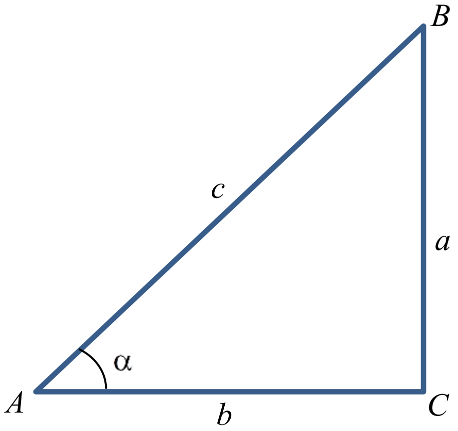
Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones fundamentales

En todo triángulo rectángulo ABC las **razones trigonométricas** (**seno**, **coseno** y **tangente**) de uno de sus ángulos agudos, en este caso α, se definen de la siguiente manera (ver figura de la izquierda):



$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{c}\ \left[\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right],\quad \cos\alpha=\frac{b}{c}\ \left[\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}\right],$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}\ \left[\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}\right]$$

Obsérvese que como la hipotenusa siempre es de mayor longitud que los catetos, **las razones seno y coseno han de ser siempre menores que uno**.

Entre estas razones trigonométricas existen unas **relaciones fundamentales**. La primera de ellas se obtiene utilizando el teorema de Pitágoras, según el cual la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa:

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

Si en la ecuación anterior dividimos todos los términos entre c^2, y luego hacemos uso de las fórmulas anteriores, tenemos:

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}\Rightarrow\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1\Rightarrow(\operatorname{sen}\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$$

La fórmula anterior recibe el nombre de **fórmula fundamental de la trigonometría**. Habitualmente escribiremos $\operatorname{sen}^2\alpha$ y $\cos^2\alpha$ en lugar de $(\operatorname{sen}\alpha)^2$ y $(\cos\alpha)^2$, con lo que la fórmula fundamental de la trigonometría queda así:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

La segunda fórmula relaciona las tres razones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Se obtiene haciendo un pequeño "truco" en la definición de la tangente. Veámoslo:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{a/c}{b/c}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Obsérvese que lo único que se ha hecho es dividir el numerador y el denominador entre la misma cantidad c, que es la longitud de la hipotenusa. Por tanto:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

La última fórmula fundamental relaciona el coseno y la tangente. Basta retocar un poco la fórmula fundamental:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow(\operatorname{tg}\alpha)^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Teniendo en cuenta, al igual que anteriormente, que escribiremos $\operatorname{tg}^2\alpha$ en lugar de $(\operatorname{tg}\alpha)^2$ nos queda:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Estas fórmulas permiten obtener el valor de las razones trigonométricas conociendo solamente el valor de una de ellas. Por ejemplo, si tenemos que $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, utilizando la última de las relaciones anteriores:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\sqrt{3}^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 3+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 4=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

Por otro lado, como $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, sustituyendo tenemos:

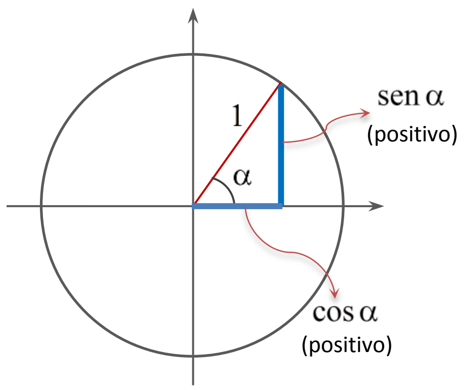
$$\sqrt{3}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1/2}\Rightarrow\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\operatorname{sen}\alpha\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera (entre 0º y 360º)

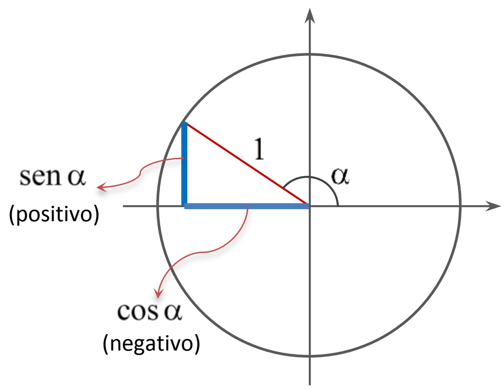
Ahora se trata de ampliar el concepto de razón trigonométrica a ángulos que no sean solamente agudos. De momento, vamos a considerar la posibilidad de que un ángulo esté comprendido entre 0° y 360°, es decir, a lo sumo una vuelta completa de la circunferencia. Luego ampliaremos el concepto de ángulo y consideraremos ángulos de cualquier medida.

