x-1)} < 0$. Las raíces del numerador y del denominador son $-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

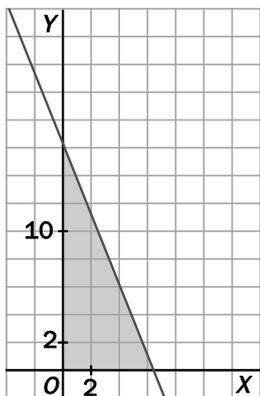
4.11. Actividad interactiva.

4.12. Actividad resuelta.

4.13. (TIC) El número de empleados, x , de una fábrica y las toneladas de fertilizante que fabrica, y , se relacionan por la inecuación: $30x + 12y \leq 200$.

- a) Resuelve gráficamente la inecuación.
- b) ¿Es aceptable la solución en la que $y = 16$?

a)



- b) No, pues en ese caso sería $x \leq \frac{4}{15} < 1$, que no puede ser el número de empleados.

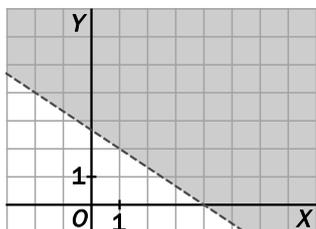
4.14. (TIC) Resuelve gráficamente estas inecuaciones y calcula tres soluciones de cada una.

a) $2x + 3y > 8$

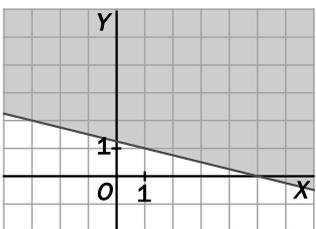
b) $x + 4y \geq 5$

c) $5x - 6y \leq 0$

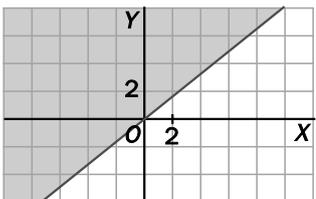
a)



b)



c)



4.15. Actividad interactiva.

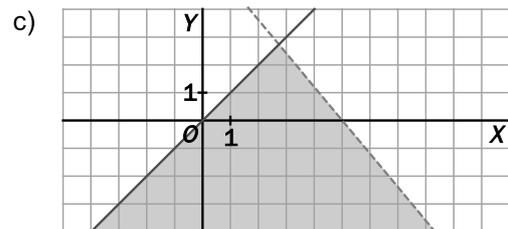
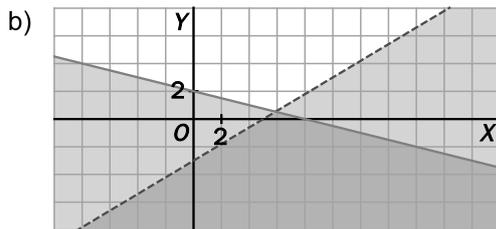
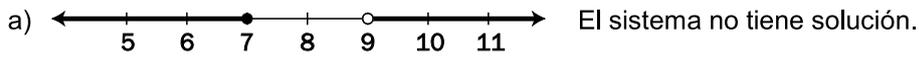
4.16. Actividad resuelta.

4.17. (TIC) Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x+1 > 10 \\ x-2 \leq 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-5y > 15 \\ x+4y \leq 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x+5y < 30 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$

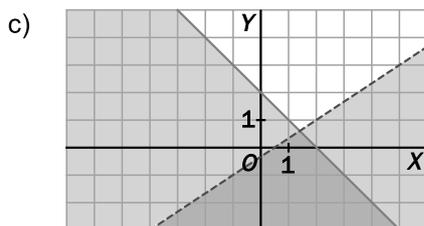
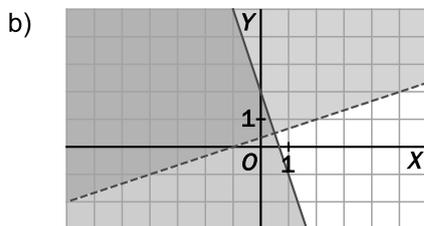
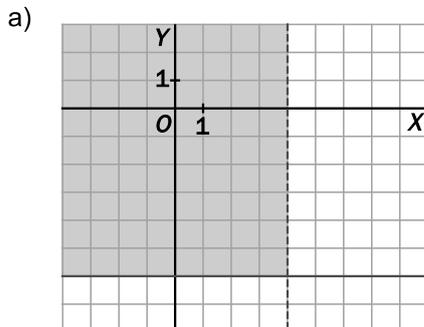


4.18. (TIC) Halla la solución de estos sistemas.

a) $\begin{cases} y \geq -6 \\ x < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y < -1 \\ 3x+y \leq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ 2x-3y > 1 \end{cases}$



EJERCICIOS

Desigualdades e inecuaciones

4.19. Partiendo siempre de la desigualdad $4 - 5x > x$, copia y completa como en el ejemplo.

<u>Sumar 5x</u>	$4 > 6x$
_____	$1 - 5x \square x - 3$
_____	$10x - 8 \square - 2x$
Restar 3	$1 - 5x > x - 3$
Multiplicar por -2	$10x - 8 \square - 2x$

4.20. Transforma en desigualdades estas frases.

- a) Elena necesita correr por debajo de 16 segundos para clasificarse en una prueba.
 - b) En algunas atracciones del parque temático exigen una altura superior a 1,20 metros.
 - c) Pasó el kilómetro 25 de la A-2, pero aún no llegó al 45.
- a) $x < 16$
 b) $x > 1,20$
 c) $25 < x < 45$

4.21. Di si son ciertas o falsas estas afirmaciones.

- a) Una inecuación, o no tiene solución, o tiene una, o tiene infinitas.
 - b) La solución de $x + 5 \leq 3$ es una semirrecta.
 - c) Una inecuación del tipo $x + a > b$, con a y b números reales, a veces no tiene solución.
- a) Falsa. Por ejemplo, la inecuación $(x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2 \leq 0$ tiene dos soluciones: $x = 1$ y $x = 2$.
 b) Verdadera. La semirrecta es $(-\infty, -2]$.
 c) Falsa. La inecuación tiene como solución la semirrecta $(b - a, +\infty)$.

4.22. Relaciona en tu cuaderno cada desigualdad con su equivalente y con la operación en los dos miembros que pasa de una a otra.

Desigualdad A	Operación	Desigualdad B
$-4 < 7$	Dividir entre -2	$-4 < 5$
$12 > 6$	Sumar -5	$-6 < -3$
$\frac{-4}{3} < \frac{10}{6}$	Multiplicar por 3	$-9 < 2$

Desigualdad A	Operación	Desigualdad B
$-4 < 7$	Dividir entre -2	$-4 < 5$
$12 > 6$	Sumar -5	$-6 < -3$
$\frac{-4}{3} < \frac{10}{6}$	Multiplicar por 3	$-9 < 2$

4.23. ¿Son equivalentes estas inecuaciones?

a) $-2x \leq 14$ y $x \leq 7$

b) $\frac{x}{2} > -5$ y $x > 10$

a) No son equivalentes.

b) No son equivalentes.

4.24. Si $a < b$ y $c \leq d$, copia y completa con los símbolos $<$, $>$, \leq y \geq en los casos en que sea posible. Si no lo es, explica por qué.

a) $b - 10 \square a - 10$

c) $a - d \square b - c$

e) $-a + 3 \square 3 - b$

b) $a + c \square b + d$

d) $2c + 3 \square 2d + 5$

f) $a \cdot c \square b \cdot d$

a) $b - 10 \square a - 10$

c) $a - d \square b - c$

e) $-a + 3 \square 3 - b$

b) $a + c \square b + d$

d) $2c + 3 \square 2d + 5$

f) No se puede decidir. Por ejemplo, si $a = -3$, $b = 1$, $c = -5$ y $d = 2$, tenemos que $a \cdot c > b \cdot d$, pero si $a = c = 1$ y $b = d = 2$, tenemos $a \cdot c < b \cdot d$.

