3 Trigonometría

ACTIVIDADES INICIALES

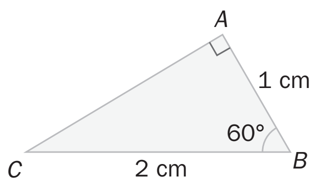
3.I. En una recta r hay tres puntos: A, B y C, que distan, sucesivamente, 2 y 5 cm. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan otra, s, en M, N y P.

Si el segmento MN mide 8 cm, ¿cuál es la distancia entre los puntos N y P?

Por el teorema de Tales, los segmentos correspondientes en ambas rectas son proporcionales.

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{5}{NP} \Rightarrow NP = 20 \text{ cm}$$

3.II. Calcula las medidas de los elementos que faltan en el triángulo rectángulo de la derecha.



Los ángulos del triángulo miden 90°, 60° y 30°.

El cateto que falta mide $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Expresa las siguientes medidas de ángulos en radianes.

a) 30° b) 60° c) 330° d) 200°

a) $30° = 30 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{30}{180}\pi = \dfrac{1}{6}\pi = \dfrac{\pi}{6}$ rad

b) $60° = 60 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{60}{180}\pi = \dfrac{1}{3}\pi = \dfrac{\pi}{3}$ rad

c) $330° = 330 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{330}{180}\pi = \dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{11\pi}{6}$ rad

d) $200° = 200 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{200}{180}\pi = \dfrac{10}{9}\pi = \dfrac{10\pi}{9}$ rad

3.2. ¿Cuánto mide en grados sexagesimales un ángulo de 1 rad? Aproxima el resultado con grados, minutos y segundos.

$$1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 57°\ 17'\ 45''$$

3.3. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad c) 4 rad d) 4π rad

a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad $= \dfrac{7\pi}{3} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = \dfrac{7 \cdot 180°}{3} = 420°$

b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad $= \dfrac{3\pi}{2} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = \dfrac{3 \cdot 180}{2} = 270°$

c) 4 rad $= 4 \cdot \dfrac{180°}{\pi} \approx 229°\ 11'$

d) 4π rad $= 4\pi \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 720°$

3.4. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos.

a) $\widehat{A} = 90°$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm b) $\widehat{B} = 90°$, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm

a) $a = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$

$\text{sen } \widehat{B} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{10}{2\sqrt{61}} = \dfrac{5\sqrt{61}}{61}$ $\quad \cos \widehat{B} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{2\sqrt{61}} = \dfrac{6\sqrt{61}}{61}$ $\quad \text{tg } \widehat{B} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

$\text{sen } \widehat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{6\sqrt{61}}{61}$ $\quad \cos \widehat{C} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{5\sqrt{61}}{61}$ $\quad \text{tg } \widehat{C} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$

b) $a = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$

$\text{sen } \widehat{A} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \cos \widehat{A} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$ $\quad \text{tg } \widehat{A} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

$\text{sen } \widehat{C} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{4}{5}$ $\quad \cos \widehat{C} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \text{tg } \widehat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$

3.5. Calcula la cosecante, la secante y la cotangente del ángulo de menor amplitud del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 10 centímetros, respectivamente.

Hipotenusa: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ cm. El ángulo de menor amplitud es el opuesto al cateto menor, por tanto:

$\text{cosec}\ \alpha = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ $\qquad \sec \alpha = \dfrac{5\sqrt{5}}{10} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\qquad \text{cotg}\ \alpha = \dfrac{10}{5} = 2$

3.6. Calcula las razones trigonométricas de 30° y de 60°. Para ello, toma un triángulo equilátero de lado *a* y divídelo en dos por una de sus alturas.

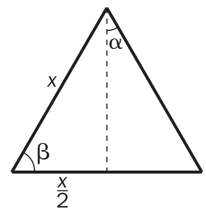
Al ser un triángulo equilátero, sus tres ángulos deben medir 60° cada uno. Por tanto: $\alpha = \dfrac{60°}{2} = 30°\ ;\ \beta = 60°$

Aplicando el teorema de Pitágoras, se puede calcular el valor de la altura: altura $= \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3x^2}{4}} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\ 30° = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \text{sen}\ 60° = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos 60° = \dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$

$\text{tg}\ 30° = \dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \text{tg}\ 60° = \dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$



3.7. Indica el signo de todas las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 120° c) 256° e) 315° g) 55°

b) −70° d) 800° f) 1200° h) −460°

α	120°	−70°	256°	800°	315°	1200°	55°	−480°
Cuadrante	II	IV	III	I	IV	II	I	III
sen α y cosec α	+	−	−	+	−	+	+	−
cos α y sec α	−	+	−	+	+	−	+	−
tg α y cotg α	−	−	+	+	−	−	+	+

3.8. Para los siguientes ángulos, indica el signo de todas sus razones trigonométricas.

a) $\dfrac{3\pi}{4}$ b) $\dfrac{11\pi}{3}$ c) $\dfrac{4\pi}{3}$ d) $-\dfrac{7\pi}{6}$ e) $-\dfrac{9\pi}{4}$

α	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{4}$
Cuadrante	II	IV	III	I	IV
sen α y cosec α	+	−	−	+	−
cos α y sec α	−	+	−	−	+
tg α y cotg α	−	−	+	−	−

3.9. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

a) sen 150° | c) tg 330° | e) sec 240°
b) cos 225° | d) cosec 135° | f) cotg 300°

a) $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 225° = -\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg } 330° = -\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{cosec } 135° = \frac{1}{\text{sen } 135°} = \frac{1}{\text{sen } 45°} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

e) $\sec 240° = -\sec 60° = -\frac{1}{\cos 60°} = -2$

f) $\text{cotg } 300° = -\text{ctg } 60° = -\frac{1}{\text{tg } 60°} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.10. Calcula el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.

a) $\text{sen } \frac{3\pi}{4}$ b) $\text{cosec } \frac{11\pi}{6}$ c) $\text{tg } \frac{4\pi}{3}$ d) $\cos \frac{5\pi}{6}$

a) $\text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{cosec } \frac{11\pi}{6} = -\text{cosec } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{-\text{sen } \frac{\pi}{6}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$

c) $\text{tg } \frac{4\pi}{3} = \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

d) $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.11. Sabiendo que la cotangente de un ángulo del primer cuadrante vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$, calcula el resto de las razones de dicho ángulo.

Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Así, tenemos: $\text{tg } \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$

$\text{sen } \alpha = \cos \alpha \cdot \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3.12. Calcula las restantes razones de α sabiendo que: $\sec \alpha = -5$ y que $90° < \alpha < 180°$.

Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas.

$\sec \alpha = -5 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{5}$

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24}$

$\text{tg } \alpha \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{5}}{-\frac{1}{5}} = -24 \Rightarrow \text{cotg } \alpha = -\frac{1}{\sqrt{24}} = -\frac{\sqrt{24}}{24}$

3.13. Halla todas las razones trigonométricas de α si se sabe que $\text{cotg } \alpha = 2$ y que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivas, y el resto de razones, negativas.

$\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; $1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = -\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{sen } \alpha = \cos \alpha \cdot \text{tg } \alpha = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{5\sqrt{5}}{5} = -\sqrt{5}$

3.14. Calcula la razón pedida en cada caso:

a) sen α, si tg $\alpha = -3$ y $\alpha \in$ II

b) tg α, si cos $\alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in$ IV

a) $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{1 + \text{cotg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \frac{9}{10}$. Como $\alpha \in$ II, $\text{sen}\,\alpha = +\sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

b) $1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \text{tg}^2 \alpha = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$, ya que $\alpha \in$ IV

3.15. Calcula las razones trigonométricas de 75° y $\frac{\pi}{12}$ rad.

a) $\text{sen } 75° = \text{sen } (30° + 45°) = \text{sen } 30° \cos 45° + \cos 30° \text{ sen } 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\cos 75° = \cos (30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \text{sen } 30° \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\text{tg } 75° = \frac{\text{sen } 75°}{\cos 75°} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}$

b) $\text{sen } \frac{\pi}{12} = \text{sen } \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \text{ sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \text{sen } \frac{\pi}{3} \text{ sen } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\text{tg} \left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} = 2 - \sqrt{3}$

3.16. Demuestra que $\text{sen} \left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$.

$\text{sen} \left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \alpha \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} = \cos \alpha \cdot (-1) = -\cos \alpha$

3.17. Desarrolla las expresiones de cos 3α y de tg 3α en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

$\cos 3\alpha = \cos (\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \text{sen } \alpha \text{ sen } 2\alpha = \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) - \text{sen } \alpha \cdot 2\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha =$
$= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha - 2\text{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

$$\text{tg } 3\alpha = \text{tg } (\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg } 2\alpha}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg } 2\alpha} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}^3 \alpha + 2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{\frac{1 - \text{tg}^2 \alpha - 2\text{tg}^2 \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{3\text{tg}\,\alpha - \text{tg}^3 \alpha}{1 - 3\text{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\text{tg}\,\alpha\ (3 - \text{tg}^2 \alpha)}{1 - 3\text{tg}^2 \alpha}$$

3.18. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen $\alpha = \frac{3}{5}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$.

Como α es del 2.° cuadrante, $\frac{\alpha}{2}$ es del primero y todas sus razones son positivas.

$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$

$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ y, por último, $\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10} : \frac{\sqrt{10}}{10} = 3$

3.19. Transforma las siguientes sumas en productos.

a) sen 55° + sen 15° b) sen 75° − sen 35° c) cos 125° + cos 85° d) cos 220° − cos 20°

a) $\text{sen } 55° + \text{sen } 15° = 2\text{sen } \frac{55° + 15°}{2} \cos \frac{55° - 15°}{2} = 2\text{sen } 35° \cos 20°$

b) $\text{sen } 75° - \text{sen } 35° = 2\cos \frac{75° + 35°}{2} \text{ sen } \frac{75° - 35°}{2} = 2\cos 55° \text{ sen } 20°$

c) $\cos° \, 125 + \cos 85° = 2\cos \frac{125° + 85°}{2} \cos \frac{125° - 85°}{2} = 2\cos 105° \cos 20°$

d) $\cos 220° - \cos 20° = -2\text{sen } \frac{220° + 20°}{2} \text{ sen } \frac{220° - 20°}{2} = -2\text{sen } 120° \text{ sen } 100°$

3.20. Transforma los siguientes productos en sumas.

a) sen 80° · sen 40° b) cos 25° · cos 10°

a) $\frac{A + B}{2} = 80°, \frac{A - B}{2} = 40° \Rightarrow A = 120°, B = 40°$ $\text{sen } 80° \cdot \text{sen } 40° = -\frac{1}{2}(\cos 120° - \cos 40°)$

b) $\frac{A + B}{2} = 25°, \frac{A - B}{2} = 10° \Rightarrow A = 35°, B = 15°$ $\cos 25° \cdot \cos 10° = \frac{1}{2}(\cos 35° + \cos 15°)$

3.21. Comprueba que cos 75° + cos 45° = cos 15°.

$\cos 75° + \cos 45° = 2\cos \frac{75° + 45°}{2} = 2\cos \frac{75° - 45°}{2} = 2\cos 60° \cos 15° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 15° = \cos 15°$

3.22. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{\cos 2x + \cos x}{sen\ 2x + sen\ x}$

$$\frac{\cos 2x + \cos x}{\text{sen } 2x + \text{sen } x} = \frac{2\cos \frac{2x + x}{2} \cos \frac{2x - x}{2}}{2\text{sen } \frac{2x + x}{2} \cos \frac{2x - x}{2}} = \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\text{sen } \frac{3x}{2}} = \text{cotg } \frac{3x}{2}$$

3.23. Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) sen x = 1

b) tg x = 0

c) 2 cos x + 1 = 0

d) $\sqrt{3}$ tg x − 1 = 0

a) $\text{sen } x = 1$ El seno de un ángulo vale 1 únicamente en 90°, 450°, 810°, etc.

