

DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

AMPLIACIÓN

- 5.74 Halla los valores que han de tomar m y n , para que el polinomio $P(x) = 2x^5 - x^4 + x^3 + mx^2 + nx - 2$ sea divisible por $x^2 - 1$.

$$\begin{array}{r}
 2x^5 - x^4 + x^3 + mx^2 + nx - 2 \quad | \quad x^2 - 1 \\
 \underline{-2x^5} \qquad \qquad \qquad + 2x^3 \\
 -x^4 + 3x^3 \\
 \underline{x^4} \qquad \qquad \qquad - \qquad \qquad \qquad x^2 \\
 3x^3 + (m-1)x^2 \\
 \underline{-3x^3} \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad 3x \\
 (m-1)x^2 + (3+n)x \\
 \underline{-(m-1)x^2} \qquad \qquad \qquad + (m-1) \\
 (3+n)x + (m-3)
 \end{array}$$

El resto tiene que ser 0, así que: $\begin{cases} 3+n=0 \\ m-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=-3 \\ m=3 \end{cases}$

- 5.75 La descomposición factorial de un polinomio $P(x)$ es $(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)^2$.

Escribe un polinomio de tercer grado que, siendo divisor de $P(x)$ sea, a la vez, divisible por $x+1$ y por $x-3$, siendo su coeficiente principal 3.

Buscamos $Q(x)$ tal que el resto de $P(x) : Q(x)$ sea 0. Y además, $Q(x)$ divisible por $x+1$ y $x-3$, es decir, que ambos sean factores de $Q(x)$. Le falta un factor más al polinomio para que sea de grado 3, y como tiene que dividir a $P(x)$, este tendrá que ser alguno de los factores de $P(x)$.

De modo que $Q(x) = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$ o $Q(x) = (x+1) \cdot (x-3)^2$.

- 5.76 Si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 - 4x + c$, ¿para qué valores de c se tienen estas factorizaciones?

a) $(x-a) \cdot (x-b)$

b) $(x-a)^2$

c) Irreducible

a) $(x-a) \cdot (x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$. Tenemos que:

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=c \\ a, b, c \in \mathbb{Z} \\ c > 0 \end{cases} \cdot \text{De donde hay dos posibles soluciones } (a, b) = (3, 1) \text{ ó } (2, 2).$$

Por tanto, $c = 3$ ó 4

b) $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$$\begin{cases} 2a=4 \\ a^2=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=4 \end{cases}$$

c) Para esto tiene que cumplirse que la ecuación de segundo grado no tenga raíces reales. Para ello, $b^2 - 4ac < 0$. En nuestro caso, $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0 \Rightarrow 16 - 4c < 0 \Rightarrow 4 < c$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.77 Tres amigos piensan una condición para un polinomio.

Escribe el polinomio de grado tres que cumpla las tres condiciones.



Vamos a ver cuáles son las tres raíces del polinomio $x^2 - 10x + 24$.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -10 & 24 \\ 4 & & 4 & -24 \\ \hline & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 10x + 24 = (x - 4)(x - 6)$$

La media de 6 y 4 es 5.

El polinomio buscado es $2(x - 4)(x - 6)(x - 5)$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

AUTOEVALUACIÓN

5.A1 Al dividir dos polinomios, hemos obtenido como cociente el polinomio

$$C(x) = 3x - 7, \text{ y como resto } R(x) = 19x - 10.$$

Si el divisor es $d(x) = x^2 + 2x - 1$, ¿cuál es el dividendo $D(x)$?

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$D(x) = (x^2 + 2x - 1)(3x - 7) + (19x - 10) = 3x^3 - x^2 + 2x - 3$$

5.A2 Calcula esta división de polinomios.

$$(x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3) : (x^2 + x + 1)$$

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ -x^4 - x^3 - x^2 \\ \hline -2x^3 + x^2 \\ + 2x^2 + 2x \\ \hline 3x^2 + 3x \\ -3x^2 - 3x - 3 \\ \hline -6 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 - 2x + 3 \quad R(x) = -6$$

5.A3 Completa estos esquemas aplicando la regla de Ruffini.

$$\text{a) } \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & 1 & \square \\ -1 & & -2 & \square & 2 \\ \hline & \square & \square & -2 & 1 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ \square & & -2 & 4 & \square & 16 \\ \hline & 1 & \square & 4 & -8 & 1 \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & & -2 & -3 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 1 \end{array}$$

5.A4 Utilizando la regla de Ruffini, realiza cada división, e indica el polinomio cociente y el resto.

a) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 2)$

$$\text{a) } \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & & -2 & 10 & -20 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -16 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 - 5x + 10 \quad R(x) = -16$$

b) $(x^4 - 5x^2 + 4) : (x - 2)$

$$\text{b) } \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & 4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$C(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad R(x) = 0$$

5.A5 Averigua qué valor tiene que tomar m , para que el resto obtenido al dividir $2x^3 + mx^2 + x - 6$ entre $x + 1$ sea -12 .

Usamos el teorema del resto para saberlo:

$$C(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 = -9 + m = -12. \text{ Entonces, } m = -3.$$

5.A6 Sin efectuar el producto, halla las raíces de estos polinomios.

a) $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

a) Las raíces son 1, -2, 3.

b) $x \cdot (x - 7) \cdot (x + 3)$

b) Las raíces son 0, 7, -3.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.A7 Utilizando el valor numérico, calcula las raíces de estos polinomios.

a) $x^2 - 3x - 28$

b) $x^3 + x^2 - 36x - 36$

a) Las posibles raíces son 1, -1, 2, -2, 4, -4, 7, -7, 14, -14, 28, -28.

Como $P(-4) = 0$ y $P(7) = 0$

Y el polinomio es de grado 2, no puede tener más de dos raíces, y son -4 y 7.

b) Las posibles raíces son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18.

Como $P(-1) = 0$, $P(6) = 0$ y $P(-6) = 0$

Y el polinomio es de grado 3, no puede tener más de tres raíces, y son -1, 6 y -6.

