

## Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Resolver ecuaciones de segundo grado completas e incompletas.
- Resolver ecuaciones bicuadradas y otras que se pueden reducir a una de segundo grado.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando los diferentes métodos.
- Resolver sistemas de ecuaciones de segundo grado.
- Aplicar el lenguaje del álgebra a la resolución de problemas.

Antes de empezar.

1. Ecuaciones de segundo grado ..... pág. 58  
Ecuaciones de 2º grado completas  
Ecuaciones de 2º grado incompletas  
Soluciones de una ecuación de 2º grado  
Ecuaciones bicuadradas  
Ecuaciones racionales
2. Sistemas de ecuaciones lineales ..... pág. 61  
Solución de un sistema  
Sistemas compatibles e incompatibles  
Resolver sistemas por sustitución  
Resolver sistemas por igualación  
Resolver sistemas por reducción
3. Sistemas de segundo grado ..... pág. 63  
Del tipo:  $ax+by=c$   $x \cdot y=d$   
Del tipo:  $a_0x^2+b_0y^2=c_0$   $a_1x+b_1y=c_1$
4. Aplicaciones prácticas ..... pág. 64  
Resolución de problemas

Ejercicios para practicar

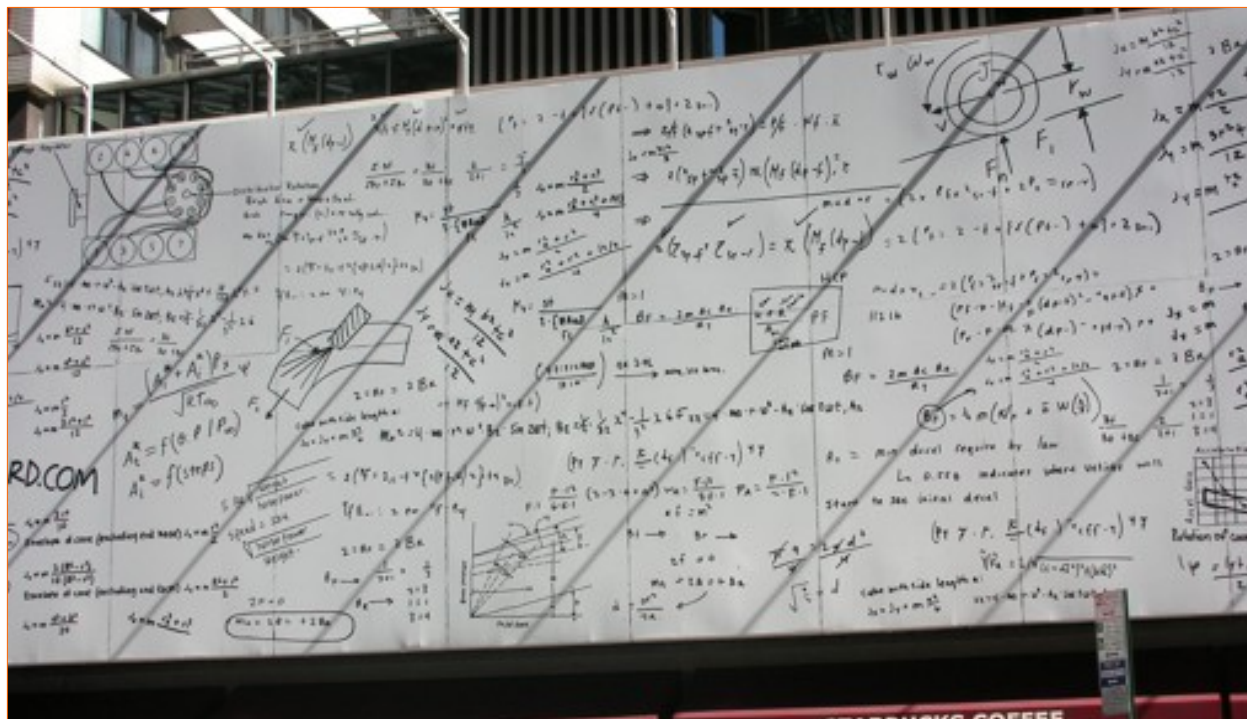
Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

## Antes de empezar



Gran cantidad de problemas prácticos en la vida real conducen a la resolución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones. Traducir al “lenguaje del álgebra” resulta imprescindible en estas ocasiones, el lenguaje algebraico nos sirve para expresar con precisión relaciones difíciles de transmitir con el lenguaje habitual.

Prueba a hacer a algún amigo el juego de que propone el mago, para adivinar el número pensado basta restar 1000 al resultado que te de y dividir por 100, como puedes comprobar si planteas una ecuación:

|                        |                                                       |
|------------------------|-------------------------------------------------------|
| Piensa un número       | $x$                                                   |
| Duplécalo              | $2x$                                                  |
| Añade 5 unidades       | $2x + 5$                                              |
| Multiplica por 5       | $5 \cdot (2x + 5)$                                    |
| Suma 75 unidades       | $5 \cdot (2x + 5) + 75$                               |
| Multiplica todo por 10 | $10 \cdot [5 \cdot (2x + 5) + 75]$                    |
|                        | $10 \cdot [5 \cdot (2x + 5) + 75] = \text{resultado}$ |
|                        | $10 \cdot (10x + 25 + 75) = \text{resultado}$         |
|                        | $10 \cdot (10x + 100) = \text{resultado}$             |
|                        | $100x + 1000 = \text{resultado}$                      |
|                        | $x = (\text{resultado} - 1000) / 100$                 |



# Ecuaciones y sistemas

## 1. Ecuaciones de segundo grado

Las **ecuaciones de segundo grado** son de la forma:

