6 Trigonometría

ACTIVIDADES INICIALES

6.I. Los marineros musulmanes utilizaban el astrolabio para determinar la dirección hacia la que debían rezar. ¿Cuál es esa dirección? ¿A qué se debe?

Cada musulmán debe rezar cinco veces al día en dirección a La Meca, ciudad santa del islam, situada en Arabia Saudita. Es la ciudad natal de Mahoma.

6.II. ¿Por qué el sextante y el octante se llaman así? ¿Cómo aparecen los números 6 y 8 en su diseño?

El sextante es un instrumento que permite medir ángulos entre dos objetos tales como dos puntos de una costa o un astro, tradicionalmente el Sol, y el horizonte. El nombre *sextante* proviene de la escala del instrumento, que abarca un ángulo de 60º, es decir, un sexto de un círculo completo.

El octante es un instrumento de reflexión inventado para observar la altura de los astros sobre el horizonte del mar. El arco del octante consta de 45º o una octava parte del círculo, de donde proviene su denominación.

6.III. ¿Qué significan las siglas GPS? ¿Cuántos satélites necesita un GPS para localizarte, y por qué?

GPS son las siglas de los términos *Global Positioning System*, Sistema de Posicionamiento Global en español.

Cada satélite indica que el receptor se encuentra en un punto en la superficie de la esfera, con centro en el propio satélite y de radio la distancia total hasta el receptor. Obteniendo información de dos satélites sabríamos que el receptor se encuentra sobre la circunferencia que resulta cuando se intersecan las dos esferas. Si adquirimos la misma información de un tercer satélite, notamos que la nueva esfera solo corta la circunferencia anterior en dos puntos. Uno de ellos se puede descartar porque ofrece una posición absurda. De esta manera ya tendríamos la posición en 3D.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

6.1. Actividad resuelta.

6.2. (TIC) Pasa a radianes los siguientes ángulos expresados en grados sexagesimales.

a) 60º

b) 120º

c) 210º

d) 135º

e) 330º

a) $60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad

b) $120^\circ = 120 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$ rad

c) $210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ rad

d) $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ rad

e) $330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}$ rad

6.3. (TIC) Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) $\frac{\pi}{5}$

b) $\frac{3\pi}{7}$

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) 4π

e) $\frac{11\pi}{6}$

a) $\frac{\pi}{5}\text{ rad} = \frac{\pi}{5}\cdot\frac{180}{\pi} = 36^\circ$

b) $\frac{3\pi}{7}\text{ rad} = \frac{3\pi}{7}\cdot\frac{180}{\pi} = 77^\circ\ 8'\ 34''$

c) $\frac{7\pi}{3}\text{ rad} = \frac{7\pi}{3}\cdot\frac{180}{\pi} = 420^\circ$

d) $4\pi\text{ rad} = 4\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 720^\circ$

e) $\frac{11\pi}{6}\text{ rad} = \frac{11\pi}{6}\cdot\frac{180}{\pi} = 330^\circ$

6.4. (TIC) Las medidas de dos de los ángulos de un triángulo *ABC* son $\widehat{A} = 40^\circ$ y $\widehat{B} = 1{,}54$ rad. Calcula en grados y en radianes la medida de $\widehat{C}$.

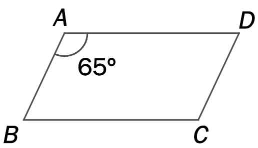
$\widehat{B} = 1{,}54\cdot\frac{180}{\pi} = 88^\circ\ 14'\ 8''$

Como la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180°, tenemos:

$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 51^\circ\ 45'\ 52'' \approx 0{,}903\text{ rad}$

6.5. (TIC) La medida de un ángulo de un paralelogramo es $\widehat{A} = 65^\circ$. Halla los otros tres ángulos en radianes.

Los ángulos de un paralelogramo son iguales dos a dos y la suma de dos contiguos es siempre de 180°. Por tanto:



$\widehat{A} = \widehat{C} = 65^\circ = 65\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{36}\text{ rad}$

$\widehat{B} = \widehat{D} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ = 115\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{23\pi}{36}\text{ rad}$

6.6. Actividad interactiva.

6.7. Actividad resuelta.

6.8. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos en los siguientes triángulos rectángulos.

a) Cateto *b* = 28 cm, cateto *c* = 45 cm

b) Hipotenusa *a* = 73 cm, cateto *b* = 48 cm

c) Hipotenusa *a* = 15 cm, cateto *c* = 12 cm

a) $a = \sqrt{28^2 + 45^2} = 53$ cm

$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{28}{53}$ $\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{45}{53}$ $\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{28}{45}$

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{45}{53}$ $\cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{28}{53}$ $\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{45}{28}$

b) $c = \sqrt{73^2 - 48^2} = 55$ cm

$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{48}{73}$ $\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{55}{73}$ $\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{48}{55}$

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{55}{73}$ $\cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{48}{73}$ $\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{55}{48}$

c) $b = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{9}{15}$ $\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{12}{15}$ $\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{9}{12}$

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{15}$ $\cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{9}{15}$ $\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{9}$

6.9. (TIC) Copia y completa la siguiente tabla.

Ángulo	$\frac{\pi}{6}$ **rad**	$\frac{\pi}{4}$ **rad**	$\frac{\pi}{3}$ **rad**
Seno	•	•	•
Coseno	•	•	•
Tangente	•	•	•

$\frac{\pi}{6}$ rad = 30º $\frac{\pi}{4}$ rad = 45º $\frac{\pi}{3}$ rad = 60º

Ángulo	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

6.10. Actividad resuelta.

6.11. Actividad resuelta.

6.12. Actividad resuelta.

6.13. (TIC) Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo si su tangente vale 0,75.

Gracias a la tercera relación fundamental:

$$1+\text{tg}^2\,\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+0{,}75^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{1+0{,}75^2}\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1{,}5625}}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$$

Gracias a la segunda relación fundamental:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow \text{sen}\,\alpha=\text{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha=0{,}75\cdot 0{,}8=0{,}6$$

6.14. (TIC) Calcula el seno y la tangente de un ángulo agudo si su coseno vale 0,554.

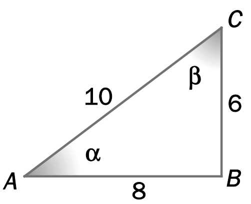
Gracias a la primera relación fundamental:

$$\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha+0{,}554^2=1\Rightarrow \text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-0{,}554^2}\approx 0{,}833$$

Gracias a la segunda relación fundamental:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}833}{0{,}554}\approx 1{,}504$$

6.15. Calcula el seno, el coseno y la tangente de los dos ángulos agudos del triángulo aplicando solo la definición del seno.



$\text{sen}\,\alpha=\frac{6}{10}=0{,}6$ $\quad\cos\alpha=\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}=0{,}8$ $\quad\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=0{,}75$

$\text{sen}\,\beta=\frac{8}{10}=0{,}8$ $\quad\cos\beta=\sqrt{1-\text{sen}^2\beta}=0{,}6$ $\quad\text{tg}\,\beta=\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}\approx 1{,}33$

6.16. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas a partir de las relaciones fundamentales.

a) $\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=1-2\text{sen}^2\alpha$ **b)** $\frac{\text{tg}^2\,\alpha+2\,\text{sen}^2\,\alpha}{\text{tg}^2\,\alpha}=1+2\cos^2\alpha$

a) $\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=\left(1-\text{sen}^2\alpha\right)-\text{sen}^2\alpha=1-2\text{sen}^2\alpha$

b) $\frac{\text{tg}^2\alpha+2\text{sen}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}=1+\frac{2\text{sen}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}=1+\frac{2\text{sen}^2\alpha}{\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=1+2\text{c}\ \text{s}^2\,\alpha$

6.17. Demuestra estas igualdades trigonométricas utilizando las relaciones fundamentales.

a) $\mathbf{tg\alpha + \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{1}{sen\alpha \cdot cos\alpha}}$

b) $\mathbf{\dfrac{1}{tg^2\alpha} = cos^2\alpha + \left(\dfrac{cos\alpha}{tg\alpha}\right)^2}$

c) $\mathbf{\dfrac{1}{tg\alpha} \cdot \dfrac{1}{cos\alpha} = \dfrac{1}{sen\alpha}}$

d) $\mathbf{\dfrac{1}{cos^2\alpha} + \dfrac{1}{sen^2\alpha} = \dfrac{1}{sen^2\alpha \cdot cos^2\alpha}}$

e) $\mathbf{cos^2\alpha = sen^2\alpha \cdot cos^2\alpha + cos^4\alpha}$

a) $\text{tg}\alpha + \dfrac{1}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{\text{tg}^2\alpha + 1}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$

b) $\cos^2\alpha + \left(\dfrac{\cos\alpha}{\text{tg}\alpha}\right)^2 = \cos^2\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}\right) = \cos^2\alpha\left(\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}\right) = \cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}\right) = \dfrac{1}{tg^2\alpha}$

c) $\dfrac{1}{\text{tg}\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}$

d) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \dfrac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$

e) $\text{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \cos^2\alpha \cdot \left(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \cos^2\alpha$

6.18. Demuestra esta igualdad trigonométrica.

$$\mathbf{\dfrac{1 + \dfrac{1}{tg^2\alpha} + \dfrac{2}{tg\alpha}}{1 + 2\,sen\alpha \cdot cos\alpha} = \dfrac{1}{sen^2\alpha}}$$

$$\dfrac{1 + \dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha} + \dfrac{2}{\text{tg}\alpha}}{1 + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \dfrac{2\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}}{1 + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\text{sen}\alpha}{\text{sen}^2\alpha \cdot (1 + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha)} = \dfrac{1 + 2\cos\alpha\text{sen}\alpha}{\text{sen}^2\alpha \cdot (1 + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha)} = \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

6.19. ¿Cuándo es cierto que $\mathbf{cos^2\alpha + tg^2\alpha = 1}$?

$\cos^2\alpha + \text{tg}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{tg}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \text{tg}^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$

Por tanto, la igualdad será cierta cuando el seno y la tangente del ángulo α sean iguales en valor absoluto.

6.20. Actividad resuelta.

6.21. Actividad resuelta.

6.22. Expresa los siguientes ángulos como la suma de un número de vueltas completas más un ángulo menor de 360º.

a) 2350º **b) 4315º** **c) 400º**

a) 2350º = 6 · 360º + 190º b) 4315º = 11 · 360º + 355º c) 400º = 360º + 40º

6.23. Expresa las razones trigonométricas de 70º, 160º, 200º y 340º en función de las de 20º.

Como 70º = 90º – 20º ⇒ sen 70º = cos 20º cos 70º = sen 20º tg 70º = $\frac{1}{\text{tg } 20º}$

Como 160º = 180º – 20º ⇒ sen 160º = sen 20º cos 160º = – cos 20º tg 160º = –tg 20º

Como 200º = 180º + 20º ⇒ sen 200º = –sen 20º cos 200º = –cos 20º tg 200º = tg 20º

Como 340º = 360º – 20º ⇒ sen 340º = –sen 20º cos 340º = cos 20º tg 340º = –tg 20º

6.24. Si $\cos\alpha = \frac{28}{53}$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, halla sen α y tg α.

Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos y el coseno es positivo.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{28}{53}\right)^2} = -\sqrt{\frac{2025}{2809}} = -\frac{45}{53}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{45}{53}}{\frac{28}{53}} = -\frac{45}{28}$$

6.25. Si $\text{tg}\alpha = \frac{77}{36}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, halla sen α y cos α.

Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente es positiva y el seno y el coseno son negativos.

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{77}{36}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{7225}{1296}}} = -\sqrt{\frac{1296}{7225}} = -\frac{36}{85}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\alpha = -\frac{36}{85}\cdot\frac{77}{36} = -\frac{77}{85}$$

6.26. Halla las razones trigonométricas de 150º y – 150º.

sen 150º = sen 30º = $\frac{1}{2}$ cos 150º = –cos 30º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ tg 150º = –tg 30º = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

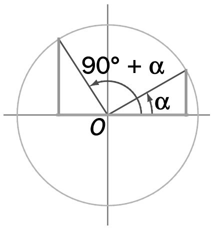
sen (–150º) = –sen 150º = $-\frac{1}{2}$ cos (–150º) = cos 150º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ tg (–150º) = –tg 150º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

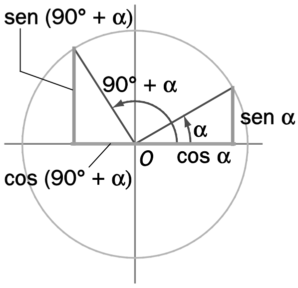
6.27. Halla las razones trigonométricas de 225º y – 225º.

sen 225º = –sen 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos 225º = –cos 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ tg 225º = tg 45º = 1

sen (–225º) = –sen 225º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos (–225º) = cos 225º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ tg (–225º) = –tg 225º = –1

6.28. Con ayuda de la figura, indica las relaciones que se dan entre las razones trigonométricas de los ángulos α y 90º + α.





En la figura se observan dos triángulos rectángulos iguales, ya que tienen la hipotenusa igual a la unidad y dos ángulos iguales.