Resolución de inecuaciones de primer grado

4.25. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa sus soluciones.

a) $7x - 2(1 - 3x) \leq 2x + 3$

c) $5x - \frac{2}{3} < 4(3x - 6) - 2x$

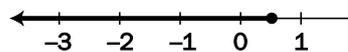
e) $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{5}{6} - x$

b) $\frac{2(5x+1)}{3} \leq -4(x-3) + \frac{5}{2}$

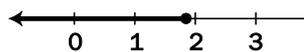
d) $5 > \frac{3x+1}{2}$

f) $4x - 1 \geq \frac{8x-5}{2}$

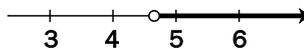
a) $7x - 2(1 - 3x) \leq 2x + 3 \Rightarrow 7x - 2 + 6x \leq 2x + 3 \Rightarrow 11x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{11} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{11}\right]$



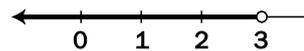
b) $\frac{2(5x+1)}{3} \leq -4(x-3) + \frac{5}{2} \Rightarrow 20x + 4 \leq -24x + 72 + 15 \Rightarrow 44x \leq 83 \Rightarrow x \leq \frac{83}{44} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{83}{44}\right]$



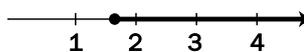
c) $5x - \frac{2}{3} < 4(3x - 6) - 2x \Rightarrow 15x - 2 < 36x - 72 - 6x \Rightarrow 70 < 15x \Rightarrow x > \frac{14}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{14}{3}, +\infty\right)$



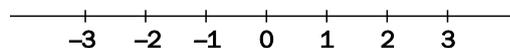
d) $5 > \frac{3x+1}{2} \Rightarrow 10 > 3x+1 \Rightarrow 9 > 3x \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)$



e) $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{5}{6} - x \Rightarrow 2x - 3x - 3 \geq 5 - 6x \Rightarrow 5x \geq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{5} \Rightarrow x \in \left[\frac{8}{5}, +\infty\right)$



f) $4x - 1 \geq \frac{8x-5}{2} \Rightarrow 8x - 2 \geq 8x - 5 \Rightarrow 0 \geq -3$, que es cierto para todo x .



4.26. Completa con $<$, $>$, \leq y \geq para que las semirrectas dadas sean las soluciones de las inecuaciones.

a) $\frac{2x-1}{3} - x \quad \square \quad 3x-2 \quad \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$

b) $\frac{x-4}{2} \quad \square \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{6}(x+1) \quad (-\infty, -13)$

a) $\frac{2x-1}{3} - x \quad \square \quad 3x-2$

b) $\frac{x-4}{2} \quad \square \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{6}(x+1)$

Inecuaciones polinómicas de grado superior. Inecuaciones racionales

4.27. Halla las soluciones de estas inecuaciones.

a) $(5x-2)^2 \leq 0$

b) $(2x+4)^3 > 0$

a) Como un cuadrado nunca es negativo, la única solución es que la base sea cero, $x = \frac{2}{5}$.

b) Un cubo es positivo si lo es su base; por tanto, la solución es $x > -2 \Rightarrow (-2, +\infty)$.

4.28. (TIC) Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x^2 - 2x - 4 \leq 0$

c) $(3x-1)(-5x+2) \geq 0$

b) $-10x^2 + 17x - 3 \leq 0$

d) $-7(4x+1)(-x+2) < 0$

a) Las raíces del polinomio son $1-\sqrt{5}$ y $1+\sqrt{5}$, que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]$.

b) Las raíces del polinomio son $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{2}$, que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

c) Las raíces del polinomio son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$, que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$.

d) Las raíces del polinomio son $-\frac{1}{4}$ y 2 , que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$.

4.29. (TIC) Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{x+5}{x+2} \leq 0$

c) $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$

e) $\frac{x+3}{x^2} > 0$

b) $\frac{3-x}{x+2} < 0$

d) $\frac{x^2-1}{x} \leq 0$

f) $\frac{(x-2)(x+5)}{4x-6} \geq 0$

- a) Las raíces del numerador y del denominador son -5 y -2 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-5, -2)$.
- b) Las raíces del numerador y del denominador son -2 y 3 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.
- c) Las raíces del numerador y del denominador son -4 y 3 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-4, 3)$.
- d) Las raíces del numerador y del denominador son -1 , 0 y 1 , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$.
- e) Las raíces del numerador y del denominador son -3 y 0 , que determinan tres intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$.
- f) Las raíces del numerador y del denominador son -5 , $\frac{3}{2}$ y 2 , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-5, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$.

4.30. (TIC) Halla la solución de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $2x^4 + 5x^3 + 5x > x^2 + 3$

c) $x^4 \leq 4x^2$

b) $x^4 + 3x^3 - 7x < 3x^2 - 6$

d) $-2(x-2)(x+3)^2 < 0$

a) $2x^4 + 5x^3 + 5x > x^2 + 3 \Rightarrow 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x - 3 > 0$

Las raíces del polinomio son -3 y $\frac{1}{2}$, que determinan tres intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

b) $x^4 + 3x^3 - 7x < 3x^2 - 6 \Rightarrow x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6 < 0$

Las raíces del polinomio son -3 , -2 y 1 , que determinan cuatro intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-3, -2)$.

c) $x^4 \leq 4x^2 \Rightarrow x^4 - 4x^2 \leq 0$

Las raíces del polinomio son -2 , 0 y 2 , que determinan cuatro intervalos en la recta real. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $[-2, 2]$.

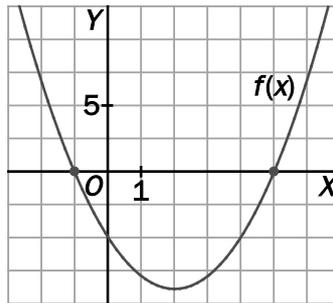
- d) Como -2 es siempre negativo y $(x+3)^2$ es siempre positivo, debe ser $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$ y la solución es $(2, +\infty)$.

NOTA: Hay un error en el enunciado del apartado a del libro.

4.31. Halla en cada caso una inecuación polinómica cuya solución se corresponda con la dada.

- | | |
|-----------------------|-------------------|
| a) $[-3, +\infty)$ | c) $(-\infty, 2)$ |
| b) Sin solución | d) $\{3\}$ |
| a) $x \geq -3$ | |
| b) $x^2 < 0$ | |
| c) $x < 2$ | |
| d) $(x - 3)^2 \leq 0$ | |

4.32. A partir de la gráfica de la función $f(x) = (x - 5)(x + 1)$, resuelve las inecuaciones.



- | | |
|--------------------------------------|------------------|
| a) $f(x) > 0$ | c) $f(x) < 0$ |
| b) $f(x) \geq 0$ | d) $f(x) \leq 0$ |
| a) $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ | |
| b) $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$ | |
| c) $(-1, 5)$ | |
| d) $[-1, 5]$ | |

4.33. (TIC) Comprueba que, aunque las siguientes ecuaciones tienen las mismas soluciones, no ocurre lo mismo con las inecuaciones asociadas.

- a) $\frac{2x - 6}{x + 5} = 0$ y $2x - 6 = 0$; $\frac{2x - 6}{x + 5} < 0$ y $2x - 6 < 0$
- b) $\frac{3x - 5}{2x + 1} = 1$ y $2x = 12$; $\frac{3x - 5}{2x + 1} \geq 1$ y $3x - 5 \geq 2x + 1$

Explica por qué ocurre esto.

- a) Ambas ecuaciones tienen solución $x = 3$, pero las soluciones de las inecuaciones son, respectivamente, $(-5, 3)$ y $(-\infty, 3)$.
- b) La solución de las ecuaciones es $x = 6$ en ambos casos, pero las soluciones de las inecuaciones son, respectivamente, $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [6, +\infty)$ y $[6, +\infty)$.