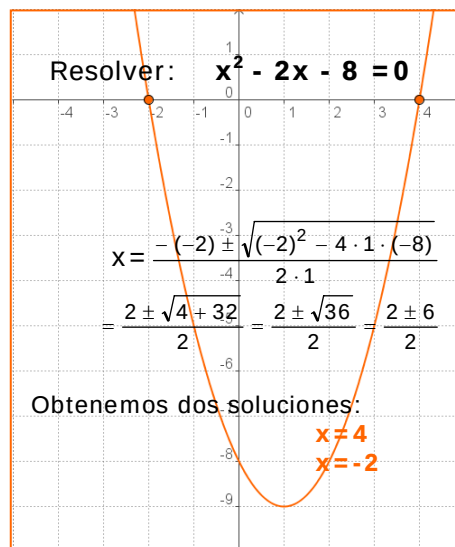
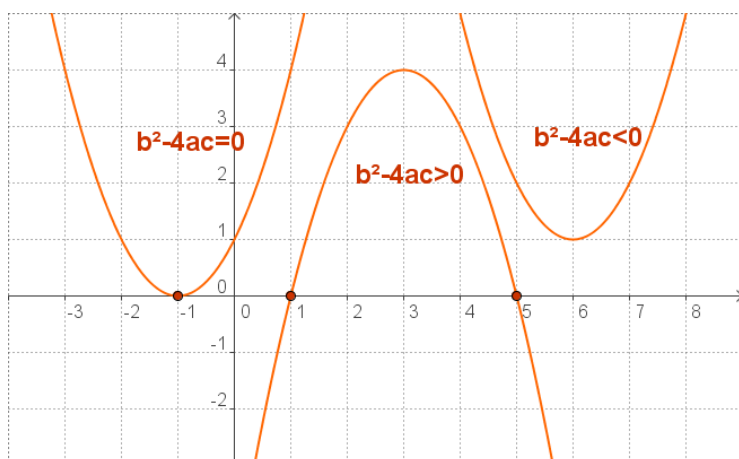
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolverlas empleamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones, una o ninguna solución, según sea  $b^2 - 4ac$ , el llamado discriminante.

- $b^2 - 4ac > 0$  Hay dos soluciones.
- $b^2 - 4ac = 0$  Hay una solución doble:  $x = -b/2a$
- $b^2 - 4ac < 0$  No hay solución.



### ¿Cómo se obtiene la fórmula?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Pasamos  $c$  al otro miembro:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos por  $4a$ :

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumamos  $b^2$ :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Tenemos un cuadrado perfecto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraemos la raíz:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Despejamos  $x$ :

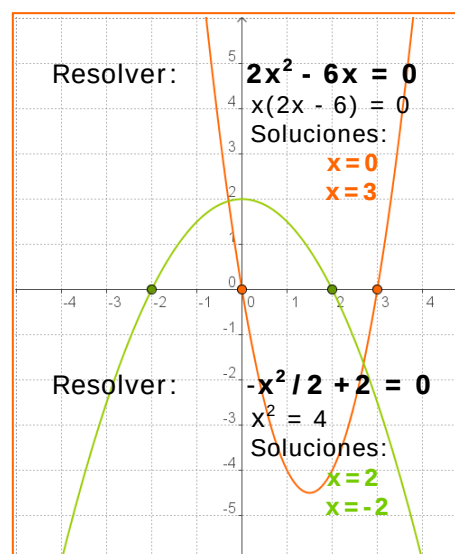
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

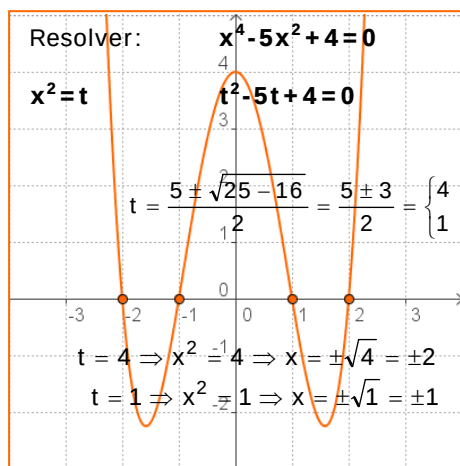
## Ecuaciones incompletas

Cuando  $b$ ,  $c$  ó los dos son 0 estamos ante una ecuación de segundo grado incompleta.

En estos casos no es necesario aplicar la fórmula sino que resulta más sencillo proceder de la siguiente manera:

- Si  $b=0$   $ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a$   
$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$
  - Si  $-c/a > 0$  hay dos soluciones
  - Si  $-c/a < 0$  no hay solución
- Si  $c=0$   $ax^2 + bx = 0$   
sacando  $x$  factor común:  $x(ax+b)=0$   
 $\Rightarrow x=0, x=-b/a$  son las dos soluciones.





## Ecuaciones bicuadradas

A las ecuaciones del tipo  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  se les llama bicuadradas.

Para resolverlas basta hacer  $x^2 = t$ , obteniendo una ecuación de segundo grado:  $at^2 + bt + c = 0$ , en la que

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{t_1} \\ x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

A continuación vemos algunas ecuaciones que se transforman en una de segundo grado. En los ejercicios resueltos puedes ver más ejemplos.

## Racionales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece en el denominador.

El proceso que se ha de seguir para su resolución consiste en quitar en primer lugar los denominadores, operamos y resolvemos la ecuación resultante.

Conviene comprobar que ninguna de las soluciones obtenidas anula el denominador, ya que en ese caso no sería válida.

Resolver:  $x - \frac{2}{1-x} = 4$

Quitamos denominadores :  
 $x(1-x) - 2 = 4(1-x)$

Operamos :  
 $x - x^2 - 2 = 4 - 4x$

Resolvemos :  
 $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Comprobamos las soluciones:  
 $x = 3$   
 $x = 2$   
 Son válidas ambas.