Por tanto: $x = 90° + 360° \, k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in Z$

b) $\text{tg } x = 0$ La tangente vale 0 en los ángulos 0°, 180°, 360°, 540°, etc.

Por tanto: $x = 180° \, k$ con $k \in Z$ o $x = \pi k$ con $k \in Z$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$ El coseno es negativo para los ángulos de los cuadrantes 2.° y 3.°

Por tanto: $x = 120° + 360° \, k$, $x = 240° + 360° \, k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$ con $k \in Z$

d) $\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ La tangente es positiva para los ángulos de los cuadrantes 1.° y 3.°

Por tanto: $x = 30° + 360° \, k$, $x = 210° + 360° \, k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ con $k \in Z$

3.24. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\begin{cases} \text{tg } (x + y) = \sqrt{3} \\ x + 2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{sen } x - \text{sen } y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\ \text{sen } x + \text{sen } y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \text{tg }(x+y) = \sqrt{3} \\ x + 2y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg }(x+y) = \sqrt{3} \\ x + y = \frac{\pi}{2} - y \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \text{cotg } y = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } y = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}, y = \frac{7\pi}{6}$

Solución: $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{6}$

b) $\begin{cases} \text{sen } x - \text{sen } y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\ \text{sen } x + \text{sen } y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\text{sen } x = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\text{sen } y = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1}{2} = 1 \Rightarrow \text{sen } y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} \left(x = \frac{\pi}{3}\ ;\ y = \frac{\pi}{6}\right) \left(x = \frac{2\pi}{3}\ ;\ y = \frac{\pi}{6}\right) \\ \left(x = \frac{\pi}{3}\ ;\ y = \frac{5\pi}{6}\right) \left(x = \frac{2\pi}{3}\ ;\ y = \frac{5\pi}{6}\right) \end{matrix}$

3.25. Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 10$ cm, $\widehat{A} = 45°$ y $\widehat{B} = 100°$.

$\widehat{C} = 180° - 100° - 45° = 35° \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{10 \cdot \text{sen } 35°}{\text{sen } 45°} = 8{,}11 \text{ cm}$

3.26. Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 12$ cm, $b = 15$ cm y $\widehat{C} = 35°$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos 35° = 74{,}105 \Rightarrow c = 8{,}61 \text{ cm}$

3.27. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos y calcula sus áreas.

a) $\widehat{A} = 90°$, $b = 15$ cm, $a = 20$ cm b) $\widehat{B} = 90°$, $\widehat{C} = 25°$, $b = 10$ m c) $\widehat{C} = 90°$, $b = 10$ mm, $a = 18$ mm

a) $c = \sqrt{20^2 - 15^2} = 13{,}23$; $\text{sen } \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{15}{20} = 0{,}75 \Rightarrow \widehat{B} = 48°\ 35'$, $\widehat{C} = 41°\ 25'$. *Área*: $\frac{bc}{2} = 99{,}225 \text{ cm}^2$

b) $A = 90° - 25° = 65°$; $a = b \cos \widehat{C} = 10 \cos 25° = 9{,}06$ m; $c = b \text{ sen } \widehat{C} = 10 \text{ sen } 25° = 4{,}23$ m. *Área*: $\frac{ac}{2} = 19{,}16 \text{ m}^2$

c) $c = \sqrt{10^2 + 18^2} = 20{,}59$ mm; $\text{tg } \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{10}{18} = 0{,}556 \Rightarrow \widehat{B} = 29°\ 3'$, $\widehat{A} = 60°\ 57'$. *Área*: $\frac{ba}{2} = 90 \text{ mm}^2$

3.28. Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\widehat{A} = 80°$, $\widehat{B} = 40°$, $a = 8$ dm

b) *$\widehat{A} = 80°$, $a = 10$ m, $b = 5$ m

c) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm

d) *$\widehat{A} = 75°$, $b = 8$ mm, $c = 12$ mm

a) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \Rightarrow \widehat{C} = 180° - 40° - 80° = 60°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{B}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{8 \cdot \text{sen } 40°}{\text{sen } 80°} = 5{,}22 \text{ dm}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{8 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 80°} = 7{,}04 \text{ dm}$$

Área: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen } \widehat{C} = 18{,}1 \text{ dm}^2$

b) Aplicando el teorema del seno:

$\text{sen } \widehat{B} = \frac{b \text{ sen } \widehat{A}}{a} = \frac{5 \text{ sen } 80}{10} = 0{,}492 \Rightarrow \widehat{B} = 29°\ 29'$

$\widehat{C} = 180° - 80° - 29°\ 29' = 70°\ 31'$

Por el teorema del coseno:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos 70°\ 31' = 91{,}65 \Rightarrow c = 9{,}57 \text{ m}$

Área: $S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen } \widehat{B} = 23{,}56 \text{ m}^2$

c) Por el teorema del coseno:

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{225 + 400 - 100}{600} = 0{,}875 \Rightarrow \widehat{A} = 28°\ 57'$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{100 + 400 - 225}{400} = 0{,}6875 \Rightarrow \widehat{B} = 46°\ 34'$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{100 + 225 - 400}{300} = -0{,}25 \Rightarrow \widehat{C} = 104°\ 29'$$

Área: $S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} = 72{,}6 \text{ cm}^2$

d) Por el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 75° = 158{,}31 \Rightarrow a = 12{,}58 \text{ mm}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b \operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \frac{8 \operatorname{sen} 75°}{12{,}58} = 0{,}614 \Rightarrow \widehat{B} = 37{,}88° = 37°\ 52'\ 45''$$

$$\widehat{C} = 180° - 75° - 37{,}88° = 67{,}12° = 67°\ 7'\ 12''$$

Área: $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{A} = 46{,}36 \text{ mm}^2$

EJERCICIOS

Medida de ángulos

3.29. Copia y completa las siguientes tablas.

Grados	30°		60°	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$

Grados	210°		240°	
Radianes		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$

Grados		135°		180°
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	

Grados		315°		360°
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

Grados	30°	45°	60°	90°
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Grados	210°	225°	240°	270°
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

Grados	120°	135°	150°	180°
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	300°	315°	330°	360°
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

3.30. Pasa de grados a radianes.

a) 585° **b)** 450° **c)** 76° 52′ 30″ **d)** 382° 30′

a) $585° = 585 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{4}$ rad

b) $450° = 450 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{2}$ rad

c) $76°\ 52'\ 30'' = 76{,}875 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{41\pi}{96}$ rad

d) $382°\ 30' = 382{,}5 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{17\pi}{8}$ rad

3.31. Pasa de radianes a grados.

a) $\frac{41\pi}{3}$ rad **b)** 13π rad **c)** $\frac{11\pi}{12}$ rad **d)** 5 rad

a) $\frac{41\pi}{3}$ rad $= \frac{41\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 2460°$

b) $\frac{11\pi}{12}$ rad $= \frac{11\pi}{12} \cdot \frac{180°}{\pi} = 165°$

c) 13π rad $= 13\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 2340°$

d) 5 rad $= 5 \cdot \frac{180°}{\pi} = 286°\ 28'\ 44''$

3.32. Indica los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas completas más el ángulo restante.

a) 2345° **b)** −1500° **c)** $\frac{46\pi}{3}$ rad **d)** $-\frac{52\pi}{7}$ rad

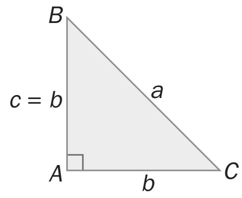
a) $2345° = 6 \cdot 360° + 185° = 6$ vueltas $+ 185°$

b) $-1500° = -4 \cdot 360° - 60° = -4$ vueltas $- 60°$

c) $\frac{46\pi}{3} = 7 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = 7$ vueltas $+ \frac{4\pi}{3}$ rad

d) $-\frac{52\pi}{7} = -3 \cdot 2\pi - \frac{10\pi}{7} = -3$ vueltas $- \frac{10\pi}{7}$ rad

3.33. **Halla los valores exactos de las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo de la figura.**



$\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$

$a = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$

sen $45° = \dfrac{b}{b\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$, *y* tg $45° = \dfrac{b}{b} = 1$

3.34. **En un triángulo isósceles, el lado mayor es el triple del lado menor. Calcula las razones trigonométricas.**

Llamando al lado menor $2x$, el lado mayor será $6x$.

Altura: $h = \sqrt{(6x)^2 - x^2} = x\sqrt{35}$

Si el ángulo mayor es α, sen $\alpha = \dfrac{x\sqrt{35}}{6x} = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$, cos $\alpha = \dfrac{x}{6x} = \dfrac{1}{6}$ y tg $\alpha = \dfrac{\sqrt{35}x}{x} = \sqrt{35}$.