Para ello, vamos a dibujar una circunferencia de radio uno centrada en unos ejes de coordenadas (llamada **circunferencia goniométrica**). Los ángulos del primer cuadrante estarán comprendidos entre 0° y 90°, los del segundo entre 90° y 180°, los del tercero entre 180° y 270° y, finalmente, los del cuarto cuadrante, comprendidos entre 270° y 360°.

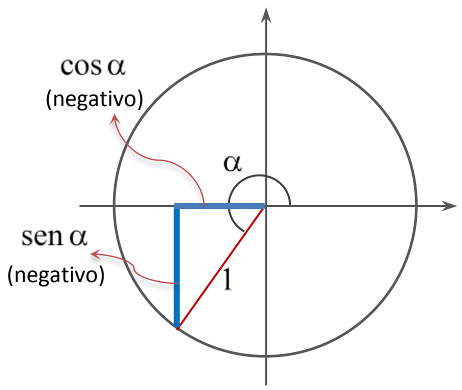
En las figuras se representa la medida del seno y del coseno de un ángulo situado en cada uno de los cuadrantes. La orientación del ángulo es la contraria a la de las de las agujas del reloj. Los distintos signos que presentan tanto seno como coseno (el seno es la coordenada vertical y el coseno la coordenada horizontal del punto donde el ángulo corta a la circunferencia de radio 1).



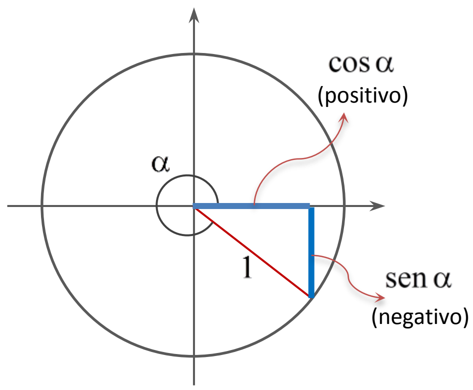
Primer cuadrante



Segundo cuadrante



Tercer cuadrante



Cuarto cuadrante

En la siguiente tabla resumimos los signos de las distintas razones trigonométricas de un ángulo comprendido entre 0° y 360° dependiendo del cuadrante en el que se encuentre:

	Primer cuadrante	Segundo Cuadrante	Tercer Cuadrante	Cuarto cuadrante
$\operatorname{sen}\alpha$	**+**	**+**	**–**	**–**
$\cos\alpha$	**+**	**–**	**–**	**+**
$\operatorname{tg}\alpha$	**+**	**–**	**+**	**–**

Como ejemplo, supongamos que nos piden el coseno de un ángulo α del cuarto cuadrante, sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por la fórmula fundamental: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{3}{4}+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

Hemos tomado la solución negativa porque, al encontrarse el ángulo en el cuarto cuadrante, el coseno es negativo.

Ampliación del concepto de ángulo y uso de la calculadora

Ángulos mayores que 360º

Un ángulo mayor que 360° ha de entenderse como un ángulo que da "más de una vuelta" y termina en algún lugar entre el primer y el cuarto cuadrante. Por ejemplo, el ángulo 2850°, es un ángulo que da "siete vueltas" y luego hace 330° más, ya que:

$$2850^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 330^\circ$$

Esto quiere decir que el ángulo 2850° se sitúa en el cuarto cuadrante y tiene exactamente las mismas razones trigonométricas que el ángulo 330°.

Para saber cuantas vueltas da un ángulo mayor que 360° y con qué ángulo comprendido entre 0° y 360° coincide, se realiza la división entera entre 360°, sin extraer cifras decimales. El cociente será el número de vueltas y el resto, el ángulo comprendido entre 0° y 360° con el que coincide el ángulo original:

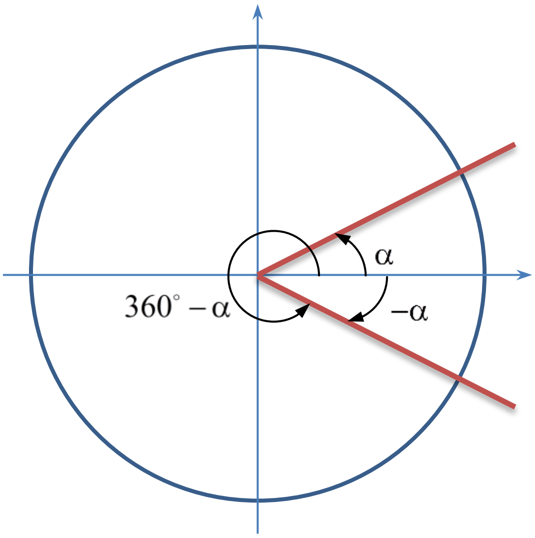
$$\begin{array}{r|l} 2850^\circ & 360^\circ \\ \hline 330^\circ & 7 \end{array}$$