Esto sucede porque para resolver una ecuación racional hay que tener en cuenta solo las raíces del numerador, pero para resolver una inecuación racional hay que tener en cuenta tanto las raíces del numerador como las del denominador.

4.34. (TIC) Escribe como una única fracción racional y resuelve las inecuaciones.

a) $\frac{1+x}{2x+7} - \frac{1}{x-1} \geq 0$

c) $\frac{x+1}{x} < \frac{x-2}{x+3}$

b) $\frac{x}{x+2} \geq \frac{1}{x}$

d) $\frac{2x-1}{x+1} - 1 > \frac{x-2}{3-x}$

a) $\frac{1+x}{2x+7} - \frac{1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{(2x+7)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-4)}{(2x+7)(x-1)} \geq 0$

Las raíces del numerador y del denominador son $-\frac{7}{2}$, -2 , 1 y 4 , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -\frac{7}{2}) \cup [-2, 1) \cup [4, +\infty)$.

b) $\frac{x}{x+2} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{(x+2)x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)x} \geq 0$

Las raíces del numerador y del denominador son -2 , -1 , 0 y 2 , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -2) \cup [-1, 0) \cup [2, +\infty)$.

c) $\frac{x+1}{x} < \frac{x-2}{x+3} \Rightarrow \frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{6x+3}{x(x+3)} < 0$

Las raíces del numerador y del denominador son -3 , $-\frac{1}{2}$ y 0 , que determinan cuatro intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$.

d) $\frac{2x-1}{x+1} - 1 > \frac{x-2}{3-x} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 1 - \frac{x-2}{3-x} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 6x + 4}{(x+1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} > 0$

Las raíces del numerador y del denominador son -1 , 1 , 2 y 3 , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$.

4.35. Escribe una inecuación para cada conjunto de soluciones.

a) $(2, +\infty)$

c) $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

b) $(-3, 5)$

d) $(-4, 0) \cup (3, 5)$

a) $2x - 4 > 0$

b) $(x+3)(x-5) < 0$

c) $(x+2)(x-1) \geq 0$

d) $x(x+4)(x-3)(x-5) < 0$

4.36. Calcula en cada caso los valores de m para que se cumplan estas condiciones.

a) Que $mx^2 - mx + 1 \leq 0$ tenga una sola solución.

b) Que $x^4 + 4mx - 8m \leq 0$

a) Para que la inecuación tenga solo una solución, el polinomio $mx^2 - mx + 1$ debe tener una única raíz (doble), es decir, debe ser $m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0$ o $m = 4$.

Si $m = 0$, la inecuación queda $1 \leq 0$, lo que no es posible.

Por tanto, debe ser $m = 4$, quedando la inecuación $4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 \leq 0$, que tiene como única solución $x = \frac{1}{2}$.

b) Nos piden calcular m para que la inecuación $x^4 + 4mx - 8m \leq 0$ sea cierta para cualquier valor de x . Ahora bien, tomando $x = 2$, la inecuación quedaría $16 \leq 0$, que no es posible. Por tanto, no hay ningún valor de m que cumpla la condición dada.

Nota: Hay un error en el enunciado del apartado a del libro.

4.37. La inecuación $-\frac{3}{x+4} < -5$ da lugar a dos inecuaciones, según que el denominador sea mayor o menor que 0. Encuentra todas sus soluciones.

Si $x + 4 > 0$, es decir, si $x > -4$, tenemos que $-3 < -5(x + 4) \Rightarrow 17 < -5x \Rightarrow -\frac{17}{5} > x$, obteniéndose la solución $\left(-4, -\frac{17}{5}\right)$.

Si $x + 4 < 0$, es decir, si $x < -4$, tenemos que $-3 > -5(x + 4) \Rightarrow 17 > -5x \Rightarrow -\frac{17}{5} < x$, con lo que no obtenemos soluciones, ya que las dos condiciones son incompatibles.

De este modo, la solución de la inecuación es $\left(-4, -\frac{17}{5}\right)$.

4.38. (TIC) Resuelve las siguientes inecuaciones transformándolas previamente en inecuaciones polinómicas.

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq -2$

b) $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 \leq 0$

a) Se supone que estamos tomando la raíz positiva, que siempre será mayor que -2 ; por tanto, solo hace falta determinar cuándo existe la raíz, es decir, resolver la inecuación $x^2 - 6x + 9 \geq 0$.

Como $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, la inecuación $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ es cierta para cualquier x , es decir, la solución es \mathbb{R} .

b) $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 \leq 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 \leq 0$. Haciendo el cambio $u = 2^{-x}$ obtenemos la inecuación polinómica $2 \cdot u^2 - 7 \cdot u - 4 \leq 0$, que tiene solución $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

De este modo, $-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4$; ahora bien, como 2^{-x} es siempre positivo, realmente tenemos $0 < 2^{-x} < 4$, de donde $x > -2$, es decir, la solución es $(-2, +\infty)$.

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

4.39. ¿En cuántas regiones divide al plano la recta $y = 3x - 5$? Caracterízalas en forma de inecuaciones.

En dos regiones, que se corresponden con las inecuaciones $y \geq 3x - 5$, $y \leq 3x - 5$.

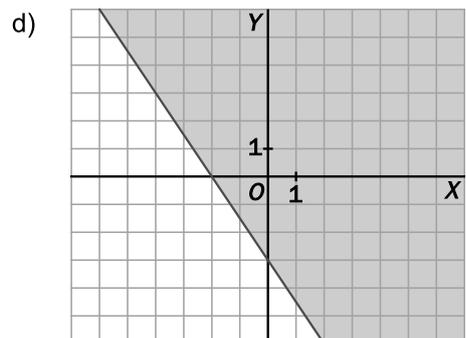
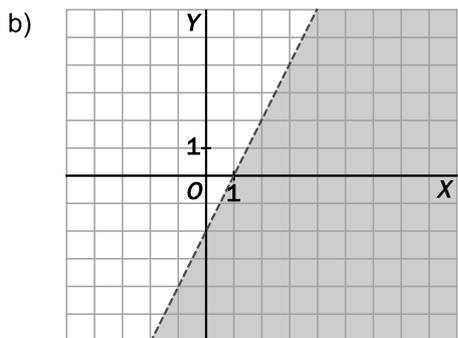
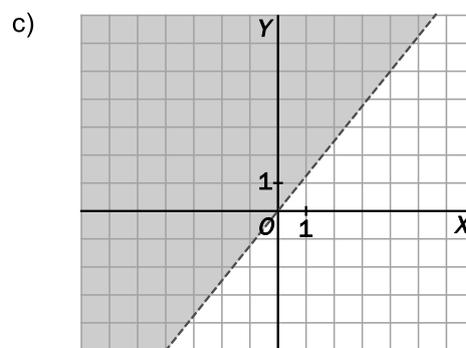
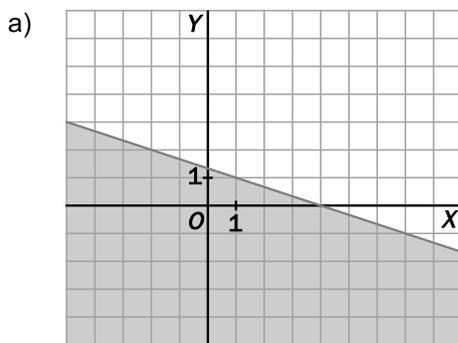
4.40. (TIC) Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x + 3y \leq 4$

b) $x - \frac{y}{2} > 1$

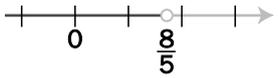
c) $5x - 4y < 0$

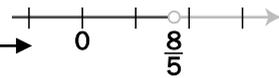
d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq -1$



Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

4.41. (TIC) Copia en tu cuaderno y une cada sistema con su solución.