Para hallar las razones del ángulo menor, β, teniendo en cuenta que $\beta = \pi - 2\alpha$, podemos aplicar las fórmulas correspondientes.

sen β = sen $(\pi - 2\alpha)$ = sen 2α = 2sen α cos $\alpha = \dfrac{\sqrt{35}}{18}$, cos β = cos $(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = \text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{17}{18}$

tg $\beta = \dfrac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \dfrac{\sqrt{35}}{17}$

3.35. **(TIC) Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.**

a) sen 36°
b) cos 124°
c) tg 331°
d) cosec 27°
e) cotg 111°
f) sec 25°
g) sen 25° 40′
h) cos 13° 15′
i) sec 126° 33′
j) tg 23° 23′ 23″
k) tg 33° 42′
l) cotg 121° 22′ 45″

a) sen 36° = 0,588
b) cos 124° = −0,559
c) tg 331° = −0,554
d) cosec 27° = 2,203
e) cotg 111° = −0,384
f) sec 25° = 1,103
g) sen 25° 40′ = 0,433
h) cos 13° 15′ = 0,973
i) sen 126° 33′ = −1,679
j) tg 23° 23′ 23″ = 0,433
k) tg 33° 42′ = 0,667
l) cotg 121° 22′ 45″ = −0,61

3.36. **(TIC) Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas y ten en cuenta que todos los ángulos están dados en radianes.**

a) sen $\frac{\pi}{12}$ **b) cosec 2**   **c) cos $\frac{3\pi}{7}$**   **d) sec 3**   **e) tg $\frac{21\pi}{5}$**   **f) cotg 2,75**

a) sen $\dfrac{\pi}{12}$ = 0,259
b) cosec 2 = 1,1
c) cos $\dfrac{3\pi}{7}$ = 0,223
d) sec 3 = −1,01
e) tg $\dfrac{21\pi}{5}$ = 0,727
f) cotg 2,75 = −2,422

3.37. **(TIC) Con ayuda de la calculadora, halla la medida en grados del ángulo α del primer cuadrante tal que:**

a) sen α = 0,345
b) cosec α = 0,3
c) tg α = 0,25
d) cos α = 0,553
e) sec α = 0,442
f) cotg α = 0,01

a) sen α = 0,345 $\Rightarrow \alpha$ = 20° 11′
b) cosec α = 0,3 $\Rightarrow$ No existe ningún ángulo.
c) tg α = 0,25 $\Rightarrow \alpha$ = 14° 2′
d) sec α = 0,442 $\Rightarrow$ No existe ningún ángulo.
e) cos α = 0,553 $\Rightarrow \alpha$ = 56° 26′
f) cotg α = 0,01 $\Rightarrow \alpha$ = 89° 26′

3.38. **Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas.**

a) $\text{sen } 240°$ **d)** $\text{cosec } 330°$ **g)** $\sec 120°$

b) $\cos 135°$ **e)** $\text{tg } 300°$ **h)** $\text{cotg } 225°$

c) $\text{sen } \frac{7\pi}{4}$ **f)** $\text{tg } \frac{7\pi}{3}$ **i)** $\sec \frac{5\pi}{3}$

a) $\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\text{cosec } 330° = -\text{cosec } 30° = -2$ g) $\sec 120° = -\sec 60° = -2$

b) $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\text{tg } 300° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$ h) $\text{cotg } 225° = \text{cotg } 45° = 1$

c) $\text{sen } \frac{7\pi}{4} = -\text{sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\text{tg } \frac{7\pi}{3} = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$ i) $\sec \frac{5\pi}{3} = \sec \frac{\pi}{3} = 2$

3.39. **Halla el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.**

a) $\text{sen } 1215°$ **b)** $\cos(-600°)$ **c)** $\text{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **d)** $\text{cotg } 1830°$ **e)** $\text{tg}(-15\pi)$ **f)** $\sec\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$

a) $\text{sen } 1215° = \text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\text{cotg } 1830° = \text{cotg } 30° = \sqrt{3}$

b) $\cos(-600°) = \cos 600° = \cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ e) $\text{tg}(-15\pi) = -\text{tg } 15\pi = -\text{tg } \pi = 0$

c) $\text{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\text{cosec } \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{2}} = -1$ f) $\sec\left(\frac{-13\pi}{3}\right) = \sec \frac{13\pi}{3} = \sec \frac{\pi}{3} = 2$

3.40. **Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:**

a) Es un ángulo del primer cuadrante y $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. **d)** $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec \alpha = \sqrt{2}$

b) Pertenece al segundo cuadrante y $\text{sen } \alpha = 0{,}25$. **e)** $90° < \alpha < 180°$ y $\text{cotg } \alpha = -3$

c) $180° < \alpha < 270°$ y $\text{tg } \alpha = \sqrt{2}$ **f)** $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $\text{cosec } \alpha = -\frac{5}{2}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones trigonométricas son positivas.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{3}{2}, \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}, \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\sqrt{15}, \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = 4,$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivas y el resto de razones son negativas.

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = -\sqrt{1 + 1\text{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + \sqrt{2}^2} = -\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } \alpha = \cos \alpha \cdot \text{tg } \alpha = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \text{cosec } \alpha = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{3\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

d) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el coseno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas.

$\sec\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = -1 \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$

e) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas.

$\text{cotg}\,\alpha = -3 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{3}$

$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha = \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

f) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivas y el resto de razones son negativas.

$\text{cosec}\,\alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{2}{5}$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2},\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{\sqrt{21}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$

3.41. Calcula en función de h el valor de cada una de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 123°, siendo sen 57° = h.
b) cos 220°, siendo tg 40° = h.
c) tg 260°, siendo sen 80° = h.
d) cos 250°, siendo sen 110° = h.
e) cos 247°, siendo sen 113° = h.
f) cosec 701°, siendo cotg 199° = h.
g) tg 290°, siendo sen 110° = h.
h) sen 83°, siendo cos 7° = h.
i) sec 203°, siendo cotg 67° = h.
j) sec $\frac{11\pi}{12}$, siendo sen $\frac{\pi}{12}$ = h.

a) $\text{sen}\ 123° = \text{sen}\ 57° = h$

b) $\cos 220° = -\sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2\ 220°}} = \sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2\ 40°}} = -\sqrt{\frac{1}{1+h^2}}$

c) $\text{tg}\ 260° = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 260°} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1-\text{sen}^2\ 60°} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1-(-\text{sen}\ 80°)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1-h^2} - 1} =$

$= \sqrt{\frac{h^2}{1-h^2}} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

d) $\cos 250° = \cos 110° = -\sqrt{1 - \text{sen}^2\ 110°} = -\sqrt{1-h^2}$

e) $\cos 247° = -\sqrt{1-\text{sen}^2\ 247°} = -\sqrt{1-\text{sen}^2\ 67°} = -\sqrt{1-h^2}$

f) $\text{cosec}\ 701° = \text{cosec}\ 341° = -\ \text{cosec}\ 19° = -\sqrt{1+\text{cotg}^2\ 19°} = -\sqrt{1+h^2}$

g) $\text{tg}\ 290° = \text{tg}\ 110° = h$

h) $\text{sen}\ 83° = \cos 7° = h$

i) $\sec 203° = \sec 23° = \frac{1}{\cos 23°} = \frac{1}{\text{sen}\ 67°} = \text{cosec}\ 67° = \sqrt{1+\text{cotg}^2\ 67°} = \sqrt{1+h^2}$

j) $\sec\frac{11\pi}{12} = -\sec\frac{\pi}{12} = -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\frac{\pi}{12}}} = -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}$

Relaciones entre las razones trigonométricas

3.42. Calcula, en función de h, la razón trigonométrica que se indica en cada caso.

a) $\operatorname{cosec} \frac{23\pi}{5}$, sabiendo que $\operatorname{cotg} \frac{3\pi}{5} = -h^2$.

b) sec 305°, sabiendo que cotg 55° $= \frac{1}{h}$.

c) tg 348°, sabiendo que cos 192° $= -h^2$.

a) $\operatorname{cosec} \frac{23\pi}{5} = \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{5} = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{3\pi}{5}} = \sqrt{1 + h^4}$

b) $\sec 305° = \frac{1}{\cos 305°} = \frac{1}{\cos 55°} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 55°}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 55°}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{1/h^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}} =$

$= \sqrt{1 + h^2}$

c) $\operatorname{tg} 348° = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 348°} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 12°} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{(-\cos 192°)^2} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{h^4} - 1} = -\frac{\sqrt{1 - h^4}}{h^2}$

3.43. Sabiendo que sen $\alpha = h$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h:

a) sen $(90° - \alpha)$

b) tg $(1080° - \alpha)$

a) $90° - \alpha$ es también un ángulo del primer cuadrante; $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos \alpha = \sqrt{1 - h^2}$.

b) $1080° = 3 \cdot 360°$; $\operatorname{tg}(1080° - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{-h}{\sqrt{1 - h^2}}$

3.44. Si tg $\alpha = h$ y α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de h:

a) sen $(90° - \alpha)$

b) cotg $(1080° - \alpha)$

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$; $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = h\sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$

a) $90° - \alpha$ es también un ángulo del primer cuadrante; $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + h^2}}$

b) $1080° = 3 \cdot 360°$; $\operatorname{cotg}(1080° - \alpha) = \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = \frac{-1}{h}$

3.45. Sabiendo que cosec $x = -\frac{7}{4}$, calcula:

a) sen $(810° - \alpha)$

b) $\sec\left(\frac{17\pi}{2} - x\right)$

x está en el tercer cuadrante o en el cuarto. Por tanto, $810° - x$ y $\frac{17\pi}{2} - x$ están en el 2.° o 3.^{er} cuadrantes. No se puede saber el signo de cos x, por lo que no se puede saber el signo de sen $(810° - x)$.

a) $\operatorname{sen}(810° - x) = \operatorname{sen}(90° - x) = \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{49}{16}}} = \pm\frac{\sqrt{33}}{7}$

b) $\sec\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x = -\frac{7}{4}$

3.46. Demuestra que tg $(270 - x) =$ cotg x.

$\operatorname{tg}(270° - x) = \frac{\operatorname{sen}(270° - x)}{\cos(270 - x)} = \frac{\operatorname{sen} 270° \cos x - \cos 270° \operatorname{sen} x}{\cos 270° \cos x + \operatorname{sen} 270° \operatorname{sen} x} = \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$

3.47. Desarrolla en función de sen α y cos α la expresión de sen 3α.

$$\text{sen } 3\alpha = \text{sen } (\alpha + 2\alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen } 2\alpha =$$
$$= \text{sen } \alpha\, (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2\, \alpha) + \cos \alpha\, (2\text{sen } \alpha \ \cos \alpha) =$$
$$= \text{sen } \alpha \cos^2 \alpha - \text{sen}^3\, \alpha + 2\text{sen } \alpha \cos^2 \alpha = 3\text{sen } \alpha \ \cos^2 \alpha - \text{sen}^3\, \alpha$$

3.48. Sabiendo que sen $\alpha = 0{,}25$ y cos $\boldsymbol{\beta} = 0{,}5$, y que α y $\boldsymbol{\beta}$ son ángulos del primer cuadrante, calcula:

a) sen $(\alpha + \boldsymbol{\beta})$ b) cos $(\alpha - \boldsymbol{\beta})$ c) sec $(\alpha + \boldsymbol{\beta})$ d) cotg $(\alpha - \boldsymbol{\beta})$

sen $\alpha = 0{,}25$; cos $\alpha = 0{,}968$; sen $\beta = 0{,}866$; cos $\beta = 0{,}5$

a) $\text{sen } (\alpha + \beta) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}968 \cdot 0{,}866 = 0{,}96$

b) $\cos (\alpha - \beta) = 0{,}968 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}866 = 0{,}7$

c) $\sec (\alpha + \beta) = \dfrac{1}{\cos (\alpha + \beta)} = \dfrac{1}{0{,}968 \cdot 0{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}866} = 3{,}74$

d) $\text{cotg } (\alpha - \beta) = \dfrac{1}{\text{tg } (\alpha - \beta)} = \dfrac{1 + \text{tg } \alpha \ \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha - \ \text{tg } \beta} = \dfrac{1 + \dfrac{0{,}25}{0{,}968} \cdot \dfrac{0{,}866}{0{,}5}}{\dfrac{0{,}25}{0{,}968} - \dfrac{0{,}866}{0{,}5}} = -0{,}98$