Ahora, debido a que *"dividendo es igual a divisor por cociente más el resto"*, se obtiene la igualdad anterior, $2850^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 330^\circ$, que ha de interpretarse como "siete vueltas" (siete veces 360°) y 330° más.

Ángulos negativos

Ya se había comentado anteriormente que la orientación de un ángulo positivo α es la contraria a la de las agujas del reloj. **Un ángulo es negativo**, y escribiremos $-\alpha$, cuando su orientación es la misma que la de las agujas del reloj. Se dice que α y $-\alpha$ son **ángulos opuestos**.

Un caso particular es cuando un ángulo α está comprendido entre 0° y 180°. Entonces $360^\circ - \alpha$ coincide exactamente con $-\alpha$. Por ejemplo, si tenemos $\alpha = 30^\circ$, entonces $360^\circ - \alpha = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$. Esto quiere decir que $330^\circ = -30^\circ$ (ver figura). Si unimos esto al ejemplo anterior del ángulo 2850°, podemos escribir que $2850^\circ = 330^\circ = -30^\circ$, en el sentido de que los tres ángulos poseen las mismas razones trigonométricas.



Uso de la calculadora

Como la medida de los ángulos que estamos utilizando son los grados sexagesimales, es muy importante que la calculadora trabaje con este sistema. Para ello debe aparecer una letra **D** mayúscula en la parte superior de la pantalla. Si aparece otra letra es que la calculadora está trabajando con otro sistema. Por ejemplo, si en la parte superior de la pantalla aparece una letra **R** mayúscula es que la calculadora está trabajando en radianes, sistema de medida de ángulos que veremos posteriormente.

En las calculadoras **Casio fx-82** que habitualmente utilizáis, la forma de que aparezca una letra **D** mayúscula en la parte superior de la pantalla es pulsando dos veces la tecla **MODE** y luego eligiendo **DEG** (abreviatura de *"degree"*, grado en inglés). Si se elige **RAD** se pasa a la letra **R** mayúscula y se trabaja en radianes. Hay otro sistema, **GRAD**, con el que la calculadora trabaja en gradientes, pero que nosotros no utilizaremos.

Para calcular la razón trigonométrica de un ángulo introduce la razón con la tecla correspondiente (**SIN**, **COS** o **TAN**), el ángulo, y pulsa la tecla igual. Automáticamente aparecerá en pantalla el valor. Como ejemplo prueba que $\operatorname{sen} 2780^\circ = -0,984807753$.

Es probable que tengamos que calcular el ángulo cuyo seno, coseno o tangente sea un número dado. Imaginemos que $\cos \alpha = 0,5$ y queremos conocer el ángulo α. Para ello pulsamos la siguiente combinación **SHIFT COS 0.5 =**, obteniendo que $\alpha = 60^\circ$. La combinación que proporciona el ángulo conociendo el coseno del mismo, **SHIFT COS**, para la calculadora es **COS^{-1}**. Nosotros, al ángulo cuyo coseno es cierto número lo llamaremos **arcocoseno** (que quiere decir *"ángulo cuyo coseno es"*) y lo denotaremos por $\arccos$. Así pues tenemos $\cos \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = \arccos 0,5 = 60^\circ$. Lo mismo ocurre con el seno y la tangente, a los que corresponden el **arcoseno** y la **arcotangente**, abreviadamente arcsen y arctg. Es importante saber que la calculadora, para **SIN^{-1}** y **TAN^{-1}** devuelve valores entre -90° y 90°, mientras que para **COS^{-1}** devuelve valores entre 0° y 180°.