Resolver:  $\sqrt{x-1} + x = 7$

Dejamos a un lado la raíz:  
 $\sqrt{x-1} = 7 - x$

Elevamos al cuadrado:  
 $(\sqrt{x-1})^2 = (7-x)^2$

$x-1 = 49 - 14x + x^2$

Resolvemos:  $x^2 - 15x + 50 = 0$

$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$

Comprobamos las soluciones:  
 $x = 10$  no es válida  
 $x = 5$  es la solución

## Ecuaciones irracionales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece bajo el signo radical.

Para resolverlas se deja a un lado la raíz exclusivamente y se elevan al cuadrado los dos miembros. Operando se llega a una ecuación de segundo grado que resolvemos.

Al elevar al cuadrado suelen introducirse soluciones "extrañas" por lo que es preciso comprobarlas en la ecuación de partida.

## EJERCICIOS resueltos

### 1. Resuelve las ecuaciones:

$$a) x^2 + 12x + 32 = 0 \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-12 \pm 4}{2} = \begin{cases} -8 \\ -4 \end{cases}$$

$$b) 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

### 2. Resuelve las ecuaciones:

$$a) 2x^2 + 5x = 0 \quad x(2x+5)=0 \Rightarrow x=0, x=-5/2$$

$$b) 2x^2 - 32 = 0 \quad x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

### 3. Calcula el valor de m para que la ecuación $x^2+mx+9=0$ tenga una solución doble.

El discriminante  $\Delta=b^2-4ac$  debe ser 0,  $m^2 - 4 \cdot 9=0 \Rightarrow m^2=36$  y  $m=\pm 6$

Si  $m=6$ ,  $x^2+6x+9=0$  y la solución  $x=-3$ ; si  $m=-6$ ,  $x^2-6x+9=0$  y la solución  $x=3$

### 4. Resuelve las ecuaciones:

$$a) x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \quad t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$b) x^4 + 9x^2 - 162 = 0 \quad t^2 + 9t - 162 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 648}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-9 \pm 27}{2} = \begin{cases} -18 \Rightarrow \text{Sin sol.} \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

### 5. Resuelve las ecuaciones:

$$a) \frac{9-x}{1+3x} + \frac{3}{1-x} = -2 \quad (9-x)(1-x) + 3(1+3x) = -2(1+3x)(1-x)$$

$$9-9x-x+x^2+3+9x = -2+2x-6x+6x^2$$

$$5x^2 - 3x - 14 = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 280}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{3 \pm 17}{10} = \begin{cases} 2 \\ -7/5 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación valen las dos soluciones

$$b) \frac{1-x}{5(x+1)} - \frac{8}{x-2} = 1 \quad (x-2)(1-x) - 8 \cdot 5(x+1) = 5(x+1)(x-2)$$

$$x-2-x^2+2x-40x-40 = 5x^2+5x-10x-10$$

$$6x^2 + 32x + 32 = 0 \quad x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{12} = \frac{-32 \pm \sqrt{256}}{12} = \frac{-32 \pm 16}{12} = \begin{cases} -4 \\ -4/3 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación valen las dos soluciones

### 6. Resuelve las ecuaciones:

$$a) x+1-\sqrt{5x+1}=0 \quad x+1=\sqrt{5x+1}$$

$$(x+1)^2 = (\sqrt{5x+1})^2 \Rightarrow x^2+2x+1=5x+1$$

$$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=3$$

Sustituyendo en la ecuación valen las dos soluciones

$$b) \sqrt{3x+4} + 2x = 4 \quad \sqrt{3x+4} = 4-2x$$

$$(\sqrt{3x+4})^2 = (4-2x)^2 \Rightarrow 3x+4=16-16x+4x^2$$

$$4x^2-19x+12=0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{19 \pm 13}{8} = \begin{cases} 4 \\ 3/4 \end{cases}$$

Sólo vale la solución  $x=3/4$

## 2. Sistemas de ecuaciones

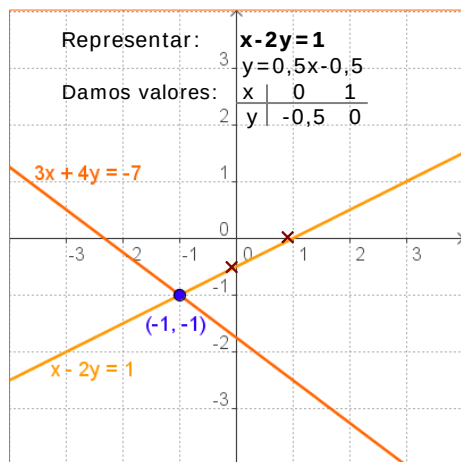
Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de primer grado que deben satisfacerse simultáneamente.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \text{ son números reales}$$

Una **solución** del sistema es un par de números **(x,y)** que verifica ambas ecuaciones del sistema.

Dos sistemas con la misma solución se dicen **equivalentes**.

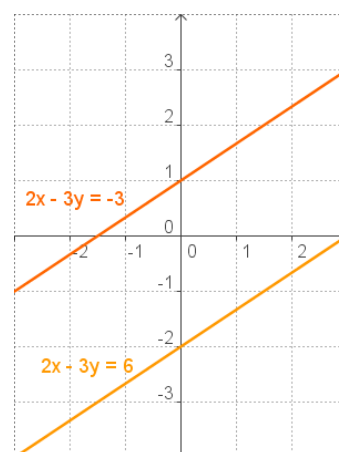
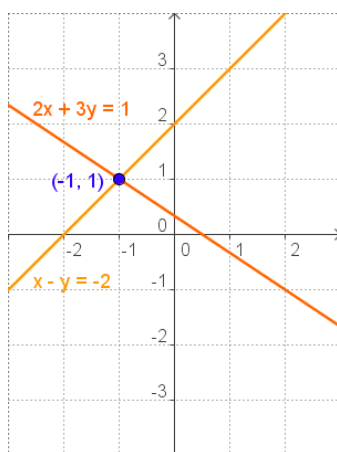
Los sistemas que tienen solución se llaman **compatibles** y los que no tienen **incompatibles**.