3.49. Si sen $\alpha = 0{,}4$ y cos $\boldsymbol{\beta} = -0{,}5$, siendo $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\pi < \boldsymbol{\beta} < \dfrac{3\pi}{2}$, calcula:

a) sen $(\alpha - \boldsymbol{\beta})$ b) cos $(\alpha + \boldsymbol{\beta})$ c) tg $(\alpha + \boldsymbol{\beta})$

sen $\alpha = 0{,}4$; cos $\alpha = -0{,}917$; sen $\beta = -0{,}866$; cos $\beta = -0{,}5$

a) $\text{sen } (\alpha - \beta) = -0{,}4 \cdot 0{,}5 - 0{,}917 \cdot 0{,}866 = -0{,}99$

b) $\cos (\alpha + \beta) = 0{,}917 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}866 = 0{,}80$

c) $\text{tg } (\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg } \alpha \ + \text{tg } \beta}{1 - \ \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} = \dfrac{-\dfrac{0{,}4}{0{,}917} + \dfrac{0{,}866}{0{,}5}}{1 + \dfrac{0{,}4}{0{,}917} \cdot \dfrac{0{,}866}{0{,}5}} = 0{,}74$

3.50. Sabiendo que tg $\alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α en cada caso.

a) Si α es un ángulo del primer cuadrante. b) Si α es un ángulo del tercer cuadrante.

a) El ángulo 2α pertenece al segundo cuadrante. Al ser tg $\alpha > 1$, $45° < \alpha < 90°$.

$$\text{tg } \alpha = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \ ; \ \text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{sen } 2\alpha = 2\text{sen } \alpha \cos \alpha = 2\frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{6 \cdot 10}{100} = 0{,}6$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2\, \alpha = \frac{10}{100} - \frac{9 \cdot 10}{100} = 0{,}1 - 0{,}9 = -0{,}8$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -0{,}75$$

b) Los mismos valores del apartado anterior, ya que el ángulo 2α también pertenece en este caso al segundo cuadrante.

3.51. Calcula el valor de la tangente de α sabiendo que es un ángulo del primer cuadrante y que sen $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \left(\text{sen } \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}; \ \text{tg } \alpha = \text{tg } (2 \cdot \frac{\alpha}{2}) = \frac{\text{sen}\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\text{sen } \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{8}}{3}}{\dfrac{8}{9} - \dfrac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{8}}{7}$$

3.52. Calcula, de forma exacta, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 15°

b) 7° 30′

a) $\text{sen } 15° = \text{sen}\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

$\cos 15° = \cos\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$\text{tg } 15° = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{1 + \cos 30°}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = 2 - \sqrt{3}$

b) $\text{sen } 7° \, 30' = \text{sen}\left(\frac{15°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 15°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}}$

$\cos 7° \, 30' = \cos\left(\frac{15°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 15°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}}$

$\text{tg } 7° \, 30' = \frac{\text{sen } 7° \, 15'}{\cos 7° \, 15'} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

3.53. Si $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ y $90° < \alpha < 180°$, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

Si el ángulo α pertenece al segundo cuadrante, el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ pertenece al primero.

$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} : \frac{1}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$

3.54. Transforma en producto de razones trigonométricas las siguientes sumas.

a) sen 48° + sen 32°

b) cos 200° + cos 40°

c) sen $\frac{\pi}{3}$ + sen $\frac{\pi}{5}$

d) sen 105° − sen 25°

e) cos 23° − cos 57°

f) cos $\frac{\pi}{3}$ − cos $\frac{\pi}{9}$

a) $\text{sen } 48° + \text{sen } 32° = 2 \text{ sen } \frac{48° + 32°}{2} \cos \frac{48° - 32°}{2} = 2 \text{ sen } 40° \cos 8°$

b) $\cos 200° + \cos 40° = 2 \cos \frac{200° + 40°}{2} \cos \frac{200° - 40°}{2} = 2 \cos 120° \cos 80°$

c) $\text{sen } \frac{\pi}{3} + \text{sen } \frac{\pi}{5} = 2 \text{ sen } \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}}{2} = 2 \text{ sen } \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15}$

d) $\text{sen } 105° - \text{sen } 25° = 2 \cos \frac{105° + 25°}{2} \text{ sen } \frac{105° - 25°}{2} = 2 \cos 65° \text{ sen } 40°$

e) $\cos 23° - \cos 57 = -2 \text{ sen } \frac{23° + 57°}{2} \text{ sen } \frac{23° - 57°}{2} = -2 \text{ sen } 40° \text{ sen } (-17°) = 2 \text{ sen } 40° \text{ sen } 17°$

f) $\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9} = -2 \text{ sen } \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}}{2} \text{ sen } \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9}}{2} = -2 \text{ sen } \frac{2\pi}{9} \text{ sen } \frac{\pi}{9}$

3.55. Transforma en suma de razones trigonométricas los siguientes productos.

a) $2 \text{ sen } 33° \cdot \cos 11°$

b) $\cos 95° \cdot \cos 38°$

c) $\text{sen } 50° \cdot \cos 75°$

d) $\text{sen } 119° \cdot \text{sen } 25°$

a) $2 \cdot \text{sen } 33° \cos 11° = \text{sen } 44° + \text{sen } 22°$

b) $\cos 95° \cdot \cos 38° = \frac{1}{2} (\cos 133° + \cos 57°)$

c) $\text{sen } 50° \cdot \cos 75° = \frac{1}{2} (\text{sen } 125° + \text{sen } (-25°)) = \frac{1}{2} (\text{sen } 125° - \text{sen } 25°)$

d) $\text{sen } 119° \cdot \text{sen } 25° = -\frac{1}{2} (\cos 144° - \cos 94°)$

3.56. Transforma en productos las siguientes sumas.

a) $\text{sen } 4x + \text{sen } 2x$

b) $\text{sen } 3x - \text{sen } x$

c) $\cos 6x + \cos 4x$

d) $\cos 8x - \cos 2x$

a) $\text{sen } 4x + \text{sen } 2x = 2 \text{ sen} \frac{4x + 2x}{2} \cos \frac{4x - 2x}{2} = 2 \text{ sen } 3x \cos x$

b) $\text{sen } 3x - \text{sen } x = 2 \cos \frac{3x + x}{2} \text{ sen } \frac{3x - x}{2} = 2 \cos 2x \,\text{sen}\, x$

c) $\cos 6x + \cos 4x = 2 \cos \frac{6x + 4x}{2} \cos \frac{6x - 4x}{2} = 2 \cos 5x \cos x$

d) $\cos 8x - \cos 2x = -2 \text{ sen} \frac{8x + 2x}{2} \text{ sen } \frac{8x - 2x}{2} = -2 \text{ sen } 5x \,\text{sen}\, 3x$

3.57. Simplifica la expresión $\text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \text{sen}\, x$.

$$\text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \text{sen}\, x = 2 \text{ sen } \frac{x + \frac{2\pi}{3} + x}{2} \cos \frac{x + \frac{2\pi}{3} - x}{2} = 2 \text{ sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} =$$

$$= 2\left(\text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \text{sen} \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\text{sen } x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\text{sen } x + \sqrt{3} \cos x\right)$$

3.58. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $\text{sen } (\alpha + \beta + \gamma)$

b) $\cos (\alpha + \beta - \gamma)$

c) $\text{sen } (2\alpha + \beta)$

d) $\cos (\alpha - 2\beta)$

a) $\text{sen } (\alpha + \beta + \gamma) = \text{sen } (\alpha + (\beta + \gamma)) = \text{sen } \alpha \cdot \cos (\beta + \gamma) + \cos\alpha \cdot \text{sen } (\beta + \gamma) =$
$= \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \gamma + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \text{sen } \gamma =$
$= \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \text{sen } \gamma - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \gamma$

b) $\cos (\alpha + \beta - \gamma) = \cos (\alpha + (\beta - \gamma)) = \cos \alpha \cdot \cos (\beta - \gamma) - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (\beta - \gamma) =$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \gamma - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \gamma + \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta \cdot \text{sen } \gamma =$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \text{sen } \gamma + \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta \cdot \text{sen } \gamma - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \gamma$

c) $\text{sen } (2\alpha + \beta) = \text{sen } 2\alpha \cdot \cos \beta + \cos 2\alpha \cdot \text{sen } \beta = 2 \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos^2 \alpha \cdot \text{sen } \beta - \text{sen}^2 \alpha \cdot \text{sen } \beta$

d) $\cos (\alpha - 2\beta) = \cos \alpha \cdot \cos 2\beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } 2\beta = \cos \alpha \cdot (\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta) + \text{sen } \alpha \cdot 2\text{sen } \beta \cdot \cos \beta =$
$= \cos \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \beta + 2\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \beta$

3.59. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha - 1} = \cos\alpha$

b) $\dfrac{1 + \cot\alpha}{\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha} = \text{cosec}\,\alpha$

c) $\text{tg}^2\,\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = \text{tg}^2\,\alpha \cdot \text{sen}^2\,\alpha$

d) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\cos\,2\alpha} = \text{tg}\,2\alpha - \text{tg}\,\alpha$

e) $\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha = \sec\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha$

f) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2\text{sen}\,\alpha} - \dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \text{sen}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha$

g) $\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos\,2\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

h) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) - \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2\,\text{tg}\,2\alpha$

i) $\text{sen}^2\,\alpha - \text{sen}^2\,\beta = \text{sen}\,(\alpha+\beta)\cdot\text{sen}\,(\alpha-\beta)$

j) $(\cos\alpha - \cos\,\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta)^2 = \dfrac{4\,\text{sen}^2\,\alpha+\beta}{2}$

k) $\dfrac{\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right) - \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2} = \text{tg}\,2\alpha$

a) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha-1} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}-1} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{(\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\,\alpha} = \cos\alpha$

b) $\dfrac{1+\text{cotg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \dfrac{1+\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cosec}\,\alpha$

c) $\text{tg}^2\,\alpha-\text{sen}^2\,\alpha = \dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} - \text{sen}^2\,\alpha = \dfrac{\text{sen}^2\,\alpha\ \text{sen}^2\,\alpha\ \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\text{sen}^2\,\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\text{sen}^2\,\alpha = \text{tg}^2\,\alpha\cdot\text{sen}^2\,\alpha$

d) $\text{tg}^2\,2\alpha - \text{tg}\,\alpha = \dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha} - \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha\left(\dfrac{2}{1-\text{tg}^2\,\alpha}-1\right) = \text{tg}\,\alpha\,\dfrac{1+\text{tg}^2\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha} = \text{tg}\,\alpha\,\dfrac{1+\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}} =$