5.A8 Completa las siguientes divisiones entre monomios.

a) $15x^2yz^3 : \square = 3xz^2$

b) $\square : 8a^2b^2c^2 = bc^3$

a) $5xyz$

b) $8a^2b^3c^5$

5.A9 Factoriza al máximo estos polinomios.

a) $6x^3 + 12x^2 - 90x - 216$

b) $2x^4 + 3x^3 + x - 6$

a) $6x^3 + 12x^2 - 90x - 216 = 6(x + 3)^2(x - 4)$

b) $2x^4 + 3x^3 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 3)$

5.A10 Factoriza al máximo las siguientes expresiones.

a) $3a^2bc + 6abc^3 - 12a^3b^2c$

b) $9x^4 - 12x^2y^3 + 4y^6$

a) $3abc \cdot (a + 2c^2 - 4a^2b)$

b) $(3x^2 - 2y^3)^2$

5.A11 Factoriza al máximo estas expresiones.

a) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

b) $x^3 - 5x^2 - 8x - 12$

a) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x - 1)(x - 4)(x + 3)$

b) $x^3 - 5x^2 - 8x - 12 = (x - 6)(x - 1)(x + 2)$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

CUESTIONES PARA ACLARARSE

5.47 De cierto polinomio de grado tres, conocemos sus tres raíces enteras. ¿Existe un único polinomio de grado tres que tenga como raíces a esas tres? Justifica tu respuesta con algún ejemplo.

No, si multiplicamos por un entero el polinomio, tiene las mismas raíces.

Por ejemplo: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ tiene las mismas raíces que $2(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

5.48 Explica si son ciertas o falsas estas afirmaciones.

a) Un polinomio con coeficientes enteros tiene, al menos, una raíz entera.

b) Todo divisor del término independiente de un polinomio es una raíz de dicho polinomio.

c) Un polinomio de grado n tiene $n + 1$ raíces.

Justifica tus respuestas con ejemplos.

a) Falso, el polinomio $x^2 + 1$ tiene todos sus coeficientes enteros y ninguna raíz entera.

b) Falso, el 1 es divisor del término independiente de $x^2 + 1$, pero no es raíz del polinomio.

c) Falso, el polinomio $x^2 - 1$ tiene 2 raíces, 1 y -1 , que es el grado del polinomio, y no puede tener más porque estaría en contradicción con el teorema fundamental del álgebra.

5.49 ¿Qué verifica siempre el resto que resulta de dividir un polinomio por un binomio del tipo $x - a$? Justifica tu respuesta y pon algún ejemplo para explicarlo.

El resto va a ser un número entero, ya que su grado tiene que ser menor que el del divisor, y además, por el teorema del resto va a ser el valor del polinomio dividendo en a .

$x^2 + 1$, si lo dividimos por $x - 1$, podemos comprobar usando Ruffini que tiene resto 2, que es un número entero, y además $1^2 + 1 = 2$.

5.50 Encuentra un polinomio $P(x)$ de grado dos que verifique las tres condiciones siguientes.

• $x - 5$ sea factor suyo.

• $P(3) = 0$.

• Su coeficiente principal sea 4.

La segunda condición nos indica que $x - 3$ es factor del polinomio también. Como un polinomio de grado 2 solo puede tener 2 raíces a lo sumo, pues $(x - 5)(x - 3)$ tiene grado 2 y cumple las dos primeras condiciones. El coeficiente principal de este producto es 1, así que si multiplicamos por 4 tendremos el polinomio que buscábamos. $P(x) = 4(x - 5)(x - 3)$.

5.51 ¿Qué le ha de ocurrir a un polinomio de grado tres para que tenga una sola raíz entera? Explícalo con un ejemplo.

Que uno de sus factores sea un polinomio de grado 2 que no tenga raíces enteras. Por ejemplo, el polinomio de grado 3 podría ser el resultante de $x(x^2 + 1)$.

5.52 ¿Cuál es la relación existente entre los grados del dividendo, divisor, cociente y resto de una división entera de polinomios?

$$\text{Grado } (R(x)) < \text{Grado } (d(x))$$

$$\text{Grado } (D(x)) = \text{Grado } (d(x)) + \text{Grado } (C(x))$$

5.53 ¿Existe algún número n para el cual el polinomio $x^n + 1$ se anule para algún valor real de x ?

Si n es impar, se anula para $x = -1$.

5.54 ¿Qué condición debe verificar n para que el polinomio $x^n - a^n$ sea divisible por el binomio $x + a$?

Tiene que ser n par, para que así $(-a)^n = a^n$ y $x^n - a^n = 0$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

División y regla de Ruffini

5.26 Realiza estas divisiones.

a) $(12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2) : (2xy)$

b) $(15x^4 - 3x^3 + 9x^2) : (3x^2)$

c) $(5a^3b^2 - 10ab^2 + 15a^3b^4) : (5ab^2)$

a) $(12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2) : (2xy) = \frac{12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2}{2xy} = \frac{12}{2} \frac{x^2}{x} \frac{y}{y} z - \frac{6}{2} \frac{x}{x} \frac{y^3}{y} + \frac{8}{2} \frac{x}{x} \frac{y}{y} z^2 = 6xz - 3y^2 + 4z^2$

b) $(15x^4 - 3x^3 + 9x^2) : (3x^2) = 5x^2 - x + 3$

c) $(5a^3b^2 - 10ab^2 + 15a^3b^4) : (5ab^2) = a^2 - 2 + 3a^2b^2$

5.27 Efectúa cada división indicando el polinomio cociente y el polinomio resto.

a) $x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x^2 + x) : (x^2 + x + 1)$

b) $2x^4 + 2x^2 + 3) : (x^2 + x - 1)$

c) $(x^6 - x^3 + x - 1) : (x^3 - x + 2)$

a) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ $R(x) = -5x - 2$

b) $C(x) = 2x^2 - 2x + 6$ $R(x) = -8x + 9$

c) $C(x) = x^3 + x - 3$ $R(x) = x^2 - 4x + 5$

5.28 De una división entera, conocemos que el dividendo es $D(x) = x^4 - x^3 + 3x + 3$, el cociente es $C(x) = x^2 - x^3 + 5$, y el resto es $R(x) = -4x - 2$ ¿Cuál es el divisor?

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) \Rightarrow \frac{D(x) - R(x)}{C(x)} = d(x)$$

En nuestro caso: $\frac{(x^4 - x^3 + 3x + 3) - (-4x - 2)}{x^2 - 3x + 5} = \frac{x^4 - x^3 + 7x + 5}{x^2 - 3x + 5}$

Haciendo los cálculos tenemos que $d(x) = x^2 + 2x + 1$.

5.29 Sabiendo que el polinomio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + k$ es divisible por el polinomio $x^2 + 2x + 4$, calcula cuál ha de ser el valor de k .

Si hacemos la división de polinomios $P(x) : (x^2 + 2x + 4)$, tenemos que el resto es $R(x) = k - 12$. Para que sea divisible, el resto tiene que ser 0, así tenemos que $k - 12 = 0$, de donde $k = 12$.

5.30 El polinomio $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 2$ es múltiplo del polinomio $Q(x) = x^3 - 2x + a$. Averigua los posibles valores de a .

Como son múltiplos, tenemos que $R(x) = 0$. Así que $P(x) = C(x) \cdot Q(x)$.