Razones trigonométricas de algunos ángulos utilizados con frecuencia

Observando la circunferencia goniométrica de la página 2, es fácil deducir las razones trigonométricas de los ángulos 0°, 90°, 180° y 270°. Son las siguientes:

$$\operatorname{sen} 0^\circ = 0,\ \cos 0^\circ = 1,\ \operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\operatorname{sen} 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} \Rightarrow \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

$$\operatorname{sen} 90^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0,\ \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \Rightarrow \operatorname{tg} 90^\circ \text{ no existe (la división entre cero no tiene sentido)}$$

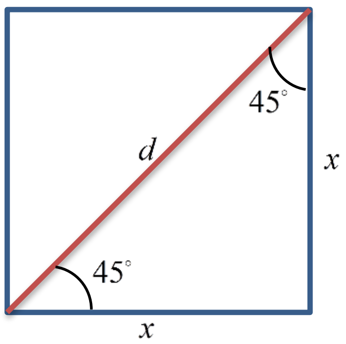
$$\operatorname{sen} 180^\circ = 0,\ \cos 180^\circ = -1,\ \operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\operatorname{sen} 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} \Rightarrow \operatorname{tg} 180^\circ = 0$$

$$\operatorname{sen} 90^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0,\ \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \Rightarrow \operatorname{tg} 90^\circ \text{ no existe (la división entre cero no tiene sentido)}$$

Las razones trigonométricas de 360° coinciden con las de 0°, pues 360° es, exactamente, una vuelta completa.

Deduzcamos ahora las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°, ángulos que aparecen con bastante frecuencia.

Para deducir las razones trigonométricas de 45° vamos a considerar un cuadrado de lado x y diagonal d (ver figura). La diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos, ambos isósceles, es decir, triángulos rectángulos donde los dos ángulos agudos son de 45°. Por el teorema de Pitágoras



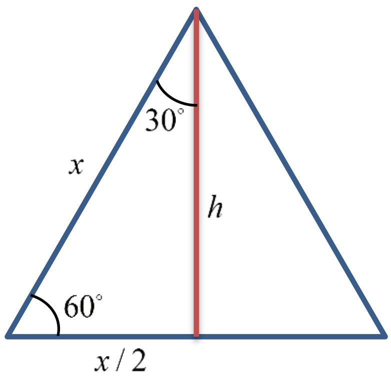
$$d^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 2x^2 \Rightarrow d = \sqrt{2x^2} \Rightarrow d = \sqrt{2}\,x$$

Por las definiciones de seno, coseno y tangente (ver página 1):

$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{}{d} = \frac{x}{\sqrt{2}\,x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De igual forma se tiene que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por último

$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$. O bien de esta otra forma: $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{x}{x} = 1$.

Para deducir las razones trigonométricas de 30° y 60° vamos a trabajar ahora sobre un triángulo equilátero de lado x y altura h (véase la figura de la derecha). Como el triángulo es equilátero, cada uno de sus ángulos es de 60°. Además, la altura divide al triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos iguales, de ángulos agudos 60° y 30°. Usando el teorema de Pitágoras en uno de estos dos triángulos rectángulos tenemos:



$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{4x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}\,x}{2}$$

Otra vez, por las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo sobre un triángulo rectángulo, tenemos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{3}\,x/2}{x} = \frac{\sqrt{3}\,x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{x/2}{x} = \frac{}{2x} = \frac{1}{2}$$

De manera parecida se tiene que:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{x/2}{x} = \frac{}{2x} = \frac{1}{2},\ \cos 30^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{3}\,x/2}{x} = \frac{\sqrt{3}\,x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

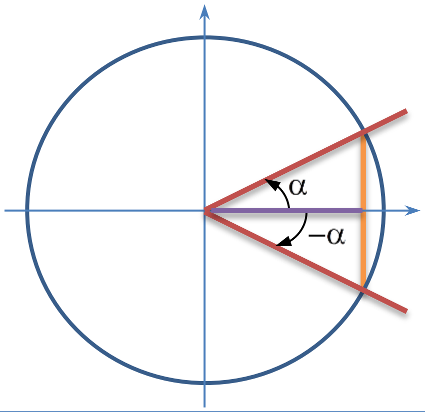
Finalmente:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

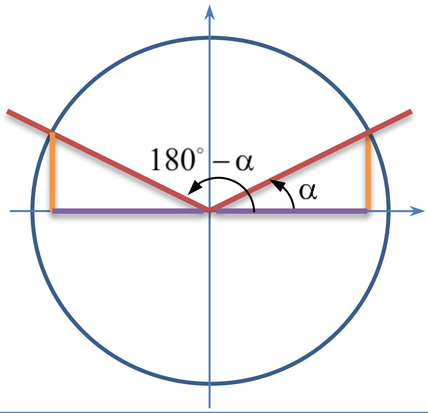
Para resolver algunos ejercicios prácticos, es muy útil conocer las relaciones entre determinados tipos de ángulos. No es necesario aprenderlas de memoria, sino que recurriendo a la visualización de los ángulos sobre la circunferencia goniométrica es posible deducirlas sin mayor problema.