Por tanto:

sen (90º + α) = cos α

cos (90º + α) = –senα

tg (90º + α) = $\frac{\text{sen }(90º+\alpha)}{\cos\,(90º+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\text{sen }\alpha} = -\frac{1}{\text{tg }\alpha}$

6.29. Actividad interactiva.

6.30. Actividad resuelta.

6.31. (TIC) Con ayuda de la calculadora, halla:

a) sen 43º **e) arcsen 0,16**

b) cos 33º **f) arccos 0,99**

c) tg 2,5 rad **g) arctg 0,25**

d) sen 1 rad **h) arcsen 1**

a) sen 43º = 0,682 e) arcsen 0,16 = 9º 12' 25''

b) cos 33º = 0,839 f) arccos 0,99 = 8º 6' 35''

c) tg 2,5 rad = –0,747 g) arctg 0,25 = 14º 2' 10''

d) sen 1 rad = 0,841 h) arcsen 1 = 90º

6.32. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.

a) $\sin x = 1$ **d)** $\operatorname{tg} x = 0$

b) $\cos x = -1$ **e)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** $2 \operatorname{sen}(2x - 180^\circ) = -1$

a) $\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k$ donde $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$ donde $k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 180^\circ \cdot k$ donde $k \in \mathbb{Z}$

e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

f) $2\operatorname{sen}(2x - 180^\circ) = -1 \Rightarrow \operatorname{sen}(2x - 180^\circ) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 180^\circ = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x - 180^\circ = 330^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 195^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x = 255^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

6.33. Actividad resuelta.

6.34. (TIC) Resuelve estos triángulos rectángulos.

a) $\widehat{A} = 90^\circ,\ \widehat{C} = 43^\circ,\ a = 5$ cm

b) $\widehat{B} = 90^\circ,\ a = 8$ cm, $c = 6$ cm

a) $\widehat{A} = 90^\circ,\ \widehat{C} = 43^\circ,\ a = 5$ cm

$\widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$

$\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 5 \cdot \operatorname{sen} 43^\circ \approx 3{,}41$ cm

$\cos \widehat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = 5 \cdot \cos 43^\circ \approx 3{,}66$ cm

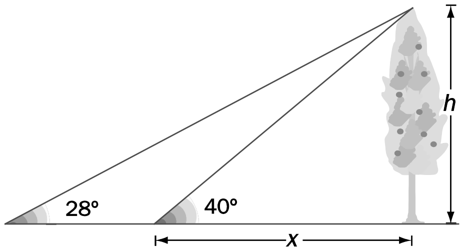
b) $\widehat{B} = 90^\circ,\ a = 8$ cm, $c = 6$ cm

$b = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm

$\operatorname{tg} \widehat{A} = \frac{a}{c} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \widehat{A} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \approx 53^\circ\ 8'$

$\widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{A} = 36^\circ\ 52'$

6.35. Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40º, y si se retrocede 4 metros, se ve bajo un ángulo de 28º. Calcula la altura del árbol y la anchura del río.



Sea h la altura del árbol y x la anchura del río.

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}\,40º = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = \text{tg}\,40º \cdot x = 0{,}839\,x \\ \text{tg}\,28º = \dfrac{h}{4+x} \Rightarrow h = \text{tg}\,28º \cdot (4+x) = 0{,}532 \cdot (4+x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}839x = 0{,}532 \cdot (4+x) \Rightarrow 0{,}839x = 2{,}128 + 0{,}532x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}307x = 2{,}128 \Rightarrow x = \frac{2{,}128}{0{,}307} = 6{,}93 \text{ m} \Rightarrow h = 5{,}81 \text{ m}$$

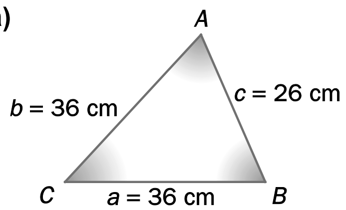
6.36. Actividad resuelta.

6.37. Actividad resuelta.

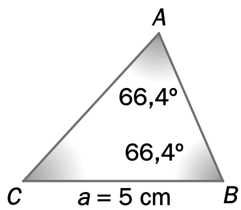
6.38. Actividad resuelta.

6.39. (TIC) Resuelve los siguientes triángulos.

a)



b)



a) Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \approx 0{,}7392 \Rightarrow \hat{C} = 42º\ 20'\ 12''$$

Al ser un triángulo isósceles:

$$\hat{A} = \hat{B} = (180º - 42º\,20'12'') : 2 = 68º\ 49'\ 54''$$

b) Al ser un triángulo isósceles:

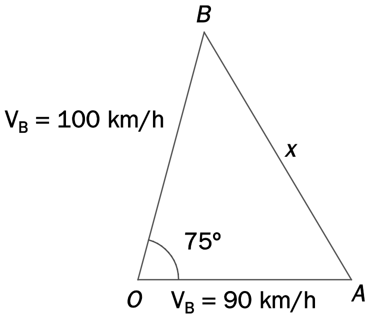
$$\hat{C} = 180º - 2 \cdot 66{,}4º = 47{,}2º$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} \approx 4 \text{ cm}$$

6.40. (TIC) Dos coches con velocidades constantes respectivas de 90 y 100 kilómetros por hora toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 75º. ¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 10 minutos de viaje?



El coche *A* recorre 90 · 1/6 = 15 km.

El coche *B* recorre 100 · 1/6 ≈ 16,67 km.

Aplicando el teorema del coseno:

$x^2 = 15^2 + 16{,}67^2 - 2 \cdot 15 \cdot 16{,}67 \cdot \cos 75º \approx 373{,}45 \Rightarrow x \approx 19{,}32$ km

6.41. (TIC) Calcula el área de un recinto triangular sabiendo que dos de sus lados miden 100 y 120 metros y que forman un ángulo de 60º.

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\,\widehat{C} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 120 \cdot \text{sen}\,60º \approx 5196{,}15 \text{ m}^2$$

6.42. (TIC) Un compás tiene dos patas de 10 centímetros de largo. ¿Qué ángulo forman sus patas si al abrirlo traza una circunferencia de diámetro 10 centímetros?

Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{10^2 + 10^2 - 5^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = 0{,}875 \Rightarrow \alpha \approx 28º\ 57'\ 18''$$

6.43. (TIC) Resuelve el triángulo *a* = 38 cm, *b* = 30 cm, $\widehat{B} = 38º$. ¡Ten cuidado, hay dos soluciones!

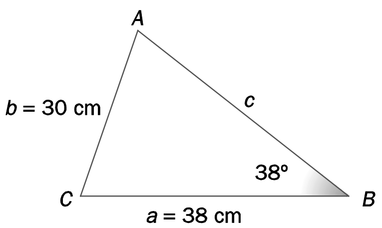
Aplicando el teorema del seno:

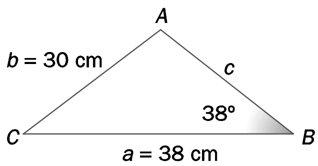
$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \Rightarrow \text{sen}\,\widehat{A} = \frac{a \cdot \text{sen}\,\widehat{B}}{b} \approx 0{,}7798 \Rightarrow \widehat{A} = \text{arcsen}\,0{,}7798$$

En este caso hay dos soluciones posibles:

$$\begin{cases} \widehat{A} \approx 51º\ 14'\ 32'' \Rightarrow \widehat{C} \approx 180º - \widehat{A} - \widehat{B} = 90º\ 45'\ 28'' \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\widehat{C}}{\text{sen}\,\widehat{A}} \approx 48{,}73 \text{ cm} \\ \widehat{A} \approx 128º\ 45'\ 28'' \Rightarrow \widehat{C} \approx 180º - \widehat{A} - \widehat{B} = 13º\ 14'\ 32'' \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\widehat{C}}{\text{sen}\,\widehat{A}} \approx 11{,}16 \text{ cm} \end{cases}$$

Las dos soluciones se corresponden con las siguientes figuras:





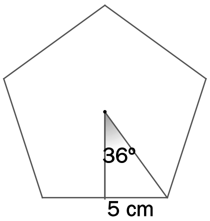
6.44. Halla el área del triángulo de lados 3, 4 y 6 cm.

Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{3^2+4^2-6^2}{2\cdot3\cdot4} = -0{,}4583 \Rightarrow \alpha \approx 117^\circ\ 16'\ 39''$$

El área será, por tanto: $S = \frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\text{sen}117^\circ\ 16'\ 39'' \approx 5{,}33\ \text{cm}^2$.

6.45. (TIC) Calcula el perímetro y el área de un pentágono regular de 10 cm de lado.



La apotema vale $a_p = \frac{5}{\text{tg}36^\circ} \approx 6{,}88$ cm.

El área vale $S = \frac{50\cdot6{,}88}{2} = 172\ \text{cm}^2$.

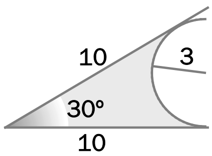
6.46. (TIC) Halla el lado y el área de un eneágono regular de perímetro 63 cm.

El lado vale $\frac{63}{9}$ = 7 cm; por tanto, la apotema vale $a_p = \frac{3{,}5}{\text{tg}20^\circ} \approx 9{,}62$ cm.

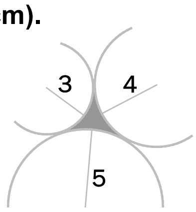
El área vale $S = \frac{63\cdot9{,}62}{2} = 303{,}03\ \text{cm}^2$.

6.47. (TIC) Halla el área de estas figuras (medidas en cm).

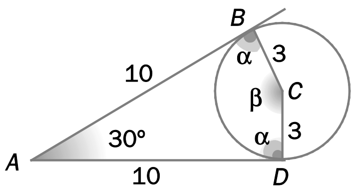
a)



b)



a) Observemos la figura.



El área solicitada es la diferencia entre el área del triángulo *ABD* y el área de la intersección de este triángulo con el sector circular determinado por *B*, *C* y *D*.

Aplicando el teorema del seno calculamos el ángulo β:

$$\frac{3}{\text{sen}15^\circ} = \frac{10}{\text{sen}\frac{\beta}{2}} \Rightarrow \text{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{10\cdot\text{sen}15^\circ}{3} \approx 0{,}8627 \Rightarrow \frac{\beta}{2} \approx 59^\circ\ 37'\ 28'' \Rightarrow \beta \approx 119^\circ\ 14'56''$$

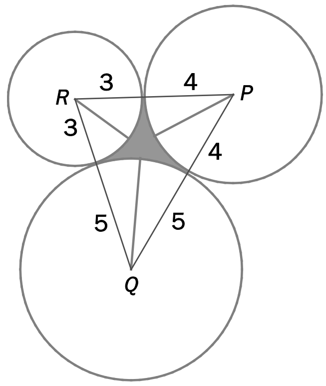
Área del triángulo *ABD*: $S_1 = \frac{1}{2}\cdot10\cdot10\cdot\text{sen}30^\circ = 25\ \text{cm}^2$

Área de la intersección del triángulo *ABD* con el sector circular determinado por *B*, *C* y *D*:

$$S_2 = \frac{\pi\cdot3^2\cdot\beta}{360^\circ} - \frac{1}{2}\cdot3\cdot3\cdot\text{sen}\beta \approx 5{,}44\ \text{cm}^2$$

Por tanto, el área solicitada es $S = S_1 - S_2 = 19{,}56\ \text{cm}^2$.

b) El área solicitada es el área del triángulo *PQR* menos la suma de las áreas de los tres sectores circulares de la figura.



Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos P = \frac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} \approx 0{,}524 \Rightarrow P \approx 58^\circ\ 23'\ 57''$$

$$\cos Q = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} \approx 0{,}667 \Rightarrow Q \approx 48^\circ\ 9'\ 51''$$

$$\cos R = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} \approx 0{,}286 \Rightarrow R \approx 73^\circ\ 22'\ 53''$$

Área del triángulo *PQR*: $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \text{sen}\, Q \approx 26{,}82\ \text{cm}^2$

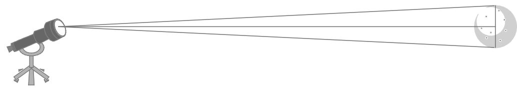
Áreas de los sectores:

$S_P \approx \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 58{,}4}{360} \approx 8{,}15\ \text{cm}^2$ $\quad S_Q \approx \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 48{,}16}{360} \approx 10{,}51\ \text{cm}^2$ $\quad S_R \approx \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 73{,}38}{360} \approx 5{,}76\ \text{cm}^2$

Área solicitada: $S = S_1 - (S_P + S_Q + S_R) \approx 2{,}4\ \text{cm}^2$

6.48. Actividad resuelta.

6.49. (TIC) La Luna tiene una superficie de 38 millones de kilómetros cuadrados y se encuentra a 380 000 kilómetros de la Tierra. ¿Qué ángulo ocupa en el cielo?

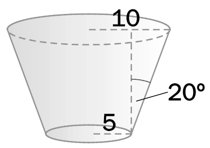


Radio de la Luna: $4\pi R^2 = 38 \cdot 10^6\ \text{km}^2 \Rightarrow R \approx 1739$ km

De este modo, el ángulo bajo el que se ve el diámetro lunar es:

$$\cos\alpha = \frac{380000^2 + 380000^2 - 3478^2}{2 \cdot 380000 \cdot 380000} \approx 0{,}999958 \Rightarrow \alpha \approx 31'\ 30''$$

6.50. (TIC) Halla el área lateral del tronco de cono de la figura.



Arista lateral del tronco de cono: $a = \frac{5}{\text{sen}\, 20^\circ} \approx 14{,}62$

Área lateral: $A_L = \pi \cdot (10 + 5) \cdot 14{,}62 \approx 688{,}6$ unidades cuadradas

6.51. (TIC) Halla el área de un tetraedro de lado 5 cm.

El área es la suma de cuatro triángulos equiláteros de lado 5 cm, es decir:

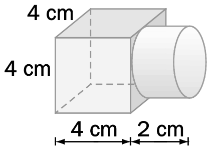
$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot sen\, 60^\circ = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 43{,}3\ \text{cm}^2$$

6.52. Actividad interactiva.

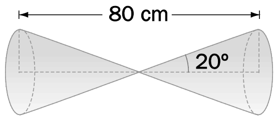
6.53. Actividad resuelta.

6.54. (TIC) Calcula el volumen de los siguientes cuerpos.

a)



b)



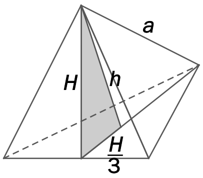
a) El volumen total es la suma de los volúmenes de un cubo de arista 4 cm y de un cilindro de radio de la base 2 cm y de altura 2 cm.

Por tanto, $V = 4^3 + \pi \cdot 2^2 \cdot 2 \approx 89{,}13 \text{ cm}^3$

b) El volumen total es la suma de los volúmenes de dos conos de altura 40 cm y radio de la base 40 · tg 20º ≈ 14,56 cm.

