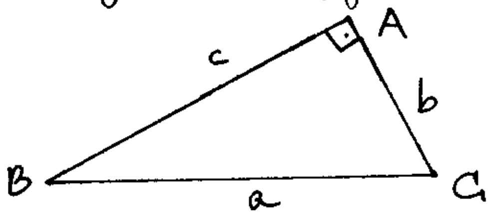
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Sea el triángulo de la figura.



El ángulo A es RECTO y se dendotará con el símbolo ⊡ ; b y c son los CATETOS (lados que forman el ángulo recto) y a la HIPOTENUSA. (lado opuesto al recto).

Resolver el triángulo $\widehat{ABC}$ consiste en averiguar las medidas de los lados a, b y c, y de los ángulos A, B y C. a partir de ciertos datos del triángulo.

Herramientos:

1) la suma de los tres ángulos es 180°. $A+B+C=180°$.

2) teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3) razones trigonométricas

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad \cos B = \frac{c}{a} \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

En todas las representaciones consideraré que A es el ángulo recto. Todos los cálculos los haré redondeando al 2º decimal.

<u>Caso 1</u>. Conocidos los dos catetos. $(b=7, c=12, A=90°)$.

$A = 90°$ $\quad a =$

$B =$ $\quad b = 7$

$C =$ $\quad c = 12$

¿a? Aplicando el teorema de Pitágoras $a^2=b^2+c^2 \rightarrow a=\sqrt{7^2+12^2}=\sqrt{193}$.

$$\Rightarrow \boxed{a \simeq 13{,}89}$$

¿B? $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \leftrightarrow \operatorname{sen} B = \frac{7}{\sqrt{193}} \Rightarrow \boxed{B \simeq 30{,}26°}$

¿C? $A+B+C=180° \rightarrow \boxed{C = 180-A-B \simeq 59{,}74°}$

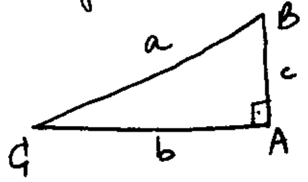
Observación: se podría haber empleado la tangente para obtener B ó C.

$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \frac{7}{12} \longrightarrow B \simeq 30{,}26° \longrightarrow C = 90-B = 59{,}74°$. y la hipotenusa a se obtendría aplicando el seno de B: $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{7}{\operatorname{sen} 30{,}26°} \simeq 13{,}89$.

Caso 2. Conocidos un cateto y la hipotenusa ($A=90^\circ$, $a=10$, $b=3$).

$A=90^\circ$ $\quad a=10$
$B=$ $\quad b=3$
$C=$ $\quad c=$

El dibujo más cómodo para trabajar el problema es



¿C? $\cos C = \frac{b}{a} = \frac{3}{10} \rightarrow \boxed{C \simeq 72{,}54^\circ}$

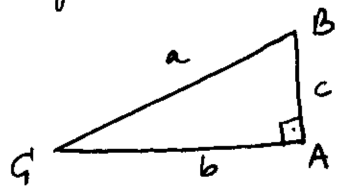
¿B? $\boxed{B = 90 - C = 17{,}46^\circ}$

¿c? Teorema de Pitágoras $c^2+b^2=a^2 \rightarrow c^2 = a^2-b^2 = 10^2-3^2 \rightarrow \boxed{c=\sqrt{91} \simeq 9{,}54}$

Observación.
Podría haberse modificado el orden: ¿c? Teorema de Pitágoras ....; ¿B? $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$

Caso 3. Conocido un ángulo agudo y un cateto ($A=90^\circ$, $B=18^\circ$, $b=7$).

$A=90^\circ$ $\quad a=$
$B=18^\circ$ $\quad b=7$
$C=$ $\quad c=$



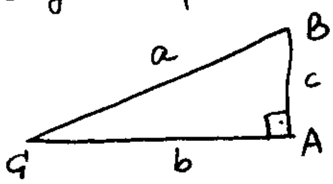
¿C? $\boxed{C = 90^\circ - B = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ}$

¿a? $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \rightarrow \boxed{a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{7}{\operatorname{sen} 18^\circ} \simeq 22{,}65}$

¿c? $\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} \rightarrow c = b \cdot \operatorname{tg} C = 7 \cdot \operatorname{tg} 72^\circ \simeq 21{,}54$

Caso 4. Conocido un ángulo agudo y la hipotenusa ($A=90^\circ$, $B=41^\circ$, $a=8$)

$A=90^\circ$ $\quad a=8$
$B=41^\circ$ $\quad b=$
$C=$ $\quad c=$



¿C? $C = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$

¿b? $\cos C = \frac{b}{a} \rightarrow \boxed{b = a \cdot \cos C = 8 \cdot \cos 49^\circ = 5{,}25}$

¿c? $\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} \rightarrow \boxed{c = b \cdot \operatorname{tg} C \simeq 5{,}25 \cdot \operatorname{tg} 49^\circ \simeq 6{,}04}$

NOTAS.

- En cada uno de los casos nos han de dar, al menos, 3 datos; siendo uno de ellos $A = 90°$.
- Ante las ecuaciones

  $\text{sen } B = 0{,}3 \qquad \cos C = 0{,}7 \qquad \text{tg } B = 2{,}4 \quad \ldots$

se ha empleado la calculadora científica asegurando el MODE DEG para trabajar con GRADOS SEXAGESIMALES o el MODE RAD para trabajar con RADIANES.

- Sólo se tiene en cuenta UNA de las soluciones de cada ecuación:

  $\text{sen } B = 0{,}3 \rightarrow B_1 = 17{,}46° \quad$ y $\quad B_2 = 180° - 17{,}46°$ OBTUSO.

  $\cos B = 0{,}7 \rightarrow B_1 = 45{,}57° \quad$ y $\quad B_2 = 360° - 45{,}57° > 180°$

  $\text{tg } B = 2{,}4 \rightarrow B_1 = 67{,}38° \quad$ y $\quad B_2 = 67{,}38° + 180° > 180°$

Para una explicación más profunda puedes consultar el apartado de ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

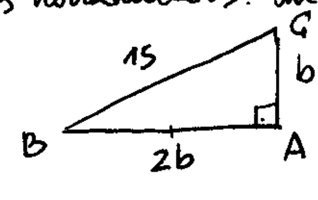
PROBLEMAS.

(1º) En un triángulo rectángulo un cateto es doble del otro y la hipotenusa mide 15cm. Resuélvelo.

No encaja en ningún caso.

¿Cómo hacerlo?

Veamos cómo relacionamos la CONDICIÓN (un cateto mide el doble del otro) con las herramientas. Un dibujo siempre ayuda.



Una opción: $\text{tg } B = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2} \rightarrow B = 26{,}57°$

y ya conocemos 1 lado (hipotenusa) y los ángulos. Caso 4.

Otra opción: teorema de Pitágoras

$$b^2 + (2b)^2 = 15^2 \longrightarrow 5b^2 = 225 \longrightarrow b = \sqrt{45} \simeq 6{,}71$$

y ya conocemos los 3 lados.