$= \text{tg}\alpha\,\dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}} = \text{tg}\,\alpha\,\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha} = \dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\cos^2\alpha}$

e) $\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha} = \sec\alpha\cdot\text{cosec}\,\alpha$

f) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha} - \dfrac{\text{sen}2\,\alpha}{1+\cos2\,\alpha} = \dfrac{1-\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\alpha}{2\text{sen}\,\alpha} - \dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha} = \dfrac{2\,\text{sen}^2\,\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha} - \dfrac{2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \text{sen}\,\alpha-\text{tg}\,\alpha$

g) $\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{1+\cos^2\alpha} = \dfrac{2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha} = \dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha}{2\,\cos^2\alpha} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

h) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) - \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{\text{tg}\dfrac{\pi}{4}+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\dfrac{\pi}{4}\text{tg}\,\alpha} - \dfrac{\text{tg}\dfrac{\pi}{4}-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\dfrac{\pi}{4}\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{1+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha} - \dfrac{1-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{g}\,\alpha} =$

$= \dfrac{1+\text{tg}^2\,\alpha+2\,\text{tg}\,\alpha-1-\text{tg}^2\,\alpha+2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha} = \dfrac{4\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha} = 2\,\text{tg}^2\,2\alpha$

i) $\text{sen}\,(\alpha+\beta)\cdot\text{sen}\,(\alpha-\beta) = (\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta)\cdot(\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\ \text{sen}\,\beta) =$

$= \text{sen}^2\,\alpha\ \cos^2\beta - \cos^2\alpha\ \text{sen}^2\,\beta = \text{sen}^2\,\alpha\ \cos^2\beta - (1-\text{sen}^2\,\alpha)\ \text{sen}^2\,\beta = \text{sen}^2\,\alpha\ \cos^2\beta + \text{sen}^2\,\alpha\ \text{sen}^2\,\beta - \text{sen}^2\,\beta =$

$= \text{sen}^2\,\alpha\ (\cos^2\beta+\text{sen}^2\,\beta) - \text{sen}^2\,\beta = \text{sen}^2\,\alpha - \text{sen}^2\,\beta$

j) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta)^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\ \cos\beta + \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\,\beta + 2\ \text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\beta =$

$= 1+1-2\cdot\dfrac{1}{2}\,(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) - 2\cdot\dfrac{1}{2}\,(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)) =$

$= 2 - \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2-2\left[\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ \text{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right] =$

$= 2-2\left[1-2\ \text{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right] = 4\ \text{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

k) Equivale a la identidad del apartado h.

3.60. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas.

a) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2$

b) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta\ (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)$

c) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

e) $\operatorname{sen} 2\alpha\ (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)$

f) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

g) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} \cdot \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$

a) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2$

b) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\ (\operatorname{cotg}\alpha + \cot\beta) = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\ \dfrac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$

c) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}\alpha} = 1 + \operatorname{sen}\alpha$

e) $\operatorname{sen} 2\alpha\cdot(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}\right) = 2$

f) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha} = \left(\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot\left(\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\right) = \dfrac{(1-\operatorname{sen}\alpha)\cdot(1+\operatorname{sen}\alpha)(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\cdot(1-\operatorname{sen}\alpha)} = (1+\operatorname{sen}\alpha)(1+\cos\alpha)$

g) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{2}{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2}}{\cos 2\alpha}\ \dfrac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}\cdot\dfrac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 1$

3.61. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos.

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 8\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{2\cos 3\alpha}$

b) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha}$

d) $\dfrac{\cos 2\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen}\alpha}$

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 8\alpha\ 1\ \operatorname{sen} 2\alpha}{2\cos 3\alpha} = \dfrac{2\operatorname{sen} 5\alpha\cos 3\alpha}{2\cos 2\alpha} = \operatorname{sen} 5\alpha$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha} = \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\cos 4\alpha\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\cos 4\alpha}$

b) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

d) $\dfrac{\cos 2\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{2\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{cotg}\dfrac{3\alpha}{2}$

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

3.62. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = 1$

d) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

f) $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\operatorname{sen} x = 0$

h) $1 + \cos x = 0$

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 360°k \\ x = 150° + 360°k \end{cases}$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 360°k \\ x = 330° + 360°k \end{cases}$

c) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45° + 360°k \\ x = 225° + 360°k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225° + 360°k \\ x = 315° + 360°k \end{cases}$

e) $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120° + 360°k \\ x = 240° + 360°k \end{cases}$

f) $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 150° + 360°k \\ x = 330° + 360°k \end{cases}$

f) $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180°k$

g) $1 - \cos x = 0 \Rightarrow x = 360°k$

3.63. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\operatorname{sen} 4x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} 3x = -1$ e) $\cos \dfrac{x}{3} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = 0$ f) $\operatorname{tg} \dfrac{3x}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\operatorname{sen} 4x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi k}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2} \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$

b) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \dfrac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$

e) $\cos \dfrac{x}{3} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$

c) $\operatorname{tg} 3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi k}{3} \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{2\pi k}{3} \end{cases}$

f) $\operatorname{tg} \dfrac{3x}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \dfrac{3x}{4} = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10\pi}{9} + \dfrac{8\pi k}{3} \\ x = \dfrac{22\pi}{9} + \dfrac{8\pi k}{3} \end{cases}$

3.64. (TIC) Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} x = \cos x$ b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$ c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$ d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45° + 360° k \\ x = 225° + 360° k \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x (2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180° k \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360° k \\ x = 300° + 360° k \end{cases} \end{cases}$

c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360° k \\ x = 240° + 360° k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = 2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2} \operatorname{sen} x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2} \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45° + 360° k$

3.65. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0°, 360°].

a) $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x = 5$ b) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9$ c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x$ d) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x$

a) $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cot} g x = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \dfrac{4}{\operatorname{tg} x} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 4 = 5 \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 4 \Rightarrow x = 75°\ 58' \ \ x = 255°\ 58' \\ \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45° \ \ x = 225° \end{cases}$

b) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9 \Rightarrow 8 \cos^2 x - 8 \operatorname{sen}^2 x - 8 \cos x + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \cos^2 x - 8 + 8 \cos^2 x - 8 \cos x + 9 = 0 \Rightarrow 16 \cos^2 x - 8 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{32} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = 75°\ 31' \ ; \ x = 284°\ 29'$

c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cot} g x \Rightarrow \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \dfrac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1 \Rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30°, x = 210° \\ x = 150°, x = 330° \end{cases}$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 1 = 4 \cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60°, \ x = 300° \\ x = 120°, \ x = 240° \end{cases}$

3.66. (TIC) Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas comprendidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0$

b) $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x - \cos x$

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \text{ no aporta soluciones} \end{cases}$

b) $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \left(2 + \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6},\ x = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x - \cos x \Rightarrow \cos 2x + \cos x = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \cos \dfrac{3x}{2} \cos \dfrac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \dfrac{3x}{2} \cos \dfrac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \dfrac{x}{2} \left[\cos \dfrac{3x}{2} - \operatorname{sen} \dfrac{3x}{2}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi,\ x = 3\pi \\ \operatorname{tg} \dfrac{3x}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{4} : \dfrac{3x}{2} = \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

3.67. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

a) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 6x = 0$

b) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x$

c) $\sqrt{3} \cos x + \operatorname{sen} x = 2$

a) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 6x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} \dfrac{9x}{2} \cos \dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{9x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\dfrac{2\pi}{9},\ x = \dfrac{2\pi}{9} \\ \cos \dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi,\ x = -\dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

b) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x \Rightarrow 2 \cos 4x \cos x = \cos x \Rightarrow \cos x\,(2 \cos 4x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ x = -\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 4x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12},\ x = \dfrac{\pi}{12},\ x = \dfrac{\pi}{12} \end{cases}$

c) $\sqrt{3} \cos x + \operatorname{sen} x = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$

3.68. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0, 360°].

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90° \end{cases}$ c) $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases}$

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 90° \Rightarrow \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 90°,\ y = 60° \\ x = 90°,\ y = 120° \\ x = 90°,\ y = 240° \\ x = 90°,\ y = 300° \end{cases} \\ x = 270° \Rightarrow \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 270°,\ y = 60° \\ x = 270°,\ y = 120° \\ x = 270°,\ y = 240° \\ x = 270°,\ y = 300° \end{cases} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)) = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\operatorname{sen}(x+y) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x + y) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x + y = 30°,\ \ x + y = 150°$

$\begin{cases} \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\operatorname{sen}(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0°,\ x - y = 180°$

Soluciones:

$(x = 15°,\ y = 15°)\ (x = 75°,\ y = 75°)\ (x = 285°,\ y = 105°)\ (x = 105°,\ y = 285°)\ (x = 165°,\ y = 345°)\ (x = 345°,\ y = 165°)$

c) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90° \end{cases} \Rightarrow 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 45° \Rightarrow x - y = 90° \\ \dfrac{x-y}{2} = 315° \Rightarrow x - y = 630° \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 90° \\ x - y = 90° \end{cases} \Rightarrow x = 90°,\ y = 0°$

d) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x - \pi) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45°,\ x = 225°$

Solución: $x = 225°,\ y = 45°$

Resolución de triángulos

3.69. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\widehat{A} = 90°$, $a = 25$ mm, $c = 14$ mm
b) $\widehat{B} = 90°$, $a = 28$ cm, $c = 45$ cm
c) $\widehat{C} = 90°$, $\widehat{A} = 20°$, $a = 12$ dm
d) $\widehat{B} = 90°$, $\widehat{A} = 15°$, $b = 15$ m

a) $b = \sqrt{25^2 - 14^2} = 20{,}71$ mm, $\operatorname{sen}\widehat{C} = \dfrac{14}{25} \Rightarrow \widehat{C} = 34°\ 3' \Rightarrow \widehat{B} = 55°\ 57'$

b) $b = \sqrt{45^2 + 28^2} = 53$ cm; $\operatorname{tg}\widehat{C} = \dfrac{45}{28} \Rightarrow \widehat{C} = 58°\ 7' \Rightarrow \widehat{A} = 31°\ 53'$

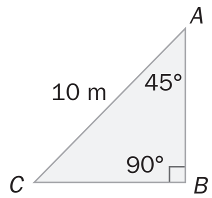
c) $\widehat{B} = 70°$; $c = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \dfrac{12}{\operatorname{sen} 20} = 35{,}09$ dm; $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\widehat{A}} = \dfrac{12}{\operatorname{tg} 20} = 32{,}97$ dm

d) $\widehat{C} = 75°$; $a = b\ \operatorname{sen}\widehat{A} = 15 \cdot \operatorname{sen} 15 = 3{,}88$ m; $c = b \cdot \cos\widehat{A} = 15 \cos 15 = 14{,}49$ m

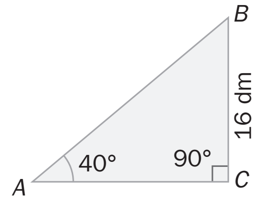
3.70. Calcula el área de cada uno de estos triángulos rectángulos.