$C(x)$ será de la forma $bx^2 + cx + d$; $x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 2 = (bx^2 + cx + d)(x^3 - 2x + a)$

De donde tomamos los términos del producto que tienen a : $(ab - 2c)x^2$, $(ac - 2d)x$, ad , y los igualamos a los coeficientes que corresponden: $ab - 2c = 4$

$$ac - 2d = -4$$

$$ad = 2$$

Como a y d son enteros, por la última ecuación tenemos que a es 1, -1, 2 ó -2. Sabemos que $b = 1$, porque es el coeficiente en el producto de x^5 . Así que haciendo pruebas para los diferentes valores de a tendremos que $a = 2$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.31 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, e indica el cociente y el resto de cada división.

a) $(x^3 + 2x^2 + x + 3) : (x - 1)$ b) $(x^5 - 3x^2 + x - 1) : (x + 2)$ c) $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ & & 1 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 7 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$R(x) = 7$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ & & -2 & 4 & -8 & 22 & -46 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -11 & 23 & -47 \end{array}$$

$$C(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 11x + 23$$

$$R(x) = -47$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 + 1$$

$$R(x) = 0$$

5.32 Mediante la regla de Ruffini, calcula el valor que debe tomar m para que se cumpla esta relación.

$$3x^3 + 2x + m = (3x^2 - 3x + 5) \cdot (x + 1) + 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 0 & 2 & m \\ & & -3 & 3 & -5 \\ \hline & 3 & -3 & 5 & m - 5 \end{array}$$

Como el resto es 1, $m - 5 = 1 \Rightarrow m = 6$.

5.33 Completa las siguientes divisiones de polinomios en las que se ha aplicado la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} \square & 1 & -2 & \square & \square \\ & & \square & \square & \square \\ \hline & \square & -1 & -1 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & \square & \square & \square & \square & \square \\ & & -2 & \square & \square & \square \\ \hline & \square & -4 & -2 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -2 & -10 & 4 & 16 \\ & & -2 & 8 & 4 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & -2 & 8 & 0 \end{array}$$

Teoremas y raíces de un polinomio

5.34 Halla el resto de estas divisiones sin llegar a realizarlas.

a) $(x^3 - x + 2) : (x + 2)$

b) $(x^{101} + 1) : (x + 1)$

c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x - 1)$

Usamos para ello el teorema del resto:

a) $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 2 = -8 + 2 + 2 = -4$

b) $P(-1) = (-1)^{101} + 1 = -1 + 1 = 0$

c) $P(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 5$

5.35 Comprueba si las siguientes afirmaciones son correctas.

a) $P(x) = x^2 + x - 2$ tiene por factor a $x + 2$.

b) $Q(x) = x^6 + x^3 - 2$ tiene por factor a $x - 1$.

c) $R(x) = x^3 - 1$ tiene por factor a $x + 1$.

Vamos a usar el teorema del factor:

a) $P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$. Sí es factor.

b) $Q(1) = 1^6 + 1^3 - 2 = 0$. Sí es factor.

c) $R(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$. No es factor.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.36 Halla los restantes factores de estos polinomios.

a) $P(x) = x^2 + x - 6$, que tiene por factor a $x - 2$.

b) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$, que tiene por factor a $x + 1$.

c) $R(x) = x^3 - 7x - 6$, que tiene por factor a $x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} a) & & 1 & & 1 & & -6 \\ & 2 & & & 2 & & 6 \\ \hline & & 1 & & 3 & & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)$$

b) Si hacemos la división, vemos que nos queda de cociente $x^2 + x + 3$, que podemos comprobar que no tiene raíces enteras.

$$\text{Así, } Q(x) = (x + 1)(x^2 + x + 3).$$

c) Aplicando sucesivamente la regla de Ruffini tenemos que $R(x) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$.

5.37 Aplicando el teorema del resto, halla en cada caso el valor que debe tomar k .

a) $P(x) = x^4 + x^3 + kx^2 + 10x + 3$ es divisible por $x + 3$.

b) $Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + kx + 6$ tiene por resto 20 al dividirlo por $x - 1$.

c) $R(x) = 2x^2 + kx - 15$ es divisible por $x + 5$.

a) $P(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 + k(-3)^2 + 10(-3) + 3 = 27 + 9k = 0 \Rightarrow k = -3$

b) $Q(1) = 2 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + 6 = k + 15 = 20 \Rightarrow k = 5$

c) $R(-5) = 2(-5)^2 + k(-5) - 15 = 35 - 5k = 0 \Rightarrow k = 7$

5.38 Escribe las raíces enteras de estos polinomios.

a) $P(x) = x^2 - 2x - 15$

b) $Q(x) = x^3 - 6x^2 - 6x - 7$

c) $R(x) = x^4 + x^2 + 6$

a) Las posibles raíces son 1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15.

$$P(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 15 = 0$$

$$P(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 - 15 = 0$$

Como es de grado 2, como máximo tiene 2 raíces. De modo que las raíces de $P(x)$ son -3 y 5.

b) Las posibles raíces son 1, -1, 7, -7.

$$Q(7) = 7^3 - 6 \cdot 7^2 - 6 \cdot 7 - 7 = 0$$

Si comprobamos con las otras posibles raíces, vemos que para ninguna más $Q(x)$ es 0. De modo que $Q(x)$ sólo tiene una raíz entera que es 7.

c) Las posibles raíces son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Si comprobamos todos los valores, vemos que nunca se anula $R(x)$. No haría falta comprobarlo si nos fijamos en que los exponentes de x son siempre pares, con lo cual su resultado nunca va a ser negativo; $x^4 + x^2 \geq 0$, y sumando 6 resulta que $R(x)$ siempre es mayor que 0. De modo que $R(x)$ no tiene ninguna raíz real.

5.39 Encuentra un polinomio $P(x)$ de grado tres, cuyas raíces enteras sean -2, 1 y 4, y que, además, verifique que $P(-1) = 20$.

$$P'(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4) \text{ tiene grado 3.}$$

$$P'(-1) = 10; 2 \cdot P'(-1) = 20$$

$$P(x) = 2P'(x) \text{ sigue teniendo grado 3 y verifica que } P(-1) = 20.$$

$$\text{Así que el polinomio que buscamos es } P(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 4).$$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.40 Calcula a sabiendo que el resto obtenido al dividir $x^2 + ax - 2$ por $x - 1$ es 6 unidades inferior al obtenido al dividir $x^2 - ax - 2$ por $x + 5$.

Usamos el teorema del resto: $P(1) = 1^2 + a \cdot 1 - 2 = a - 1$

$$Q(-5) = (-5)^2 - a(-5) - 2 = 5a + 23$$

Con la condición del enunciado tenemos que $a - 1 = 5a + 23 - 6 \Rightarrow a = -\frac{9}{2}$.