En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación representa una recta en el plano.

Discutir un sistema es estudiar la situación de estas rectas en el plano, que pueden ser:

- Secantes, el sistema tiene solución única, se llama **Compatible Determinado**.
- Coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones, es **Compatible Indeterminado**.
- Paralelas, el sistema no tiene solución, se llama **Incompatible**.



Resolver: 
$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Por **SUSTITUCIÓN**

Despejamos x en la 2ª ecuación y sustituimos en la 1ª:  $x = 1 + 2y$

$$\begin{aligned} 3(1 + 2y) + 4y &= -7 \\ 3 + 6y + 4y &= -7 \Rightarrow 10y = -10 \\ y &= -1 \\ x &= 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$

Por **IGUALACIÓN**

Despejamos x en ambas ecuaciones

e igualamos: 
$$\frac{-4y - 7}{3} = 1 + 2y$$

$$\begin{aligned} -4y - 7 &= 3(1 + 2y) \\ -4y - 7 &= 3 + 6y \Rightarrow -10y = 10 \\ y &= -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Por **REDUCCIÓN**

Multiplicamos por 2  $\rightarrow$  
$$\begin{array}{rcl} 3x + 4y & = & -7 \\ 2x - 4y & = & 2 \end{array}$$

Sumando: 
$$5x = -5$$

Luego:  $x = -1$

Y sustituyendo:  $y = -1$

Para resolver un sistema de ecuaciones utilizamos cualquiera de los tres métodos siguientes:

### Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, se llega así a una ecuación de primer grado con una sola incógnita; hallada ésta se calcula la otra.

### Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas. De nuevo obtenemos una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

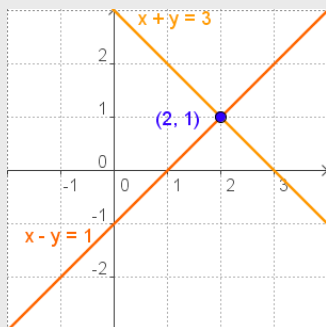
### Método de reducción

Consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplica una de las ecuaciones o ambas por un número de modo que los coeficientes de x o de y sean iguales y de signo contrario.

## EJERCICIOS resueltos

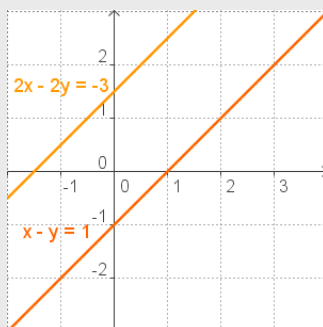
7. Representa las rectas correspondientes y discute los siguientes sistemas:

a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



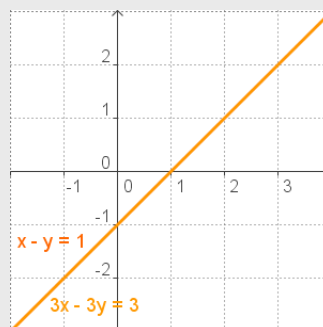
Compatible determinado

b)  $\begin{cases} 2x - 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Incompatible

c)  $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Compatible indeterminado

8. Resuelve por sustitución:

a)  $\begin{cases} x + 4y = -25 \\ -10x - 5y = 5 \end{cases}$

Despejamos  $x$  en la 1ª ecuación

$x = -25 - 4y$  sustituimos en la 2ª

$$-10(-25 - 4y) - 5y = 5 \Rightarrow 250 + 40y - 5y = 5$$

$$35y = -245 \Rightarrow y = -7$$

$$x = -25 - 4 \cdot (-7) = 3$$

b)  $\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ -4x - y = -43 \end{cases}$

Despejamos  $y$  en la 2ª ecuación

$y = -4x + 43$  sustituimos en la 1ª

$$3x + 5(-4x + 43) = 45 \Rightarrow 3x - 20x + 215 = 45$$

$$-17x = -170 \Rightarrow x = 10$$

$$y = -4 \cdot 10 + 43 = 3$$

9. Resuelve por igualación:

a)  $\begin{cases} -4x + y = 20 & y = 20 + 4x \\ 6x - 9y = 0 & y = 6x / 9 \end{cases}$

$$20 + 4x = \frac{6x}{9} \Rightarrow 180 + 36x = 6x$$

$$30x = -180 \Rightarrow x = -6$$

$$y = -36/9 = -4$$

b)  $\begin{cases} -3x - 4y = 31 & x = (31 + 4y) / -3 \\ 5x - 9y = 11 & x = (11 + 9y) / 5 \end{cases}$

$$\frac{31 + 4y}{-3} = \frac{11 + 9y}{5} \Rightarrow 5(31 + 4y) = -3(11 + 9y)$$

$$155 + 20y = -33 - 27y \Rightarrow 47y = -188 \Rightarrow y = -4$$

$$x = (11 - 36) / 5 = -5$$

10. Resuelve por reducción:

a)  $\begin{cases} 5x - 10y = 25 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$

$$5x - 10y = 25$$

Se multiplica por 5  $\rightarrow 40x + 10y = 20$

$$\text{Sumando: } 45x = 45$$

$$x = 1 \quad y = -2$$

b)  $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 7x + 8y = 37 \end{cases}$

Se multiplica por -7  $\rightarrow -35x - 21y = -147$

Se multiplica por 5  $\rightarrow 35x + 40y = 185$

$$\text{Sumando: } 19y = 38$$

$$y = 2 \quad x = 3$$

11. Resuelve:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = \frac{22}{15} \\ 7x - 7y = 28 \end{cases}$$

quitando denominadores y simplificando la 2ª ecuación, el sistema se convierte en uno equivalente.

