

Vectores y Rectas

1.- a) Representa los puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, 0)$. **b)** Halla las coordenadas del vector \overline{AB} . **c)** Dibuja otro vector CD , equipolente a AB , con origen en $C(-2, 1)$; determina las coordenadas de su extremo D .

Sol: b) $\overline{AB} = (3, -3)$. c) $D(1, -2)$.

2.- Representa gráficamente los vectores $\vec{a} = (-1, -3)$, $\vec{b} = (3, 1)$ y $\vec{c} = (2, 1)$, halla y representa gráficamente el resultado de las operaciones: a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; c) $\vec{a} - 2\vec{c}$; d) $\vec{b} - \vec{c}$

Sol: a) $(2, -2)$. b) $(0, -3)$. c) $(-5, -1)$. d) $(1, 2)$.

3.- a) Halla el módulo de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} del ejercicio anterior. **b)** Halla el módulo de $\vec{a} + \vec{b}$. ¿Hay alguna relación entre $\|\vec{a} + \vec{b}\|$ y $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$? **c)** ¿Qué tendría que pasar para que $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$? **d)** ¿Puede ser $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 0$, ¿En qué casos?

Sol: a) $\|\vec{a}\| = \sqrt{10}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{10}$, $\|\vec{c}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{8}$. No hay relación.

c) Misma dirección y sentido. d) Si; cuando son opuestos.

4.- Halla la distancia entre los siguientes pares de puntos: a) $(3, 1)$ y $(5, 3)$; b) $(-1, -2)$ y $(-5, 3)$; c) $(-1, 2)$ y $(5, 2)$; d) $(3, -2)$ y $(3, 4)$

Sol: a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{41}$; c) 6; d) 6

5.- Halla el punto medio de los pares de puntos dados en el ejercicio anterior

Sol: a) $(4, 2)$; b) $(-3, 1/2)$; c) $(2, 2)$; d) $(3, 1)$

6.- Determina la distancia entre los puntos $A(-4, 4)$ y $B(2, -2)$, el punto medio del segmento AB y el punto simétrico de A con respecto a B .

Sol: a) $d_{AB} = 6\sqrt{2}$; b) $M(-1, 1)$; c) $S(8, -8)$

7.- Dado el triángulo de vértices $A(3, 3)$, $B(0, 0)$ y $C(0, 4)$, calcula el punto medio del lado AB , y la longitud de la mediana de ese mismo lado (la mediana es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto).

Sol: $M_{AB} = (3/2, 3/2)$; longitud mediana = $\frac{\sqrt{34}}{2}$

8.- Demuestra que el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 2)$, $B(4, 6)$ y $C(7, 2)$ es isósceles.

Sol: $\|\overline{AB}\| = \|\overline{BC}\| = 5$

9.- Halla las coordenadas de un vector de la misma dirección que el vector $\vec{v}(3, 4)$ y cuyo módulo sea 1.

Sol: $\vec{r} = (3/5, 4/5)$

10.- El punto medio de $A(-1, 3)$ y (x, y) es $M(2, 1)$. ¿Cuáles son las coordenadas de B ?

Sol: $B(5, -1)$

11.- Halla un vector director de la recta r que pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(3, 5)$, así como la pendiente de dicha recta.

Sol: $\vec{r} = (0, 3)$; $m = \infty$

12.- Calcular las coordenadas del punto S , simétrico del punto $A(2, 6)$ con respecto $B(4, 5)$

Sol: $S(6, 4)$

13.- Los vértices de un triángulo son $A(-7, 3)$, $B(1, 1)$ y $C(-1, 5)$. Halla los puntos medios de sus lados. Comprueba que el triángulo que determinan tiene los lados paralelos al primero y que la medida de sus lados es la mitad.

Sol: $P(-3, 2)$, $Q(0, 3)$ y $R(-4, 4)$

14.- Si dos vectores tienen la misma longitud, ¿podemos asegurar que son iguales? Razona la respuesta.

15.- a) ¿Cuántos sentidos pueden existir en una dirección dada? **b)** ¿Es posible que dos vectores tengan la misma dirección, punto de aplicación e intensidad y que sean distintos? Razona la respuesta. Pon ejemplos.

16.- a) Si las direcciones de dos vectores convergen ¿podrán ser iguales los vectores?. **b)** Dos vectores son paralelos y tienen la misma intensidad. ¿Han de ser iguales? Razona las respuestas. Pon ejemplos.

17.- Determina si las siguientes parejas de vectores son Ortogonales o no:

a) $\vec{u}(3, -2)$ y $\vec{v}(6, 4)$ y b) $\vec{x} = (5, 1)$ e $\vec{y} = (3, -15)$

Sol: a) No, b) Si

18.- Las coordenadas del punto medio del segmento AB son $(3, 5)$. Si $B = (0, 1)$ hallar las coordenadas de A .

