

1.- MEDIDA DE ÁNGULOS.

El **grado sexagesimal** ($^{\circ}$) es cada una de las 360 partes iguales en las que se divide la circunferencia (submúltiplos: el minuto y el segundo).

El **radián** (rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio (unidad en el SI).

Equivalencia entre grados y radianes: $360^{\circ} = 2\pi \text{ rad}$

1 Expresa en radianes los siguientes ángulos:

a) 30°

b) 60°

c) 330°

d) 200°

2 Expresa en grados los siguientes ángulos:

a) $\frac{7\pi}{3} \text{ rad}$

b) $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

c) 4 rad

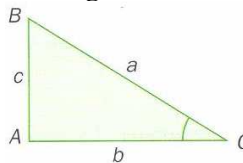
d) $4\pi \text{ rad}$

2.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Las razones trigonométricas son expresiones matemáticas que relacionan medidas de ángulos y de distancias. Se utilizan en muchas situaciones, como, por ejemplo, en el cálculo de alturas de montañas, anchuras de ríos, etc.

2.1.- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Sea el **triángulo rectángulo**:



El **seno** del ángulo agudo $\hat{C}$ es la razón entre la longitud del cateto opuesto al mismo y de la hipotenusa.

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

El **coseno** del ángulo agudo $\hat{C}$ es la razón entre la longitud del cateto contiguo y de la hipotenusa.

$$\text{cos } \hat{C} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

La **tangente** del ángulo agudo $\hat{C}$ es la razón entre la longitud del cateto opuesto y del contiguo.

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{c}{b}$$

Razones trigonométricas inversas		
Cosecante de $\hat{C}$ $\text{cosec } \hat{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\text{sen } \hat{C}}$	Secante de $\hat{C}$ $\text{sec } \hat{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\text{cos } \hat{C}}$	Cotangente de $\hat{C}$ $\text{cot g } \hat{C} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{c} = \frac{1}{\text{tg } \hat{C}}$

Ejemplos: - Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo: $\hat{A} = 90^{\circ}$, $b = 10 \text{ cm}$ y $c = 12 \text{ cm}$.

- Calcula la altura de un edificio si el ángulo de elevación de su punto más alto, observado desde un punto del suelo situado a 20 m de su base, es de 50° .

3 Calcula las razones trigonométricas de 45° .

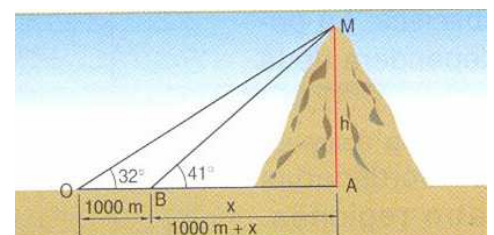
4 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos:

a) $\hat{A} = 90^{\circ}$, $b = 5 \text{ cm}$ y $c = 9 \text{ cm}$

b) $\hat{B} = 90^{\circ}$, $b = 15 \text{ cm}$ y $c = 12$

5 El ángulo de elevación del punto más alto de una antena, observado desde un punto del suelo situado a 50 m de su pie, es de 30° . Calcula la altura de la antena.

6 El ángulo de elevación del punto más alto de una montaña, observado desde un punto situado en tierra, es de 32° . Al aproximarse 1000 m en dirección a la montaña, el nuevo ángulo de elevación es de 41° . ¿Cuál es su altura si los dos puntos de observación están al nivel del mar?



2.2.- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Para representar ángulos comprendidos entre 0 y 360°, e incluso mayores de 360° o negativos, se utiliza la **circunferencia goniométrica**, es decir, la circunferencia de radio la unidad centrada en los ejes de coordenadas cartesianas.

Los **ángulos** se representan siempre desde el semieje positivo de abscisas y se consideran **positivos** si el giro se hace en el sentido contrario a las agujas del reloj y **negativos** en sentido contrario.

Utilizando esta representación, a todo ángulo se le puede asociar un ángulo positivo entre 0° y 360°, llamado **ángulo reducido** del primero.

Representando los ángulos en una circunferencia goniométrica, podemos determinar las razones trigonométricas en función de las coordenadas cartesianas de un punto.