Ángulos opuestos: α **y** $-\alpha$



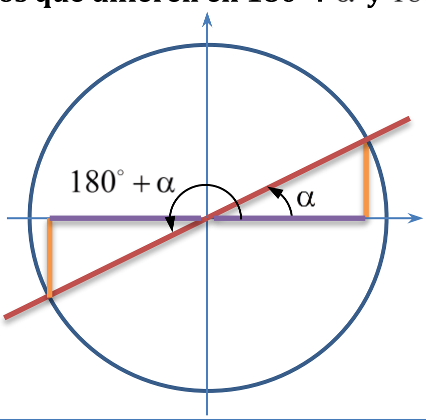
$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

Ángulos suplementarios: α **y** $-\alpha$



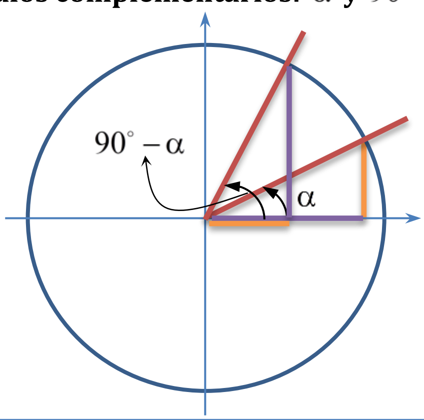
$$\operatorname{sen}\left(180^\circ - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(180^\circ - \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(180^\circ - \alpha\right)}{\cos\left(180^\circ - \alpha\right)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

Ángulos que difieren en 180º : α **y** $180^\circ + \alpha$



$$\operatorname{sen}\left(180^\circ + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos\left(180^\circ + \alpha\right) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(180^\circ + \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(180^\circ + \alpha\right)}{\cos\left(180^\circ + \alpha\right)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Ángulos complementarios: α **y** $90^\circ - \alpha$



$$\operatorname{sen}\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \alpha\right)}{\cos\left(90^\circ - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Por ejemplo, los ángulos 60° y 30° son complementarios (suman 90°) y, por tanto: $\operatorname{sen}60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \operatorname{sen}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg}30^\circ} = \sqrt{3}$. Por otro lado, 150° y 30° son suplementarios (suman 180°), luego: $\operatorname{sen}150^\circ = \operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}150^\circ = -\operatorname{tg}30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resolución de triángulos rectángulos

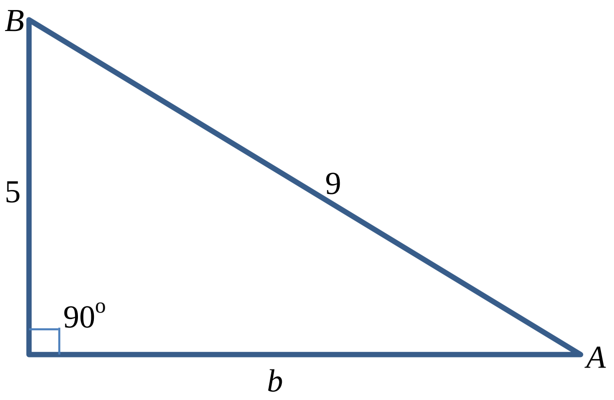
Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

En el caso de un triángulo rectángulo siempre se conoce un ángulo: el ángulo recto o de 90°. Por tanto sólo se pueden presentar dos casos.

Caso 1. Se conocen dos lados.	• El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. • El ángulo que forme la hipotenusa con uno de los catetos se halla a partir de la razón trigonométrica que los relaciona. • El ángulo que queda por conocer es el complementario del anterior.
Caso 2. Se conocen un lado y uno de los dos ángulos agudos.	• Cualquiera de los otros dos lados se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos. • El otro ángulo agudo es el complementario del ángulo conocido.

Ejemplo 1.

Supongamos que conocemos una cateto $a = 5$ cm y la hipotenusa $c = 9$ cm.



El otro cateto se halla mediante el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = 81 - 25 = 56 \Rightarrow b = 7,48$ cm.