Por REDUCCIÓN:

$$5x - 3y = 22$$

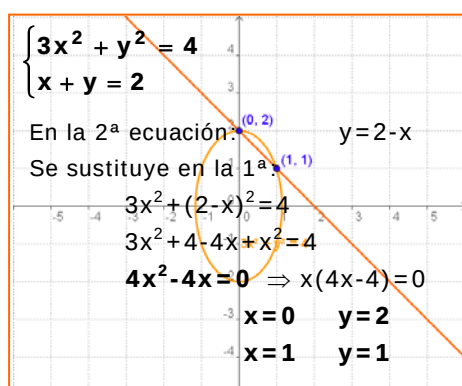
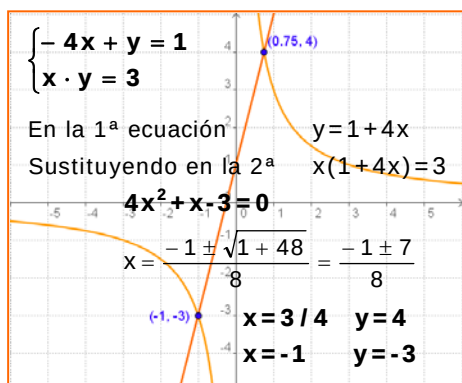
$$-3x + 3y = -12$$

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5 \quad y = 1$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ x - y = 4 \end{cases}$$



## 3. Sistemas de segundo grado



Son sistemas en los que una o las dos ecuaciones no son lineales. Para resolverlos aplicamos los métodos ya conocidos para ecuaciones de 2º grado y sistemas lineales. Veamos algunos ejemplos.

• Tipo:  $\begin{cases} ax + by = c_1 \\ x \cdot y = c_2 \end{cases}$

• Tipo:  $\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Para resolver sistemas de estos tipos se despeja la  $x$  o la  $y$  en una ecuación y se sustituye en la otra. Se reduce y se resuelve la ecuación que queda.

Por último se sustituyen en la ecuación despejada los valores hallados para calcular la otra incógnita

## EJERCICIOS resueltos

12. Resuelve:

a)  $\begin{cases} x - y = -1 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}$

En la 1ª ecuación:  $x = y - 1$

En la 2ª ecuación:  $(y - 1)y = 20$

$y^2 - y - 20 = 0$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 & x = 4 \\ -4 & x = -5 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$

En la 2ª ecuación:  $x = 24/y$

En la 1ª ecuación:  $48/y + 3y = 30$

$3y^2 - 30y + 48 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0$

$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 & x = 3 \\ 2 & x = 12 \end{cases}$

13. Resuelve:

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x + y = -1 \end{cases}$

En la 2ª ecuación:  $x = -y - 1$

En la 1ª ecuación:  $(-y - 1)^2 + y^2 = 41$

$y^2 + 2y + 1 + y^2 = 41$

$2y^2 + 2y - 40 = 0$

$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{4} = \frac{-2 \pm 18}{4} = \begin{cases} 4 & x = -5 \\ -5 & x = 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

En la 2ª ecuación:  $x = (-1 - 3y)/2$

En la 1ª ecuación:  $\frac{(-1 - 3y)^2}{4} - 2y^2 = 7$

$1 + 9y^2 + 6y - 8y^2 = 28 \quad y^2 + 6y - 27 = 0$

$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{-6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 3 & x = -5 \\ -9 & x = 13 \end{cases}$



# Ecuaciones y sistemas

## 4. Resolución de problemas

Para resolver un problema mediante una ecuación o un sistema de ecuaciones, hay que traducir al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resolver la ecuación o el sistema planteado.

A continuación puedes ver algunos ejemplos:

- ✓ *En una reunión cada asistente saluda a todos los demás, si el número de saludos que se intercambian es 28, ¿cuántas personas asisten a la reunión?*

**x = nº asistentes**

$$\begin{aligned}\frac{x(x-1)}{2} &= 28 \Rightarrow x^2 - x = 56 \\ \Rightarrow x^2 - x - 56 &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}\end{aligned}$$

Obtenemos  $x = -14/2 = -7$  y  $x = 16/2 = 8$

La solución negativa no es válida ya que se trata de nº de personas, luego asisten 8 personas.

- ✓ *Dos personas se encuentran teniendo cada una de ellas un capital. Dice una de ellas a la otra: "Si me das de lo que tienes 3 unidades las añado a lo que tengo y tendremos las dos igual"; a lo que la otra replica: "Si tú me das de lo que tienes 6 unidades las añado a lo que tengo y tendré el doble de lo que te queda". ¿Cuánto tiene cada una?*

$$\begin{aligned}\text{A tiene } x & \quad \begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x - 6) = y + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -6 \\ 2x - y = 18 \end{cases} \\ \text{B tiene } y & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Resolvemos por reducción:} & \quad \begin{aligned} -x + y &= 6 \\ 2x - y &= 18 \\ \hline x &= 24 \\ y &= 6 + x = 30 \end{aligned}\end{aligned}$$

- ✓ *Se desea vallar una finca rectangular uno de cuyos lados linda con un río. Si el área de la finca es de 2000 m<sup>2</sup> y los tres lados a vallar miden 140 m, ¿cuáles son las dimensiones de la finca?*

$$\text{Dimensiones: } x \text{ (ancho), } y \text{ (largo)} \quad \begin{cases} 2x + y = 140 \\ x \cdot y = 2000 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{En la 1ª ecuación:} & \quad y = 140 - 2x \\ \text{Sustituyendo en la 2ª:} & \quad x \cdot (140 - 2x) = 2000 \\ \text{Resolvemos la ecuación:} & \quad 2x^2 - 140x + 2000 = 0 \\ & \quad x = 50 \quad y = 40 \\ & \quad x = 20 \quad y = 100\end{aligned}$$

### Para resolver problemas

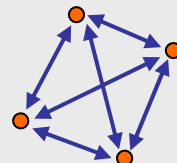
- 1º) Comprender el enunciado.
- 2º) Identificar las incógnitas.
- 3º) Traducir al lenguaje algebraico.
- 4º) Resolver la ecuación o sistema.
- 5º) Comprobar las soluciones.