Por tanto, $V = 2 \cdot \dfrac{\pi \cdot 14{,}56^2 \cdot 40}{3} \approx 17750{,}93 \text{ cm}^3$

6.55. (TIC) Halla el volumen de un tetraedro de lado 7 centímetros.



La altura H de cada una de las caras es, según el teorema de Pitágoras, $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado, la altura del tetraedro es:

$$h = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \sqrt{\frac{24a^2}{36}} = \frac{2a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

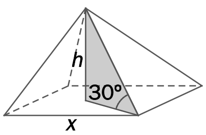
Por tanto, el volumen de un tetraedro de arista a es:

$$V = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

En nuestro caso, a = 7, con lo que el volumen es $V = \dfrac{343\sqrt{2}}{12} \approx 40{,}42 \text{ cm}^3$.

6.56. (TIC) El volumen de una pirámide es de 1000 m³, su base es un cuadrado y el ángulo que forman las aristas laterales con la base es de 30º. ¿Cuál es su altura?

Observemos la figura, si x es el lado del cuadrado, la diagonal es $x\sqrt{2}$



$$h = \frac{x\sqrt{2}}{2} \cdot \text{tg } 30º = \frac{x\sqrt{6}}{6}$$

$$V = \frac{x^2 \dfrac{x\sqrt{6}}{6}}{3} = \frac{x^3\sqrt{6}}{18} = 1000 \Rightarrow x^3 = \frac{18000}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \approx 19{,}44 \text{ m} \Rightarrow h \approx 7{,}93 \text{ m}$$

6.57. Actividad interactiva.

EJERCICIOS

Medidas de ángulos

6.58. Expresa en radianes la medida de los siguientes ángulos.

a) 30º **c) 240º** **e) 90º**

b) 270º **d) 135º** **f) 300º**

a) $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $270^\circ = 270 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$ rad

c) $240^\circ = 240 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$ rad

d) $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ rad

e) $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$ rad

f) $300^\circ = 300 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$ rad

6.59. Expresa en grados sexagesimales la medida de los siguientes ángulos dados en radianes.

a) $\mathbf{5\pi}$ **c)** $\mathbf{\frac{5\pi}{6}}$ **e)** $\mathbf{\frac{7\pi}{4}}$

b) $\mathbf{\frac{\pi}{8}}$ **d)** $\mathbf{\frac{4\pi}{3}}$ **f)** $\mathbf{\frac{7\pi}{11}}$

a) $5\pi \text{ rad} = 5\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 900^\circ$

b) $\frac{\pi}{8} \text{ rad} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{180}{\pi} = 22^\circ\ 30'$

c) $\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 150^\circ$

d) $\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 240^\circ$

e) $\frac{7\pi}{4} \text{ rad} = \frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 315^\circ$

f) $\frac{7\pi}{11} \text{ rad} = \frac{7\pi}{11} \cdot \frac{180}{\pi} = 114^\circ\ 32'\ 44''$

6.60. Halla el ángulo del intervalo [0º, 360º) que corresponde a:

a) 450º **c) 720º** **e) 1300º**

b) 1800º **d) 540º** **f) 900º**

a) $450^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 90^\circ \Rightarrow 90^\circ$

b) $1800^\circ = 5 \cdot 360^\circ \Rightarrow 0^\circ$

c) $720^\circ = 2 \cdot 360^\circ \Rightarrow 0^\circ$

d) $540^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 180^\circ \Rightarrow 180^\circ$

e) $1300^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 220^\circ \Rightarrow 220^\circ$

f) $900^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ \Rightarrow 180^\circ$

6.61. (TIC) Expresa en radianes el ángulo $\boldsymbol{\alpha}$**, menor que 360º, al que equivalen los ángulos:**

a) 480º **b) 1235º** **c) 930º** **d) 1440º**

a) $480^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 120^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ rad

b) $1235^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 155^\circ \Rightarrow \alpha = 155^\circ = \frac{31\pi}{36}$ rad

c) $930^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 210^\circ \Rightarrow \alpha = 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$ rad

d) $1440^\circ = 4 \cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha = 0^\circ = 0$ rad

6.62. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 2π radianes.

a) $\frac{19\pi}{4}$

b) $\frac{22\pi}{3}$

c) $\frac{11\pi}{2}$

d) 41π

e) $\frac{17\pi}{6}$

a) $\frac{19\pi}{4} = 2 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2$ vueltas

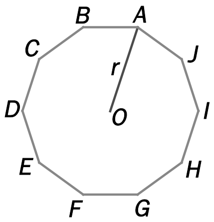
b) $\frac{22\pi}{3} = 3 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 3$ vueltas

c) $\frac{11\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2$ vueltas

d) $41\pi = 20 \cdot 2\pi + \pi = \pi + 20$ vueltas

e) $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 1$ vuelta

6.63. En la figura aparece representado un decágono regular.



a) ¿Qué ángulo hay que recorrer para llevar el radio *r* desde su posición inicial *A* hasta el vértice *B* en el sentido contrario a las agujas del reloj?

b) ¿Qué ángulo se recorre para llevar *r* desde *I* hasta *D* en el sentido de las agujas del reloj?

c) ¿A qué punto llegará *r* si se encuentra inicialmente en *B* y se le aplica un movimiento de 108º?

d) ¿A qué punto llegará *r* si se encuentra inicialmente en *G* y se le aplica un movimiento de –144º?

a) El ángulo que se deberá aplicar es: $\frac{360º}{10} = 36º$.

b) Se recorre un ángulo negativo: –36º · 5 = –180º.

c) Como 108º = 3 · 36º, se recorren tres posiciones en sentido directo y, por tanto, el radio se colocará en la letra *E*.

d) Como 144º = 4 · 36º, se recorren cuatro posiciones en el sentido inverso y, por tanto, el radio se colocará en la letra *C*.

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

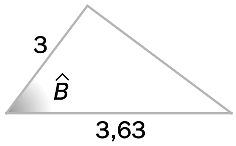
6.64. La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 10, 8 y 6 decímetros, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas de su ángulo agudo de menor amplitud?

El ángulo agudo de menor amplitud, llamémosle α, es el opuesto al cateto de 6 dm, por tanto:

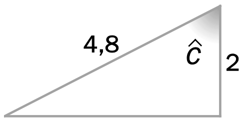
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6$ $\cos\alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$

6.65. (TIC) Calcula las medidas de los ángulos indicados en los siguientes triángulos rectángulos. Da los resultados aproximando a los minutos.

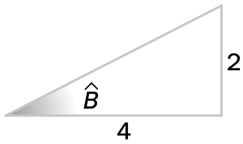
a)



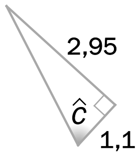
b)



c)



d)



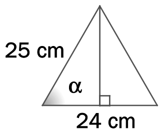
a) $\cos\widehat{B} = \dfrac{3}{3,63} \approx 0,8264 \Rightarrow \widehat{B} \approx 34^{\circ}\ 16'$

b) $\cos\widehat{C} = \dfrac{2}{4,8} \approx 0,4167 \Rightarrow \widehat{C} \approx 65^{\circ}\ 22'$

c) $\text{tg}\ \widehat{B} = \dfrac{2}{4} = 0,5 \Rightarrow \widehat{B} \approx 26^{\circ}\ 34'$

d) $\text{tg}\ \widehat{C} = \dfrac{2,95}{1,1} \approx 2,6818 \Rightarrow \widehat{C} \approx 69^{\circ}\ 33'$

6.66. Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.

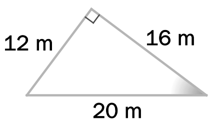


Usando el teorema de Pitágoras, la altura del triángulo vale $h = \sqrt{25^2 - 12^2} = \sqrt{481} \approx 21,93$ cm.

De este modo:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{21,93}{25} = 0,8772$ $\cos\alpha = \dfrac{12}{25} = 0,48$ $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{21,93}{12} = 1,8275$

6.67. Halla la medida de los ángulos del triángulo.



Llamando α al ángulo sombreado de la figura tenemos $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{12}{20} = 0,6 \Rightarrow \alpha \approx 36^{\circ}\ 52'\ 12''$.

El ángulo recto mide 90º, y como los tres ángulos suman 180º, el tercer ángulo mide 53º 7' 45''.

Razones trigonométricas y calculadora

6.68. (TIC) Con la ayuda de la calculadora, halla los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) **sen 67º** **c)** **cos 77º** **e)** **tg 39º**

b) **sen $\frac{\pi}{7}$ rad** **d)** **cos $\frac{2\pi}{5}$ rad** **f)** **tg $\frac{3\pi}{8}$ rad**

Expresa los resultados con tres cifras decimales.

a) sen 67º = 0,921 c) cos 77º = 0,225 e) tg 39º = 0,810

b) sen $\frac{\pi}{7}$ rad = 0,434 d) cos $\frac{2\pi}{5}$ rad = 0,309 f) tg $\frac{3\pi}{8}$ rad = 2,414

6.69. (TIC) Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en grados sexagesimales de los siguientes ángulos agudos. Aproxima los resultados a los minutos.

a) $\text{sen}\,\widehat{A} = 0{,}125$ **b)** $\cos\widehat{B} = 0{,}245$ **c)** $\text{tg}\,\widehat{C} = 1{,}25$

a) $\widehat{A} = 7º\ 11'$ b) $\widehat{B} = 75º\ 49'$ c) $\widehat{C} = 51º\ 20'$

6.70. (TIC) Con la ayuda de la calculadora, halla las medidas en radianes de los siguientes ángulos agudos. Expresa los resultados con tres cifras decimales.

a) $\text{sen}\,\widehat{A} = 0{,}85$ **b)** $\cos\widehat{B} = 0{,}645$ **c)** $\text{tg}\,\widehat{C} = 0{,}556$

a) $\widehat{A} = 1{,}016$ rad b) $\widehat{B} = 0{,}870$ rad c) $\widehat{C} = 0{,}507$ rad

Relaciones entre razones trigonométricas

6.71. (TIC) Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α si sen α = 0,6.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

6.72. (TIC) Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo α cuyo coseno vale 0,8.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} \approx 0{,}75$$

6.73. (TIC) Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α cuya tangente es igual a $\sqrt{5}$.

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\sqrt{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}408$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0{,}913$$

6.74. Demuestra las siguientes igualdades.

a) $\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \cos x$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 1}{2} = \operatorname{sen}^2 x$

c) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

a) $\sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \sqrt{\dfrac{1}{1/\cos^2 x}} = \sqrt{\cos^2 x} = \cos x$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 1}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \left(1-\cos^2 x\right)}{2} = \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x}{2} = \operatorname{sen}^2 x$

c) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x\cdot\operatorname{sen} x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\cos x\cdot\operatorname{sen} x}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

6.75. Demuestra las siguientes igualdades.

a) $\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right) = \operatorname{sen}^2\alpha$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cdot\cos^2\alpha = 1$

a) $\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right) = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cdot\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha = 1$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

6.76. Sin calcular su valor, indica el signo de las siguientes razones trigonométricas.

a) cos 315º **d) sen 150º** **g) tg 190º**

b) sen 850º **e) tg 118º** **h) cos 230º**

c) sen 340º **f) cos 460º** **i) tg 721º**

a) cos 315º es positivo, ya que 315º es un ángulo del cuarto cuadrante.

b) sen 850º es positivo, ya que 850º equivale al ángulo 130º, situado en el segundo cuadrante.

c) sen 340º es negativo, ya que 340º es un ángulo del cuarto cuadrante.

d) sen 150º es positivo, ya que 150º es un ángulo del segundo cuadrante.

e) tg 118º es negativo, ya que 118º es un ángulo del segundo cuadrante.

f) cos 460º es negativo, ya que 460º equivale al ángulo de 100º, situado en el segundo cuadrante.

g) tg 190º es positivo, ya que 190º es un ángulo del tercer cuadrante.

h) cos 230º es negativo, ya que 230º es un ángulo del tercer cuadrante.

i) tg 721º es positivo, ya que 721º equivale al ángulo 1º, situado en el primer cuadrante.

6.77. ¿En qué cuadrantes se puede encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) α si sen $\alpha > 0$ **c) β si tg $\beta > 0$**

b) χ si cos $\chi < 0$ **d) δ si sen $\delta < 0$**

a) α puede encontrarse en el primero o segundo cuadrante.

b) χ puede encontrarse en el segundo o tercer cuadrante.

c) β puede encontrarse en el primero o tercer cuadrante.

d) δ puede encontrarse en el tercero o cuarto cuadrante.

6.78. (TIC) Comprueba si existe un ángulo α tal que sen α = 0,25 y cos α = 0,75.

Se tiene que cumplir la primera relación fundamental: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Como $0{,}25^2 + 0{,}75^2 = 0{,}625$, no puede existir tal ángulo.