Sol: $A = (6, 9)$

19.- Hallar las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento de extremos $A(-5, 3)$ y $B(8, 6)$ en tres partes iguales.

Sol: $P = (-2/3, 4)$; $Q = (11/3, 5)$

20.- Escribir el vector $\vec{w} = \left(3, \frac{8}{3}\right)$ como combinación

lineal de los vectores $\vec{u} = \left(0, \frac{7}{3}\right)$ y $\vec{v} = (1, 4)$

Sol: $\vec{w} = -4\vec{u} + 3\vec{v}$

21.- Divide el segmento de extremos $A(-2, 3)$ y $B(0, -1)$ en tres partes iguales.

Sol: $P_1(-4/3, 5/3)$ y $P_2(-2/3, 1/3)$

22.- Calcula m para que los vectores $\vec{v}(7, -2)$ y $\vec{u}(m, 6)$ **a)** Sean paralelos. **b)** Tengan el mismo módulo. **c)** Sean perpendiculares.

Sol: a) $m = -21$; b) $m = \pm\sqrt{17}$; c) $m = 12/7$

23.- Si $A(3, 1)$, $B(5, 7)$ y $C(6, 4)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, ¿cuál es el cuarto vértice?

Sol: $D(4, -2)$

24.- Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.

Sol: Si, porque verifica Pitágoras.

25.- Dados los puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$, obtén un punto C sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que determinan sea equilátero. ¿Hay una solución única? Halla el área de los triángulos que resultan.

Sol: $C_1(0, 3\sqrt{3})$ y $C_2(0, -3\sqrt{3})$ $A = 9\sqrt{3} u^2$

26.- Determina el valor de a , sabiendo que la distancia entre $Q(-6, 2)$ y $P(a, 7)$ es 13. Escribe también las coordenadas y el módulo del vector \overline{PQ} .

Sol: $a_1 = 6$ y $a_2 = -18$ $\|\overline{PQ}\| = 13$

27.- Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

Sol: $m = \frac{-5}{4}$; $n = \frac{-15}{4}$

28.- Si $M(7, 4)$ y $N(-2, 1)$, hallar un punto P en el segmento MN tal que la distancia de M a P sea la mitad de la distancia de P a N .

Sol: $P(4, 3)$

Vectores y Recta

29.- Hallar las ecuaciones paramétricas, continua, general, punto-pendiente, explícita y segmentaria de la recta que pasa por el punto A(-2,3) y cuyo vector de director es $\vec{v} = (3,4)$. Hallar, si existe, un punto de la recta que su abscisa sea 6. Hallar también, si existe, un punto de la recta con ordenada -4.

30.- Hallar la ecuación general de la recta r que pasa:

- a) Por los puntos A(3,-1) y B(5,2).
- b) Por A(-2,4) y tiene de pendiente -2.
- c) Por el punto A(1,-3) y es paralela a la recta s: $x+3=0$.
- d) Por el punto A(-1,2) y es paralela al eje de abscisas.
- e) Por el punto A(4,2) y es perpendicular a $2x-3y+2=0$

31.- Hallar el valor de k para que:

- a) El punto (1,2) pertenezca a la recta $x - 3ky + 3 = 0$.
- b) El punto (k,1) pertenezca a la recta $x + 2y - 4 = 0$.
- c) Los puntos (1,2), (5,-6) y (7,k) estén alineados.
- d) La recta $2x+ky=1$ tenga de vector director $\vec{v} = (-5,3)$.
- e) La recta $kx - 3y + 2 = 0$ tenga dependiente $m = -3/2$.
- f) Las rectas r: $y=9kx+2$ y s: $4x-ky+1=0$ sean paralelas.
- g) Las rectas r: $2x+3ky+2=0$ y s: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{k}$ se corten en un punto.

Sol: a) 2/3; b) 2; c) -10; d) 10/3; e) -9/2; f) $\pm 2/3$; g) $k \neq \pm \sqrt{4/3}$

32.- Calcula la recta que pasa por el punto P(5,6) y corta a los ejes coordenados según segmentos iguales.

Sol: $x+y-11=0$

33.- Un paralelogramo tiene un vértice en el punto A(2,3) y dos de sus lados están sobre las rectas r: $x+y=20$ y s: $2x-3y=10$. Calcular las ecuaciones de los otros dos lados y las coordenadas de sus vértices.

Sol: B(11,9); C(14,6); D(5,0); AB: $2x-3y=-5$; AD: $x+y=5$

34.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por P(-5,0), y por el punto de corte de de las rectas r y s.

$$r: x - 2y + 3 = 0 \quad s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$$

Sol: $5x-17y+25=0$

35.- Hallar la ecuación de la recta paralela a la recta s: $y = \frac{-1}{2}x + 3$ y que corta al eje de ordenadas en $y = -3$.