Factorización de polinomios

5.41 Factoriza estas expresiones sacando factor común.

a) $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2$

b) $8x^4 - 4x^3 + 6x^2$

c) $2x^3 \cdot (x - 2) + 4x^4 \cdot (x - 2)^2$

a) $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2 = 2xy(xz - yz + xy)$

b) $8x^4 - 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(4x^2 - 2x + 3)$

c) $2x^3(x - 2) + 4x^4(x - 2)^2 = 2x^3(x - 2)[1 + 2x(x - 2)]$

5.42 Factoriza al máximo los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

c) $R(x) = x^3 - 19x + 30$

b) $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

d) $S(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{a)} & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ & 1 & & 1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & -4 & -0 \\ & 2 & & 2 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 & \\ & -1 & & -1 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & & \end{array}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 1)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{c)} & 1 & 0 & -19 & 30 \\ & 2 & & 2 & -30 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & 0 \\ & -5 & & -5 & 15 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$x^3 - 19x + 30 = (x - 2)(x + 5)(x - 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & 1 & 4 & -7 & -10 \\ & -1 & & -1 & -3 & 10 \\ \hline & 1 & 3 & -10 & 0 & \\ & 2 & & 2 & 10 & \\ \hline & 1 & 5 & 0 & & \end{array}$$

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x + 1)(x - 2)(x + 5) \quad x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 3x) = x(x - 1)(x - 3)(x + 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{d)} & 1 & -1 & -9 & 9 & 0 \\ & 1 & & 1 & 0 & -9 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & & 3 & 9 & 0 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 0 & & \end{array}$$

5.43 Indica cuáles son las raíces de estos polinomios, sin desarrollar dichas expresiones.

a) $P(x) = 3(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 2)$

b) $Q(x) = 2x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

c) $R(x) = 4x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

¿Qué grado tiene cada uno de estos polinomios?

Puesto que los polinomios están factorizados, las raíces serán cada uno de los valores que anulan los factores.

a) Raíces: 2, -3, -2. Grado 3.

b) Raíces: 0, 2, -3. Grado 3.

c) Raíces: 0, 1, 2. Grado 4.

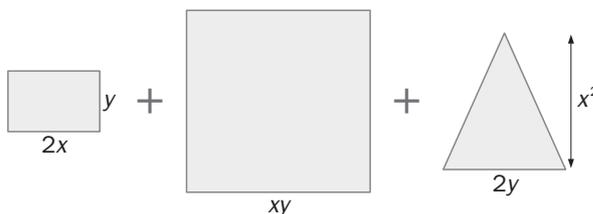
5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

- 5.44 Halla un polinomio de grado tres, cuyos factores sean $x + 1$, $x - 1$ y $x + 4$, y cuyo término independiente sea -8 .

$P'(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 4)$, tiene grado 3 y el término independiente es el que resulta de multiplicar los tres términos independientes de cada uno de los factores: $1 \cdot (-1) \cdot 4 = -4$.

$P(x) = 2P'(x)$ tiene grado 3 y término independiente -8 .

- 5.45 Descompón en factores la siguiente expresión, hallando previamente el área de las figuras geométricas.



$$2xy + (xy)^2 + \frac{2x^2y}{2} = 2xy + x^2y^2 + x^2y = xy(2 + xy + x)$$

- 5.46 Factoriza al máximo estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$

c) $R(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

b) $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

d) $S(x) = x^4 - x^3 - 13x - 15$

Usamos el teorema de Ruffini y llegamos a las siguientes factorizaciones:

a) $P(x) = (x - 3)(x^2 + x + 3)$

c) $R(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$

b) $Q(x) = (x - 3)(x + 1)(2x - 2)$

d) $S(x) = (x + 1)(x - 3)(x^2 + x + 5)$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Divide los siguientes monomios.

a) $54x^5 : 9x^2$

b) $63x^{12} : 3x^5$

c) $35xy^6 : 7y^3$

d) $121x^2y^6 : 11yx^4$

a) $54x^5 : 9x^2 = \frac{54x^5}{9x^2} = \frac{54}{9} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 6x^3$

c) $35xy^6 : 7y^3 = \frac{35xy^6}{7y^3} = \frac{35}{7} \cdot x \cdot \frac{y^6}{y^3} = 5xy^3$

b) $63x^{12} : 3x^5 = 21x^7$ d) $121x^2y^6 : 11yx^4 = 11x^{-2}y^5$

5.2 Efectúa estas divisiones.

a) $(60x^3 - 75x^2) : 15x$

b) $(121x^2 - 55x) : 11x^2$

a) $(60x^3 - 75x^2) : 15x = \frac{60x^3 - 75x^2}{15x} = \frac{60x^3}{15x} - \frac{75x^2}{15x} = 4x^2 - 5x$

b) $(121x^2 - 55x) : 11x^2 = \frac{121x^2 - 55x}{11x^2} = \frac{121x^2}{11x^2} - \frac{55x}{11x^2} = 11 - \frac{5}{x}$

5.3 Completa estas divisiones de monomios.

a) $36xy^3 : \square = 2x$

b) $\square : 7x^3 = 11x^2$

c) $15x^2yz : \square = 3yz$

d) $\square : ab = a^2b^3$

a) $18y^3$

b) $77x^5$

c) $5x^2$

d) a^3b^4

5.4 Realiza las siguientes divisiones.

a) $(26x^3z - 52x^5z) : 13x^2$

b) $(26x^3z + 39x^4z) : 13x^4z$

a) $(26x^3z - 52x^5z) : 13x^2 = \frac{26x^3z - 52x^5z}{13x^2} = \frac{26x^3z}{13x^2} - \frac{52x^5z}{13x^2} = 2xz - 4x^3z$

b) $(26x^3z + 39x^4z) : 13x^4z = \frac{26x^3z + 39x^4z}{13x^4z} = \frac{26x^3z}{13x^4z} + \frac{39x^4z}{13x^4z} = \frac{2}{x} + 3$

5.5 Realiza estas divisiones.

a) $(x^3 + 6x^2 + 6x + 5) : (x^2 + x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2)$

c) $(x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5x + 6) : (x^2 + 3x - 2)$

d) $(x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7) : (x^4 - 3x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2 - x} \\ 5x^2 + 5x \\ \underline{-5x^2 - 5x - 5} \\ 0 \end{array}$$

b) $C(x) = x^2 - 4x + 5$

$R(x) = x - 4$

c) $C(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 58$

$R(x) = 203x - 110$

d) $C(x) = x^2 + 3$

$R(x) = 3x^3 - 3x^2 + 14x - 10$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.6 Efectúa la siguiente división de polinomios.

$$(6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 8x - 3) : (2x^2 + 3x - 1)$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 8x - 3 \quad | \quad 2x^2 + 3x - 1 \\ \underline{-6x^4 - 9x^3 + 3x^2} \quad | \quad 3x^2 - x + 1 \\ -2x^3 - x^2 \\ \underline{2x^3 + 3x^2 - x} \\ 2x^2 + 7x \\ \underline{-2x^2 - 3x + 1} \\ 4x - 2 \end{array}$$

5.7 Escribe el dividendo de una división de polinomios en la que el divisor es $x^2 + 1$, el cociente $x^3 - 3$, y el resto $2x$.