a) $\widehat{A} = 90°$, $a = 73$ mm, $c = 55$ mm

b)



c)



a) $b = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48 \Rightarrow S = \dfrac{55 \cdot 48}{2} = 1320 \text{ mm}^2$

b) $a = 10 \operatorname{sen} 45 = 5\sqrt{2}$ m; $c = 5\sqrt{2}$ m; $S = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25 \text{ m}^2$

c) $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg} \widehat{A}} = \dfrac{16}{\operatorname{tg} 40} = 19{,}07$ dm; $S = \dfrac{16 \cdot 19{,}07}{2} = 152{,}6 \text{ dm}^2$

3.71. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\widehat{C} = 40°$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm

c) $a = 3$ cm, $\widehat{B} = 30°$, $c = 5$ cm

d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35°$

e) $a = 30$ cm, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 50°$

f) $b = 25$ cm, $\widehat{B} = 55°$, C = 65°

a) $\dfrac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{B} = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{c} = \dfrac{20 \cdot \operatorname{sen} 40°}{28} = 0{,}459 \Rightarrow \widehat{B} = 27°\ 20'$, $\widehat{A} = 112°\ 40'$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow a = \dfrac{c \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \dfrac{28 \cdot \operatorname{sen} 112°\ 40'}{\operatorname{sen} 40°} = 40{,}2$ cm

b) $\cos \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{81 + 1600 - 1681}{720} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90°$

$\cos \widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{1681 + 1600 - 81}{3280} = 0{,}9756 \Rightarrow \widehat{B} = 12°\ 41'$

$\dfrac{\cos \widehat{C} = a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{1681 + 81 - 1600}{738} = 0{,}2195 \Rightarrow \widehat{A} = 77°\ 19'$

c) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B} = 9 + 25 - 30 \cos 30 = 8{,}0192 \Rightarrow b = 2{,}8318$ cm

$\dfrac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{C} = \dfrac{c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B}}{b} = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen} 30°}{2{,}8318} = 8{,}8828 \Rightarrow$ Dos soluciones $\begin{cases} \widehat{C} = 61°\ 59',\ \widehat{A} = 88°\ 1' \\ \widehat{C} = 118°\ 1',\ \widehat{A} = 31°\ 59' \end{cases}$

d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 144 + 225 - 360 \cos 35° = 74{,}1053 \Rightarrow c = 8{,}6084$ cm

$\dfrac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{B} = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{c} = \dfrac{15 \cdot \operatorname{sen} 35°}{8{,}6084} = 0{,}999 \Rightarrow$ Dos soluciones $\begin{cases} \widehat{C} = 88°\ 5',\ \widehat{A} = 56°\ 55' \\ \widehat{C} = 91°\ 54',\ \widehat{A} = 53°\ 6' \end{cases}$

e) $\widehat{A} = 180° - 30° - 50° = 100°$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \dfrac{30 \cdot \operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 100°} = 23{,}34$ cm

$\dfrac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \Rightarrow b = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \dfrac{30 \cdot \operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} 100°} = 15{,}23$ cm

f) $\widehat{A} = 180° - 55° - 65° = 60°$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \dfrac{25 \cdot \operatorname{sen} 65°}{\operatorname{sen} 55°} = 27{,}66$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \Rightarrow a = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \dfrac{25 \cdot \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 55°} = 26{,}43$ cm

3.72. Calcula el área de cada uno de estos triángulos.

a) $\widehat{A} = 80°$, $b = 25$ cm, $c = 16$ cm
b) $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{B} = 40°$, $c = 20$ cm
c) $a = 16$ cm, $b = 25$ cm, $c = 15$ cm
d) $\widehat{A} = 66°$, $a = 15$ cm, $c = 20$ cm
e) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35°$

a) $S = \dfrac{1}{2}\, bc \operatorname{sen}\widehat{A} = 196{,}96 \text{ cm}^2$

b) $\widehat{C} = 70°,\ a = 20 \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\, ac \operatorname{sen}\widehat{B} = 128{,}56 \text{ cm}^2$

c) $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}792 \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}6105$

d) $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{C} = \dfrac{c \operatorname{sen}\widehat{A}}{a} = \dfrac{20 \cdot \operatorname{sen} 66°}{15} > 1$. No hay triángulo.

e) $S = \dfrac{1}{2}\, ab \operatorname{sen}\widehat{C} = 43{,}02 \text{ cm}^2$

PROBLEMAS

3.73. Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Por la acción del viento, el globo se encuentra a una altura de 8 m.

Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

Sea α la inclinación buscada. Entonces, sea $= \dfrac{8}{10} \Rightarrow \alpha \approx 53°\ 7'\ 48''$.

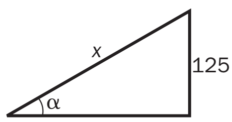
3.74. En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de 73° 3′.

Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

$\operatorname{tg} 73°\ 3' = \dfrac{52}{x} \Rightarrow x \approx 15{,}85$ m

3.75. Una señal de tráfico indica que la inclinación de un tramo de carretera es del 8%, lo cual quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura.

a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?
b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125?



a) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}08 \Rightarrow \alpha \approx 4°\ 34'$
b) Sea x el recorrido pedido: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{125}{x} \Rightarrow x = \dfrac{125}{\operatorname{sen}\alpha} = 1570$ m

3.76. Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42°. Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24°.

Calcula la altura del pino.

Sea h la altura del pino y x la distancia del pie del pino al primer punto.

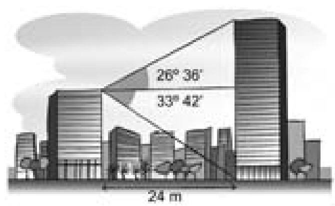
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 42° &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 24° &= \frac{h}{2{,}5 + x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 42 = 0{,}9x \\ 0{,}445 &= \frac{0{,}9x}{2{,}5 + x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1{,}1125 + 0{,}445x = 0{,}9x \Rightarrow x = 2{,}44 \Rightarrow h = 2{,}2 \text{ m}$$

3.77. Calcula la altura de los dos edificios de la figura.

Sea x la altura del primer edificio e y la del segundo.

$\operatorname{tg} 33°42' = \dfrac{x}{24} \Rightarrow x = 24 \cdot \operatorname{tg} 33°42' = 16$ m

$\operatorname{tg} 26°36' = \dfrac{y - x}{24} \Rightarrow y - x = 24 \cdot \operatorname{tg} 26°36' = 12 \text{ m} \Rightarrow y = 12 + 16 = 28$ m



3.78. **Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km por hora, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 82°.**

¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 82°$. Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = 90 \cdot 0{,}25 = 22{,}5 \text{ km} \\ e_2 = 80 \cdot 0{,}25 = 20 \text{ km} \end{array}\right\} \Rightarrow d = \sqrt{22{,}5^2 + 20^2 - 2 \cdot 22{,}5 \cdot 20 \cdot \cos 82°} \approx 27{,}9 \text{ km}$$

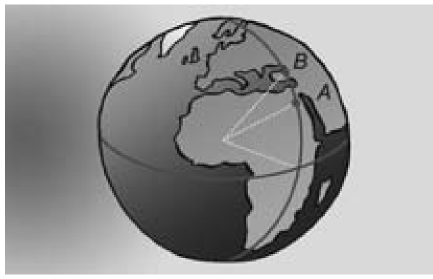
3.79. **Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad uniforme de 70 km por hora, y el otro la segunda con una velocidad constante de 90 km por hora.**

¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 22°\ 30'$. Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = 70 \cdot 0{,}5 = 35 \text{ km} \\ e_2 = 90 \cdot 0{,}5 = 45 \text{ km} \end{array}\right\} \Rightarrow d = \sqrt{35^2 + 45^2 - 2 \cdot 35 \cdot 45 \cdot \cos\alpha} \approx 18{,}4 \text{ km}$$

3.80. **Dos ciudades *A* y *B* están situadas sobre el mismo meridiano de la esfera terrestre, mientras que la ciudad *C* se encuentra en el mismo paralelo que *A*. La latitud de *A* es de α = 40° Norte.**



a) Si la ciudad *B* está 150 km al norte de *A*, calcula su latitud sabiendo que el radio de la Tierra es de unos 6370 km.

b) Si la ciudad *C* está situada en un meridiano a 30° al oeste de *A*, ¿qué distancia separa estas dos ciudades?

a) Recordando que la longitud de un arco de amplitud α grados y de una circunferencia de radio r es $L = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°}$:

$$\alpha + \beta = \frac{180° \cdot L}{\pi \cdot r} = \frac{180° \cdot \left[\frac{\pi \cdot 40° \cdot 6370}{180°} + 150\right]}{\pi \cdot 6370} \approx 41°\ 21'$$

b) Se calcula en primer lugar el radio del paralelo correspondiente.

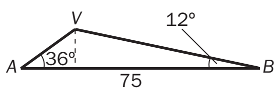
$$\text{sen } 50° = \frac{r}{6370} \Rightarrow r = 4879{,}7 \text{ km};\ L = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°} = 2555 \text{ km}$$

3.81. **Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan entre sí 75 km. Las visuales desde *A* y *B* hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° de amplitud, respectivamente.**

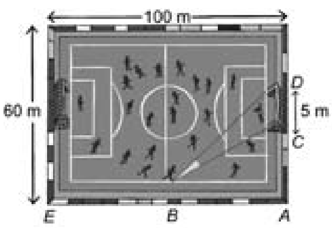
Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de *A* y de *B*, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

$$\frac{VB}{\text{sen } 36°} = \frac{75}{\text{sen } 132°} \Rightarrow VB \approx 59 \text{ km}$$

$$\frac{VA}{\text{sen } 12°} = \frac{75}{\text{sen } 132°} \Rightarrow VA \approx 21 \text{ km} \qquad h = VB\ \ \text{sen } 12 \approx 12{,}3 \text{ km}$$



3.82. **Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto *B* del campo.**

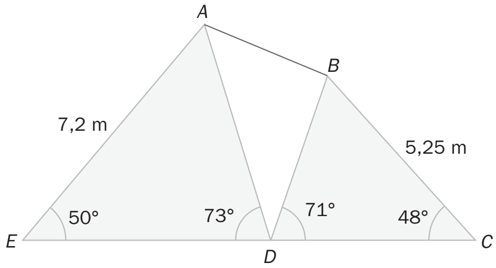


$$\text{tg } \widehat{CBA} = \frac{\frac{60-5}{2}}{BA} = \frac{27{,}5}{40} = 0{,}6875 \Rightarrow \widehat{CBA} = 34°\ 31'$$

$$\text{tg } \widehat{DBA} = \frac{32{,}5}{BA} = \frac{32{,}5}{40} = 0{,}8125 \Rightarrow \widehat{DBA} = 39°\ 6'$$

$$\alpha = 39°\ 6' - 34°\ 31' = 4°\ 35'$$

3.83. Calcula la distancia entre los puntos *A* y *B*.



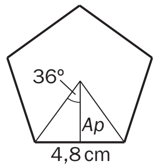
$$\frac{AD}{\text{sen } 50°} = \frac{7{,}2}{\text{sen } 73°} \Rightarrow AD = 5{,}77$$

$$\frac{BD}{\text{sen } 48°} = \frac{9{,}25}{\text{sen } 71°} \Rightarrow BD = 7{,}27$$

$$AB^2 = 5{,}77^2 + 7{,}27^2 - 2, \cdot 5{,}77 \cdot 7{,}27 \cos(180° - 73° - 71°) = 18{,}27$$

$AB = 4{,}27$ m

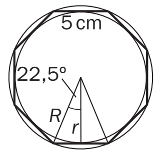
3.84. Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm² de área.