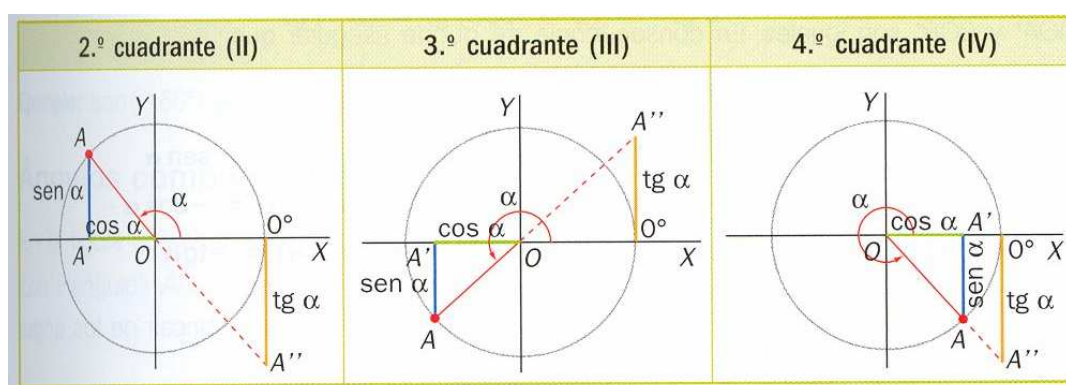
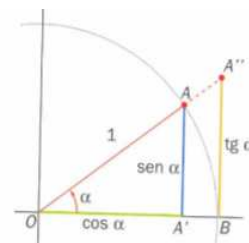
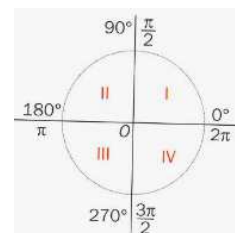
En la figura hemos representado un ángulo del primer cuadrante α .

El **sen α** coincide con el valor de la **ordenada** del punto A, $\text{sen } \alpha = AA'$.

El **cos α** coincide con el valor de la **abscisa** del punto A, $\text{cos } \alpha = OA'$.

La **tg α** , por tanto coincide con el cociente entre la ordenada y la abscisa.

Por tanto, en el resto de los cuadrantes quedaría así (siendo $\text{sen } \alpha = y$ y $\text{cos } \alpha = x$):



El signo de las razones trigonométricas dependerá del cuadrante al que pertenece el ángulo.

Cuadrante	α	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tg } \alpha$
I	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+	+	+
II	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	-	-
III	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	-	-	+
IV	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	-	+	-

Podemos afirmar que:

$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$	$-1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$
$-\infty < \text{tg } \alpha < +\infty$	

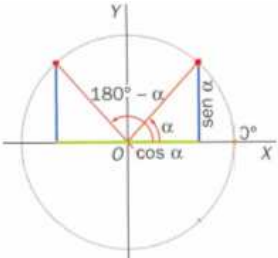
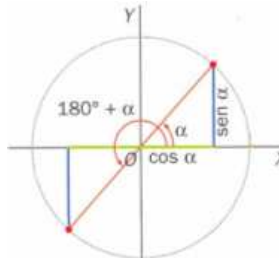
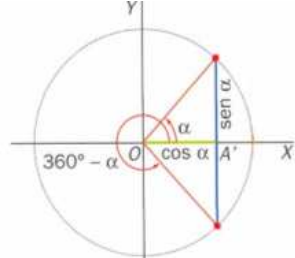
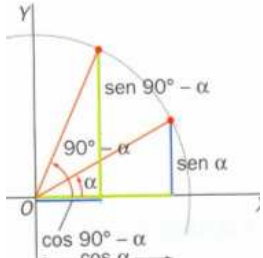
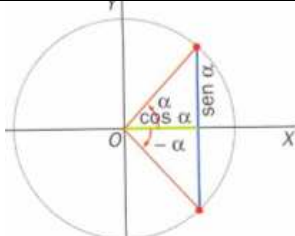
Razones trigonométricas de algunos ángulos

α	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tg } \alpha$	$\text{cotg } \alpha$	$\text{sec } \alpha$	$\text{cosec } \alpha$
$0^\circ = 0 \text{ rad}$	0	1	0	No existe	1	No existe
$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	1	0	No existe	0	No existe	1
$180^\circ = \pi \text{ rad}$	0	-1	0	No existe	-1	No existe
$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$	-1	0	No existe	0	No existe	-1

7 Indica el signo de las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- a) 120° b) 256° c) 315° d) -70° e) 800° f) 55° g) 1200° h) -460°

2.3.- Reducción de ángulos al 1^{er} cuadrante.

Ángulos suplementarios	Ángulos que se diferencian en 180°	Ángulos que suman 360°	Ángulos complementarios
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ 	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ 	$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ 	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$ 
Ángulos negativos		Ángulos mayores que 360°	
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ 		Hacemos la división de β entre 360°. Calculamos las razones trigonométricas del resto de la división.	$\begin{array}{r} 870 \quad \overline{) 360^\circ} \\ \underline{720} \\ 150 \end{array}$ $\sin 870^\circ = \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

Ejemplo: Calcula las razones trigonométricas de: a) 120° b) 225° c) 330° d) 1590° e) -30°

8 Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

- a) $\operatorname{cotg} 135^\circ$ b) $\operatorname{tg} 300^\circ$ c) $\cos 150^\circ$ d) $\sin 2285^\circ$ e) $\sec 240^\circ$
f) $\sin(-60^\circ)$ g) $\operatorname{cosec} \frac{11\pi}{6}$ h) $\sin \frac{3\pi}{4}$ i) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$ j) $\cos \frac{5\pi}{6}$

3.- RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, teorema fundamental de la trigonometría $\left[\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{c}{a} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \right]$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \left[\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \alpha \right]$
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \left[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right]$

Ejemplo: Calcula $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$, sabiendo que $\sin \alpha = -0,5$ y que $\alpha \in \text{IV}$.