Sistema	Solución
$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+1 > 5 \end{cases}$	$-2 \leq x < -1$
$\begin{cases} 3x+4 < 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$	$(2, +\infty)$
$\begin{cases} -4x+3 \leq -1 \\ 5x-2 > 6 \end{cases}$	

Sistema	Solución
$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+1 > 5 \end{cases}$	$-2 \leq x < -1$
$\begin{cases} 3x+4 < 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$	$(2, +\infty)$
$\begin{cases} -4x+3 \leq -1 \\ 5x-2 > 6 \end{cases}$	

4.42. (TIC) Encuentra, si existen, las soluciones de estos sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} 2x-3 > 5x-6 \\ x+2 \leq 2(x+11) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5(1-3x) > 8+3x \\ 3x-1 \geq 1-(x+2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x+3 \\ 1-x > 4(x-1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 15-2x \\ 10+2x \geq 6x-10 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x-3 > 5x-6 \\ x+2 \leq 2(x+11) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 > 3x \\ -20 \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 > x \\ -20 \leq x \end{cases} \Rightarrow [-20, 1)$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x+3 \\ 1-x > 4(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \\ 5 > 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \\ 1 > x \end{cases} \Rightarrow [-6, 1)$

c) $\begin{cases} 5(1-3x) > 8+3x \\ 3x-1 \geq 1-(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 > 18x \\ 4x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} > x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$

d) $\begin{cases} x \geq 15-2x \\ 10+2x \geq 6x-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \geq 15 \\ 20 \geq 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 5 \geq x \end{cases} \Rightarrow x = 5$

4.43. Dado el sistema $\begin{cases} y < -3x + 3 \\ y \leq -x + 6 \end{cases}$ y los puntos:

- $A(3, 2)$ $C(-2; 8,5)$ $E(0, 0)$
 $B(5, 3)$ $D(4, 2)$ $F(-1,5; 7,5)$

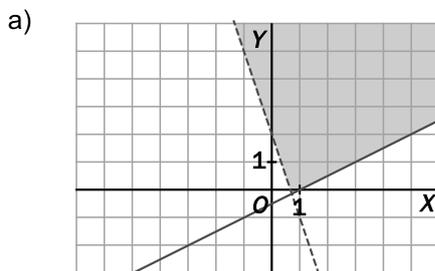
- a) Indica los que son solución del sistema.
 b) ¿Cuáles son solución solo de la primera inecuación? ¿Cuáles solo de la segunda?
 c) ¿Cuáles no son solución de ninguna?
 a) Es solución del sistema el punto E .
 b) Es solución solo de la primera inecuación el punto C . Son solución solo de la segunda inecuación los puntos A, D y F .
 c) No es solución de ninguna de las inecuaciones el punto B .

4.44. Actividad interactiva.

4.45. (TIC) Resuelve gráficamente estos sistemas.

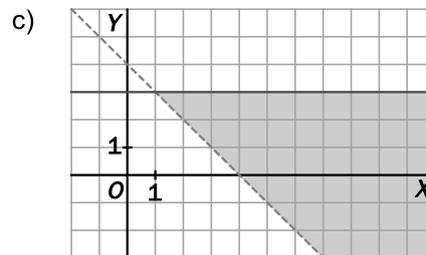
a) $\begin{cases} x - 2y \leq 1 \\ 3x + y > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + y < 2 \end{cases}$



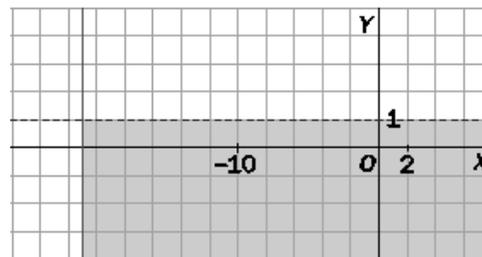
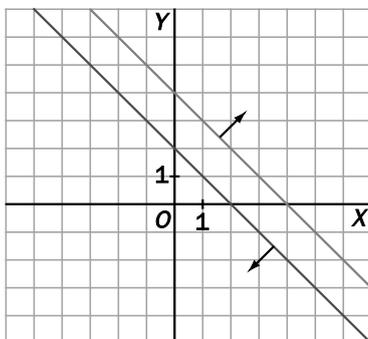
c) $\begin{cases} y \leq 3 \\ x + y > 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq -21 \\ y < 1 \end{cases}$

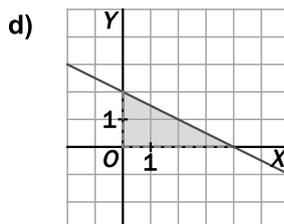
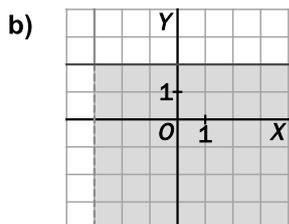
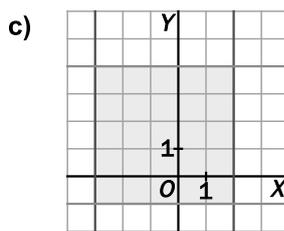
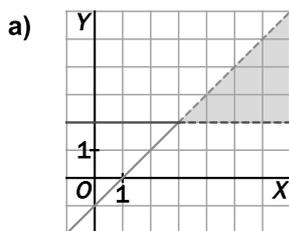


b) El sistema no tiene solución.

d)



4.46. (TIC) Investiga qué sistemas de inecuaciones tienen como solución estas regiones del plano.



a)
$$\begin{cases} y > 2 \\ y < x - 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y \leq 4 \\ y \geq -1 \\ x \leq 2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y \leq 2 \\ x > -3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2y + x \leq 4 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

4.47. Escribe un sistema de inecuaciones que tenga como solución la descrita en cada caso.

- a) El cuadrado de lado 2 centrado en el origen
- b) El intervalo $(-3, 7]$
- c) El tercer cuadrante del plano
- d) La semirrecta $[5, +\infty)$

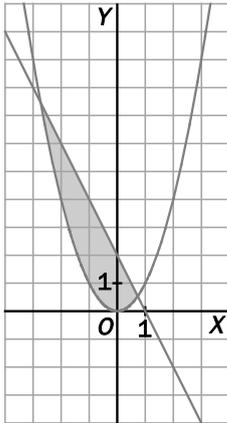
a)
$$\begin{cases} -1 \leq x \\ x \leq 1 \\ -1 \leq y \\ y \leq 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -3 < x \\ x \leq 7 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x > 0 \end{cases}$$

4.48. Sombrea sobre unos ejes de coordenadas el recinto encerrado entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = -2x + 2$ y escribe el sistema de inecuaciones cuya solución es dicho recinto.



$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq -2x + 2 \end{cases}$$

4.49. Para el sistema $\begin{cases} 3x \leq a \\ bx > -8 \end{cases}$, halla qué deben cumplir a y b para que su solución sea:

a) $(-4, -2]$

b) $(-\infty, 2)$

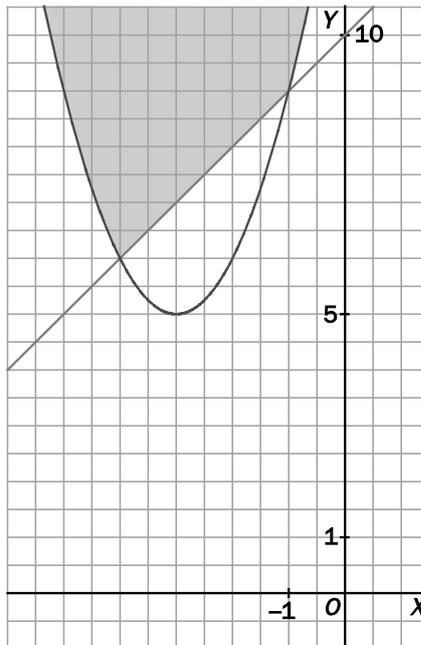
a) $a = -6, b = 2$

b) $a \geq 6, b = -4$

4.50. (TIC) Resuelve este sistema gráficamente dibujando las funciones que surgen de cada inecuación.

$$\begin{cases} 2x + 10 \leq 2y - 10 \\ 4y - 6 \geq x^2 + 6x + 3y + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 10 \leq 2y - 10 \\ 4y - 6 \geq x^2 + 6x + 3y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \leq -10 \\ y \geq x^2 + 6x + 14 \end{cases}$$



PROBLEMAS

4.51. Un carpintero va a colocar un rodapié en una habitación rectangular de 6 metros de ancho y con un perímetro menor de 30 metros. ¿Cuánto puede valer la longitud del cuarto?