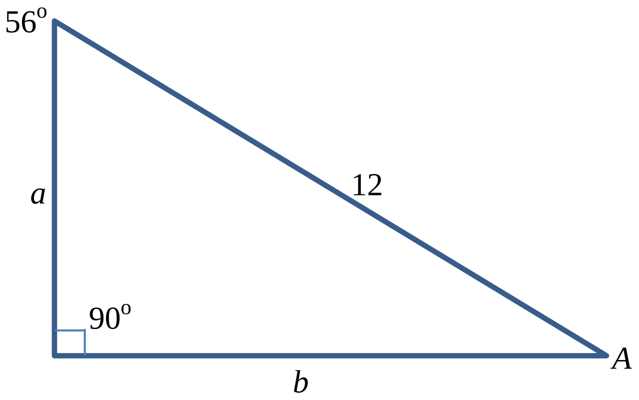
Para calcular el ángulo A:

$$\operatorname{sen} A = \frac{5}{9} = 0,56 \Rightarrow A = 33,75^\circ.$$

El ángulo B es el complementario del anterior: $B = 90^\circ - 33,75^\circ = 56,25^\circ$

Ejemplo 2.

Supongamos que conocemos la hipotenusa $c = 12$ cm y el ángulo $B = 56^\circ$.



Tenemos que $\cos 56^\circ = \frac{a}{12} \Rightarrow a = 12\cos 56^\circ = 6,71$ cm., y $\operatorname{sen} 56^\circ = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12 \operatorname{sen} 56^\circ = 9,95$ cm.

El ángulo A es el complementario de B: $A = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$

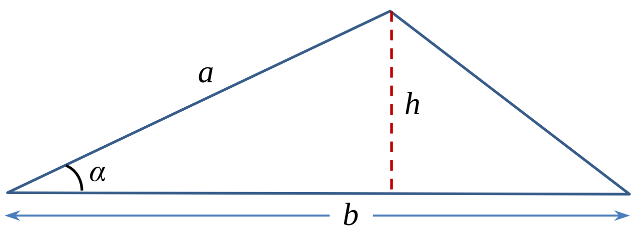
Aplicación: cálculo de la altura y del área de un triángulo cualquiera

Conocida la longitud de dos lados a y b de un triángulo cualquiera y el ángulo α que forman ambos, es muy sencillo hallar la altura correspondiente a uno de los lados. Observa que, en el triángulo de la figura de la derecha, la altura h sobre el lado b de longitud conocida, divide al mismo en dos triángulos rectángulos. Si nos fijamos en el de la izquierda tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \operatorname{sen} \alpha$$

Ahora podemos deducir una fórmula para el área del triángulo:

$$A = \frac{b\,h}{2} = \frac{b\,a \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \alpha$$

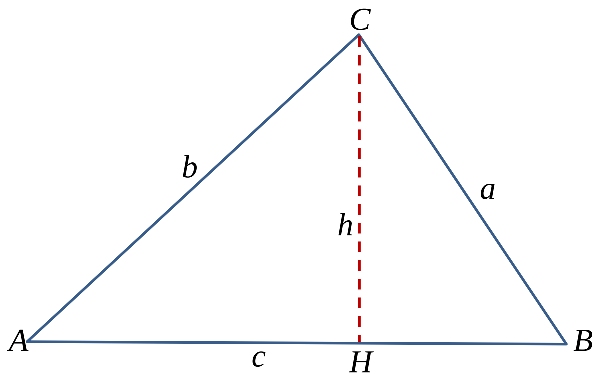


Similar razonamiento se puede hacer en un triángulo cualquiera. Utilizando la altura correspondiente a uno de los lados, conseguiremos dos triángulos rectángulos, y esto permitirá conocer otras longitudes o distancias desconocidas. Este método se conoce con el nombre de ***estrategia de la altura*** para resolver triángulos no necesariamente rectángulos.

Resolución de triángulos cualesquiera: teorema de los senos y teorema del coseno

Teorema de los senos

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y de ángulos A, B, C se cumplen las siguientes igualdades.



$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

Para demostrar este resultado utilizaremos la estrategia de la altura, comentada en la sección anterior. Observa la figura de la derecha. En ella, trazamos la altura h desde el vértice C. Los triángulos AHC y BHC son rectángulos. Por tanto tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} A=\dfrac{h}{b}\Rightarrow h=b\operatorname{sen} A\\[2ex] \operatorname{sen} B=\dfrac{h}{a}\Rightarrow h=a\operatorname{sen} B\end{array}\right\}\Rightarrow b\operatorname{sen} A=a\operatorname{sen} B\Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