9 Calcula las razones trigonométricas de α , si:

- a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \text{IV}$ b) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha \in \text{I}$ c) $\sec \alpha = -5$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
d) $\operatorname{tg} \alpha = 0,49$, $\alpha \in \text{II}$ e) $\operatorname{cotg} \alpha = 2$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

4.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE ÁNGULOS, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL MITAD.

Razones trigonométricas de:		
Suma de ángulos	Ángulo doble	Ángulo mitad
▪ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ ▪ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ ▪ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$	▪ $\sin(2\alpha) = 2\sin \alpha \cos \alpha$ ▪ $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ▪ $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	▪ $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ ▪ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ ▪ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$

10 Calcula las razones trigonométricas de: a) 15° b) 105° c) 75° d) $\frac{\pi}{12}$ rad e) $\frac{\pi}{8}$

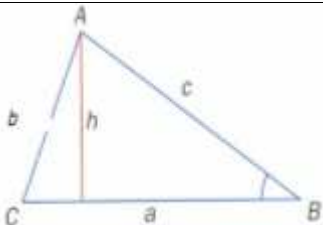
11 Demuestra que $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$.

12 Si α es un ángulo del 2º cuadrante y $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$.

13 Sabiendo que $\sin 14^\circ = 0,24$ y $\sin 42^\circ = 0,67$, calcula: $\sin 28^\circ$, $\cos 56^\circ$ y $\operatorname{tg} 21^\circ$.

5.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

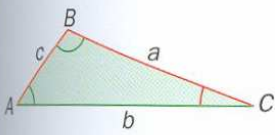
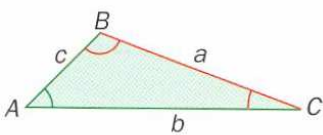
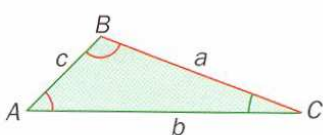
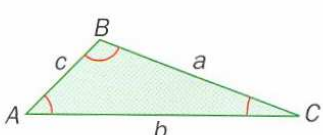
Para poder determinar los seis elementos (lados y ángulos) de un triángulo es suficiente con conocer tres de ellos, siendo al menos uno de ellos un lado. Resolver un triángulo es calcular los tres elementos desconocidos. Para ello utilizaremos las razones trigonométricas, las relaciones entre ángulos y lados y los siguientes teoremas.

Teorema del seno		Teorema del coseno
En cualquier triángulo ABC, se verifica que: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$		En cualquier triángulo ABC, se verifica que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Ejemplos: - Halla el lado a de un triángulo ABC sabiendo que $b = 12$ cm, $\hat{A} = 60^\circ$ y $\hat{B} = 40^\circ$.

- Calcula la amplitud del ángulo $\hat{B}$ de un triángulo ABC sabiendo que $a = 14$ cm, $b = 12$ cm y $c = 10$ cm.

En la tabla siguiente se recogen los diferentes casos que pueden darse en función de los datos que se conocen.

I. Dos ángulos y un lado	II. Dos lados y el ángulo comprendido	III. Dos lados y un ángulo no comprendido	IV. Tres lados
 • Tercer ángulo con $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ • Los otros dos lados con el teorema del seno. Solución única	 • Tercer lado y un ángulo con el teorema del coseno. • Tercer ángulo restandole a 180° los otros dos. Solución única	 • Segundo ángulo con el teorema del seno. • Tercer ángulo restandole a 180° los otros dos. • Tercer lado con el teorema del seno. Una, dos o ninguna solución	 • Dos ángulos con el teorema del coseno. • Tercer ángulo restando a 180° los dos primeros. Una o ninguna solución

14 Resuelve los siguientes triángulos:

- a) $\hat{A} = 90^\circ$, $b = 15$ cm, $a = 20$ cm b) $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $a = 8$ dm c) $\hat{A} = 80^\circ$, $a = 10$ cm, $b = 5$ m
d) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm e) $\hat{A} = 75^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 12$ mm

15 Dos amigos parten de un mismo punto A y siguen direcciones que forman entre sí un ángulo de 35° . Tras caminar 50 m y 75 m, respectivamente, se sitúan en dos puntos B y C. Calcula la distancia que les separa.