Si llamamos x a la longitud del cuarto, tenemos que $2x + 12 < 30$, es decir, $x < 9$. Por tanto, la longitud del cuarto estará entre 0 y 9 metros.

4.52. Marcos quiere encargar a un cristalero un espejo circular, aunque no tiene claro qué tamaño le conviene. Lo que sabe es que el radio puede variar entre 20 y 25 centímetros.

¿Entre qué valores oscilaría el área del cristal?. ¿Y su perímetro?

Si r es el radio del espejo, $20 \leq r \leq 25 \Rightarrow 400\pi \leq \pi r^2 \leq 625\pi$ y $40\pi \leq 2\pi r \leq 50\pi$.

Es decir, el área oscilará entre $400\pi \approx 1256,63 \text{ cm}^2$ y $625\pi \approx 1963,50 \text{ cm}^2$, y el perímetro, entre $40\pi \approx 125,66 \text{ cm}$ y $50\pi \approx 157,08 \text{ cm}$.

4.53. Un ascensor soporta una tonelada. Luis quiere subir cajas y sacos. Las cajas pesan 35 kilos más que los sacos. Tras cargar cinco de cada uno, mete otra caja y salta la alarma, así que la cambia por un saco y no hay problemas. ¿Entre qué valores está el peso del saco?

Si llamamos x al peso de un saco, el peso de una caja será $35 + x$ y tenemos el sistema

$$\begin{cases} 5x + 6(35 + x) > 1000 \\ 6x + 5(35 + x) < 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x > 790 \\ 11x < 825 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{790}{11} \\ x < 75 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{790}{11}, 75 \right)$$

Es decir, el peso de un saco estará entre $\frac{790}{11} \approx 71,81$ y 75 kg.

4.54. Dos compañías telefónicas ofertan así:

Compañía A	Compañía B
Banda ancha+	Banda ancha+
llamadas a fijos gratis: 60 €/mes.	llamadas a fijos gratis: 40 €/mes.
Llamadas a móviles: 0,20 €/min	Llamadas a móviles: 0,30 €/min

a) ¿Cuántos minutos por mes debe el cliente llamar a móviles para que le resulte más económica la compañía B?

b) ¿Cuál es el coste de la factura en este caso?

a) Si llamamos x a los minutos, tenemos que $40 + 0,3x < 60 + 0,2x \Rightarrow 0,1x < 20 \Rightarrow x < 200$, es decir, hasta 200 minutos sale más rentable la compañía B.

b) Con 200 minutos de llamadas a móvil, la factura será de 100 € en ambas compañías.

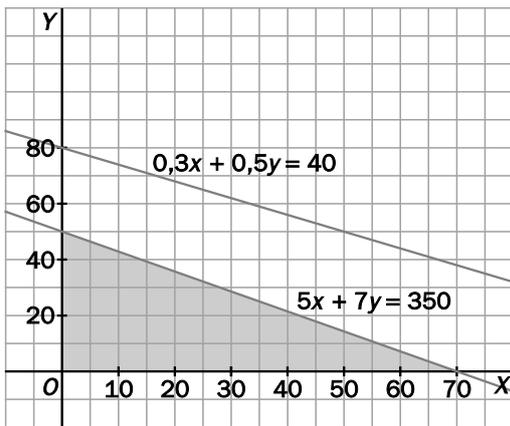
4.55. Dos comerciantes de informática disponen de 35 000 euros para comprar ordenadores y de 40 metros cúbicos de espacio para almacenarlos. Dos proveedores les venden aparatos de 500 y 700 euros, y que ocupan 0,3 y 0,5 metros cúbicos, respectivamente.

¿Cuántos ordenadores, como máximo, pueden comprar para optimizar el espacio y ajustarlo a su presupuesto?

Si llamamos x al número de ordenadores de 500 € e y al número de ordenadores de 700 €, obtenemos el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 500x + 700y \leq 35000 \\ 0,3x + 0,5y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Resolviendo gráficamente este sistema obtenemos:



Dentro de este recinto buscamos un punto de coordenadas enteras que haga máxima la cantidad total de ordenadores, es decir, $x + y$. Claramente, el máximo número de ordenadores que se pueden comprar es 70 ordenadores de 500 € y 0 de 700 €, gastándose todo el presupuesto y ocupando 21 m³.

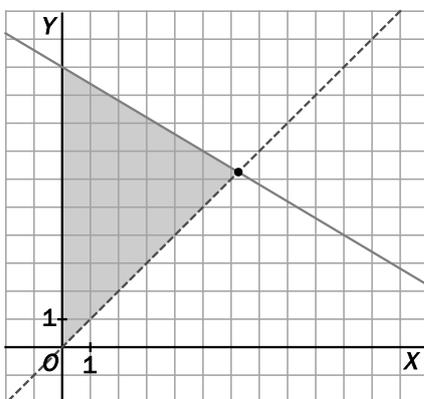
Observemos que podríamos haber resuelto este problema más rápidamente sin más que fijarnos en que los ordenadores más baratos son además los que ocupan menos espacio, por lo que nos interesa comprar el mayor número posible de estos ordenadores.

4.56. Juan desea comprar bolígrafos y cuadernos y dispone de 50 euros para ello. Si cada bolígrafo cuesta 3 euros y cada cuaderno 5 euros, y desea comprar más cuadernos que bolígrafos, ¿cómo puede hacerlo? Da la solución gráfica.

Si llamamos x al número de bolígrafos e y al número de cuadernos, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 50 \\ y > x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

cuya solución es:



Los puntos de coordenadas enteras dentro del recinto sombreado nos dan las distintas posibilidades que tiene Juan.

Si compra 7 cuadernos y 5 bolígrafos, obtendrá la mayor cantidad de objetos y gastará todo su dinero.

4.57. En una tienda de comercio justo venden cafés de Ecuador y de Colombia. El que procede de Ecuador cuesta 1,30 euros por paquete, y el de Colombia, 1,65.

Averigua el número de paquetes de cada tipo que puedo adquirir si llevo 25 euros en el bolsillo y quiero comprar el doble de paquetes de Colombia que de Ecuador.

Si llamamos x al número de paquetes de Ecuador, el número de paquetes de Colombia será $2x$ y tendremos que $1,30x + 1,65 \cdot 2x \leq 25 \Rightarrow 4,6x \leq 25 \Rightarrow x \leq 5,4$, es decir, podemos adquirir como máximo 5 paquetes de Ecuador y 10 de Colombia.

4.58. La tirada de una revista mensual tiene unos costes de edición de 30 000 euros, a los que hay que sumar 1,50 euros de gastos de distribución por cada revista publicada.

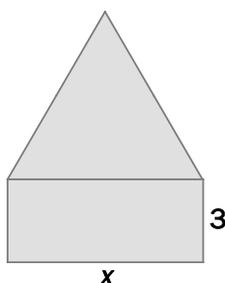
Si cada ejemplar se vende a 3,50 euros y se obtienen unos ingresos de 12 000 euros por publicidad, ¿cuántas revistas se deben vender para empezar a obtener beneficios?

Si llamamos x al número de revistas que se deben vender, tenemos $30\,000 + 1,5x < 12\,000 + 3,5x \Rightarrow 18\,000 < 2x \Rightarrow 9000 < x$, es decir, a partir de 9000 revistas se empiezan a obtener beneficios.