El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12$ cm. El perímetro del pentágono 48 cm. Cada lado del pentágono mide 9,6 cm.

$$\text{tg } 36° = \frac{4{,}8}{Ap} \Rightarrow Ap = \frac{4{,}8}{\text{tg}36°} \approx 6{,}6 \text{ cm} \Rightarrow A_{pentágono} = \frac{perímetro \times Ap}{2} = \frac{48 \cdot 6{,}6}{2} \approx 158{,}56 \text{ cm}^2$$

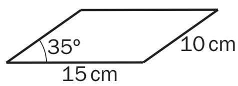
3.85. Calcula los radios y las áreas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octógono regular de 5 cm de lado.



$$\text{tg } \frac{360°}{16} = \frac{5/2}{R} \Rightarrow R = \frac{5\ /\ 2}{\text{sen } 22°\ 30'} = 6{,}53 \text{ cm} \Rightarrow S_c = \pi R^2 = 134 \text{ cm}^2$$

$$\text{tg } \frac{360°}{16} = \frac{5/2}{r} \Rightarrow r = \frac{5\ /\ 2}{\text{tg } 22°\ 30'} = 6{,}04 \text{ cm} \Rightarrow S_c = \pi r^2 = 114 \text{ cm}^2$$

3.86. Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35°.



El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales.

$S_t = \frac{1}{2} 10 \cdot 15 \cdot \text{sen}35°$ $\qquad$ $S_p = 10 \cdot 15 \cdot \text{sen}35° = 86{,}04 \text{ cm}^2$

3.87. a) Halla una fórmula que permita calcular el área de un rombo conociendo las medidas de su lado y de uno de sus ángulos.

b) ¿Cuál es el área de un rombo de 15 cm de lado si uno de sus ángulos mide 40°?

a) El rombo se puede dividir en dos triángulos isósceles iguales.

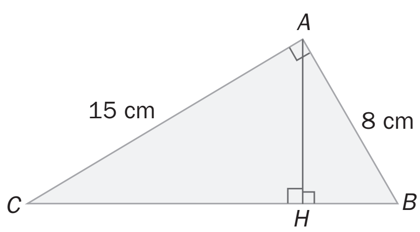
$$S_t = \frac{1}{2} x^2 \cdot \text{sen}\,\alpha \Rightarrow S_R = x^2 \cdot \text{sen}\,\alpha$$

b) $S_R = 15^2 \ \text{sen } 40° = 144{,}63 \text{ cm}^2$

3.88. Dado el triángulo de la figura.

a) Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos.

b) Halla la medida de los segmentos *BH* y *CH*.



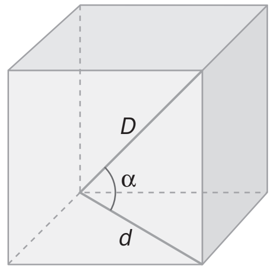
a) $BC = 17$ cm

$\text{sen } \widehat{B} = \frac{15}{17}$ $\qquad$ $\cos \widehat{B} = \frac{8}{17}$ $\qquad$ $\text{tg } \widehat{B} = \frac{15}{8}$

$\text{sen } \widehat{C} = \frac{8}{17}$ $\qquad$ $\cos \widehat{C} = \frac{15}{17}$ $\qquad$ $\text{tg } \widehat{C} = \frac{8}{15}$

b) $CH = 15 \cos \widehat{C} \approx 13{,}24$ cm $\qquad$ $BH = 8 \cos \widehat{B} \approx 3{,}76$ cm

3.89. Calcula el ángulo α que forman la diagonal del cubo y la diagonal de una cara del mismo.

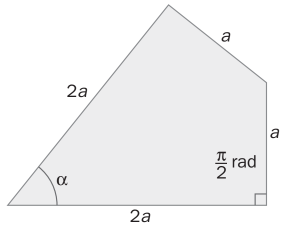


Sea a la arista del cubo.

Diagonal del cubo: $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. Diagonal de una cara: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 35^\circ\ 16'$$

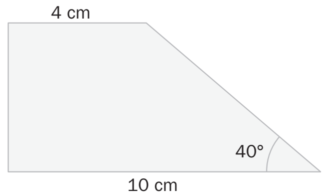
3.90. Calcula la amplitud del ángulo α de la figura.



La figura se puede dividir en dos triángulos iguales, ya que tienen los tres lados iguales.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 26^\circ\ 34' \Rightarrow \alpha = 53^\circ\ 8'$$

3.91. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la figura.



Altura: $h = 6 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 5{,}03$ cm

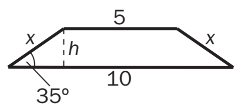
Lado restante: $b = 6 \cdot \cos 40^\circ = 4{,}6$ cm

Perímetro: 23,63 cm

Área: $\dfrac{10 + 4}{2} \cdot 5{,}03 = 35{,}21\ \text{cm}^2$

3.92. Las bases de un trapecio isósceles miden 10 y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35°.

Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

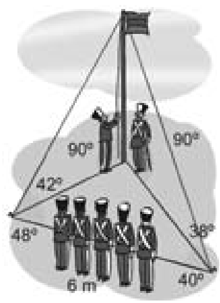


$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{\frac{10-5}{2}} \Rightarrow h = 1{,}75 \text{ cm}$$

$$\cos 35^\circ = \frac{2{,}5}{x} \Rightarrow x = \frac{2{,}5}{\cos 35^\circ} = 3{,}05 \text{ cm}$$

$$P = 21{,}1 \text{ cm} \quad ; \quad A = \frac{(10+5)\cdot h}{2} = 13{,}1 \text{ cm}^2$$

3.93. Se ha colocado un poste sujeto al suelo mediante dos anclajes como aparece en la figura. Determina si las medidas son correctas.

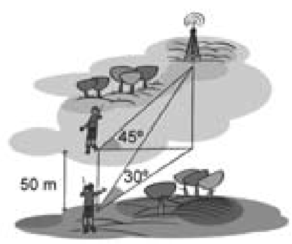


$$CB = \frac{6 \cdot \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen}(180^\circ - 40^\circ - 48^\circ)} = 3{,}86 \Rightarrow AB = 3{,}86 \cdot \operatorname{tg} 42^\circ = 3{,}48 \text{ m}$$

$$BD = \frac{6 \cdot \operatorname{sen} 48^\circ}{\operatorname{sen}(180^\circ - 40^\circ - 48^\circ)} = 4{,}46 \Rightarrow AB = 4{,}46 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2{,}57 \text{ m}$$

Los datos no son correctos.

3.94. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45°. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30°. Halla la altura de la antena.



La distancia inicial a la torre será igual a la altura de la antena (ángulo de 45°).

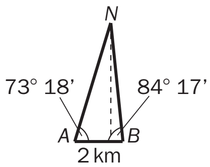
Desde el segundo punto, la distancia a la torre será $\dfrac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ} = h\sqrt{3}$.

Al ser el triángulo del suelo rectángulo, $h^2 + 50^2 = (h\sqrt{3})^2 \Rightarrow h \approx 35{,}36$ m.

3.95. Dos personas que están separadas por 2 km de distancia, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos respectivos de 73° 18′ y 84° 17′.

Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

Hay dos posibles interpretaciones del problema.

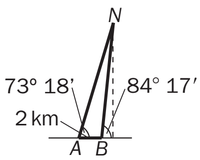


Si la nube está situada entre los dos observadores:

$$\frac{NB}{\text{sen } 73° \ 18'} = \frac{2}{\text{sen } 22° \ 25'} \Rightarrow NB \approx 5{,}02 \text{ km}$$

$$\frac{NA}{\text{sen } 84° \ 17'} = \frac{2}{\text{sen } 22° \ 25'} \Rightarrow NA \approx 5{,}22 \text{ km}$$

$h = NB \cdot \text{sen } 84° 17' \approx 5$ km



Si la nube está situada *a un mismo lado* de los dos observadores:

$$\frac{NB}{\text{sen } 73° \ 18'} = \frac{2}{\text{sen } 10° \ 59'} \Rightarrow NB \approx 10{,}05 \text{ km}$$

$$\frac{NA}{\text{sen } 95° \ 43'} = \frac{2}{\text{sen } 10° \ 59'} \Rightarrow NA \approx 10{,}45 \text{ km}$$

$h = NB \cdot \text{sen } 84° 17' \approx 10$ km

3.96 Determina, en función del número de lados, las áreas de los polígonos regulares de *n* lados inscritos y circunscritos, respectivamente, a una circunferencia de 10 cm de radio.

Polígono de *n* lados inscrito en una circunferencia de radio 10 cm:

$$S = n \cdot S_t = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 \text{ sen} \frac{360°}{n} = 50n \cdot \text{sen} \frac{360°}{n}$$

Siendo S_t la superficie de un triángulo cuyos lados son un lado del polígono y dos radios de la circunferencia circunscrita.

Polígono de *n* lados circunscrito en una circunferencia de radio 10 cm:

$$S = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot 2 \text{ tg} \frac{180°}{n} = 100n \cdot \text{tg} \frac{180°}{n}$$

3.97. a) Demuestra que en cualquier triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, se verifica que: sen $2\widehat{B}$ = sen $2\widehat{C}$

b) Demuestra que cualquier triángulo *ABC* que verifique la igualdad anterior es isósceles o rectángulo.

a) $\widehat{B} + \widehat{C} = 90 \Rightarrow 2\widehat{B} = 180 - 2\widehat{C} \Rightarrow \text{sen } 2\widehat{B} = \text{sen } (180 - 2\widehat{C}) = \text{sen } 2\widehat{C}$

b) $\text{sen } 2\widehat{B} = \text{sen } 2\widehat{C} \Rightarrow \begin{cases} 2\widehat{B} = 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \text{ es isósceles} \\ 2\widehat{B} = 180° - 2\widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180° \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90° \Rightarrow \widehat{A} = 90° \text{ es restángulo} \end{cases}$

3.98. Si $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son los tres ángulos de un triángulo cualquiera, calcula el valor de la expresión:

$\text{cotg } \widehat{A} \cdot \text{cotg } \widehat{B} + \text{cotg } \widehat{A} \cdot \text{cotg } \widehat{C} + \text{cotg } \widehat{B} \cdot \text{cotg } \widehat{C}$

$$\text{cotg}(\widehat{A} + \widehat{B}) = \frac{1}{\text{tg } (\widehat{A} + \widehat{B})} = \frac{1 - \text{tg } \widehat{A} \text{ tg } \widehat{B}}{\text{tg } \widehat{A} + \text{tg } \widehat{B}} = \frac{\text{cotg } \widehat{A} \text{ cotg } \widehat{B} - 1}{\text{cotg } \widehat{A} + \text{cotg } \widehat{B}} = \text{cotg } (180° - \widehat{C}) = -\text{ cotg } \widehat{C}$$

Por tanto: $\text{cotg } \widehat{A} \cdot \text{cotg } \widehat{B} - 1 = -\text{ cotg } \widehat{A} \text{ cotg } \widehat{C} - \text{cotg } \widehat{B} \cdot \text{cotg } \widehat{C} \Rightarrow$ La expresión vale 1.