6.79. (TIC) Halla las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a) $\cos\alpha = \frac{6}{7}$; $270º < \alpha < 360º$

b) sen α = 0,375; $90º < \alpha < 180º$

c) tg $\alpha = \sqrt{2}$; $180º < \alpha < 270º$

a) Como α es un ángulo del cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos, y el coseno, positivo.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2} = -\sqrt{\frac{13}{49}} = -\frac{\sqrt{13}}{7}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{13}}{7}}{\frac{6}{7}} = -\frac{\sqrt{13}}{6}$$

b) Como α es un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, y el coseno y la tangente, negativos.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-0{,}375^2} \approx -0{,}927$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}375}{-0{,}927} \approx -0{,}405$$

c) Como α es un ángulo del tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos, y la tangente, positiva.

$$1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\left(\sqrt{2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

6.80. (TIC) Calcula las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a) $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$; 180º < α < 270º

b) sen α = – 0,9; 270º < α < 360º

c) tg α = $-\sqrt{2}$; 90º < α < 180º

a) Como α es un ángulo del tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos, y la tangente, positiva.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{7}\right)^2} = -\sqrt{\frac{33}{49}} = -\frac{\sqrt{33}}{7}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{33}}{7}}{-\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{33}}{4}$$

b) Como α es un ángulo del cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos, y el coseno, positivo.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-(-0{,}9)^2} \approx 0{,}436$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}9}{0{,}436} \approx -2{,}064$$

c) Como α es un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, y el coseno y la tangente son negativos.

$$1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\sqrt{2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

6.81. (TIC) Con ayuda de la calculadora, halla las medidas en grados de los siguientes ángulos.

a) $\operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}249$; $90^\circ < \widehat{A} < 180^\circ$

b) $\cos\widehat{B} = 0{,}129$; $270^\circ < \widehat{B} < 360^\circ$

c) $\operatorname{tg}\widehat{C} = 2{,}310$; $180^\circ < \widehat{C} < 270^\circ$

a) $\widehat{A} = 180^\circ - 14^\circ\ 25'\ 6'' = 165^\circ\ 34'\ 54''$

b) $\widehat{B} = 360^\circ - 82^\circ\ 35'\ 17'' = 277^\circ\ 24'\ 43''$

c) $\widehat{C} = 180^\circ + 66^\circ\ 35'\ 32'' = 246^\circ\ 35'\ 32''$

6.82. (TIC) Con ayuda de la calculadora, halla las medidas en radianes de los siguientes ángulos del cuadrante que se indica.

a) $\operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}559$; $\frac{\pi}{2} < \widehat{A} < \pi$

b) $\cos\widehat{B} = 0{,}775$; $\frac{3\pi}{2} < \widehat{B} < 2\pi$

c) $\operatorname{tg}\widehat{C} = 1{,}5$; $\pi < \widehat{C} < \frac{3\pi}{2}$

a) $\widehat{A} = \pi - 0{,}593 = 2{,}549$ rad

b) $\widehat{B} = 2\pi - 0{,}684 = 5{,}599$ rad

c) $\widehat{A} = \pi + 0{,}983 = 4{,}124$ rad

6.83. Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 120º	**e)** cos 225º	**i)** tg 330º
b) sen (–60º)	**f)** cos (–150º)	**j)** tg 930º
c) sen 150º	**g)** sen 225º	**k)** sen 300º
d) sen (–210º)	**h)** cos (–330º)	**l)** tg (–315º)

a) sen 120º = sen (180º – 60º) = sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) sen (–60º) = –sen 60º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) sen 150º = sen (180º – 30º) = sen 30º = $\frac{1}{2}$

d) sen (–210º) = –sen 210º = –sen (180º + 30º) = –(–sen 30º) = sen 30º = $\frac{1}{2}$

e) cos 225º = cos (180º + 45º) = –cos 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) cos (–150º) = cos 150º = cos (180º – 30º) = –cos 30º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) sen 225º = sen (180º + 45º) = –sen 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

h) cos (–330º) = cos 330º = cos (360º – 30º) = cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

i) tg 330º = tg (360º – 30º) = –tg 30º = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

j) tg 930º = tg (2 · 360º + 210º) = tg 210º = tg (180º + 30º) = tg 30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

k) sen 300º = sen (360º – 60º) = –sen 60º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

l) tg (–315º) = – tg 315º = – tg (360º – 45º) – (–tg 45º) = tg 45º = 1

6.84. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 135º y 225º a partir de las de 45º.

Razones trigonométricas de 135º: como 135º = 180º – 45º:

sen 135º = sen 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos 135º = –cos 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg 135º = –tg 45º = –1

Razones trigonométricas de 225º: como 225º = 180º + 45º:

sen 225º = –sen 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos 225º = –cos 45º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg 225º = tg 45º = 1

6.85. Si α es un ángulo agudo y cos α = $\frac{5}{9}$, ¿cuáles son las razones del ángulo α + 180º?

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{\sqrt{56}}{9} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

sen (α + 180º) = –sen α = $-\frac{2\sqrt{14}}{9}$

cos (α + 180º) = –cos α = $-\frac{5}{9}$

tg (α + 180º) = tg α = $\frac{2\sqrt{14}}{5}$

6.86. Si $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ y $0 < \alpha < 90º$, halla:

a) sen (α + 180º)

b) tg (90º – α)

c) cos (180º – α)

d) sen (– α)

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

a) $\operatorname{sen}(\alpha + 180º) = -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{5}{13}$

b) $\operatorname{tg}(90º - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{12}{5}$

c) $\cos(180º - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

d) $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{5}{13}$

6.87. (TIC) Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en grados.

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $1 - 2\cos x = 0$

c) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{tg} x = 1$

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 150º + 360º \cdot k \\ x = 210º + 360º \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

b) $1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 60º + 360º \cdot k \\ 300º + 360º \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 240º + 360º \cdot k \\ x = 300º + 360º \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45º + 360º \cdot k \\ x = 225º + 360º \cdot k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 45 + 180º \cdot k$ donde $k \in \mathbb{Z}$

6.88. (TIC) Resuelve estas ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

a) $\operatorname{tg} x = -2$

b) $1 - 5\cos x = 6$

c) $\operatorname{sen} x = 0{,}81$

d) $4\operatorname{sen} x + 1 = 0$

a) $\operatorname{tg} x = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2{,}034 + 2\pi k \\ x = 5{,}176 + 2\pi k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2{,}034 + \pi k$ donde $k \in \mathbb{Z}$

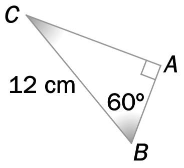
b) $1 - 5\cos x = 6 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k = (2k+1)\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$

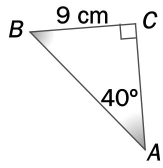
c) $\operatorname{sen} x = 0{,}81 \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}944 + 2\pi k \\ x = 2{,}198 + 2\pi k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

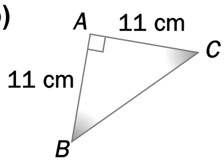
d) $4\operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 3{,}394 + 2\pi k \\ x = 6{,}031 + 2\pi k \end{cases}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

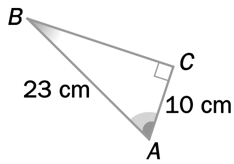
Resolución de triángulos

6.89. (TIC) Calcula la medida de los ángulos y lados desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos.

a)


c)


b)


d)


a) $\hat{A} = 90º$, $\hat{B} = 60º$, $a = 12$ cm

$\hat{C} = 180º - \hat{A} - \hat{B} = 30º$

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\hat{B} = 12\cdot\cos 60º = 6 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\operatorname{sen}\hat{B} = 12\cdot\operatorname{sen}60º = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39 \text{ cm}$$

b) $\hat{A} = 90º$, $b = 11$ cm, $c = 11$ cm

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{11^2 + 11^2} = \sqrt{242} \approx 15{,}56 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{11}{11} = 1 \Rightarrow \hat{B} = 45º$$

$\hat{C} = \hat{B} = 45º$

c) $\hat{A} = 40º$, $\hat{C} = 90º$, $a = 9$ cm

$\hat{B} = 180º - \hat{A} - \hat{C} = 50º$

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{9}{\operatorname{sen}40º} \approx 14 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg}\hat{A}} = \frac{9}{\operatorname{tg}40º} \approx 10{,}73 \text{ cm}$$

d) $\hat{C} = 90º$, $b = 10$ cm, $c = 23$ cm

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{23^2 - 10^2} = \sqrt{429} \approx 20{,}71 \text{ cm}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{10}{23} \approx 0{,}435 \Rightarrow \hat{A} \approx 64º\ 12'\ 53''$$

$\hat{B} = 180º - \hat{A} - \hat{C} = 25º\ 47'\ 7''$

6.90. (TIC) Resuelve los triángulos sabiendo que $\widehat{C}$ es un ángulo recto.

a) $\widehat{A} = 55º$, $a = 18$ **cm**

b) $c = 10$ **cm,** $b = 6$ **cm**

c) $a = 18$ **cm,** $b = 15$ **cm**

a) $\widehat{A} = 55º$, $\widehat{C} = 90º$, $a = 18$ cm

$\widehat{B} = 180º - \widehat{A} - \widehat{C} = 35º$

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{18}{\operatorname{sen}55º} \approx 21{,}97 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg}\widehat{A}} = \frac{18}{\operatorname{tg}55º} \approx 12{,}6 \text{ cm}$$

b) $\widehat{C} = 90º$, $b = 6$ cm, $c = 10$ cm

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{b}{c} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \Rightarrow \widehat{A} \approx 53º\ 7'\ 48''$$

$\widehat{B} = 180º - \widehat{A} - \widehat{C} = 36º\ 52'\ 12''$

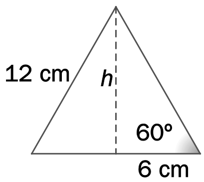
c) $\widehat{C} = 90º$, $a = 18$ cm, $b = 15$ cm

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{18^2 + 15^2} = \sqrt{339} \approx 18{,}41 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{a}{b} = \frac{18}{15} = 1{,}2 \Rightarrow \widehat{A} \approx 50º\ 11'\ 40''$$

$\widehat{B} = 180º - \widehat{A} - \widehat{C} = 39º\ 48'\ 20''$

6.91. Halla la longitud de la altura de un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado.



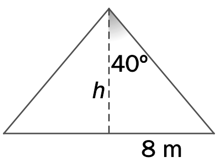
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}39 \text{ cm}$$

También podemos aplicar las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}60º = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \cdot \operatorname{sen}60º = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39 \text{ cm}$$

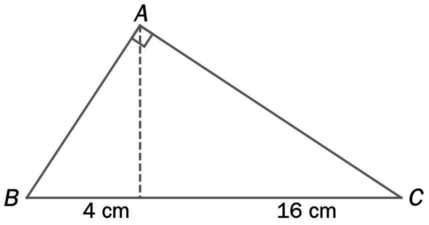
6.92. (TIC) El lado desigual de un triángulo isósceles mide 16 metros, y el ángulo desigual, 80º. ¿Cuál es la medida de la altura sobre este lado?



$$\operatorname{tg}40º = \frac{8}{h} \Rightarrow h = \frac{8}{\operatorname{tg}40º} \approx 9{,}53 \text{ m}$$

6.93. (TIC) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm, y la proyección de uno de los catetos sobre ella, 4 cm. Resuelve el triángulo.

$A = 90°$, $a = 20$ cm



Aplicando el teorema del cateto:

$$c^2 = 20 \cdot 4 = 80 \Rightarrow c \approx 8{,}94 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{320} \approx 17{,}89 \text{ cm}$$

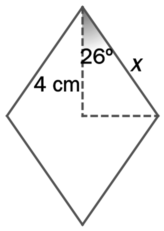
Aplicando las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = 0{,}8945 \Rightarrow B \approx 63°\ 26'\ 39''$$

Por último:

$C = 180° - A - B = 26°\ 33'\ 21''$

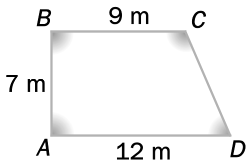
6.94. (TIC) La diagonal mayor de un rombo mide 8 cm y forma con cada lado contiguo un ángulo de 26º. ¿Cuánto mide el lado del rombo?

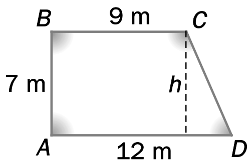


Llamando x al lado del rombo:

$$\cos 26° = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{\cos 26°} \approx 4{,}45 \text{ cm}$$

6.95. Halla la medida de los ángulos de este trapecio rectángulo.



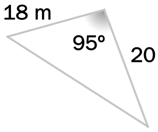


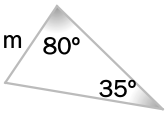
$A = B = 90°$

$$\operatorname{tg} D = \frac{7}{3} \Rightarrow D \approx 66°\ 48'\ 5''$$

$C = 360° - A - B - D \approx 113°\ 11'\ 55''$

6.96. (TIC) Resuelve estos triángulos.

a) 

b) 

a) $\widehat{A} = 95º$, $b = 18$ m, $c = 20$ m

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = 18^2 + 20^2 - 2\cdot 18\cdot 20\cdot\cos 95º \approx 786{,}75 \Rightarrow a \approx 28{,}05 \text{ m}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{28{,}05^2 + 20^2 - 18^2}{2\cdot 28{,}05\cdot 20} \approx 0{,}769 \Rightarrow \widehat{B} \approx 39º\ 44'\ 9''$$

$$\widehat{C} = 180º - \widehat{A} - \widehat{B} = 45º\ 15'\ 51''$$

b) $\widehat{A} = 80º$, $\widehat{C} = 35º$, $c = 6$ m

$$\widehat{B} = 180º - \widehat{A} - \widehat{C} = 65º$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \Rightarrow a = \frac{c\operatorname{sen}\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{6\operatorname{sen}80º}{\operatorname{sen}35º} \approx 10{,}3 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \Rightarrow a = \frac{c\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{6\operatorname{sen}80º}{\operatorname{sen}65º} \approx 6{,}52 \text{ m}$$

6.97. (TIC) Halla la medida de los ángulos y los lados desconocidos en cada caso.

a) $\widehat{A}$ **= 56º** $\quad$ ***b*** **= 14 cm** $\quad$ ***c*** **= 8 cm**

b) $\widehat{B}$ **= 45º** $\quad$ $\widehat{C}$ **= 75º** $\quad$ ***a*** **= 25 cm**

c) ***a*** **= 38 cm** $\quad$ ***b*** **= 46 cm** $\quad$ ***c*** **= 22 cm**

d) $\widehat{A}$ **= 42º** $\quad$ $\widehat{C}$ **= 65º** $\quad$ ***b*** **= 14 cm**

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 14^2 + 8^2 - 2\cdot 14\cdot 8\cdot\cos 56º \approx 134{,}74 \Rightarrow a \approx 11{,}61 \text{ cm}$

$$\cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{11{,}61^2 + 8^2 - 14^2}{2\cdot 11{,}61\cdot 8} \approx 0{,}015 \Rightarrow \widehat{B} \approx 89º\ 8'\ 20''$$

$$\widehat{C} = 180º - \widehat{A} - \widehat{B} = 34º\ 51'\ 40''$$

b) $\widehat{A} = 180º - \widehat{B} - \widehat{C} = 60º$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \Rightarrow b = \frac{a\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{25\cdot\operatorname{sen}45º}{\operatorname{sen}60º} \approx 20{,}41 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a\operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{25\cdot\operatorname{sen}75º}{\operatorname{sen}60º} \approx 27{,}88 \text{ cm}$$

c) $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{46^2 + 22^2 - 38^2}{2\cdot 46\cdot 22} \approx 0{,}571 \Rightarrow \widehat{A} \approx 55º\ 10'\ 48''$

$$\cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{38^2 + 22^2 - 46^2}{2\cdot 38\cdot 22} \approx -0{,}112 \Rightarrow \widehat{B} \approx 96º\ 25'\ 50''$$

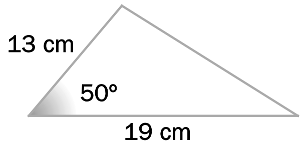
$$\widehat{C} = 180º - \widehat{A} - \widehat{B} = 28º\ 23'\ 22''$$

d) $\widehat{B} = 180º - \widehat{A} - \widehat{C} = 73º$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \Rightarrow a = \frac{b\operatorname{sen}\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{14\cdot\operatorname{sen}42º}{\operatorname{sen}73º} \approx 9{,}8 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{b\operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{14\cdot\operatorname{sen}65º}{\operatorname{sen}73º} \approx 13{,}27 \text{ cm}$$

6.98. (TIC) Resuelve el triángulo. ¿De qué tipo es?