4.59. Si el área de un cuadrado es menor o igual que 64 centímetros cuadrados, calcula los posibles valores de su diagonal.

Si llamamos x al lado del cuadrado, tenemos $x^2 \leq 64 \Rightarrow 0 < x \leq 8$. Como la diagonal es $d = \sqrt{2}x$, obtenemos $0 < d \leq 8\sqrt{2}$.

4.60. Indica para qué valores de x el área del triángulo equilátero de la figura es mayor que la del rectángulo.



Aplicando el teorema de Pitágoras, la altura del triángulo es $h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$, por tanto, $A_{\text{Rectángulo}} = 3x$ y

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}. \text{ De este modo, } \frac{\sqrt{3}x^2}{4} > 3x, \text{ y, como } x > 0, \text{ tenemos } \frac{\sqrt{3}x}{4} > 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x > 4\sqrt{3}.$$

4.61. Para confeccionar dos tipos de pantalones se dispone de 40 unidades de algodón cardado y de 100 de algodón peinado. El contenido en cada tipo de algodón de los dos modelos de pantalón es distinto, como se indica en la siguiente tabla.

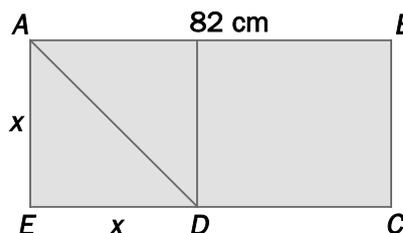
	Unidades de algodón cardado	Unidades de algodón peinado
Tipo I (extra)	1	5
Tipo II (medio)	3	3

- a) ¿Es posible confeccionar 15 pantalones del tipo I y 10 del tipo II?
 b) Haz un gráfico cartesiano y dibuja en él la zona que incluye las distintas posibilidades de confeccionar x pantalones de tipo I e y de tipo II.
- a) 15 pantalones de tipo I y 10 de tipo II precisan $15 + 3 \cdot 10 = 45$ unidades de algodón cardado. Como solo se cuenta con 40, no podrán ser confeccionados.
 b) Si se confeccionan x pantalones de tipo I e y pantalones de tipo II, se deberá verificar que:
 $x + 3y \leq 40$; $5x + 3y \leq 100$; $x \geq 0$; $y \geq 0$, cuya solución es:



Los puntos de coordenadas enteras que están dentro del recinto sombreado nos dan las distintas posibilidades de confección de pantalones. Se observa que el punto (15, 10) queda fuera de la solución.

4.62. Calcula para qué valores de x el área del triángulo ADE es menor que la del rectángulo de lados CD y BC .



El área del rectángulo es $A_1 = (82 - x) \cdot x = 82x - x^2$, y el área del triángulo es $A_2 = \frac{x^2}{2}$; por tanto, tenemos $\frac{x^2}{2} < 82x - x^2$, y como $x > 0$, obtenemos $\frac{x}{2} < 82 - x \Rightarrow 0 < x < \frac{164}{3}$.

AMPLIACIÓN

4.63. En un test hay que contestar a 25 preguntas. Se obtienen 5, 2 y 0 puntos por cada respuesta correcta, en blanco e incorrecta, respectivamente. María tiene 3 respuestas incorrectas y algunas en blanco. ¿Cuál es el mínimo de aciertos que debe tener para conseguir una nota de al menos 90 puntos?

- a) 15 b) 16 c) 17 d) 18

Llamando a al número de aciertos, tenemos que el número de respuestas en blanco es $b = 22 - a$.

Así pues, $5a + 2(22 - a) \geq 90 \Rightarrow 3a \geq 46 \Rightarrow a \geq \frac{46}{3}$, es decir, debe conseguir al menos 16 aciertos.

4.64. El conjunto de todas las soluciones de la inecuación $|x - 1| + |x + 2| < 5$ es:

- a) $(-3, 2)$ b) $(-1, 2)$ c) $(-2, 1)$ d) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Distinguiamos según sea $x < -2$, $-2 \leq x \leq 1$ y $x > 1$.

Si $x < -2$, podemos escribir $1 - x - x - 2 < 5$, es decir, $-3 < x$, por lo que, por ahora, son soluciones los números x pertenecientes al intervalo $(-3, -2)$.

Si $-2 \leq x \leq 1$, podemos escribir $1 - x + x + 2 < 5$, es decir, $3 < 5$; como se cumple siempre, todos los números x del intervalo $[-2, 1]$ son solución de la inecuación.

Finalmente, si $x > 1$, tenemos que $x - 1 + x + 2 < 5$, es decir, $x < 2$, por lo que serían solución de la inecuación los números x del intervalo $(1, 2)$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la inecuación es $(-3, -2) \cup [-2, 1] \cup (1, 2)$, es decir, el intervalo $(-3, 2)$.

4.65. ¿Cuál es la única afirmación correcta?

- a) Si $x < 1$, entonces $x^2 < x$
 b) Si $x^2 > x$, entonces $x < 0$
 c) Si $x^2 > x$, entonces $x > 0$
 d) Si $x < 0$, entonces $x^2 > x$

- a) Es incorrecta, tomando, por ejemplo, $x = -2$.
 b) Es incorrecta, tomando, por ejemplo, $x = 3$.
 c) Es incorrecta, tomando, por ejemplo, $x = -1$.
 d) Es correcta, pues al ser $x < 0$ y $x^2 > 0$, es $x^2 > x$.

4.66. Un número positivo x satisface la desigualdad $\sqrt{x} < 2x$ si y solo si:

- a) $x > \frac{1}{4}$ b) $x > 2$ c) $x < \frac{1}{4}$ d) $x < 4$

Si $x > 0$ y $\sqrt{x} < 2x$, tenemos que $x < 4x^2$, por lo que $x(1 - 4x) < 0$, y al ser $x > 0$, debe ser $1 - 4x < 0$, es decir, $x > \frac{1}{4}$.

4.67. Si $x^2 - 5x + 6 < 0$ y $P = x^2 + 5x + 6$, entonces:

- a) P puede tomar cualquier valor real.
 b) $20 < P < 30$ c) $0 < P < 20$ d) $P < 0$

Nos dicen que $(x - 2)(x - 3) < 0$, por lo que $2 < x < 3$. Al ser $P = x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, tenemos que $4 < x + 2 < 5$ y $5 < x + 3 < 6$, por lo que $20 < P < 30$.

NOTA: Hay un error en el enunciado del apartado b en el libro.

4.68. Los números x tales que $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} > 0$ son:

- a) $\{x / x > 2 \text{ o } x < -2 \text{ o } -1 < x < 1\}$ c) $\{x / x > 1 \text{ o } x < -2\}$
 b) $\{x / x > 2 \text{ o } x < -2\}$ d) $\{x / x \neq 1 \text{ y } x \neq -1\}$

Las raíces del numerador y del denominador son $-2, -1, 1$ y 2 , que determinan cinco intervalos en la recta. Eligiendo un valor para x en cada uno de ellos se obtiene como solución de la inecuación $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$, que se corresponde con el apartado a.

AUTOEVALUACIÓN

4.1. Indica cuál de los siguientes intervalos es la solución de la inecuación $-3x + 1 \leq -2$.

- a) $[1, +\infty)$ b) $[-1, +\infty)$ c) $(-\infty, 1]$ d) $(-\infty, -1]$

$-3x + 1 \leq -2 \Rightarrow -3x \leq -3 \Rightarrow x \geq 1$, es decir, la solución es la del apartado a.

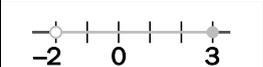
4.2. Considera estas inecuaciones.