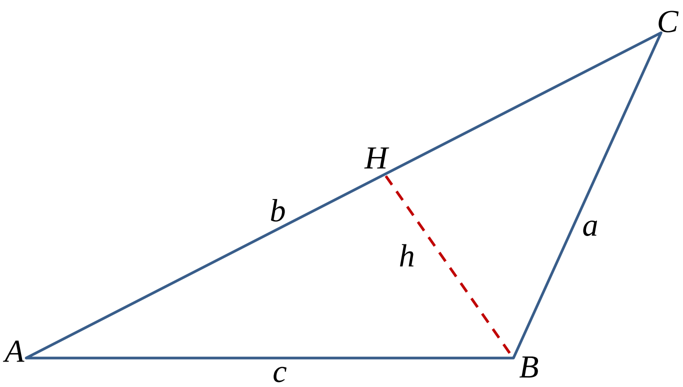
Esta es la primera de las igualdades que se pretendían demostrar. Para demostrar la segunda se procede de manera semejante, trazando la altura desde el vértice B, relacionando en este caso los lados a y c con sus ángulos opuestos (intenta hacerlo tú como ejercicio). Se obtiene en este caso: $\dfrac{\quad}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

Teorema del coseno

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y de ángulos A, B, C se cumple la siguiente igualdad:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$$

Para hacer la demostración utilizaremos un método similar al ya visto en el teorema de los senos, pero con un triángulo oblicuángulo (ver figura de la derecha). Se traza la altura h sobre el lado b. Entonces, en el triángulo ABH se tiene que



$$\cos A=\frac{AH}{c}\Rightarrow AH=c\cos A \qquad (1)$$

Entonces:

$$HC=b-AH=b-c\cos A \qquad (2)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos ABH, BCH y utilizando las igualdades (1) y (2) demostradas anteriormente tenemos:

$$a^2=h^2+HC^2=h^2+(b-c\cos A)^2=h^2+b^2+c^2\cos^2 A-2bc\cos A$$

$$c^2=h^2+AH^2=h^2+(c\cos A)^2=h^2+c^2\cos^2 A$$

Restando ambas igualdades se obtiene:

$$a^2-c^2=b^2-2bc\cos A$$

Finalmente, sumando c^2 en los dos miembros, se obtiene lo que queríamos demostrar:

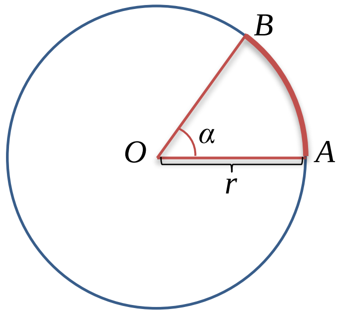
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

También son ciertas, y se pueden demostrar de manera similar a como se ha hecho anteriormente, las siguientes igualdades:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \ ; \ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Una nueva unidad para medir ángulos: el radián

Hasta ahora hemos utilizado, para medir los ángulos, el sistema sexagesimal. Como ya sabes, cada una de las 360 partes iguales en las que se divide la circunferencia, se denomina **grado sexagesimal**. Cada grado se divide en 60 **minutos**, y cada minuto en 60 **segundos**.



Otra medida de los ángulos es el **radián**.

Si se toma cualquier circunferencia de radio $r=\overline{OA}$ y se lleva esta longitud r sobre un arco de la circunferencia, es decir, $r=\overline{OA}=\text{longitud } AB$, el ángulo central α determinado por el arco y sus radios mide **un radián:** 1 rad.

Relación entre grados sexagesimales y radianes

Para calcular a cuántos radianes equivale un ángulo completo de 360°, basta con aplicar una sencilla relación de proporcionalidad directa. Dibujamos una circunferencia de radio r. Si a un arco de longitud r le corresponde un radián, a un arco de longitud la longitud de la circunferencia, $2\pi r$, le corresponderán x radianes. Veamos la regla de tres directa:

$$\begin{array}{ccc} \text{Arco} & & \text{Radianes} \\ r & \text{———} & 1 \\ 2\pi r & \text{———} & x \end{array}$$

Por tanto, $x=\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi$. Esto quiere decir que a un ángulo completo de 360° le corresponden 2π radianes, o lo que es lo mismo, a un ángulo llano de 180° le corresponden π radianes. De este modo, para convertir un ángulo dado en grados, α°, en radianes $\alpha \text{ rad}$ o viceversa, basta con utilizar la siguiente proporción:

$$\frac{\alpha^\circ}{\alpha \text{ rad}}=\frac{180^\circ}{\pi}$$

Veamos como ejemplo a cuantos grados sexagesimales equivale un radián

$$\frac{^\circ}{1 \text{ rad}}=\frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \alpha=\frac{1\cdot 180}{\pi}\cong 57,296^\circ$$