$\hat{A}$ = 50º, b = 13 cm, c = 19 cm

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} = 13^2 + 19^2 - 2\cdot 13\cdot 19\cdot\cos 50º \approx 212{,}46 \Rightarrow a \approx 14{,}58 \text{ cm}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14{,}58^2 + 19^2 - 13^2}{2\cdot 14{,}58\cdot 19} \approx 0{,}730 \Rightarrow \hat{B} \approx 43º\ 5'\ 40''$$

$$C = 180º - \hat{A} - B = 86º\ 54'\ 20''$$

Es un triángulo acutángulo.

6.99. (TIC) Resuelve los siguientes triángulos.

a) ***a* = 3 cm** **b = 2 cm** **$\hat{C}$ = 140º**

b) ***a* = 19 cm** **b = 8 cm** **$\hat{B}$ = 62º**

a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos 140º \approx 22{,}19 \Rightarrow c \approx 4{,}7 \text{ cm}$

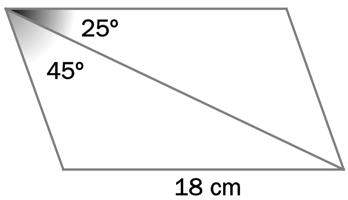
$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3^2 + 4{,}7^2 - 2^2}{2\cdot 3\cdot 4{,}7} \approx 0{,}961 \Rightarrow \hat{B} \approx 16º\ 7'\ 45''$$

$$\hat{C} = 180º - \hat{A} - \hat{B} = 23º\ 52'\ 15''$$

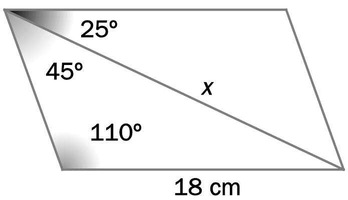
b) $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{b} = \dfrac{19\operatorname{sen} 62º}{8} \approx 2{,}097$

Como el seno de un ángulo no puede ser mayor que 1, deducimos que no existe ningún triángulo con las condiciones dadas.

6.100. (TIC) Halla la medida de la diagonal del paralelogramo.

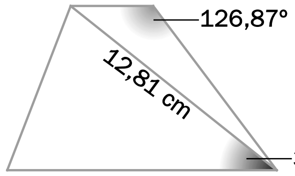


En un paralelogramo, los ángulos opuestos miden lo mismo y los ángulos contiguos suman 180º; por tanto, la situación es la siguiente:

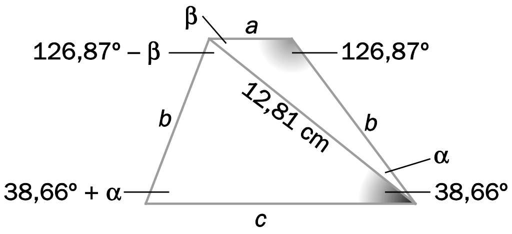


$$\frac{x}{\operatorname{sen} 110º} = \frac{18}{\operatorname{sen} 45º} \Rightarrow x = \frac{18\operatorname{sen} 110º}{\operatorname{sen} 45º} \approx 23{,}92 \text{ cm}$$

6.101. (TIC) Halla los lados del trapecio isósceles.



La situación es la siguiente:



En los dos triángulos de la figura, los ángulos suman 180°, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+126{,}87^{\circ}=180^{\circ}\\ \alpha-\beta+204{,}19^{\circ}=180^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=53{,}13^{\circ}\\ \alpha-\beta=-24{,}19^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\alpha=14{,}47^{\circ}\\ \beta=38{,}66^{\circ}\end{array}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}14{,}47^{\circ}}=\frac{12{,}81}{\operatorname{sen}126{,}87^{\circ}}\Rightarrow a\approx 4 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}38{,}66^{\circ}}=\frac{12{,}81}{\operatorname{sen}126{,}87^{\circ}}\Rightarrow b\approx 10 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}88{,}21^{\circ}}=\frac{12{,}81}{\operatorname{sen}53{,}13^{\circ}}\Rightarrow c\approx 16 \text{ cm}$$

Longitudes y áreas de figuras planas

6.102. Al unir los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrado se obtienen dos rectángulos, y al trazar la diagonal, dos triángulos. ¿Cuál es la relación entre las áreas de los rectángulos y los triángulos obtenidos?

Al unir los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrado se obtienen dos rectángulos iguales, cada uno con área la mitad del área del cuadrado original. Al trazar la diagonal se obtienen dos triángulos iguales, cada uno con área la mitad del área del cuadrado original. Por tanto, las áreas del rectángulo y del triángulo coinciden, es decir, la razón de áreas es 1.

6.103. (TIC) Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo miden 14,4 y 25,6 cm. Calcula el área del triángulo.

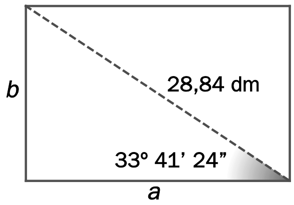
La hipotenusa mide 40 cm.

Llamando x e y a los catetos, cuya proyección sobre la hipotenusa mide, respectivamente, 14,14 y 25,6 cm, y aplicando el teorema del cateto, obtenemos:

$x^2 = 14{,}14 \cdot 40 = 576 \Rightarrow x = 24$ cm $\qquad y^2 = 25{,}6 \cdot 40 = 1024 \Rightarrow y = 32$ cm

Por tanto, el área del triángulo vale $S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 32 = 384$ cm^2.

6.104. (TIC) La diagonal de un rectángulo mide 28,84 decímetros y forma con la base un ángulo de 33º 41' 24". Halla su perímetro y su área.



$$\text{sen}(33^\circ\ 41'\ 24'') = \frac{b}{28{,}84} \Rightarrow b = 28{,}84 \cdot \text{sen}(33^\circ\ 41'\ 24'') \approx 16 \text{ dm}$$

$$\cos(33^\circ\ 41'\ 24'') = \frac{a}{28{,}84} \Rightarrow a = 28{,}84 \cdot \cos(33^\circ\ 41'\ 24'') \approx 24 \text{ dm}$$

De este modo, el perímetro y el área valen, respectivamente, P = 80 dm y A = 384 dm^2.

6.105. (TIC) El lado de un octógono regular mide 20 cm. Calcula la medida de la apotema y el área del octógono.

La apotema mide $\text{tg}\left(\frac{360^\circ}{16}\right) = \frac{10}{a_p} \Rightarrow a_p = \frac{10}{\text{tg}\,22{,}5^\circ} \approx 24{,}14 \text{ cm}$.

El área vale $S = \frac{8 \cdot 20 \cdot 24{,}14}{2} = 1931{,}2 \text{ cm}^2$.

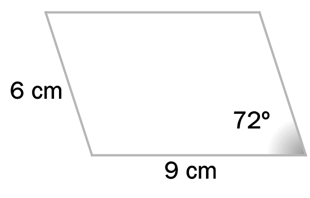
6.106. (TIC) Calcula la longitud de la circunferencia que se traza con un compás cuyos brazos miden 7 centímetros y forman un ángulo de 70º.

Si r es el radio de la circunferencia, tenemos:

$$\text{sen}\,35^\circ = \frac{r/2}{7} \Rightarrow r = 14 \cdot \text{sen}\,35^\circ \approx 8{,}03 \text{ cm}$$

Por tanto, la longitud de la circunferencia vale $L = 2 \cdot \pi \cdot r \approx 50{,}45 \text{ cm}$.

6.107. (TIC) Halla el área de este paralelogramo.

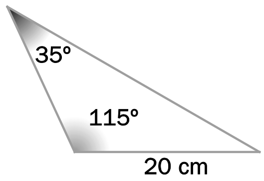


Si h es la altura del paralelogramo, tenemos:

$$\text{sen}\,72^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \text{sen}\,72^\circ \approx 5{,}71 \text{ cm}$$

Por tanto, el área del paralelogramo vale $S = 9 \cdot 5{,}71 = 51{,}39 \text{ cm}^2$.

6.108. (TIC) Calcula el perímetro de este triángulo.



$\hat{A}$ = 35º, $\hat{B}$ = 115º, a = 20 cm

$\hat{C}$ = 180º − $\hat{A}$ − $\hat{B}$ = 30º

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 115º}{\operatorname{sen} 35º} \approx 31{,}6 \text{ cm}$$

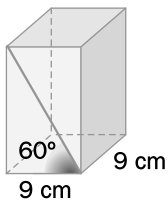
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow b = \frac{a \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 30º}{\operatorname{sen} 35º} \approx 17{,}43 \text{ cm}$$

El perímetro del triángulo vale, por tanto, P = 20 + 31,6 + 17,43 = 69,03 cm.

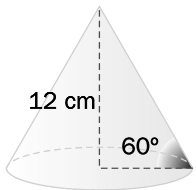
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

6.109. (TIC) Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos.

a)



b)



a) Necesitamos calcular la altura h del ortoedro.

$$\operatorname{tg} 60º = \frac{h}{9} \Rightarrow h = 9 \cdot \operatorname{tg} 60º \approx 15{,}59 \text{ cm}$$

De este modo, el área total y el volumen del ortoedro valen, respectivamente:

$A = 2 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9 \cdot 15{,}59 = 723{,}24 \text{ cm}^2$

$V = 9^2 \cdot 15{,}59 = 1262{,}79 \text{ cm}^3$

b) Necesitamos calcular el radio r de la base y la generatriz g.

$$\operatorname{tg} 60º = \frac{12}{r} \Rightarrow r = \frac{12}{\operatorname{tg} 60º} \approx 6{,}93 \text{ cm}$$

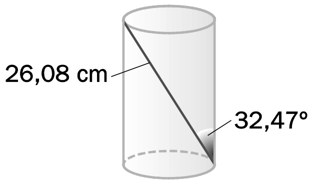
$$\operatorname{sen} 60º = \frac{12}{g} \Rightarrow g = \frac{12}{\operatorname{sen} 60º} \approx 13{,}86 \text{ cm}$$

De este modo, el área total y el volumen del cono valen, respectivamente:

$$A = \pi r^2 + \pi r g \approx 452{,}62 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx 603{,}5 \text{ cm}^3$$

6.110. (TIC) Calcula el volumen del cilindro.



Necesitamos calcular el radio r de la base y la altura h.

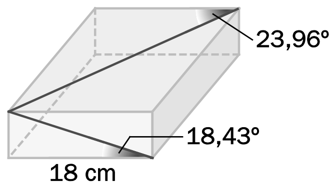
$$\text{sen}\,32,47^\circ = \frac{2r}{26,08} \Rightarrow r = \frac{26,08 \cdot \text{sen}\,32,47^\circ}{2} \approx 7 \text{ cm}$$

$$\cos 32,47^\circ = \frac{h}{26,08} \Rightarrow h = 26,08 \cdot \cos 32,47^\circ \approx 22 \text{ cm}$$

De este modo, el volumen del cilindro vale:

$V = \pi r^2 h \approx 3386,64 \text{ cm}^3$

6.111. (TIC) Halla el área total y el volumen del ortoedro.



Llamando, respectivamente, a y b a la altura y profundidad del ortoedro:

$$\text{tg}\,18,43^\circ = \frac{a}{18} \Rightarrow a = 18 \cdot \text{tg}\,18,43^\circ \approx 6 \text{ cm}$$

$$\text{tg}\,23,96^\circ = \frac{b}{18} \Rightarrow b = 18 \cdot \text{tg}\,23,96^\circ \approx 8 \text{ cm}$$

De este modo, el área total y el volumen del ortoedro valen, respectivamente:

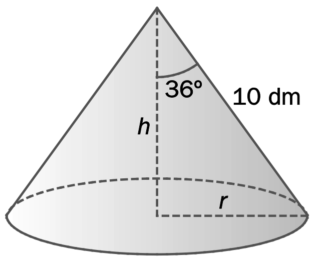
$A = 2 \cdot (18 \cdot 6 + 18 \cdot 8 + 6 \cdot 8) = 600 \text{ cm}^2$

$V = 18 \cdot 6 \cdot 8 = 864 \text{ cm}^3$

6.112. (TIC) La generatriz de un cono mide 10 decímetros, y el ángulo que forma esta con la altura del cono es de 36º. Calcula el área total y el volumen del cono.

$$\text{sen}\,36^\circ = \frac{r}{10} \Rightarrow r = 10 \cdot \text{sen}\,36^\circ \approx 5,88 \text{ dm}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \cos 36^\circ \approx 8,09 \text{ dm}$$

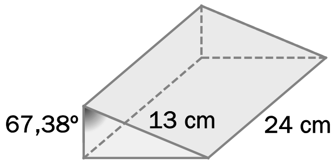


De este modo, el área total y el volumen del cono valen, respectivamente:

$A = \pi r^2 + \pi r g \approx 293,34 \text{ dm}^2$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx 292,91 \text{ dm}^3$$

6.113. (TIC) Calcula el volumen del prisma.