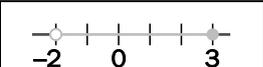
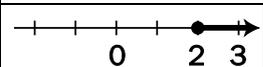
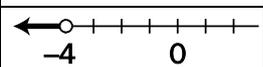
- i) $x - 7 \leq 5$ ii) $x + 1 \leq 7$ iii) $2 - x \geq -10$ iv) $3x - 6 \leq -30$

- a) Señala cuáles son equivalentes a $x - 2 \leq 10$.
 b) En los casos afirmativos, indica la transformación que permite pasar de una a otra inecuación.

Son equivalentes la inecuación i, sumando 5, y la inecuación iii, multiplicando por -1 .

4.3. Completa en tu cuaderno esta tabla, que presenta conjuntos de números de tres formas equivalentes: gráficamente, como desigualdad y como intervalo.

		
	$x \geq 2$	
		$(-\infty, -4)$

	$-2 < x \leq 3$	$(-2, 3]$
	$x \geq 2$	$[2, +\infty)$
	$x < -4$	$(-\infty, -4)$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Calcula y analiza > Una dieta matemática

El problema de la dieta, conocido por este nombre, fue uno de los primeros problemas sobre optimización, motivado por el deseo del ejército estadounidense de asegurar los requerimientos nutricionales básicos al menor coste. El problema fue analizado y resuelto por George Stigler usando la programación lineal en 1947.

Aunque la variedad de alimentos es muy grande y no todas las personas necesitan la misma cantidad de nutrientes, veamos un ejemplo simplificado de este problema.

Supón que las necesidades semanales mínimas de Sofía de proteínas, hidratos de carbono y grasas son las que aparecen en la tabla de la izquierda, y que en el mercado existen dos productos, *A* y *B*, cuyos contenidos y costes por kilogramo son los que aparecen en la tabla de la derecha.

Necesidades de Sofía			
	Proteínas	Hidratos	Grasas
Unidades	8	12	9

Producto	Proteínas	Hidratos	Grasas	Coste/kg
<i>A</i>	2	6	1	6 €
<i>B</i>	1	2	3	4 €

El objetivo es determinar cuál es la dieta más adecuada tanto económica como nutricionalmente.

- 4.1. Si Sofía consume semanalmente 5,5 kg del producto *A* y 1 kg del producto *B*, ¿es suficiente esa dieta para tener una alimentación completa? ¿Cuánto se gastaría semanalmente en esos dos productos?

$5,5 \cdot 2 + 1 = 12$ unidades de proteínas, son suficientes.

$5,5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 35$ unidades de hidratos, son suficientes.

$5,5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 8,5$ unidades de grasa, no son suficientes.

La dieta no es completa.

El gasto semanal sería de $5,5 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 37$ €.

- 4.2. Sofía decide aumentar el contenido en grasa de su alimentación, por lo que cambia su dieta a 2 kg del producto *A* y 4 kg del *B*. ¿Es ahora completa su alimentación? ¿Cuánto se gasta ahora semanalmente?

$2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 8$ unidades de proteínas, son suficientes.

$2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 20$ unidades de hidratos, son suficientes.

$2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$ unidades de grasa, son suficientes.

La dieta sí es completa.

El gasto semanal sería de $2 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 28$ €.

- 4.3. Si designamos por x la cantidad de producto A , en kg, y por y la cantidad de producto B , también en kg, escribe mediante inecuaciones las condiciones que tiene que cumplir la dieta para que sea suficiente.

$$x \geq 0; y \geq 0; 2x + y \geq 8; 6x + 2y \geq 12; x + 3y \geq 9$$

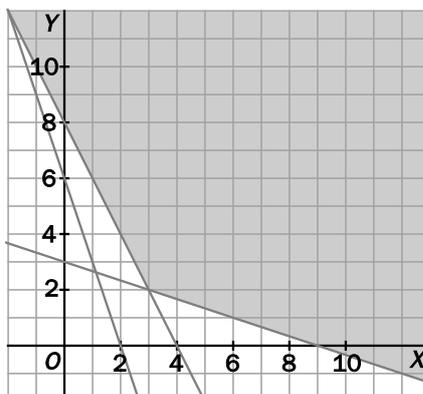
- 4.4. ¿Crees que es lo mismo una dieta suficiente que una dieta equilibrada? ¿Por qué?

No, porque una dieta suficiente puede tener exceso de alguno de los nutrientes y, por tanto, no ser equilibrada.

- 4.5. Escribe la expresión $P(x, y)$ que indica el gasto semanal en los productos A y B cuando se consumen x kg de A e y kg de B semanalmente.

$$P(x, y) = 6x + 4y$$

- 4.6. El conjunto de puntos del plano (x, y) que verifican todas las condiciones del problema (inecuaciones) se llama región factible. Representácala.



- 4.7. Determina cuál sería la dieta más económica satisfaciendo las cantidades mínimas de proteínas, hidratos de carbono y grasas de Sofía.

3 kg del producto A y 2 kg del B , que se corresponde con el punto $(3, 2)$ de la región factible. El gasto sería de 26 €.

- 4.8. Si el producto B baja de precio a 2,90 € el kg, ¿cuál será ahora la dieta más económica?

Ahora, $P(x, y) = 6x + 2,90y$

En el vértice $(9, 0)$ de la región factible, el valor de $P(x, y)$ es de 54 €. En el vértice $(3, 2)$ es de 23,80 € y en el $(0, 8)$ es de 23,20 €. La dieta más económica es 0 kg de A y 8 kg de B .

- 4.9. El día anterior a una prueba de maratón, ¿cuál de los tres nutrientes crees que es más importante consumir? ¿Cuál es más conveniente consumir después para recuperar las energías perdidas?

Para tener un buen depósito de glucosa es conveniente tomar muchos hidratos de carbono, y para recuperar son muy necesarias las proteínas.

- 4.10. En deportes de un gran esfuerzo continuado, como el ciclismo o las carreras largas, se habla de “la pájara” cuando un atleta se queda sin fuerzas y apenas puede continuar compitiendo. ¿A qué crees que es debido?

La “pájara” se produce en el organismo cuando hay una hipoglucemia. Esto significa que las reservas de glucosa (azúcar) que hay en la sangre disminuyen hasta el punto de que están a punto de agotarse. Esta situación es consecuencia directa de una alimentación inadecuada, en la que no se ha consumido la cantidad suficiente de hidratos de carbono antes del ejercicio. Estos nutrientes son el combustible que necesita el organismo para enfrentarse a una actividad física que requiere un importante esfuerzo.

- 4.11. Investiga cuál debe ser el contenido diario en proteínas, hidratos de carbono, grasas y calorías para un joven de 16 años que hace una vida normal. Puedes consultar la página www.e-sm.net/4esoz11.

Respuesta abierta.

Razona y deduce > Geografía con inecuaciones

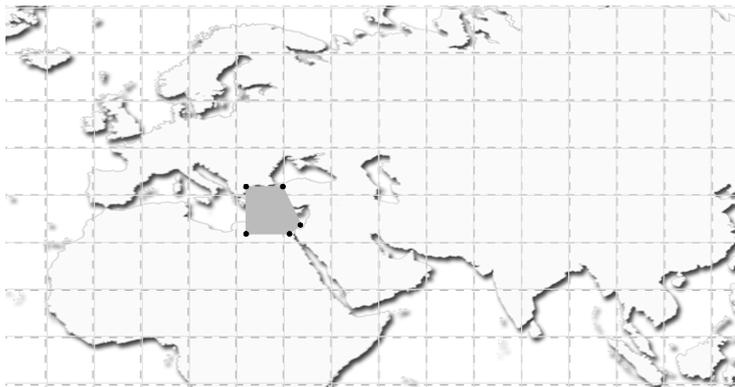
Para determinar un punto sobre la superficie terrestre se utilizan las coordenadas geográficas: latitud y longitud. Pero para delimitar una región o un país con un sistema de coordenadas geográficas, las fronteras corresponden a una curva de ecuaciones bastante complicadas. No obstante, se puede aproximar esa curva por una línea poligonal cuyos segmentos rectilíneos corresponden a ecuaciones de primer grado. La definición de una región puede hacerse mediante un sistema de inecuaciones geográficas.