3.99. Expresa sen 4α y cos 4α en función de sen α y de cos α.

$\text{sen } 4\alpha = \text{sen}(2(2\alpha)) = 2 \text{ sen } 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \cdot 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) = 4 \text{ sen } \alpha \cos^3 \alpha - 4 \text{ sen}^3 \alpha \cos \alpha$

Y de este resultado, junto con el obtenido en el ejercicio 47 se llega a:

$$\text{tg } 4\alpha = \frac{\text{sen } 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{4 \text{ sen } \alpha \cos^3 \alpha - 4 \text{ sen}^3 \alpha \cos \alpha}{\cos^4 \alpha + \text{sen}^4 \alpha - 6 \text{ sen}^2 \alpha \cos 2 \alpha}$$

3.100. Calcula tg(α + β + γ) en función de tg α, tg β y tg γ.

$$\text{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \text{tg}(\alpha + (\beta + \gamma)) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg}(\beta + \gamma)}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg}(\beta + \gamma)} = \frac{\text{tg } \alpha + \dfrac{\text{tg } \beta + \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg } \beta \text{ tg } \gamma}}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \dfrac{\text{tg } \beta + \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \gamma}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta + \text{tg } \gamma - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \gamma}}{\dfrac{1 - \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \gamma - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \gamma}} = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta + \text{tg } \gamma - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \gamma}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \gamma - \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \gamma}$$

3.101. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica.

$$\cos x = \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos^2 x + 2 \cos x}{4} - \frac{1 + \cos^2 x - 2\cos x}{4} = \cos x$$

3.102. a) Demuestra que $1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

b) Con ayuda de la fórmula anterior y el teorema del coseno, demuestra que en un triángulo de lados *a*, *b* y *c* se verifica:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}$$

siendo *p* el valor del semiperímetro del triángulo:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

a) $1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \dfrac{\alpha}{2}$

b) $2 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha = 1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(b + c + a) \cdot (b + c - a)}{2bc} =$

$= \dfrac{2p(p - a)}{bc} \Rightarrow \cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p - a)}{bc}}$

3.103. (TIC) Resuelve la ecuación trigonométrica $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$

$$\text{sen}^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\text{sen}^2 x - \cos^2 x)(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Soluciones: $2x = 120° + 360° k \Rightarrow x = 60° + 180° k$

$2x = 240° + 360° k \Rightarrow x = 120° + 180° k$

3.104. (TIC) Resuelve este sistema de ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0,\ 2\pi]$. $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = 1 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y + 2(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \cos x \cos y) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(x-y) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \dfrac{\pi}{2} \\ y - x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = x + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \cos y + \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = 1 - \operatorname{sen} y \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 y = 1 + \operatorname{sen}^2 y - 2\operatorname{sen} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 y - 2\operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} y(\operatorname{sen} y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow y = 0\ ;\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2}\ ;\ x = \pi \text{ solución falsa} \end{cases}$$

De la misma forma, se obtiene también la solución $x = 0\ ;\ y = \dfrac{\pi}{2}$.

3.105. Calcula, en función de t, el valor de las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = t$.

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

3.106. Si la suma de dos ángulos α y β es igual a $\dfrac{\pi}{3}$ radianes, calcula el valor de la expresión: $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}$

$$\frac{\cos\ \alpha + \cos\ \beta}{\operatorname{sen}\ \alpha + \operatorname{sen}\ \alpha} = \frac{2\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\ \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

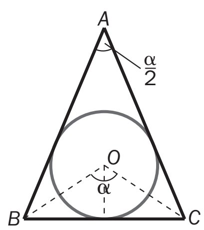
3.107. El radio de la circunferencia inscrita a un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo sabiendo que su base mide 60 cm.

$OB = \sqrt{18^2 + 30^2} \approx 35$. El triángulo OBC tiene por lados 35, 35 y 60 cm. Por tanto:

$60^2 = 35^2 + 35^2 - 35 \cdot 35 \cdot \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{1224 + 1224 - 3600}{2448} = -0{,}4706 \Rightarrow \alpha \approx 118^\circ\ 4' \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\alpha}{2} = 59^\circ\ 2'$$

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ\ 29'\ ,\quad AB = AC = \frac{BC \cdot \operatorname{sen}\ 60^\circ\ 29'}{\operatorname{sen}\ 59^\circ\ 2'} = 60{,}9 \text{ cm}$$



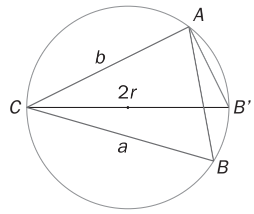
3.108. Demuestra que la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo cualquiera es igual al producto de las mismas.

$$\widehat{A}+\widehat{B}=180°-\widehat{C}\Rightarrow \mathrm{tg}(\widehat{A}+\widehat{B})=\mathrm{tg}(180°-\widehat{C})\Rightarrow\frac{\mathrm{tg}\,\widehat{A}+\mathrm{tg}\,\widehat{B}}{1-\mathrm{tg}\,\widehat{A}\cdot\mathrm{tg}\,\widehat{B}}=-\mathrm{tg}\,\widehat{C}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\widehat{A}+\mathrm{tg}\,\widehat{B}=-\mathrm{tg}\,\widehat{C}+\mathrm{tg}\,\widehat{A}\cdot\mathrm{tg}\,\widehat{B}\cdot\mathrm{tg}\,\widehat{C}\Rightarrow \mathrm{tg}\,\widehat{A}+\mathrm{tg}\,\widehat{B}+\mathrm{tg}\,\widehat{C}=\mathrm{tg}\,\widehat{A}\cdot\mathrm{tg}\,\widehat{B}\cdot\mathrm{tg}\,\widehat{C}$$

3.109. Prueba que si los ángulos de un triángulo verifican que $\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}=\mathrm{sen}\,\widehat{C}$, entonces el triángulo es rectángulo. ¿Cuál es el ángulo recto?

$$\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}=\mathrm{sen}\,\widehat{C}\Rightarrow 2\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}=\mathrm{sen}\,\widehat{C}\Rightarrow 2\cos\frac{180°-\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}=\mathrm{sen}\,\widehat{C}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\cos\left(90°-\frac{\widehat{C}}{2}\right)\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}=\mathrm{sen}\,\widehat{C}\Rightarrow 2\,\mathrm{sen}\frac{\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}=2\,\mathrm{sen}\frac{\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}=\cos\frac{\widehat{C}}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}=\dfrac{\widehat{C}}{2}\Rightarrow\widehat{A}-\widehat{B}=\widehat{C}\Rightarrow\widehat{A}=\widehat{B}+\widehat{C}=90°\\[2mm]\dfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}=\dfrac{\widehat{C}}{2}\Rightarrow\widehat{A}-\widehat{B}=-\widehat{C}\Rightarrow\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}=90°\end{cases}$$

3.110. Demuestra que dado el triángulo de la figura y la circunferencia circunscrita a él:



a) Se cumple la relación: $r=\dfrac{b}{2\,\mathrm{sen}\,\widehat{B}}=\dfrac{a}{2\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}}=\dfrac{c}{2\,\mathrm{sen}\,\widehat{C}}$

(Ten en cuenta la relación entre los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{B}'$.)

b) El área del triángulo se puede calcular como $A=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4r}$.

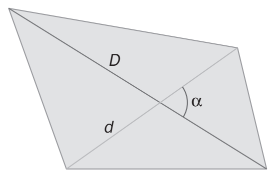
a) $\widehat{B}=\widehat{B}'$, ya que son ángulos inscritos a la misma circunferencia y determinan el mismo arco.

$\mathrm{sen}\,\widehat{B}=\dfrac{b\cdot\mathrm{sen}\,\widehat{A}}{a}$; $\mathrm{sen}\,\widehat{B}'=\dfrac{b}{2r}$. Por tanto, $\dfrac{b\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}}{a}=\dfrac{b}{2r}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{sen}\,\widehat{A}}{a}=\dfrac{1}{2r}\Rightarrow\dfrac{a}{2\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}}=r\Rightarrow$

$\Rightarrow r=\dfrac{a}{2\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}}=\dfrac{b}{2\,\mathrm{sen}\,\widehat{B}}=\dfrac{c}{2\,\mathrm{sen}\,\widehat{C}}$

b) $\widehat{A}=\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\mathrm{sen}\,\widehat{C}=\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\dfrac{c}{2r}=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4r}$

3.111. Observa la siguiente figura:



a) Si las diagonales de un cuadrilátero miden d y D unidades lineales, respectivamente, y forman un ángulo α, demuestra que el área de dicho cuadrilátero puede calcularse con la fórmula:

$$A=\frac{1}{2}\,d\cdot D\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

b) Calcula el área de un cuadrilátero cuyas diagonales forman un ángulo de 80° si miden 4 y 5 cm, respectivamente.

a) Dado el cuadrilátero, se considera el paralelogramo que se obtiene al trazar por cada vértice la paralela a la diagonal que no pasa por él. El área del cuadrilátero es igual a la suma de las áreas de cuatro triángulos: T_1, T_2, T_3 y T_4.

Por tanto: $S_{cuadrilátero}=\dfrac{1}{2}S_{paralelogramo}=\dfrac{1}{2}D\cdot d\cdot\mathrm{sen}\,\alpha$

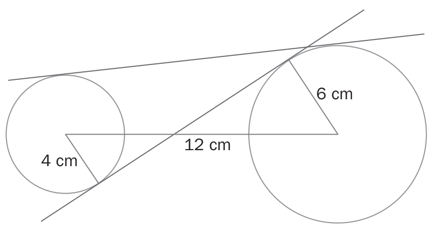
b) $S=\dfrac{1}{2}D\cdot d\cdot\mathrm{sen}\,\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\mathrm{sen}\,80°=9{,}85\ \mathrm{cm}^2$

3.112. Considera las dos circunferencias coplanarias de la figura.

Calcula la inclinación sobre la recta que une los dos centros de:

a) La tangente común exterior.

b) La tangente común interior.



a) $\mathrm{sen}\,\alpha\,\dfrac{6-4}{12}\Rightarrow\alpha=9°\ 36'$ b) $\mathrm{sen}\,\beta=\dfrac{6+4}{12}\Rightarrow\beta=56°\ 27'$