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 3) + 2x = x^5 - 3x^2 + x^3 - 3 + 2x$$

5.8 Realiza estas divisiones aplicando la regla de Ruffini, y escribe el cociente y el resto de la división.

a) $(4x^3 - 8x^2 - 9x + 7) : (x - 3)$

c) $(5x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x + 1)$

b) $(2x^3 + 5x^2 - 4x + 2) : (x + 3)$

d) $(6x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 8x - 2) : (x - 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 4 & -8 & -9 & 7 \\ & & 12 & 12 & 9 \\ \hline & 4 & 4 & 3 & 16 \end{array}$$

$$C(x) = 4x^2 + 4x + 3$$

$$R(x) = 16$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 5 & -4 & 2 \\ & -6 & 3 & 3 & \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 5 \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$R(x) = 5$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -1 & 5 & -7 & 3 & -5 & 3 & -1 \\ & & -5 & 12 & -15 & 20 & -23 \\ \hline & 5 & -12 & 15 & -20 & 23 & -24 \end{array}$$

$$C(x) = 5x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 20x + 23 \quad R(x) = -24$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 6 & 9 & -10 & 8 & -2 \\ & & 12 & 42 & 64 & 144 \\ \hline & 6 & 21 & 32 & 72 & 142 \end{array}$$

$$C(x) = 6x^3 + 21x^2 + 32x + 72$$

$$R(x) = 142$$

5.9 Averigua el cociente y resto de estas divisiones mediante la regla de Ruffini.

a) $(2x^3 - x^2 + 5) : (x - 3)$

b) $(3x^5 + 3x^2 - 4) : (x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ & & 6 & 15 & 45 \\ \hline & 2 & 5 & 15 & 50 \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 + 5x + 15$$

$$R(x) = 50$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ & & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ \hline & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

$$C(x) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2$$

$$R(x) = -4$$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.10 Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 + 1) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 + x + 1$$

$$R(x) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$$C(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$R(x) = 2$$

5.11 Utiliza el teorema del resto para calcular el resto de estas divisiones.

a) $(x^{11} - 2x^2) : (x - 1)$

c) $(x^{12} - 81) : (x + 1)$

b) $(x^7 - 1) : (x - 1)$

d) $(-x^{14} + 101) : (x + 1)$

a) $R = P(1) = 1^{11} - 2 \cdot 1^2 = 1 - 2 = -1$

b) $R = P(1) = 1^7 - 1 = 1 - 1 = 0$

c) $R = P(-1) = (-1)^{12} - 81 = 1 - 81 = -80$

d) $R = P(-1) = -(-1)^{14} + 101 = -1 + 101 = 100$

5.12 La división de $P(x) = x^3 + 2x^2 + k$ por $x - 3$ da resto 0. ¿Cuánto vale k ?

Usando el teorema del resto, sabemos que $P(3) = R$. Así, $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 + k = 45 + k = 0$. De modo que $k = -45$.

5.13 Comprueba si $x + 1$ es un factor de estos polinomios.

a) $A(x) = 3x^4 - 2x^2 + x$

c) $C(x) = x^7 + 1$

b) $B(x) = -2x^2 + 3x$

d) $D(x) = 2x^3 - 3x + 1$

Aplicamos el teorema del factor, así que será factor si el valor numérico del polinomio en -1 es 0.

a) $A(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) = 3 - 2 - 1 = 0$. Sí es factor de $A(x)$.

b) $B(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -2 - 3 = -5$. No es factor de $B(x)$.

c) $C(-1) = (-1)^7 + 1 = -1 + 1 = 0$. Sí es factor de $C(x)$.

d) $D(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$. No es factor de $D(x)$.

5.14 Encuentra entre los siguientes factores los del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

a) $x - 1$

c) $x + 1$

b) $x - 3$

d) $x + 2$

a) $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 0$

b) $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -10$

c) $P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 8 = 10$

d) $P(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = 0$

Usando el teorema del factor, afirmamos que los factores de $P(x)$ son $x - 1$ y $x + 2$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.15 Comprueba si 5 y -5 son raíces del siguiente polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 5$.

$$P(5) = 5^3 - 5 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + 5 = -20; P(-5) = (-5)^3 - 5 \cdot (-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 5 = -220$$

Ni 5 ni -5 son raíces de $P(x)$.

5.16 Entre estos valores, indica el posible número de raíces del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^5 - 8x + 15$.

a) 5 c) 6

b) 3 d) 1

Al ser un polinomio de grado 5, no puede tener 6 raíces, las otras opciones pueden ser válidas.

5.17 Completa la tabla indicando el grado de cada polinomio y si cada uno de los números indicados es raíz del polinomio.

	Grado	-1	-2	-5
$x + 1$	1	Sí	No	No
$x^2 + x - 2$	2	No	Sí	No
$x^3 - 5x^2 - 5x + 5$	3	No	No	No

5.18 Halla las raíces enteras de estos polinomios.

a) $x^2 - 7x + 10$

b) $x^2 - 8x + 15$

a) Las posibles raíces son: 1, -1 , 2, -2 , 5, -5 , 10, -10 .

$$P(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$$

$$P(-1) = (-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 10 = 18$$

$$P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$$

$$P(-2) = (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 10 = 28$$

$$P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de dos raíces en un polinomio de grado 2, así las raíces del polinomio son 2 y 5.

b) Las posibles raíces son: 1, -1 , 3, -3 , 5, -5 , 15, -15 .

$$P(1) = 1^2 - 8 \cdot 1 + 15 = 8$$

$$P(-1) = (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 15 = 24$$

$$P(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 0$$

$$P(-3) = (-3)^2 - 8 \cdot (-3) + 15 = 48$$

$$P(5) = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de dos raíces en un polinomio de grado 2, así las raíces del polinomio son 3 y 5.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.19 Determina las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

b) $x^3 - x^2 - 25x + 25$

a) Las posibles raíces son 1, -1, 3, -3, 9, -9.

$$P(1) = 1^3 + 1^2 - 9 \cdot 1 - 9 = -16$$

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 9 = 0$$

$$P(3) = 3^3 + 3^2 - 9 \cdot 3 - 9 = 0$$

$$P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 9 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de tres raíces en un polinomio de grado 3, así las raíces del polinomio son -1, 3 y -3.

b) Las posibles raíces son 1, -1, 5, -5, 25, -25.

$$P(1) = 1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$$

$$P(5) = 5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$$

$$P(-5) = (-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de tres raíces en un polinomio de grado 3, así las raíces del polinomio son -1, 5 y -5.