Los catetos de la base del prisma miden:

$$\operatorname{sen} 67{,}38^\circ = \frac{c}{13} \Rightarrow c = 13 \cdot \operatorname{sen} 67{,}38^\circ \approx 12 \text{ cm}$$

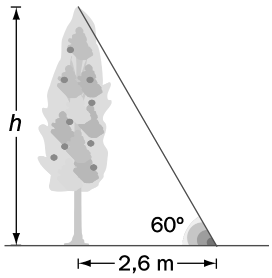
$$\cos 67{,}38^\circ = \frac{b}{13} \Rightarrow b = 13 \cdot \cos 67{,}38^\circ \approx 5 \text{ cm}$$

El volumen del prisma vale, por tanto:

$$V = \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 24 = 720 \text{ cm}^3$$

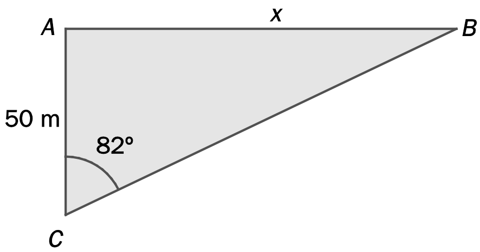
PROBLEMAS

6.114. (TIC) En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60º con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 metros. ¿Cuánto mide el árbol?



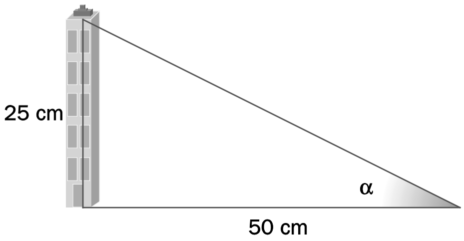
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{2{,}6} \Rightarrow h = 2{,}6 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \approx 4{,}5 \text{ m}$$

6.115. (TIC) Para medir la distancia entre dos puntos muy alejados *A* y *B*, se han situado dos personas sobre ellos. Una tercera persona está situada en el punto *C*, a 50 metros de distancia de *A* y viendo *A* y *B* bajo un ángulo de 82º. Calcula la distancia entre *A* y *B*.



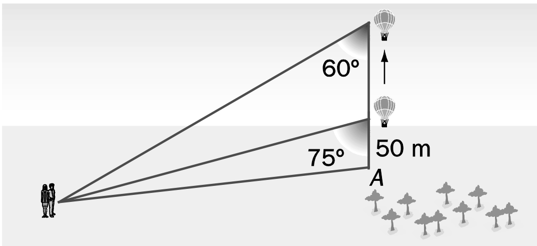
$$\operatorname{tg} 82^\circ = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 50 \cdot \operatorname{tg} 82^\circ \approx 355{,}77 \text{ m}$$

6.116. Unas cigüeñas han construido su nido sobre el tejado de un edificio a 25 metros del suelo. Un chico lo observa desde un punto situado a 50 metros del edificio. Calcula el ángulo de observación.



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{25}{50} = 0,5 \Rightarrow \alpha \approx 26,57^\circ$$

6.117. Juan ha subido en un globo aerostático hasta una altura de 50 metros. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo.



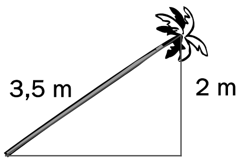
a) ¿A qué distancia del punto *A* se encuentran los padres de Juan?

b) Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo con el que Juan observa a los padres es de 60º, ¿a qué altura se encuentra el globo en este momento?

a) Si x es la distancia solicitada, $\text{tg}\,75^\circ = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 50 \cdot \text{tg}\,75^\circ \approx 186,6$ m

b) Si h es la distancia solicitada, $\text{tg}\,60^\circ = \frac{x}{h} \Rightarrow h = \frac{x}{\text{tg}\,60^\circ} \approx 107,73$ m

6.118. El tronco de una palmera mide 3,5 metros y crece de forma inclinada debido al peso de la parte superior. La perpendicular desde su parte más alta hasta la tierra mide 2 metros. Calcula el ángulo de inclinación del tronco respecto de la vertical.



$$\cos\alpha = \frac{2}{3,5} \approx 0,571 \Rightarrow \alpha \approx 55,18^\circ$$

6.119. (TIC) Alba va a poner una bombilla de bajo consumo en una lámpara que está situada a 2 metros del suelo. Alba mide 1,53 metros, y cada lado de la escalera, 70 centímetros. Los dos lados de la escalera forman un ángulo de 50º.

¿Puede Alba poner la bombilla con esta escalera?

Si h es la altura que alcanza la escalera,

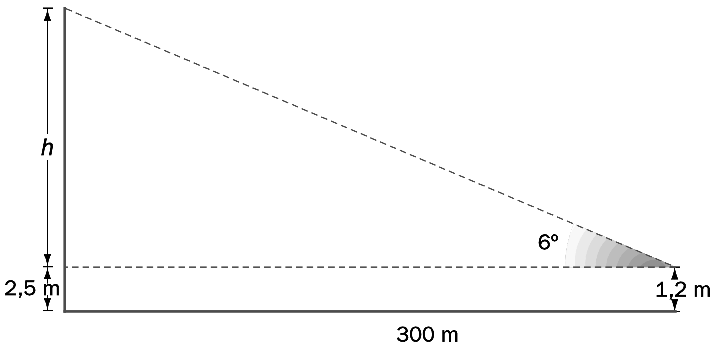
$$\cos 25º = \frac{h}{70} \Rightarrow h = 70 \cdot \cos 25º \approx 63,44 \text{ cm}$$

Alba puede alcanzar, por tanto, una altura de 153 + 63,44 = 216,44 cm, suficiente para poner la bombilla.

6.120. (TIC) En el centro de una plaza de forma circular de 300 metros de diámetro hay una estatua sobre un pedestal que mide 2,5 metros de altura. Con un teodolito situado en el borde de la plaza se observa la parte más alta de la estatua bajo un ángulo de 6º.

Si la mira del teodolito se encuentra a 1,2 metros del suelo, ¿cuánto mide la estatua?

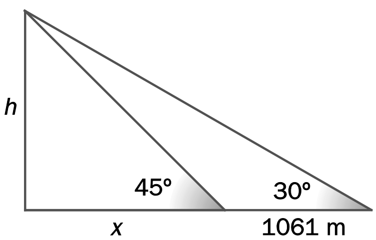
Si llamamos h a la altura de la estatua, la situación viene representada por la siguiente figura.



Por tanto, $\text{tg}\, 6º = \frac{h + 1,3}{300} \Rightarrow h + 1,3 = 300 \cdot \text{tg}\, 6º \approx 31,53 \Rightarrow h \approx 30,23 \text{ m}$

6.121. (TIC) Desde un lugar situado al pie de una montaña se observa el pico más alto con un ángulo de elevación de 45º. Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30º.

Calcula la altura de la montaña.

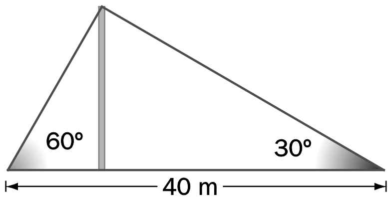


$$\text{tg}\, 45º = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \text{tg}\, 45º \cdot x = x$$

$$\text{tg}\, 30º = \frac{h}{x + 1061} \Rightarrow h = \text{tg}\, 30º \cdot (x + 1061) = 0,5774x + 612,6214$$

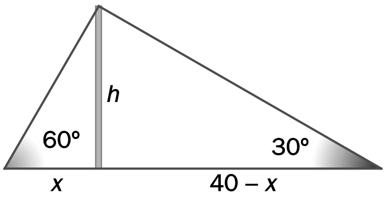
Igualando: $x = 0,5774x + 612,6214 \Rightarrow 0,4226x = 612,6214 \Rightarrow x = 1449,65 \Rightarrow h = 1449,65 \text{ m}$

6.122. Se ha clavado una antena en el suelo. Para que permanezca vertical y bien sujeta se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base.



La distancia entre los anclajes es de 40 metros, y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30º y 60º, respectivamente.

Halla la altura de la antena.



$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \text{tg}\,60^\circ \cdot x = 1{,}7321x$$

$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{h}{40 - x} \Rightarrow h = \text{tg}\,30^\circ \cdot (40 - x) = 23{,}096 - 0{,}5774x$$

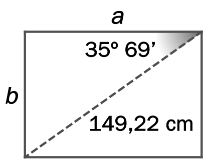
Igualando: $1{,}7321x = 23{,}096 - 0{,}5774x \Rightarrow 2{,}3095x = 23{,}096 \Rightarrow x \approx 10 \text{ m} \Rightarrow \text{h} \approx 17{,}32 \text{ m}$

6.123. (TIC) Juan quiere saber si puede bajar el tablero de su mesa en el ascensor.

La diagonal del tablero mide 149,22 cm y forma un ángulo de 35,69º con la arista mayor.

El ascensor mide 95 × 80 × 205 cm.

¿Podrá Juan bajar su mesa en el ascensor?



$$\cos 35{,}69^\circ = \frac{a}{149{,}22} \Rightarrow a = 149{,}22 \cdot \cos 35{,}69^\circ \cdot x \approx 121{,}19 \text{ cm}$$

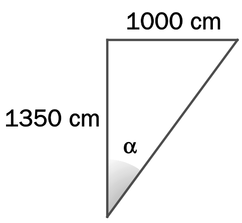
$$\text{sen}\,35{,}69^\circ = \frac{b}{149{,}22} \Rightarrow a = 149{,}22 \cdot \text{sen}\,35{,}69^\circ \cdot x \approx 87{,}05 \text{ cm}$$

De este modo, el tablero puede entrar en el ascensor.

6.124. (TIC) Se invierten 6 segundos en la observación de un avión que sobrevuela un punto de la Tierra. En este intervalo de tiempo, el avión ha cambiado ligeramente de posición.

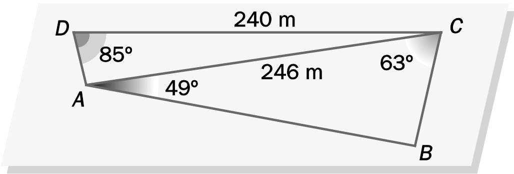
Si el avión se observa perpendicularmente a una altura de 1350 metros y lleva una velocidad de 600 kilómetros por hora, ¿qué ángulo diferencia las dos visuales del observador?

En 6 segundos, el avión recorre 1 km; por tanto,



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1000}{1350} \approx 0{,}741 \Rightarrow \alpha \approx 36{,}54^\circ$$

6.125. (TIC) Para conocer la distancia entre varios puntos se realiza una triangulación, esto es, se unen los puntos de modo que formen triángulos no solapados.



Calcula las distancias que faltan en el dibujo.

El ángulo $\widehat{ABC}$ vale 180º – 49º – 63º = 68º

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{BC}{\text{sen}\,49^\circ}=\frac{246}{\text{sen}\,68^\circ}\Rightarrow BC=\frac{246\cdot\text{sen}\,49^\circ}{\text{sen}\,68^\circ}\approx 200{,}24\text{ m}$$

$$\frac{AB}{\text{sen}\,63^\circ}=\frac{246}{\text{sen}\,68^\circ}\Rightarrow AB=\frac{246\cdot\text{sen}\,63^\circ}{\text{sen}\,68^\circ}\approx 236{,}4\text{ m}$$

Aplicando el teorema del seno calculamos el ángulo $\alpha=\widehat{DAC}$:

$$\frac{240}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{246}{\text{sen}\,85^\circ}\Rightarrow \text{sen}\,\alpha=\frac{240\cdot\text{sen}\,85^\circ}{246}\approx 0{,}9719\Rightarrow\alpha=76{,}39^\circ$$

Observa que el otro posible valor de α, 180º – 76,39º = 103,61º, no es posible, ya que en ese caso los ángulos del triángulo *ADC* sumarían más de 180º.

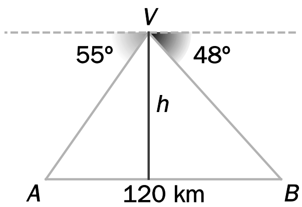
El ángulo $\widehat{DCA}$ vale 180º – 85º – 76,39º = 18,61º

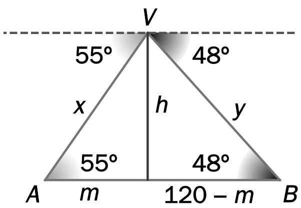
Por último, aplicando el teorema del coseno:

$$AD^2=240^2+246^2-2\cdot240\cdot246\cdot\cos 18{,}61^\circ\approx 6210{,}08\Rightarrow AD\approx 78{,}8\text{ m}$$

NOTA: Hay un error en el dibujo del libro, la diagonal del cuadrilátero mide 246 m.

6.126. (TIC) Una avioneta está volando entre dos ciudades *A* y *B* que distan 120 km. Los ángulos de depresión desde la avioneta hasta cada una de las ciudades son de 55º y 48º, respectivamente. Calcula la altura a la que está volando la avioneta y las distancias a las que se encuentra de *A* y de *B*.





$$\text{tg}\,55^\circ=\frac{h}{m}\Rightarrow h=\text{tg}\,55^\circ\cdot m=1{,}4281m$$

$$\text{tg}\,48^\circ=\frac{h}{120-m}\Rightarrow h=\text{tg}\,48^\circ\cdot(120-m)=133{,}272-1{,}1106m$$

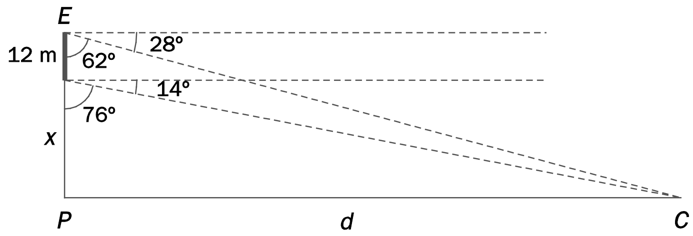
Igualando: $1{,}4281m=133{,}272-1{,}1106m\Rightarrow 2{,}5387m=133{,}272\Rightarrow m\approx 52{,}5\text{ m}\Rightarrow \text{h}\approx 74{,}98\text{ m}$

Por otro lado:

$$\text{sen}\,55^\circ=\frac{h}{x}\Rightarrow x=\frac{h}{\text{sen}\,55^\circ}\approx 91{,}53\text{ m}\qquad \text{sen}\,48^\circ=\frac{h}{y}\Rightarrow y=\frac{h}{\text{sen}\,48^\circ}\approx 100{,}9\text{ m}$$

6.127. (TIC) Desde el punto más alto de un edificio se ve un coche aparcado con un ángulo de depresión de 28º. Al bajar a un piso del mismo edificio situado a 12 metros del anterior punto de observación, el ángulo de depresión pasa a ser de 14º.