O sea, un radián es igual, aproximadamente, a $57,296^\circ$, que expresado en grados, minutos y segundos es:

$$1 \text{ rad} \cong 57^\circ 15' \, 45''$$

Uso de la calculadora

Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo dado en radianes hay que empezar poniendo la calculadora en el modo radianes: **MODE RAD**. Cada calculadora tiene una combinación de teclas propia para pasar al modo radianes. Ya se ha explicado algo esto en la página 3. Normalmente una calculadora viene en modo grados sexagesimales: **MODE DEG**, que suele venir indicado con una **D**, o la abreviatura **DEG** en la parte superior. Cuando pasamos al modo radianes con la combinación de teclas adecuada, en la parte superior aparecerá una **R** o la abreviatura **RAD**. En estos momentos ya está lista la calculadora para hacer cálculos en radianes. Veamos un ejemplo.

Con la calculadora en el modo grados sexagesimales es muy fácil obtener que $\operatorname{sen} 72^\circ \cong 0,951$. Para ver que obtenemos el mismo valor en radianes, pasaremos 72° a radianes, y luego calcularemos el seno del valor obtenido, ya con la calculadora en el modo radianes.

$$\frac{72^\circ}{x \text{ rad}}=\frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow x=\frac{72\cdot\pi}{180}=\frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Ahora, con la calculadora en modo radianes, podemos comprobar también que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\cong 0,951$.

Fórmulas trigonométricas

Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Sumas y diferencias de senos y coseno: transformaciones de sumas y restas en productos

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

En los ejercicios y problemas se hará uso a veces de estas fórmulas. Por ejemplo, a la hora de resolver ecuaciones trigonométricas.

Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es aquella en la que aparecen razones trigonométricas actuando sobre un ángulo incógnita que, como en todas las ecuaciones, hay que despejar.

Salvo que se pida expresamente, el valor de la incógnita puede darse indistintamente en grados o en radianes.

Debido a las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos de diferentes cuadrantes y de los que resultan de añadirles vueltas completas a la circunferencia, estas ecuaciones cuentan habitualmente con infinitas soluciones. Sin embargo, suele ser suficiente dar las soluciones comprendidas entre 0° y 360°, o lo que es lo mismo, entre 0 rad y $2\pi \text{ rad}$.

Es muy importante comprobar las soluciones que se obtengan sobre la ecuación inicial, pues es frecuente que aparezcan *soluciones extrañas*.

Ejemplos:

1. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1$

Primero modificamos la ecuación para conseguir que haya un único tipo de razón trigonométrica. Para ello utilizamos la fórmula trigonométrica del coseno del ángulo doble, y luego la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x + \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) - \operatorname{sen}^2 x = 1$$

Ahora, como en cualquier otra ecuación de segundo grado (observa que el seno está elevado a dos), pasamos todos los términos al primer miembro y reducimos los que sean semejantes:

$$\operatorname{sen} x + \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) - \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x\left(1 - 2\operatorname{sen} x\right) = 0$$

Obsérvese que si hubiésemos llamado $z = sen\, x$, la ecuación sería $z - 2z^2 = 0 \Rightarrow z\left(1 - 2z\right) = 0$, es decir, una ecuación de segundo grado de las incompletas.

Pueden ocurrir pues dos cosas. O bien $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ$, o bien que $1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ \\ 150^\circ \end{cases}$

2. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x$

Para resolver esta ecuación utilizaremos la transformación de la resta en un producto (ver página anterior):

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x \Rightarrow 2\cos\frac{3x + x}{2}\operatorname{sen}\frac{3x - x}{2} = \cos 2x \Rightarrow 2\cos 2x \operatorname{sen} x = \cos 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x \operatorname{sen} x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x\left(2\operatorname{sen} x - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 90^\circ + 180^\circ k \ \Rightarrow x = 45^\circ + 90^\circ k \\ 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ k \ \ o \ \ x = 150 + 360^\circ k \end{cases}$$

Las soluciones entre 0° y 360° son pues $x = 45^\circ$, $x = 135^\circ$, $x = 225^\circ$, $x = 315^\circ$, $x = 30^\circ$ y $x = 150^\circ$.

3. Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$

Volvemos a transformar la suma de la segunda ecuación en un producto:

$$\cos x + \cos y = \sqrt{2} \Rightarrow 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x - y}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x - y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x \quad y}{2} = 0 \Rightarrow x = y$$

Por tanto, como $x + y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = y = \dfrac{\pi}{4}$.