5.20 Averigua las raíces de estos polinomios.

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

b) $x^2 + x + 1$

a) Las posibles raíces del polinomio son 1, -1, 2, -2, 4, -4.

$$P(1) = 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - 4 = 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 4 = -10$$

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 8$$

$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 4 = -24$$

$$P(4) = 4^3 - 4^2 + 4 \cdot 4 - 4 = 60$$

$$P(-4) = (-4)^3 - (-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 4 = -100$$

Este polinomio sólo tiene una raíz real, que es 1.

b) Las posibles raíces del polinomio son 1, -1.

$$P(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$$

Este polinomio no tiene raíces enteras.

5.21 Se sabe que los siguientes polinomios tienen alguna raíz entera. Indica una de ellas.

a) $x^2 - 12x + 35$

b) $x^3 - 8$

a) Por ejemplo, 5; $5^2 - 12 \cdot 5 + 35 = 0$

b) Por ejemplo, 2; $2^3 - 8 = 0$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.22 Descompón en factores estos polinomios.

a) $x^2 - 6x + 8$

b) $x^2 - 14x + 33$

c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a)

4	1	-6	8
		4	-8
	1	-2	0

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$$

b)

11	1	-14	33
		11	-33
	1	-3	0

$$x^2 - 14x + 33 = (x - 11)(x - 3)$$

c)

-2	1	-2	-5	6
		-2	8	-6
	1	-4	3	0
1		1	-3	
	1	-3	0	

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

d)

4	1	-4	-4	16
		4	0	-16
	1	0	-4	0
2		2	4	
	1	2	0	

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = (x - 4)(x - 2)(x + 2)$$

5.23 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^2$

b) $x^3 - 1$

a) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$

b) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$

d) $x^4 - 6x^3 - 7x^2 = x^2(x^2 - 6x - 7) = x^2(x + 1)(x - 7)$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

d) $x^4 - 6x^3 - 7x^2$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

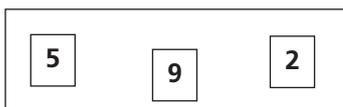
5.78 El puzle

Se cuenta con las expresiones polinómicas:

$$(x + 3) (\square x^2 + \square x - 3)$$

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - \square$$

Y las tarjetas:



Coloca las tarjetas en los huecos de las expresiones de forma que se obtenga una identidad algebraica.

El valor numérico de la primera expresión en $x = 0$ es -9 . Por tanto, la tarjeta correspondiente a la segunda expresión es la que tiene marcada el número nueve.

Realizando la división $\frac{2x^3 + 11x^2 + 12x - 9}{x + 3}$ se obtiene el cociente exacto $2x^2 + 5x - 3$ por lo que las tarjetas marcadas con el dos y el cinco, en este orden, son las correspondientes a la primera expresión.

5.79 Aproximaciones sucesivas

Se considera el polinomio $P(x) = x^3 + x - 3$.

- Calcula $P(0)$ y $P(2)$, y comprueba que tienen diferente signo.
- El punto medio del intervalo $[0, 2]$ es 1. Calcula $P(1)$ y comprueba si tiene signo positivo o negativo.
- Elige entre los intervalos $[0, 1]$ y $[1, 2]$ aquel en el que el polinomio cambia de signo en sus extremos y calcula su punto medio y el valor del polinomio en él.
- Realiza la operación anterior cinco veces y da un valor aproximado de una raíz del polinomio P .

$[a, b]$	Punto medio c	$P(a)$ $P(c)$ $P(b)$	Nuevo segmento
$[0, 2]$	1	$P(0) = -3$ $P(1) = -1$ $P(2) = 7$	$[1, 2]$
$[1, 2]$	1,5	$P(1) = -1$ $P(1,5) = 1,875$ $P(2) = 7$	$[1; 1,5]$
$[1; 1,5]$	1,25	$P(1) = -1$ $P(1,25) = 0,203$ $P(1,5) = 1,875$	$[1; 1,25]$
$[1; 1,25]$	1,125	$P(1) = -1$ $P(1,125) = -0,451$ $P(1,25) = 0,203$	$[1,125; 1,25]$
$[1,125; 1,25]$	1,1875	$P(1,125) = -0,451$ $P(1,1875) = -0,138$ $P(1,25) = 0,203$	$[1,1875; 1,25]$

El polinomio tendrá una raíz comprendida entre 1,1875 y 1,25.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

PROBLEMAS PARA APLICAR

- 5.55 Un alumno de 3.º de ESO está empeñado en transformar los polinomios $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ y $x^2 - 6x + 9$ en potencias del polinomio $x - 3$. Ayúdale en su tarea.

Aplicamos la regla de Ruffini al polinomio de grado 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -9 & 27 & -27 \\ & & 3 & -18 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

Tenemos entonces que $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)(x^2 - 6x + 9)$.

Este segundo factor resulta ser el polinomio de grado 2 del enunciado, que es un cuadrado perfecto, el cuadrado de una diferencia, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Y entonces $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$.

- 5.56 Al salir de un examen de polinomios quiero contrastar con mis compañeros los resultados que hemos obtenido, pero se han emborronado dos coeficientes y no puedo distinguirlos.

$$2x^3 - 5x^2 + \square x + \square$$

Tan solo recuerdo que el polinomio era divisible por $x^2 - 4$.

¿Cuál es el polinomio que había escrito en el examen?

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + ax + b \quad | \quad x^2 - 4 \\ -2x^3 \quad \quad + 8x \quad \quad \quad | \quad 2x - 5 \\ \hline -5x^2 + (8 + a)x \\ \quad \quad \quad 5x^2 \quad \quad \quad - 20 \\ \hline \quad \quad \quad (8 + a)x + (b - 20) \end{array}$$

Por ser divisible $(8 + a)x + (b - 20) = 0$.

$$\text{Esto quiere decir que: } \begin{cases} 8 + a = 0 \\ b - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 20 \end{cases}$$

El polinomio es $2x^3 - 5x^2 - 8x + 20$.