Calcula la distancia del coche al punto más bajo del edificio y la altura del mismo.



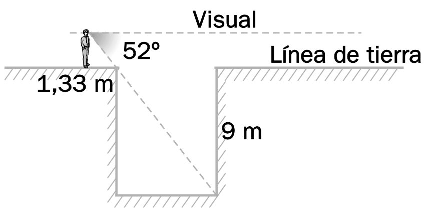
$$\text{tg}\,62^\circ = \frac{d}{12+x} \Rightarrow d = \text{tg}\,62^\circ \cdot (12+x) = 1{,}8807 \cdot (12+x) = 22{,}5684 + 1{,}8807x$$

$$\text{tg}\,76^\circ = \frac{d}{x} \Rightarrow d = \text{tg}\,76^\circ \cdot x = 4{,}0108x$$

Igualando: $22{,}5684 + 1{,}8807x = 4{,}0108x \Rightarrow 2{,}1301x = 22{,}5684 \Rightarrow x \approx 10{,}59$ m

Por tanto, la altura del edificio es $x + 12 = 22{,}59$ m, y el coche está a $d = 4{,}0108x \approx 42{,}47$ m.

6.128. (TIC) Una persona situada a 1,33 m del extremo de un pozo de 9 metros de hondo ve su punto más profundo y alejado con un ángulo de depresión de 52º tal y como muestra la figura. Calcula la anchura del pozo y la altura, hasta los ojos, de la persona.

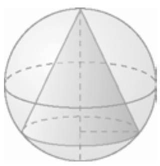


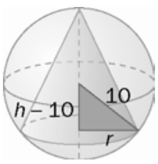
Si x es la anchura del pozo y h la altura de la persona, tenemos:

$$\text{tg}(90^\circ - 52^\circ) = \text{tg}\,38^\circ = \frac{1{,}33}{h} \Rightarrow h = \frac{1{,}33}{\text{tg}\,38^\circ} \approx 1{,}7 \text{ m}$$

$$\text{tg}\,52^\circ = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{\text{tg}\,52} = 7{,}03 \text{ m}$$

6.129. En una esfera de 10 cm de radio se inscribe un cono, tal y como aparece en la figura. Halla el volumen del cono si el área de su base es de 50 cm^2.





Como $\pi r^2 = 50$, tenemos que $r = 3{,}99$ cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo sombreado:

$$r^2 + (h-10)^2 = 10^2 \Rightarrow (h-10)^2 = 100 - r^2 \Rightarrow h = 10 + \sqrt{100 - r^2} \approx 19{,}17 \text{ cm}$$

Por tanto, el volumen del cono vale $V = \dfrac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} = \dfrac{50 \cdot 19{,}17}{3} = 319{,}5 \text{ cm}^3$.

AMPLIACIÓN

6.130. ¿Cuál es la suma de todas las soluciones entre 0 y 360º de la ecuación $tg^2 x - 2tg\, x + 1 = 0$?

a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** π **c)** $\frac{3\pi}{2}$ **d)** 2π

Haciendo el cambio de variable $z = tg\, x$, la ecuación se transforma en $z^2 - 2z + 1 = 0$, cuya única solución es $z = 1$. Por tanto, $tg\, x = 1$, que tiene como soluciones entre 0 y 2π, $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

De este modo, la suma de las soluciones es $\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, la respuesta c.

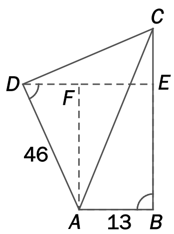
6.131. ¿Cuántos triángulos de área 10 tienen por vértices los puntos (5 cos α, 5 sen α), (–5, 0) y (5, 0)?

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6

Tomando como base el segmento de extremos (–5, 0) y (5, 0), su longitud es 10, por lo que para que el área sea 10, la altura debe ser 2. Es decir, la ordenada del tercer vértice debe ser 2 o –2. Así pues, $\text{sen}\,\alpha = \pm\frac{2}{5}$, y hay cuatro valores de α en $[0, 2\pi)$ que lo cumplen, la respuesta c.

6.132. En el cuadrilátero *ABCD*, el ángulo $\hat{A}$ es de 120º; los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{D}$ son ángulos rectos, *AB* = 13 y *AD* = 46. La longitud *AC* es:

a) 60 **b)** 62 **c)** 64 **d)** 65



La situación es como indica la figura. Observemos que $\hat{C} = 60º$ y $AC^2 = DC^2 + 46^2$.

Para obtener *DC*, trazamos por *D* una paralela a *AB*, por lo que el ángulo $\widehat{ADE}$ = = 60º, siendo, entonces, $DF = 46 \cdot \cos 60º = 23$. De este modo, $DE = 23 + 13 = 36$ y $DC = \frac{36}{\cos 30º} = \frac{72}{\sqrt{3}} = \frac{72\sqrt{3}}{3} = 24\sqrt{3}$.

Por tanto, $AC^2 = DC^2 + 46^2 = 1728 + 2116 = 3844$, resultando entonces $AC = 62$, la respuesta b.

6.133. Si $\frac{1}{\cos\alpha} - tg\,\alpha = 2$, $\frac{1}{\cos\alpha} + tg\,\alpha$ es igual a:

a) 0,1 **b)** 0,2 **c)** 0,3 **d)** 0,5

Nos dicen que $\frac{1-\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 2$ y nos piden $\frac{1+\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Como $\frac{1-\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1+\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$, se sigue que $\frac{1+\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$, la respuesta d.

6.134. Sea $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$, y sea α un ángulo que cumple $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Entonces $\frac{1}{x}$ es:

a) $\text{sen}^2\,\alpha$ **b)** $\cos^2\alpha$ **c)** $tg^2\,\alpha$ **d)** $\frac{1}{tg^2\,\alpha}$

Como $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$, se sigue que $1-\frac{1}{x} = \cos^2\alpha$, por lo que $\frac{1}{x} = 1-\cos^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$, la respuesta a.

AUTOEVALUACIÓN

6.1. Expresa estos ángulos en grados.

a) $\frac{3\pi}{5}$ **rad** **b)** $\frac{15\pi}{4}$ **rad** **c)** 9π **rad**

Multiplicando en cada caso por $\frac{180}{\pi}$, obtenemos:

a) 108º b) 675º c) 1620º

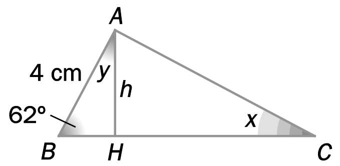
6.2. Pasa a radianes los siguientes ángulos.

a) **36º** **b)** **100º** **c)** **310º**

Multiplicando en cada caso por $\frac{\pi}{180}$, obtenemos:

a) $\frac{\pi}{5}$ rad b) $\frac{5\pi}{9}$ rad c) $\frac{31\pi}{18}$ rad

6.3. El triángulo de la figura es rectángulo en *A*.



a) Calcula la medida del cateto desconocido y de la hipotenusa.

b) Calcula la medida de la altura *h*.

c) Calcula las amplitudes de los ángulos *x* e *y*.

a) $\text{tg}\,62º = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 4 \cdot \text{tg}\,62º \approx 7{,}52$ cm

$\cos 62º = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{\cos 62º} \approx 8{,}52$ cm

b) $\text{sen}\,62º = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cdot \text{sen}\,62º \approx 3{,}53$ cm

c) $x = 90º - 62º = 28º$ $y = 90º - 62º = 28º$

6.4. Halla las otras dos razones trigonométricas en cada caso.

a) **sen α = 0,3;** **90º < α <180º**

b) **tg α = $\sqrt{24}$;** **0 rad < α < $\frac{\pi}{2}$ rad**

c) **cos α = 0,125;** **270º < α < 360º**

d) **tg α = $\frac{4}{3}$;** **π rad < α < $\frac{3\pi}{2}$ rad**

a) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, y el coseno y la tangente, negativos.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - 0{,}3^2} = -0{,}954$

$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}3}{-0{,}954} = -0{,}314$

b) Al ser un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas son positivas.

$$1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\sqrt{24}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \text{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

c) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el seno y la tangente son negativos, y el coseno, positivo.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\alpha = -\sqrt{1-0{,}125^2} = -0{,}992$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}992}{0{,}125} = -7{,}736$$

d) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos, y la tangente, positiva.

$$1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \text{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

6.5. Si sen α = 0,2 y α es agudo, halla:

a) sen (180º – α)

b) cos (90º – α)

c) cos (–α)

d) sen (α + 180º)

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-0{,}2^2} = 0{,}98$$

a) sen (180º – α) = sen α = 0,2

b) cos (90º – α) = sen α = 0,2

c) cos (–α) = cos α = 0,98

d) sen (α + 180º) = –sen α = –0,2

6.6. Calcula los ángulos que cumplen cada una de las siguientes condiciones.

a) cos α = – 0,44

b) sen χ = $\frac{8}{15}$

c) tg β = $\sqrt{43}$

d) sen δ = – 0,96

a) $$\cos\alpha = -0{,}44 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 180º - 63{,}9º + 360º\cdot k = 116{,}1º + 360º\cdot k \\ \alpha = 180º + 63{,}9º + 360º\cdot k = 243{,}9º + 360º\cdot k \end{cases} \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

b) $$\text{sen}\chi = \frac{8}{15} \Rightarrow \begin{cases} \chi = 32{,}23º + 360º\cdot k \\ \chi = 180º - 32{,}23º + 360º\cdot k = 147{,}77º + 360º\cdot k \end{cases} \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

c) $$\text{tg}\beta = \sqrt{43} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 81{,}33º + 360º\cdot k \\ \beta = 180º + 81{,}33º + 360º\cdot k = 261{,}33º + 360º\cdot k \end{cases} \Rightarrow \beta = 81{,}33º + 180º\cdot k \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$$

d) $$\text{sen}\delta = -0{,}96 \Rightarrow \begin{cases} \delta = 180º + 73{,}74º + 360º\cdot k = 253{,}74º + 360º\cdot k \\ \delta = 360º - 73{,}74º + 360º\cdot k = 286{,}26º + 360º\cdot k \end{cases} \text{donde } k \in \mathbb{Z}$$

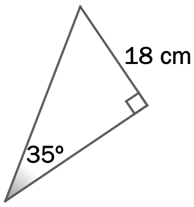
6.7. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\frac{\mathbf{sen}^2\,\boldsymbol{x}+\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}}}=\mathbf{sen}^2\,\boldsymbol{x}$$

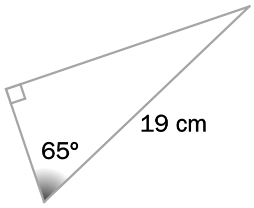
$$\frac{sen^2 x+sen\,x\cdot\cos x}{1+\dfrac{1}{tgx}}=\frac{senx\cdot(senx+\cos x)}{1+\dfrac{\cos x}{senx}}=\frac{senx\cdot(senx+\cos x)}{\dfrac{senx+\cos x}{senx}}=\frac{sen^2x\cdot(senx+\cos x)}{senx+\cos x}=sen^2x$$

6.8. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a)



b)



a) $\hat{A}$ = 90º, $\hat{C}$ = 35º, c = 18 cm, $\hat{B}$ = 180º – $\hat{A}$ – $\hat{C}$ = 55º

$$\text{sen}\,35º=\frac{18}{a}\Rightarrow a=\frac{18}{\text{sen}\,35º}\approx 31{,}38\text{ cm}$$

$$\text{tg}\,35º=\frac{18}{b}\Rightarrow b=\frac{18}{\text{tg}\,35º}\approx 25{,}71\text{ cm}$$

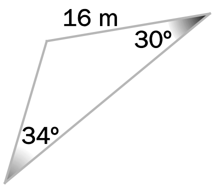
b) $\hat{A}$ = 90º, $\hat{B}$ = 65º, a = 19 cm, $\hat{C}$ = 180º – $\hat{A}$ – $\hat{B}$ = 25º

$$\text{sen}\,65º=\frac{b}{19}\Rightarrow b=19\cdot\text{sen}\,65º\approx 17{,}22\text{ cm}$$

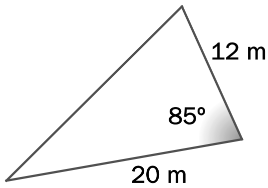
$$\cos 65º=\frac{c}{19}\Rightarrow c=19\cdot\cos 65º\approx 8{,}03\text{ cm}$$

6.9. Resuelve los siguientes triángulos.

a)



b)



a) $\hat{A}$ = 34º, $\hat{B}$ = 30º, a = 16 m, $\hat{C}$ = 180º – $\hat{A}$ – $\hat{B}$ = 116º

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\hat{B}}\Rightarrow b=\frac{16\cdot\text{sen}\,30º}{\text{sen}\,34º}\approx 14{,}31\text{ m}$$

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}}=\frac{c}{\text{sen}\hat{C}}\Rightarrow c=\frac{16\cdot\text{sen}\,116º}{\text{sen}\,34º}\approx 25{,}72\text{ m}$$

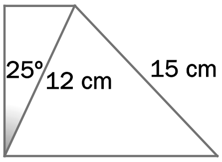
b) $\hat{A}$ = 85º, b = 20 m, c = 12 m

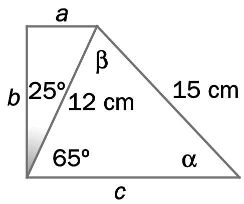
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=20^2+12^2-2\cdot20\cdot12\cdot\cos 85º\approx 502{,}17\Rightarrow a\approx 22{,}41\text{ m}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{22{,}41^2+12^2-20^2}{2\cdot22{,}41\cdot12}\approx 0{,}458\Rightarrow\hat{B}\approx 62{,}74º$$

$\hat{C}$ = 180º – $\hat{A}$ – $\hat{B}$ = 32,26º

6.10. Halla la medida de los lados desconocidos de este trapecio rectángulo.





$$\text{sen}\,25^\circ = \frac{a}{12} \Rightarrow a = 12 \cdot \text{sen}\,25^\circ \approx 5{,}07 \text{ cm}$$

$$\cos 25^\circ = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12 \cdot \cos 25^\circ \approx 10{,}89 \text{ cm}$$

$$\frac{12}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{15}{\text{sen}\,65^\circ} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{12 \cdot \text{sen}\,65^\circ}{15} \approx 0{,}725 \Rightarrow \alpha \approx 46{,}47^\circ$$ (La otra solución no es posible).