Número de asistentes: **x**

Cada uno saluda a todos los demás que son: **x-1**

El saludo A → B es el mismo que el saludo B → A, luego el número total de saludos:

$$x \cdot (x-1) / 2$$



**Comprobación:**

8 personas, cada una saluda a las otras 7;  
8 · 7 = 56 y la mitad 28.

La persona A tiene: **x**  
La persona B tiene: **y**

|           |               |            |
|-----------|---------------|------------|
|           | B da 3 a A    | A da 6 a B |
| A tiene x | <b>x+3</b>    | <b>x-6</b> |
| B tiene y | <b>y-3</b>    | <b>y+6</b> |
|           | Las dos igual | B doble A  |

Habla A: **x+3 = y-3**  
Habla B: **y+6 = 2(x-6)**

**Comprobación:**

|         |               |            |
|---------|---------------|------------|
|         | B da 3 a A    | A da 6 a B |
| A: x=24 | 24+3=27       | 24-6=18    |
| B: y=30 | 30-3=27       | 30+6=36    |
|         | Las dos igual | B doble A  |

**x:** ancho  
**y:** largo

Perímetro a vallar:  
**2x+y=140 m**

Superficie (base × altura):  
**x · y = 2000 m<sup>2</sup>**

**Comprobación:**

x=50 y=40      x · y = 50 · 40 = 2000  
x=20 y=100      x · y = 20 · 100 = 2000



## Para practicar

1. Resuelve las ecuaciones:

- a)  $-6x^2 - 7x + 155 = -8x$
- b)  $3x^2 + 8x + 14 = -5x$
- c)  $(x-6)(x-10)=60$
- d)  $(x+10)(x-9)=-78$

2. Resuelve las ecuaciones:

- a)  $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$
- b)  $x^4 + 14x^2 - 72 = 0$
- c)  $x^4 - 81 = 0$
- d)  $(x^2 - 8)(x^2 - 1) = 8$

3. Resuelve las ecuaciones:

- a)  $\frac{9}{2-x} + \frac{4}{2-3x} = 5$
- b)  $\frac{5+x}{2+2x} - \frac{2}{4-3x} = 2$
- c)  $3-x - \frac{6x+6}{7x+5} = 1$
- d)  $\frac{3+x}{3x+1} + \frac{x+2}{x+1} = 5$

4. Resuelve las ecuaciones:

- a)  $2\sqrt{9x} - x = 9$
- b)  $\sqrt{3+6x} - 2 = 4x$
- c)  $2x - \sqrt{x-2} = 5$

5. Resuelve los sistemas:

- a)  $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = -\frac{3}{5} \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{8} = \frac{-3}{8} \\ 8x + 5y = 33 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \\ 7x + 3y = 34 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{y}{2} = \frac{4}{9} \\ 5x - 7y = 20 \end{cases}$

6. Resuelve los sistemas:

- a)  $\begin{cases} x - 6y = -15 \\ x \cdot y = -9 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} 2x + y = -18 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. El producto de dos números enteros es 192 y su diferencia 4. ¿Qué números son?

8. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 342, ¿cuáles son?

9. Al sumar una fracción de denominador 3 con su inversa se obtiene 109/30, ¿cuál es la fracción?

10. El cuadrado de un  $n^o$  más 6 es igual a 5 veces el propio  $n^o$ , ¿qué número es?

11. Busca un número positivo tal que 6 veces su cuarta potencia más 7 veces su cuadrado sea igual a 124.

12. La edad de Juan era hace 9 años la raíz cuadrada de la que tendrá dentro de 11. Determinar la edad actual.

13. El numerador de una fracción positiva es 4. Si añadimos 9 unidades al denominador el valor de la fracción disminuye en una unidad. ¿Cuál es el denominador original?

14. Dos grifos manando juntos tardan en llenar un depósito 2 horas, ¿cuánto tardarán por separado si uno de ellos tarda 3 horas más que el otro?

**PISTA:** Si un grifo tarda  $x$  horas en llenar el depósito en una hora llena  $1/x$  del depósito.

15. Encuentra  $m$  para que  $x^2 - mx + 121 = 0$  tenga una solución doble.

16. Dos números suman 400 y el mayor es igual a 4 veces el menor, ¿qué números son?

17. Paloma pagó 272 € por 4 entradas para un concierto y 8 para el teatro, Luisa pagó 247 € por 9 entradas para el concierto y 3 para el teatro. ¿Cuánto cuesta la entrada a cada espectáculo?