Sol: $y = -1/2x - 3$

36.- Encontrar la ecuación de la recta r, que es paralela a la recta r': $2x-3y+15=0$ que pasa por el punto de intersección de las rectas s: $y=3x-1$ y t: $x+2y+3=0$.

Sol: $2x-3y-4=0$

37.- Halla el vector director y un punto de cada una de las siguientes rectas:

- a) $3x + y - 1 = 0$
- b) $-2x + 2y - 4 = 0$
- c) $x - 3y + 3 = 0$

Sol: a) $\vec{a}(-1,3); A(0,1)$. b) $\vec{b} = (-2,2); B(-2,0)$. c) $\vec{c} = (-3,1); C(0,1)$

38.- Representa gráficamente las siguientes rectas:

$$r: (x,y) = (1,0) + \lambda(1,1)$$

$$s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad t: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2}$$

39.- Halla la ecuación en forma explícita de cada una de las rectas dadas en el ejercicio 38. Determina la pendiente de cada una de ellas.

Sol: a) $y=x-1$; $m = 1$. b) $y=-2x+4$; $m = -2$. c) $y=-2x$; $m = -2$.

40.- Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1, 2) y su vector director es $\vec{r}(2,1)$.

Sol: Ec. Vectorial: $(x,y) = (1,2) + \lambda(2,1)$; Ecs. Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

Continua: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$; General: $x - 2y + 3 = 0$; Explícita: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

41.- Una recta pasa por el punto A(1,1) y su pendiente es $m=-2$. Halla sus ecuaciones implícita y explícita.

Sol: $y=-2x+3$; $2x+y-3=0$

42.- Averigua si la recta s definida por las ecuaciones paramétricas s: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ pasa por los puntos: a)

M(5,1) b) N(-1,3)

Sol: Por M sí, pero por N no.

43.- Halla la ecuación de cada una de las rectas que pasan por los vértices del triángulo de vértices A(0, 0) y B(5, 1) y C(1, 4).

Sol: A-B: $x-5y=0$; A-C: $4x-y=0$; B-C: $3x+4y-19=0$

44.- Halla la posición relativa de las siguientes rectas:

$$a) \begin{cases} r: x + 2y - 5 = 0 \\ s: 2x - y = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} r: 3x - y - 2 = 0 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

Representálas gráficamente para confirmar el resultado

Sol: a) Secantes en (1, 2). b) Paralelas.

45.- Dadas las rectas r: $ax+y-2=0$ y s: $x+2y+b=0$, halla los valores que deben tomar a y b para que: a) Sean paralelas. b) Sean coincidentes. c) Sean perpendiculares

Sol: a) $a=1/2$; b) $a=1/2$ y $b=-4$; c) $a=-2$

46.- Calcula las ecuaciones vectorial, paramétricas y explícita de las rectas bisectrices de los cuadrantes.

Sol: a) $x-y=0$; b) $x+y=0$

47.- Calcula la recta que pasa por el punto A (2,7) y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60° .

Sol: $y = \sqrt{3}x + (7 - 2\sqrt{3})$

48.- La recta que pasa por el punto A (2,3) y es paralela a la recta $3x+2y-12=0$, forma un triángulo con los ejes cartesianos. Calcula su área.

Sol: $A=12 \text{ u}^2$

49.- Calcula el valor de k para que las tres rectas r: $2x+5y-1=0$, s: $-x+2y+k=0$ y t: $4x+7y-5=0$ se corten en el mismo punto. Determina dicho punto.

Sol: $K=5$, P(3,-1)

50.- El segmento AB está sobre la recta $x-4y+10=0$. Su mediatriz es la recta $4xy-11=0$. ¿Cuáles serán las coordenadas de B si las de A son (-2, 2)?

Sol: B(6,4)

51.- Halla el circuncentro del triángulo de vértices A(-1, 1), B(3, 4), y C(3, 0).

Sol: C(11/8, 2)

52.- Comprueba que el triángulo de vértices A(4,4), B(-2,3) y C(3,-2) es isósceles y calcula su área.

Sol: $A=35/2$

53.- Por el punto A (1,6) trazamos la perpendicular a la recta r: $2x+y-2=0$. Halla un punto de esta recta perpendicular que equidiste de A y de la recta r.

Sol: (-1/5, 27/5)

54.- Halla el simétrico del punto P(3,4) respecto de la recta r: $2x-y+3=0$

Sol: P'(-1,6)

55.- Encuentra el simétrico del punto P(2,6) respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Sol: P'=(6,2)

56.- Calcula el área del triángulo de vértices A= (2,1), B=(6,2) y C=(3,5)

Sol: $15/2 \text{ u. de área}$