- 5.57 Un alumno ha confundido los números en una división de Ruffini y le ha quedado el siguiente resultado.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 5 & 4 & -2 & -3 \\ & & -7 & 10 & 2 \\ \hline & -10 & -2 & 7 & 14 \end{array}$$

Ayuda al alumno a reconstruir la división, sabiendo que el divisor y el resto están bien, pero que los demás números están desordenados.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -2 & 5 & -3 & 4 \\ & & 2 & -7 & 10 \\ \hline & -2 & 7 & -10 & 14 \end{array}$$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.58 Una división enlazada de Ruffini, es decir, una división en la que cada cociente obtenido lo utilizamos como nuevo dividendo, nos ha quedado de la siguiente forma.

1	□	□	□	□	□
1	□	□	□	□	0
1	□	□	□	0	
1	□	□	0		
1	1	0			

Averigua todos los coeficientes que faltan si todos los 1 pertenecen a los polinomios divisores y todos los ceros a los restos.

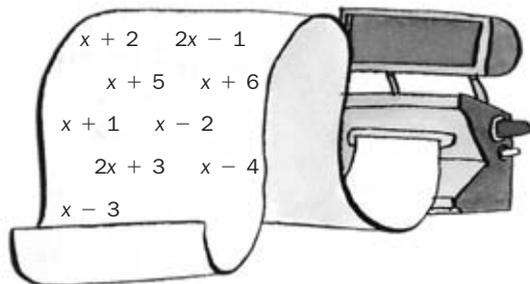
Vamos haciendo los cálculos desde la parte de abajo.

1	1	-4	6	-4	1
1	1	-3	3	-1	0
1	1	-2	1	0	
1	1	-1	0		
1	1	0			

5.59 El departamento de Matemáticas de mi centro ha instalado un factorizador de polinomios.

Se trata de una máquina que proporciona un polinomio al azar y, continuación, imprime una tarjeta con los posibles factores del polinomio. Si la persona que juega encuentra los factores del polinomio en la tarjeta obtiene un premio.

Jugamos una vez y aparece en la pantalla el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$, y nos imprime una tarjeta como esta.



¿Qué combinación me proporciona el premio?

Vamos probando con cada uno de los posibles factores y tenemos que:

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 12 = -16 + 12 + 16 - 12 = 0$$

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 12 = 16 + 12 - 16 - 12 = 0$$

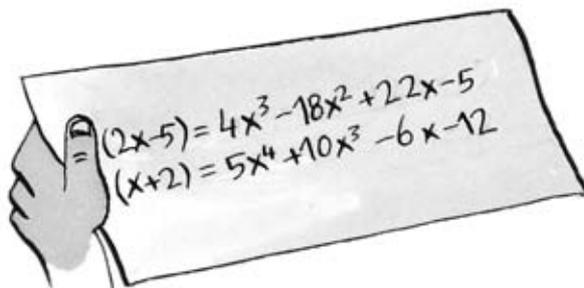
$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 \quad | \quad \underline{2x + 3} \\
 \underline{-2x^3 - 3x^2} \\
 0 \quad 0 \quad \quad \quad \underline{x^2 - 4} \\
 \quad \quad \underline{+ 8x + 12} \\
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Por el teorema del factor podemos decir entonces que $(x + 2)$ y $(x - 2)$ son factores. También $2x + 3$ lo es porque al dividir el polinomio por este binomio nos da resto 0.

La combinación correcta es $x - 2$, $x + 2$, $2x + 3$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

- 5.60 Mi hermano mayor estudia Matemáticas, y practica polinomios conmigo tapándome polinomios y jugando a que adivine lo que oculta.



Encuentra los polinomios que ha tapado.

$$P(x)(2x - 5) = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 5.$$

El grado de $P(x)$ tiene que ser 2, para que ambos lados de la igualdad tengan el mismo grado. $P(x)$ será de la forma $ax^2 + bx + c$.

$(ax^2 + bx + c)(2x - 5) = 2ax^3 - 5ax^2 + 2bx^2 - 5bx + 2cx - 5c = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 5$, igualando coeficientes y resolviendo el sistema obtenemos las incógnitas, y así, $P(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

$$Q(x)(x + 2) = 5x^4 + 10x^3 - 6x - 12.$$

El grado de $Q(x)$ tiene que ser 3, para que ambos lados de la igualdad tengan el mismo grado. $Q(x)$ será de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(x + 2) = ax^4 + (2a + b)x^3 + (2b + c)x^2 + (2c + d)x + 2d = 5x^4 + 10x^3 - 6x - 12$, igualando coeficientes y resolviendo el sistema obtenemos las incógnitas.

Tenemos entonces que $Q(x) = 5x^3 - 6$.

La parte del ejercicio referente a $Q(x)$ también podríamos resolverla dividiendo por Ruffini.

- 5.61 Explica cómo variando simplemente el valor de k el polinomio $2x^3 - 4x + 3k$ cumple las siguientes condiciones.

- Tiene como factor $x + 3$.
- Al dividirlo por $x - 2$, tiene como resto 5.
- Es divisible por $x + 1$.
- Tiene como raíz 4.
- Es igual al polinomio $Q(x) = 2(x^3 - 2x + 7)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{a)} & & 2 & 0 & -4 & 3k \\ -3 & & & -6 & 18 & -42 \\ \hline & & 2 & -6 & 14 & 3k - 42 \end{array}$$

Aplicando el teorema del factor, $3k - 42 = 0 \Rightarrow k = 14$.

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & & 2 & 0 & -4 & 3k \\ -2 & & & 4 & 8 & 8 \\ \hline & & 2 & 4 & 4 & 3k + 8 \end{array}$$

Aplicando el teorema del resto, $3k + 8 = 5 \Rightarrow k = -1$.

c) Dividiendo por Ruffini y aplicando el teorema del factor tenemos que $k = -\frac{2}{3}$.

d) Dividiendo por Ruffini y aplicando el teorema del factor tenemos que $k = -\frac{112}{3}$.

e) En este caso, $3k = 14 \Rightarrow k = \frac{14}{3}$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

REFUERZO

División y regla de Ruffini

5.62 Realiza las siguientes divisiones de un polinomio por un monomio.

a) $(9xy + 3xy^2 - 3x^2y) : (3xy)$

b) $(5x^2 - 3x^4 + 2x) : x^2$

$$a) (9xy + 3xy^2 - 3x^2y) : (3xy) = \frac{9xy + 3xy^2 - 3x^2y}{3xy} = \frac{9}{3} \frac{x}{x} \frac{y}{y} + \frac{3}{3} \frac{x}{x} \frac{y^2}{y} - \frac{3}{3} \frac{x^2}{x} \frac{y}{y} = 3 + y - x$$

$$b) (5x^2 - 3x^4 + 2x) : x^2 = 5 - 3x^2 + 2\frac{1}{x}$$

5.63 Efectúa estas divisiones de polinomios.

a) $(3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1) : (x^2 - x + 2)$

b) $(2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 3) : (x^2 + 1)$

$$a) \begin{array}{r|rrrrr} & 3x^4 & +5x^3 & -3x^2 & +6x & -1 \\ & -3x^4 & +3x^3 & -6x^2 & & \\ \hline & & 8x^3 & -9x^2 & & \\ & & -8x^3 & +8x^2 & -16x & \\ \hline & & & x^2 & -10x & \\ & & & x^2 & -x & +2 \\ \hline & & & & -11x & +1 \end{array}$$

b) $(2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 3) : (x^2 + 1)$; $C(x) = 2x^2 - 4x + 1$ y $R(x) = -2x + 2$