En las actividades siguientes, toma un sistema de coordenadas geográficas con dos ejes: el meridiano de Greenwich (X) y el Ecuador (Y). Designa la latitud mediante la variable x y la longitud mediante la variable y . Así, un punto de la superficie terrestre de coordenadas $(+23^\circ, -15^\circ)$ corresponde a un lugar de latitud 23° N y una longitud de 15° O.

- 4.1. Hay un país que, salvo por una península, tiene forma pentagonal. Las inecuaciones que lo definen aproximadamente son $22^\circ \leq x \leq 32^\circ$; $25^\circ \leq y$; $x + 2y \leq 96^\circ$; $y - x \leq 12^\circ$.
- Determina las coordenadas geográficas de los vértices del pentágono que representa al citado país.
 - Efectúa una representación del pentágono para hacerte una idea de la forma del país. (¡Cuidado! La primera coordenada x es la latitud y se representa sobre el meridiano).
 - ¿De qué país se trata? ¿Cómo se llama la península que queda fuera de la forma pentagonal?
 - Hay dos fronteras de ese país prácticamente rectas. ¿Cuáles son? ¿A qué crees que es debido?
 - El trópico de Cáncer atraviesa el país. ¿Cuál es la ecuación de la línea que lo determina?

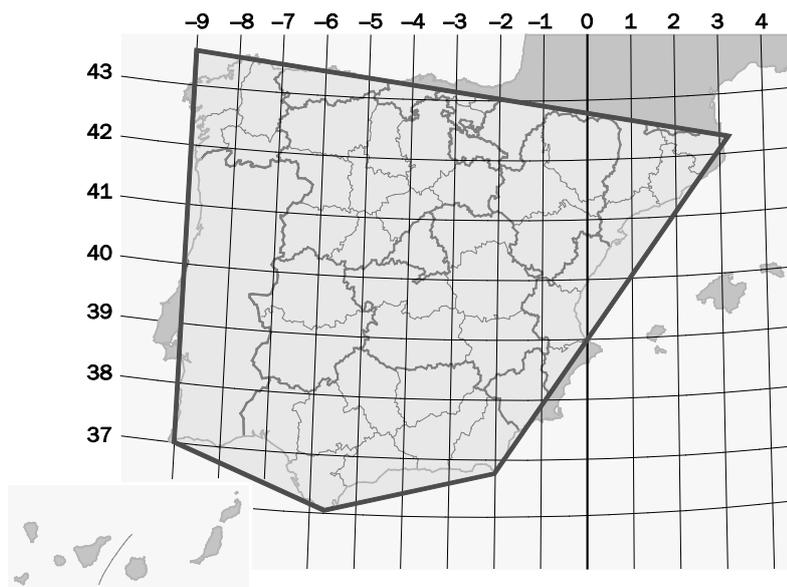
- a) $(22^\circ \text{ N}, 25^\circ \text{ E}), (32^\circ \text{ N}, 25^\circ \text{ E}), (32^\circ \text{ N}, 32^\circ \text{ E}), (24^\circ \text{ N}, 36^\circ \text{ E}), (22^\circ \text{ N}, 34^\circ \text{ E})$

- b)



- c) Se trata de Egipto. Es la península del Sinaí.
- d) Las fronteras del oeste y del sur. Fueron establecidas de forma convencional, sobre territorios desérticos con escasísima población y sin accidentes geográficos de relieve.
- e) Es un paralelo de latitud constante de $23^{\circ} 27' N$. La ecuación es $x = 23,5$.

4.2. La península ibérica también se asemeja a una forma pentagonal, como puedes observar en la imagen.



- a) Nombra los accidentes geográficos más significativos y próximos a los cinco vértices del pentágono y encuentra las coordenadas de dichos vértices.
 - b) Dos de las rectas que determinan los lados del pentágono tienen por ecuaciones $4x - y = 150$; $8x + y + 339 = 0$ en el sistema de coordenadas geográficas. Identifica cuáles son y halla la ecuación de las otras.
 - c) Determina mediante inequaciones la porción de la superficie terrestre representada por la península ibérica.
 - d) ¿Qué territorios españoles no están incluidos en la península? ¿Qué territorios no españoles sí están incluidos en ella?
 - e) ¿Qué ciudad se encuentra en el punto de la superficie terrestre de coordenadas $(34^{\circ} S, 18^{\circ} 36' E)$?
 - f) ¿Qué son las antípodas? Weber, un pueblo de Nueva Zelanda, se encuentra en las antípodas de Madrid. ¿Qué coordenadas geográficas tiene?
- a) $A(43^{\circ} 30' N, 9^{\circ} O)$. Costas de A Coruña. Cabos de Ortegal y Finisterre.
 $B(42^{\circ} 30' N, 3^{\circ} E)$. Cabo de Creus, en Girona.
 $C(37^{\circ} N, 2^{\circ} O)$. Cabo de Gata, en Almería.
 $D(36^{\circ} N, 5^{\circ} 30' E)$. Punta de Tarifa, en Cádiz.
 $E(37^{\circ} N, 9^{\circ} O)$. Cabo de San Vicente, en Portugal.

b) $4x - y = 150$ es la línea que une la punta de Tarifa con el cabo de Gata.

$8x + y + 339 = 0$ es la línea que une el cabo de Ortegá con el cabo de Creus.

$AE: y + 9 = 0$ es la línea que une el cabo de San Vicente con el cabo de Ortegá.

$BC: 10x - 11y = 392$ es la línea que une el cabo de Creus con el cabo de Gata.

$DE: 7x + 2y = 241$ es la línea que une el cabo de San Vicente con la punta de Tarifa.

$$c) \begin{cases} 4x - y \geq 150 \\ 8x + y + 339 \leq 0 \\ y + 9 \geq 0 \\ 10x - 11y \geq 392 \\ 7x + 2y \geq 241 \end{cases}$$

d) Las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla y los archipiélagos de las Canarias y de Baleares no están incluidos en la península ibérica.

Están en la península y no son territorio español Portugal, Andorra y Gibraltar.

e) Se encuentra al sur y al este de España, y corresponde a la Ciudad del Cabo, en Sudáfrica.

h) Las antípodas de un punto de la superficie terrestre es otro punto diametralmente opuesto.

Madrid tiene coordenadas ($40^\circ 24' N$, $3^\circ 41' O$), y Weber, ($40^\circ 24' S$, $3^\circ 41' E$).

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Juan Jesús Donaire, Vanesa Fernández, Pedro Lomas, Juan Alberto Torresano, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano**

Edición: **Arturo García, Eva Béjar, José Miguel Gómez**

Revisión contenidos: **Miguel Nieto**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Jurado y Rivas, Estudio “Haciendo el León”, Félix Anaya, Juan Francisco Cobos, José Santos**

Fotografía: **CARTESIA**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Gestión de las direcciones electrónicas:

Debido a la naturaleza dinámica de internet, Ediciones SM no puede responsabilizarse de los cambios o las modificaciones en las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que remite este libro.

Con el objeto de garantizar la adecuación de las direcciones electrónicas de esta publicación, Ediciones SM emplea un sistema de gestión que redirige las URL que con fines educativos aparecen en la misma hacia diversas páginas web. Ediciones SM declina cualquier responsabilidad por los contenidos o la información que pudieran albergar, sin perjuicio de adoptar de forma inmediata las medidas necesarias para evitar el acceso desde las URL de esta publicación a dichas páginas web en cuanto tenga constancia de que pudieran alojar contenidos ilícitos o inapropiados. Para garantizar este sistema de control es recomendable que el profesorado compruebe con antelación las direcciones relacionadas y que comunique a la editorial cualquier incidencia a través del correo electrónico ediciones@grupo-sm.com.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra, a excepción de las páginas que incluyen la leyenda de “Página fotocopiable”.

© Ediciones SM

Impreso en España – *Printed in Spain*