1. Comprueba las siguientes igualdades trigonométricas: (**3 puntos, 1 punto el primer apartado y 2 puntos el segundo**)

   a) $\cos(x+y)\cos(x-y)+1=\cos^2 x+\cos^2 y$

   b) $1-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x=\dfrac{\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

2. Simplifica todo lo posible la siguiente expresión: (**1 punto**)

$$\frac{1}{\cos^2 x\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)}$$

3. En los siguientes apartados hay dos ecuaciones y un sistema de ecuaciones trigonométricas. Resuélvelos, teniendo en cuenta que *no está permitido usar números decimales, sólo fracciones y radicales con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales*. (**3 puntos, 1 punto por apartado**)

   a) $\cos 2x=5-6\cos^2 x$

   b) $\cos x+\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}=1$

   c) $\begin{cases}\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\\[2ex] \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$

4. Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{x}=(2,-5)$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u}=(-3,1)$ y $\overrightarrow{v}=(-1,2)$. (**1 punto**)

5. Contesta a las siguientes cuestiones: (**3 puntos, 1 punto por apartado**)

   a) Hallar, aproximadamente (utiliza la calculadora), el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u}=\left(-5,\sqrt{3}\right)$ y $\overrightarrow{v}=\left(-\sqrt{3},1\right)$

   b) Dado el vector $\overrightarrow{u}=(1,2)$ respecto de una base ortonormal, hallar otro vector $\overrightarrow{v}$ tal que $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ y $|\overrightarrow{v}|=3$.
   Nota: *en este apartado no está permitido usar decimales, sólo radicales y fracciones*.

   c) Calcular el módulo del vector $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ sabiendo que $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$, $|\overrightarrow{u}|=12$ y que $|\overrightarrow{v}|=5$

Formulario

- $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$
- $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$
- $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$
- $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$
- $\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}$
- $\cos \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}}$
- $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$
- $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$
- $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \dfrac{A+B}{2} \operatorname{sen} \dfrac{A-B}{2}$
- $\cos A + \cos B = 2 \cos \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$
- $\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \dfrac{A+B}{2} \operatorname{sen} \dfrac{A-B}{2}$

Soluciones

1. a) $\cos(x+y)\cos(x-y)+1 = (\cos x\cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)(\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) + 1 =$
$= (\cos x \cos y)^2 - (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)^2 + 1 = \cos^2 x \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y + 1 =$
$= \cos^2 x \cos^2 y - (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 y) + 1 =$
$= \cos^2 x \cos^2 y - (1 - \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y) + 1 =$
$= \cos^2 x \cos^2 y - 1 + \cos^2 y + \cos^2 x - \cos^2 x \cos^2 y + 1 = \cos^2 x + \cos^2 y$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \dfrac{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x) + \cos x(\cos^2 x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \dfrac{\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x) + \cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} =$
$= \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos^2 x + \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - (\operatorname{sen} x \cos^2 x + \cos x \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} =$
$= \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} - \dfrac{\operatorname{sen} x \cos^2 x + \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} =$
$= 1 - \operatorname{sen} x \cos x = 1 - \dfrac{1}{2} 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

2. $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1-\operatorname{tg}^2 x)} = \dfrac{1}{\cos^2 x\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \dfrac{1}{\cos^2 x - \cos^2 x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} =$
$= \dfrac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$

3. a) $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 5 - 6\cos^2 x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 5 - 6\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 5 - 6\cos^2 x \Leftrightarrow 8\cos^2 x = 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 30^{\text{o}} \\ x_2 = 330^{\text{o}} \end{cases} \\ \cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 150^{\text{o}} \\ x_4 = 210^{\text{o}} \end{cases} \end{cases}$$

b) $\cos x + \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos x + \left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{1-\cos x}{2} = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cos x + 1 - \cos x = 2 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0^{\text{o}}$

c) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$ Sumando ambas ecuaciones: $2\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^{\text{o}} \\ x_2 = 120^{\text{o}} \end{cases}$

Si $x_1 = 60^{\text{o}} \Rightarrow \operatorname{sen} 60^{\text{o}} + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3} + 2\operatorname{sen} y = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 30^{\text{o}} \\ y_2 = 150^{\text{o}} \end{cases}$

Si $x_2 = 120^{\text{o}} \Rightarrow \operatorname{sen} 120^{\text{o}} + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3} + 2\operatorname{sen} y = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_3 = 30^{\text{o}} \\ y_4 = 150^{\text{o}} \end{cases}$

Resumiendo, el conjunto de soluciones entre 0^{o} y 360^{o} es: $(60^{\text{o}}, 30^{\text{o}})$; $(60^{\text{o}}, 150^{\text{o}})$; $(120^{\text{o}}, 30^{\text{o}})$ y $(120^{\text{o}}, 150^{\text{o}})$.

4. $\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \Rightarrow (2, -5) = a(-3, 1) + b(-1, 2) \Rightarrow (2, -5) = (-3a - b, a + 2b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -3a - b = 2 \\ a + 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - b = 2 \\ 3a + 6b = -15 \end{cases} \Rightarrow$ (sumando ambas ecuaciones) $5b = -13 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \dfrac{-13}{5}$. Sustituyendo en $a + 2b = -5$ se tiene: $a + 2\left(\dfrac{-13}{5}\right) = -5 \Rightarrow 5a - 26 = -25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{5}$.

Así pues las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ respecto de la base formada por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{-13}{5}\right)$.

5. a) Llamemos α al ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Entonces:

$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \dfrac{5\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{(-5)^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{28} \cdot \sqrt{4}} =$

$= \dfrac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{28}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}} \cong 0{,}98 \Rightarrow \alpha \cong 11{,}48^{\text{o}}$.

b) Llamemos $\overrightarrow{v} = (x, y)$. Entonces, como $|\overrightarrow{v}| = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$. Por otro lado, como $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow x + 2y = 0$. De esta última ecuación se deduce que $x = -2y$. Sustituyendo en la anterior: $(-2y)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow 5y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \dfrac{9}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \pm\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Si $y = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow x = -\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. Si $y = -\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow x = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. Por tanto hay dos posibilidades: o bien $\overrightarrow{v} = \left(-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, \dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, o bien $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

c) $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2$

En el último paso se ha utilizado que, al ser $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, entonces $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Por tanto $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| = 13$.