18. Dos números suman 241 y su diferencia es 99. ¿Qué números son?
19. Dos números suman 400 y el mayor es igual a 4 veces el menor, ¿qué números son?.
20. Pedro tiene 335 € en billetes de 5€ y de 10€; si en total tiene 52 billetes, ¿cuántos tiene de cada clase?.
21. En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?.
22. Se desea mezclar vino de 1 €/litro con vino de 3 €/litro para obtener una mezcla de 1,2 €/litro. ¿Cuántos litros deberemos poner de cada precio para obtener 2000 litros de mezcla?.
23. En un almacén hay dos tipos de lámparas, las de tipo A que utilizan 2 bombillas y las de tipo B que utilizan 7 bombillas. Si en total en el almacén hay 25 lámparas y 160 bombillas, ¿cuántas lámparas hay de cada tipo?.
24. En un parque de atracciones subir a la noria cuesta 1 € y subir a la montaña rusa 4 €. Ana sube un total de 13 veces y gasta 16 €, ¿cuántas veces subió a cada atracción?.
25. En un corral hay ovejas y gallinas en número de 77 y si contamos las patas obtenemos 274 en total. ¿Cuántas ovejas y cuántas gallinas hay?
26. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es 7 y la diferencia entre el número y el que resulta al intercambiarlas es 27.
- PISTA: Si  $x$  es la cifra de las decenas e  $y$  la cifra de las unidades el número es  $10x+y$ , y el que resulta al intercambiar las cifras es  $10y+x$
27. La suma de dos números naturales es 24 y su producto 135, ¿qué números son?.
28. Calcula las longitudes de los lados de un rectángulo sabiendo que la diagonal mide 58 cm y el lado mayor excede en 2 cm al menor.
29. La suma de dos números naturales es 13 y la de sus cuadrados 109, halla los números.
30. La diferencia entre dos números enteros es 6 y su producto 247. ¿Qué números son?.
31. La suma de las edades de dos personas es 18 años y el producto 77. ¿Qué edad tiene cada una?.
32. Calcula las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 48 cm, si la suma de los catetos es 28 cm.
33. El producto de las dos cifras de un número es 14 y la suma de la cifra de las unidades con el doble de la de las decenas es 16. Halla el número.
34. La suma de las áreas de dos cuadrados es  $100 \text{ cm}^2$  y la suma de sus perímetros es 56, ¿cuánto miden los lados?.
35. En un triángulo isósceles los lados iguales miden 13 cm y la altura es 2 cm más larga que la base. Calcula el área.

*“Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, no hay nada como traducir este problema del inglés u otra lengua al lenguaje del álgebra”*

Newton (Aritmetica Universalis)



### El "inventor" del álgebra

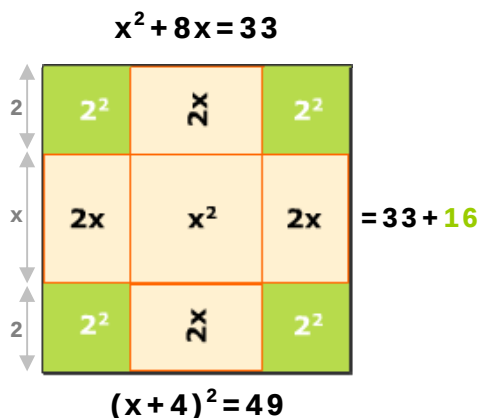
Mohamed ibn-Musa al-Jwarizmi, que vivió aproximadamente entre los años 780-850 y trabajó en la Casa de la Sabiduría en Bagdad.

Cinco de sus obras han llegado hasta nosotros, entre ellas "*al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala*", el primer tratado de álgebra conocido.

Al-Jwarizmi clasifica las ecuaciones en seis tipos distintos y resuelve cada caso por separado utilizando métodos geométricos, como el que puedes ver en el gráfico.

### Clasificación de las ecuaciones según Al-Jwarizmi

cuadrado de la cosa = cosa  
 $ax^2 = bx$   
 cuadrado de la cosa =  $n^0$   
 $ax^2 = c$   
 cosa =  $n^0$   
 $ax = b$   
 cuadrado de la cosa + cosa =  $n^0$   
 $ax^2 + bx = c$   
 cuadrado de la cosa +  $n^0$  = cosa  
 $ax^2 + c = bx$   
 cuadrado de la cosa = cosa +  $n^0$   
 $ax^2 = bx + c$



$$\begin{aligned}
 x^2 + 8x &= 33 \\
 x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x &= 33 \\
 x^2 + 2 \cdot 4x + 16 &= 33 + 16 \\
 (x + 4)^2 &= 49 \\
 x + 4 &= 7 & x + 4 &= -7 \\
 x &= 3 & x &= -11
 \end{aligned}$$

### ¿Por qué la x?

Los árabes llamaban a la incógnita "shay" (cosa). La primera traducción al latín fue hecha en España (Roberto de Chester, Toledo, 1145), y como la palabra árabe la cosa suena algo parecido a la x medieval la llamaron x y ahí sigue. En Italia se tradujo como "cosa", abreviándola como co y a los que resolvían ecuaciones se les llamaba *cosistas*.



# Ecuaciones y sistemas



## Recuerda lo más importante

### Ecuaciones de segundo grado

- Completas:  $ax^2 + bx + c = 0$

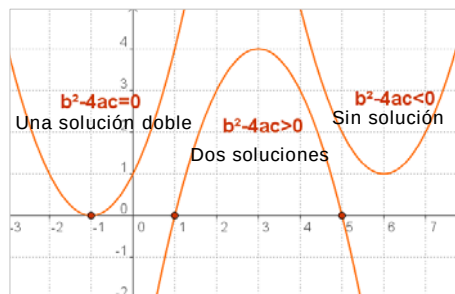
Se resuelven con la fórmula:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Incompletas:  $ax^2 + c = 0$

Se despeja  $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

- Incompletas:  $ax^2 + bx = 0$

Dos soluciones:  $x=0$ ,  $x=-b/a$



Según sea el signo del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

la ecuación tendrá dos soluciones, una o ninguna solución real.

### Sistemas de ecuaciones lineales

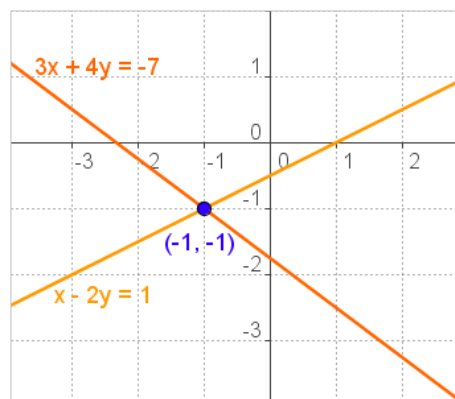
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cada ecuación se representa con una recta en el plano. El punto de corte **(x,y)** si existe es la **solución** del sistema.