$\beta = 180^\circ - 65^\circ - \alpha = 68{,}53^\circ$

$$c^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \cos\beta \approx 237{,}23 \Rightarrow c \approx 15{,}4 \text{ cm}$$

6.11. La generatriz de un cono mide 26 cm y forma un ángulo de 67,38º con el radio de la base. Halla el área total y el volumen del cono.

La altura del cono mide $h = 26 \cdot \cos 67{,}38^\circ \approx 10$ cm.

El radio de la base mide $r = 26 \cdot \text{sen}\ 67{,}38^\circ \approx 24$ cm.

Por tanto, el área total y el volumen del cono valen, respectivamente:

$$A = \pi r^2 + \pi r g \approx 3769{,}91 \text{ cm}^2 \qquad V = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx 6031{,}86 \text{ cm}^3$$

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Aprende y calcula > El monte Everest

Como ya sabrás, el monte Everest es la montaña más alta de la Tierra, aunque este hecho no se supo hasta el siglo XIX.

El matemático y topógrafo bengalí Radhanath Sikdar fue el primero en medir la altitud de esta montaña, en 1852, con ayuda de un teodolito. Para ello tomó varias medidas desde la India, aunque no fuese la ubicación más cercana, ya que resultaba imposible entrar en Nepal.

Sus mediciones arrojaron que la montaña medía exactamente 29 000 pies, es decir, 8839 m sobre el nivel del mar. Más de 150 años después se han llevado a cabo mediciones más precisas, realizadas con GPS y otros instrumentos desde la cima, que han cifrado la altitud del Everest en 8844 m. Es decir, si las mediciones actuales se aceptan como correctas, Sikdar cometió un error de solo un 0,06%… ¡y sin necesidad de escalar la montaña!

6.1. Antes de empezar, averigua la diferencia entre altura y altitud en Geografía y para qué sirve un teodolito, y descríbelo por escrito.

Altitud: Es la distancia vertical de un punto respecto al nivel del mar.

Altura: Es la distancia vertical de un punto respecto a la tierra o cualquier otra superficie tomada como referencia.

El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico para medir ángulos verticales y horizontales con gran precisión.

6.2. **Ahora imagina que eres Sikdar y quieres determinar la altura de la cima *C* de una montaña. Para ello te sitúas con un teodolito en dos puntos *A* y *B* situados a la misma altitud y separados entre sí una distancia de 800 m. Efectúas tres mediciones: $\widehat{CAB} = 72^\circ$, $\widehat{ABC} = 75^\circ$ y el ángulo de elevación de la montaña desde *A*, $\widehat{HAC} = 35^\circ$.**

Determina:

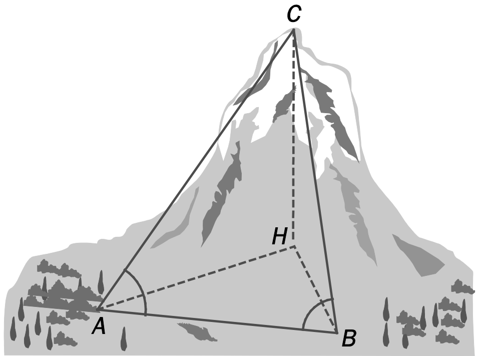
a) La medida del ángulo $\widehat{ACB}$.

b) Las longitudes desde los puntos *A* y *B* hasta la cima de la montaña *C*.

c) El punto *H*, inaccesible, se encuentra a la misma altitud que *A* y *B* y en la vertical de *C*. ¿Qué tipo de triángulo es *AHC*?

d) Calcula la distancia desde *H* hasta *C*.

e) Si los puntos *A* y *B* están a 1100 m sobre el nivel del mar, ¿cuál es la altitud de la montaña sobre el nivel del mar?



a) 33º

b) Aplicando el teorema del seno al triángulo *ABC* obtenemos *AC* = 1418,81 m y *BC* = 1396,97 m.

c) Un triángulo rectángulo.

d) $HC = AC \cdot \text{sen } 35^\circ = 813{,}8$ m

e) 1100 + 813,8 = 1913,8 m

6.3. **¿En qué continente, en qué cordillera y en la frontera entre qué países se encuentra el Everest? Localízalos en un mapa.**

En Asia, en la cordillera del Himalaya. Forma frontera entre China y Nepal.

6.4. **Investiga brevemente el contexto histórico de la India y Nepal en la fecha de la medición y aventura una hipótesis sobre por qué Sikdar no pudo entrar en Nepal para hacer sus mediciones.**

Respuesta abierta.

6.5. **Cuando Sikdar lo midió, el monte Everest se llamaba Pico XV. Muchos indios, entre ellos un primer ministro, han defendido que se dé al monte el nombre de Sikdar.**

a) ¿Por qué razón se llama Everest?

b) ¿Qué otros nombres ha recibido y qué significaban?

c) ¿Qué países se oponen actualmente al nombre Everest, y cuáles proponen?

a) En honor de *sir* George Everest, británico, topógrafo general de la India en 1865.

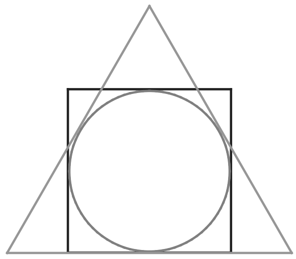
b) En Nepal, Sagarmatha (la frente del cielo), y en China, Chomolungma (madre del universo).

c) Nepal y China. Proponen los enunciados en el apartado anterior.

Interpreta y descubre > El volumen de una esfera

Se cuenta que Arquímedes hizo grabar sobre su tumba un círculo inscrito a la vez en un cuadrado y en un triángulo equilátero de bases superpuestas, en memoria de uno de sus más bellos descubrimientos: que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro circunscrito, que a su vez es dos tercios del volumen del cono equilátero circunscrito a la misma esfera.

Y se cuenta también que gracias a este emblema pudo hallar Cicerón la tumba del siracusano, olvidada y cubierta por la maleza, un siglo y medio después de su muerte.



6.1. ¿En qué época vivió Arquímedes? Si te fijas en el texto anterior observarás que Arquímedes era "siracusano". ¿Cuál fue su lugar de nacimiento?

Nació en Siracusa, al este de la isla de Sicilia. Vivió de 287 a. C. a 212 a. C.

6.2. Muchos de los logros científicos de Arquímedes han llegado hasta nuestros días. ¿Puedes citar algunos de ellos?

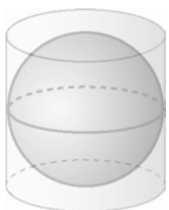
Arquímedes fue matemático, físico, ingeniero, inventor y astrónomo.

De sus logros matemáticos destacan el cálculo del área bajo una parábola, la aproximación del número π, la espiral que lleva su nombre, y el cálculo de superficies y volúmenes de los cuerpos de revolución.

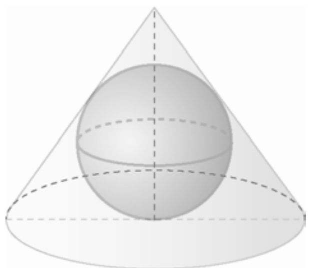
En física destacan el principio de Arquímedes y la palanca.

6.3. Utilizando las fórmulas del volumen de la esfera, del cilindro y del cono que él mismo descubrió, comprueba las relaciones que se enuncian en el texto:

a) $\boldsymbol{V_{\text{esfera}} = \frac{2}{3}V_{\text{cilindro}}}$



b) $\boldsymbol{V_{\text{cilindro}} = \frac{2}{3}V_{\text{cono}}}$

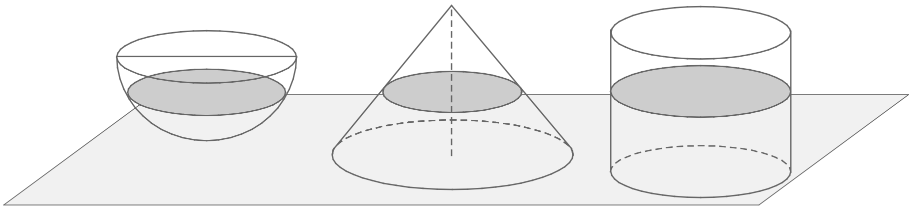


a) El volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$ y el del cilindro es $V = \pi\cdot r^2\cdot 2r = 2\pi\cdot r^3$, de donde se obtiene la relación.

b) La altura del triángulo equilátero es $3r$. Por otra parte, si l es el lado de este triangulo, que coincide con el diámetro de la base del cono, la altura debe ser $\frac{\sqrt{3}\,l}{2}$; por tanto, $\frac{\sqrt{3}\,l}{2} = 3r$ y se deduce que $l = 2\sqrt{3}r$. De este modo, el volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi\left(r\sqrt{3}\right)^2\cdot 3r = 3\pi\cdot r^3$, de donde se obtiene la relación.

6.4. Pero ¿cómo obtuvo Arquímedes la fórmula del volumen de la esfera? Interpreta el siguiente texto y, con lápiz y papel, dibuja lo que hizo.

Arquímedes imaginó una esfera inscrita en un cilindro y los dividió ecuatorialmente por la mitad. Tomó por separado la semiesfera, el semicilindro y un cono inscrito en la otra mitad del cilindro. Y luego imaginó los tres sólidos cortados en finísimas "rebanadas" horizontales, o lo que es lo mismo, seccionados por una infinidad de planos paralelos. Vio que para cada corte se cumplía que el área de la sección del cilindro era igual al área de la sección de la

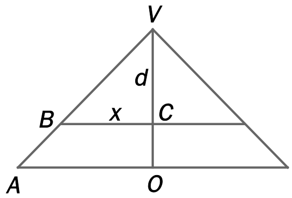


6.5. Compruébalo. Para ello ten en cuenta que si el plano que los corta está a una distancia *d* del vértice del cono, entonces el radio de la sección del cono es *d*.

a) ¿Por qué? ¿Cuál es el radio de la sección de la semiesfera?

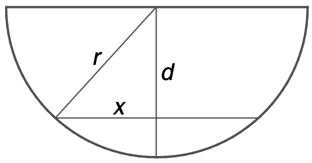
b) Comprueba que $S_{\text{sección del cilindro}} = S_{\text{sección de la semiesfera}} + S_{\text{sección del cono}}$.

a)



Para la primera parte, observa el diagrama.

Los triángulos *AOV* y *BCV* son semejantes; además, $AO = OV = r$, luego $x = BC = CV = d$.



Para la segunda parte, observa el diagrama.

$$x^2 = r^2 - d^2 \Rightarrow x = \sqrt{r^2 - d^2}$$

b) Según el apartado anterior.

$S_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2$ $\quad$ $S_{\text{cono}} = \pi \cdot d^2$ $\quad$ $S_{\text{semiesfera}} = \pi \cdot \left(r^2 - d^2\right) = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot d^2$

De donde se deduce la relación.

Y anticipándose 2000 años al cálculo integral, dedujo que si esta relación se cumplía para todas las rebanadas, también tendría que cumplirse para sus respectivas sumas, por lo que el volumen del cilindro tenía que ser igual al de la semiesfera más el del cono. Arquímedes conocía las fórmulas que permiten hallar el volumen del cilindro y el del cono, por lo que pudo deducir la fórmula del volumen de la esfera.

6.6. Comprueba de una forma práctica la relación anterior. Toma una semiesfera, que puede ser la mitad de una pelota de tenis. Construye en cartulina un cilindro y un cono con las características descritas. Llena la semiesfera y el cono con agua y viértelos en el cilindro.

¿Hasta dónde se llena el cilindro? ¿Cómo lo interpretas?

Respuesta abierta. El cilindro debería llenarse completamente.

Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Juan Jesús Donaire, Vanesa Fernández, Pedro Lomas, Juan Alberto Torresano, Ana María Álvarez, Mariano García, Marta Marcos, Carolina Puente, Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano**

Edición: **Arturo García, Eva Béjar, José Miguel Gómez**

Revisión contenidos: **Miguel Nieto**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Modesto Arregui, Jurado y Rivas, Estudio "Haciendo el león", Félix Anaya, Juan Francisco Cobos, José Santos**

Fotografía: **Olimpia Torres**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Gestión de las direcciones electrónicas:
Debido a la naturaleza dinámica de internet, Ediciones SM no puede responsabilizarse de los cambios o las modificaciones en las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que remite este libro.

Con el objeto de garantizar la adecuación de las direcciones electrónicas de esta publicación, Ediciones SM emplea un sistema de gestión que redirecciona las URL que con fines educativos aparecen en la misma hacia diversas páginas web. Ediciones SM declina cualquier responsabilidad por los contenidos o la información que pudieran albergar, sin perjuicio de adoptar de forma inmediata las medidas necesarias para evitar el acceso desde las URL de esta publicación a dichas páginas web en cuanto tenga constancia de que pudieran alojar contenidos ilícitos o inapropiados. Para garantizar este sistema de control es recomendable que el profesorado compruebe con antelación las direcciones relacionadas y que comunique a la editorial cualquier incidencia a través del correo electrónico ediciones@grupo-sm.com.