16 El entrenador de un equipo de fútbol indica a tres jugadores que se sitúen en el campo formando un triángulo. ¿Bajo qué ángulo observa cada jugador a los otros dos?



17 Desde dos puntos, separados por una distancia de 100 m, dos observadores encarados contemplan un globo situado en su mismo plano vertical con ángulos de elevación de 40° y 43° . ¿A qué distancia se encuentra el globo de cada observador?

18 Un barco mercante se encuentra a 450 m de un faro y a 300 m de una lancha pesquera. Si ambos son observados desde dicho faro bajo un ángulo de 32° , ¿a qué distancia se encuentra la lancha del faro?

E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

19 Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

- a) $\sin 240^\circ$ b) $\cos 135^\circ$ c) $\operatorname{cosec}\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ d) $\operatorname{tg} 300^\circ$ e) $\cos(-600^\circ)$ f) $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
g) $\operatorname{cosec} 330^\circ$ h) $\cotag 225^\circ$ i) $\sin 1215^\circ$ j) $\sec 120^\circ$ k) $\cotag 1830^\circ$

20 Halla todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifiquen: a) $\sin \alpha = \frac{-1}{2}$, b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

21 Calcula todas las razones del ángulo α sabiendo que:

- a) Ángulo del I cuadrante y $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ b) Pertenece al 2º cuadrante y $\sin \alpha = 0,25$ c) $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$
d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec \alpha = \sqrt{2}$ e) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y $\cotag \alpha = -3$ f) $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{2}$

22 Sabemos que $\cos \alpha = -0,75$ y que $\operatorname{tg} \alpha > 0$. Indica a qué cuadrante pertenece el ángulo y halla $\sin \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

24 Sabiendo que $\sin \alpha = 0,25$ y $\cos \beta = 0,5$, y que α y β son ángulos del primer cuadrante, calcula:

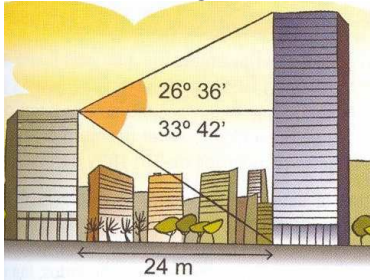
- a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$ c) $\sec(\alpha + \beta)$ d) $\cotag(\alpha - \beta)$

25 Si $\sin \alpha = 0,4$ y $\cos \beta = -0,5$, siendo $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y $180^\circ < \beta < 270^\circ$, calcula: a) $\sin(\alpha - \beta)$, b) $\cos(\alpha + \beta)$, c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

26 Si $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ y $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

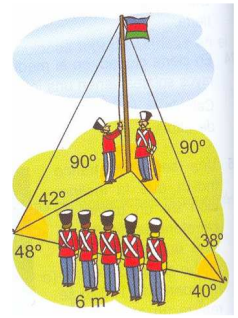
27 Resuelve los siguientes triángulos: a) $a = 10$ cm, $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$ b) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35^\circ$

- 28** Calcula la altura de los dos edificios de la figura.



- 29** Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Por la acción del viento, el globo se encuentra a una altura de 8 m. Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

- 30** Se ha colocado un poste sujeto al suelo mediante dos anclajes como aparece en la figura. Determina si las medidas son correctas.



- 31** Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42° . Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24° . Calcula la altura del pino.

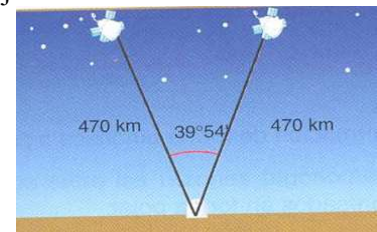
- 32** Una señal de tráfico indica que la inclinación de un tramo de carretera es del 8 %, lo cual quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125 m?



- 33** En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de $73^\circ 3'$. Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

- 34** Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km/h, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 82° . ¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

- 35** Dos satélites se encuentran a una distancia de 470 km de un observatorio. Si el ángulo que forman las visuales desde el observatorio a los satélites es de 40° , ¿qué distancia separa a los satélites?



- 36** Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad uniforme de 70 km/h, y el otro la segunda con una velocidad constante de 90 km/h. ¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

- 37** El ángulo de elevación del punto más alto de un acantilado, observado desde un barco, es de 18° . Al aproximarse 150 m en dirección a la costa, el nuevo ángulo es de 36° . ¿Cuál es la altura del acantilado?

- 38** Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan entre sí 75 km. Las visuales desde A y B hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° respectivamente. Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de A y de B, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

- 39** Un barco se encuentra a una distancia de 3,5 km del espigón del puerto en el instante en que otro barco se encuentra a 3 km del primero. Si ambos son observados desde el espigón bajo un ángulo de 43° . ¿A qué distancia se encuentra el segundo barco del puerto?