Para resolver un sistema empleamos los métodos de:

**Sustitución:** Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra.

**Igualación:** Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

**Reducción:** Se multiplica una de las ecuaciones o las dos por los números adecuados de manera que al sumarlas se elimine una de las incógnitas.



- Sistemas **equivalentes** son los que tienen la misma solución.
- Un sistema es **compatible** si tiene solución, e **incompatible** si no la tiene.

### Sistemas de ecuaciones de 2º grado

Son sistemas en los que una de las ecuaciones o las dos son de segundo grado en una de las incógnitas o en las dos.

Habitualmente se resuelven despejando una de las incógnitas en la ecuación de primer grado y sustituyendo en la otra lo que da lugar a una ecuación de 2º grado.

#### Para resolver problemas

- ✓ Comprender el enunciado.
- ✓ Identificar las incógnitas.
- ✓ Traducir al lenguaje algebraico.
- ✓ Resolver la ecuación o sistema.
- ✓ Comprobar las soluciones.



1. Resuelve la ecuación:  $3x^2 + 15x = 0$
2. Resuelve la ecuación:  $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$ .
3. Resuelve la ecuación:  $(x - 3)^2 = 21 - 6(8 - x)$ .
4. Resuelve la ecuación:  $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3}$
5. Resuelve el sistema: 
$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 9 \\ 6x - 2y = 164 \end{cases}$$
6. Resuelve el sistema: 
$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
7. Encuentra dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 1105.
8. Tenemos 13 € en monedas de 2 € y de 50 céntimos, si en total hay 14 monedas, ¿cuántas hay de cada tipo?
9. Para vallar una finca rectangular de 720 m<sup>2</sup> se han utilizado 112 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.
10. Encuentra una ecuación de 2º grado tal que la suma de sus raíces sea 7 y el producto 12.

# Ecuaciones y sistemas

## Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a)  $x=5$ ,  $x=-31/6$  b)  $x=-2$ ,  $x=-7/3$   
c)  $x=16$ ,  $x=0$  d)  $x=21$ ,  $x=1$
2. a)  $x=\pm\sqrt{12}$  b)  $x=\pm 2$   
c)  $x=\pm 3$  d)  $x=0$ ,  $x=\pm 3$
3. a)  $x=5$ ,  $x=-2$  b)  $x=19/9$ ,  $x=0$   
c)  $x=1$ ,  $x=-4/7$  d)  $x=0$ ,  $x=-9/11$
4. a)  $x=9$  b)  $x=-1/8$ ,  $x=-1/2$   
c)  $x=3$ ,  $x=9/4$  No es válida
5. a)  $x=7$  y  $y=8$  b)  $x=1$  y  $y=5$   
c)  $x=4$  y  $y=2$  d)  $x=4$  y  $y=0$
6. a)  $x=-3$  y  $y=3$ ;  $x=-9/2$  y  $y=2$   
b)  $x=-5$  y  $y=-8$ ;  $x=-4$  y  $y=-10$   
c)  $x=-5$  y  $y=3$ ;  $x=-1$  y  $y=1$   
d)  $x=-4$  y  $y=7$ ;  $x=7$  y  $y=-4$
7. 12 y 16 ó -16 y -12
8. 18 y 19
9. 3/10
10. 3 y 2
11. El denominador es 3
12. 14 años
13. 24 (La solución negativa no vale)
14. Un grifo 3 h y el otro 2 h
15. 22 y -22
16. 320 y 80
17. Teatro: 25€, concierto: 18€
18. 170 y 71
19. 80 y 320
20. 15 de 10€ y 37 de 5€
21. 25 dobles y 42 sencillas
22. 1800 litros de 1€ y 200 litros de 3€
23. 3 de tipo A y 22 de tipo B
24. 12 veces a la noria y 1 a la montaña
25. 17 gallinas y 60 ovejas
26. El nº 52
27. 9 y 15
28. 40 y 42
29. 10 y 3
30. 13, 19 y -13, -19
31. 11 y 7
32. Los catetos 12 y 16, la hipotenusa 20
33. 72
34. 1 y 8
35. altura=12, base=10; área 60

### Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1.  $x=0$ ,  $x=-5$
2.  $x=\pm 6$ ,  $x=\pm 1$
3.  $x=8$ ;  $x=15$
4.  $x=\pm 8$
5.  $x=30$  y  $y=8$
6.  $x=6$  y  $y=9$   
 $x=2$  y  $y=1$
7. 23 y 24
8. 4 de 2 € y 10 de 0,50€
9. 36 m x 20 m
10.  $x^2 - 7x + 12 = 0$   
Soluciones 3 y 4

No olvides enviar las actividades al tutor ►



## ACTIVIDADES DE ESO

|                                |                                  |                  |
|--------------------------------|----------------------------------|------------------|
| Nombre y apellidos del alumno: |                                  | Curso: <b>4º</b> |
| Quincena nº: <b>4</b>          | Asignatura: <b>Matemáticas B</b> |                  |
| Fecha:                         | Profesor de la asignatura:       |                  |

1. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean  $1/3$  y  $2/5$ .
2. Resuelve el sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$
3. Resuelve la ecuación:  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
4. En un examen de 20 preguntas, cada acierto suma 2 puntos y por cada fallo te quitan medio punto. Para aprobar es necesario contestar a todas las preguntas y sacar 20 puntos. ¿Cuántas preguntas, como mínimo, hay que responder bien para aprobar?