5.64 Mediante la regla de Ruffini, realiza las siguientes divisiones, e indica el cociente y el resto.

a) $(x^4 + x^2 - 1) : (x - 2)$

b) $(x^7 - 2x^4 + x - 1) : (x - 1)$

$$a) \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & & 2 & 4 & 10 & 20 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 10 & 19 \end{array}$$

$$C(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10; R(x) = 19$$

$$b) \begin{array}{r|rrrrrrrr} & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$C(x) = x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x; R(x) = -1$$

5.65 Utilizando la regla de Ruffini, calcula el número que se ha de sumar al polinomio para que sea divisible por $x + 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -1 & -9 & k \\ & & -3 & 12 & -9 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & k-9 \end{array}$$

Como tiene que ser divisible, $k - 9 = 0$, así que $k = 9$.

Teoremas y raíces de un polinomio

5.66 Comprueba si son exactas las siguientes divisiones sin llegar a realizarlas.

a) $(x^4 - 81) : (x - 3)$

b) $(x^{1001} - 1) : (x + 1)$

Aplicamos el teorema del resto, y si el resto es 0, es porque la división es exacta.

a) $P(3) = 3^4 - 81 = 0$. Sí es exacta la división.

b) $P(-1) = (-1)^{1001} - 1 = -1 - 1 \neq 0$. No es división exacta.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.67 Determina, sin realizar ninguna operación, si 3 es una raíz de este polinomio.

$$P(x) = 3x^7 + 5x^5 + 3x^4 + 2x^2 + x - 7$$

No, 3 no es raíz de $P(x)$, ya que no es divisor del término independiente, -7 .

5.68 Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $A(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $B(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

a) Las posibles raíces de $A(x)$ son 1, -1 , 2, -2 , 4, -4 .

$$A(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^2 + 4 = 0$$

$$A(-1) = (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^2 + 4 = 0$$

$$A(2) = 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 4 = 0$$

$$A(-2) = (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^2 + 4 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado 4 no puede tener más de cuatro raíces. De modo que las raíces del polinomio son 1, -1 , 2 y -2 .

b) Las posibles raíces de $B(x)$ son 1, -1 , 3, -3 .

$$B(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$$

$$B(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3 = 0$$

$$B(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado 3 no puede tener más de tres raíces. De modo que las raíces del polinomio son 1, -1 y 3.

5.69 Sin efectuar el producto de factores, identifica el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$ con alguna de las siguientes factorizaciones.

a) $(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

b) $(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

c) $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$

Las respuestas a y b no pueden ser porque dan como raíz -2 , que no es un divisor del término independiente de $P(x)$. Además, en c, cada uno de esos factores cumple que $P(a) = 0$.

Factorización de polinomios

5.70 Factoriza cada uno de los siguientes polinomios sacando factor común.

a) $5x^7 - 6x^6 + 3x^5$

b) $5xy + 3x^2 - 2xy^2$

a) $x^5(5x^2 - 6x + 3)$

b) $x(5y + 3x - 2y^2)$

5.71 Factoriza al máximo estos polinomios.

a) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

b) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

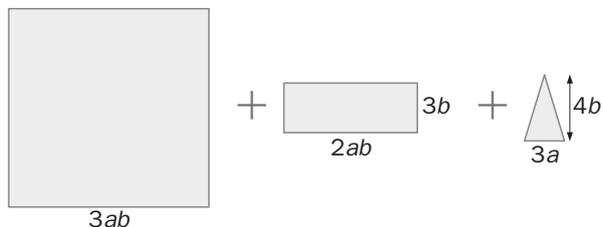
Con las posibles raíces del polinomio por Ruffini obtengo la factorización.

a) La factorización es $(x - 2)(x + 1)(x + 4)$.

c) La factorización es $(x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.72 Factoriza la siguiente expresión; determina previamente el área de las figuras geométricas.



Las tres áreas son $9a^2b^2$, $6ab^2$, $6ab$. Factorizamos la suma de las tres y nos queda: $3ab(3ab + 2b + 2)$

5.73 Halla un polinomio de grado cuatro cuyos factores sean $x^2 + x + 1$, $x + 1$ y $x - 3$; y cuyo término independiente sea -9 .

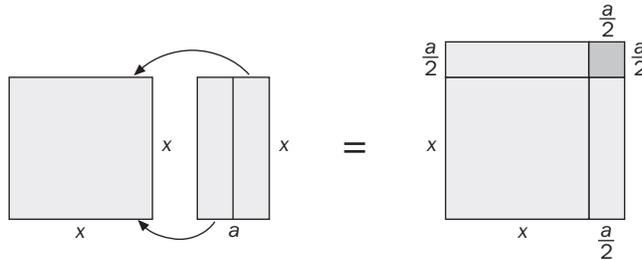
El producto de $x^2 + x + 1$, $x + 1$ y $x - 3$, $(x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 3)$, tiene grado 4, su término independiente sería -3 . Así que el polinomio buscado es $P(x) = 3(x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 3)$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.24 Expresa el polinomio $x^2 + ax$ como una diferencia de cuadrados.

Puede tratarse de dos figuras geométricas de área x^2 y ax .

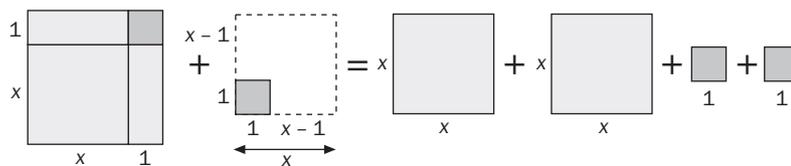


$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

5.25 Demuestra geoméricamente que es cierta la siguiente igualdad.

$$(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 2(x^2 + 1^2)$$

Tenemos un cuadrado de lado $x + 1$ y otro de lado $x - 1$.



Al final nos quedan dos cuadrados de lado x y dos de lado 1 : $2x^2 + 2 = 2(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1^2)$.