NÚMEROS REALES

UNIDAD 1

Uno de los conceptos que aprenderás en esta unidad, es el cálculo de logaritmos, ideado en 1614 por el matemático y teólogo John Napier para simplificar la enorme cantidad de operaciones que había que realizar en astronomía, evidentemente sin calculadora.

Pero la utilidad de los logaritmos superó las expectativas que podía tener Napier, ya que forman parte de una ingente cantidad de fórmulas que se utilizan en todos los campos de las ciencias naturales y sociales. Los logaritmos se hallan presentes en la escala de Richter que mide el poder destructivo de un terremoto; en las fórmulas que utiliza un arqueólogo para determinar la antigüedad de un hallazgo mediante el método del carbono 14; los usa la policía científica para conocer la hora a la que murió una persona a partir de la temperatura del hígado del cadáver y la temperatura ambiente; forman parte del modelo matemático que explica cómo crecen las poblaciones, y un larguísimo etcétera.

Se utilizan los logaritmos incluso en la elaboración de los jabones que usamos en el hogar o en la medición del pH de nuestro propio cuerpo, una medición basada en la cantidad de iones de hidrógeno liberados en una sustancia. De hecho, si $[H^+]$ es la concentración de iones liberados, entonces $pH = -\log [H^+]$, donde log es el logaritmo decimal que aprenderás a lo largo de esta unidad.

Interpreta y resuelve

El pH medio de la sangre de las personas es 7,4 y el de la orina, 6.

a) ¿Qué sustancia es más ácida y cuál más básica?

b) ¿Cuál tiene mayor concentración de iones de hidrógeno?

Repasa

Antes de comenzar la unidad, recordemos la equivalencia entre fracción y expresión decimal de un número racional.

Paso de fracción a decimal

Para obtener el número decimal que equivale a una fracción, dividiremos el numerador por el denominador, pudiéndonos encontrar tres casos en el resultado:

- Un número entero: si el numerador es múltiplo del denominador.
- Un decimal exacto: cuando, basándonos en la fracción irreducible, el denominador solo tenga como factores primos 2 y 5.
- Un decimal periódico: si observando la fracción irreducible, vemos que el denominador tiene algún factor primo distinto del 2 o 5. En concreto, si el denominador no contiene ninguno de estos dos factores, el decimal será periódico puro, y si contiene alguno de ellos será periódico mixto.

Paso de decimal a fracción

Definimos **fracción generatriz** de un número decimal como aquella tal que al dividir su numerador por su denominador resulta ese número decimal.

Decimal exacto: $N = 2{,}57$ $\quad 100N = 257 \rightarrow N = \dfrac{257}{100}$

Decimal periódico puro: $N = 3{,}\widehat{21}$

$$\begin{array}{rl} 100N = & 321{,}212121... \\ N = & 3{,}212121... \\ \hline \end{array}$$

Restando: $99N = 318 \rightarrow N = \dfrac{318}{99} = \dfrac{106}{33}$

Decimal periódico mixto: $N = 3{,}8\widehat{12}$

$$\begin{array}{rl} 1000N = & 3812{,}121212... \\ 10N = & 38{,}121212... \\ \hline \end{array}$$

Restando: $990N = 3774 \rightarrow N = \dfrac{3\,774}{990} = \dfrac{629}{165}$

EJERCICIOS

1. Obtén la fracción generatriz de los siguientes decimales:

a) $-3{,}24$ *b)* $23{,}44444...$ *c)* $21{,}1232323...$

2. Pasa de fracción a decimal y clasifica el decimal obtenido.

a) $\dfrac{26}{9}$ *b)* $\dfrac{7}{25}$ *c)* $\dfrac{85}{14}$

OBSERVA

La fracción generatriz de un decimal exacto tiene por numerador el número sin la coma y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

Por ejemplo, $2{,}3 = \dfrac{23}{10}$

OBSERVA

La fracción generatriz de un decimal periódico puro tiene por numerador la diferencia entre el número sin la coma y el número formado por la parte entera y, por denominador, tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Por ejemplo, $31{,}\widehat{6} = \dfrac{316-31}{9} = \dfrac{285}{9} = \dfrac{95}{3}$

OBSERVA

La fracción generatriz de un decimal periódico mixto tiene por numerador la diferencia entre el número sin la coma y el número formado por la parte entera y el anteperiodo, y, por denominador, tantos nueves como cifras tenga el periodo y ceros como cifras tenga el anteperiodo.

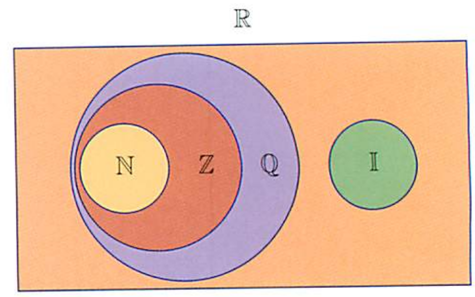
Por ejemplo, $31{,}2\widehat{16} = \dfrac{31\,216-312}{990} = \dfrac{30\,904}{990} = \dfrac{15\,452}{495}$

MAPA CONCEPTUAL

- NÚMEROS REALES
  - APROXIMACIONES Y ERRORES
    - Truncamiento y redondeo: cifras significativas
    - Error absoluto y error relativo
  - REPRESENTACIÓN Y ORDENACIÓN
    - Exacta
      - Racionales: Tales
      - Irracionales: Pitágoras o teorema de la altura
    - Aproximada
  - INTERVALOS Y SEMIRRECTAS
    - Abiertos
    - Cerrados
    - Semiabiertos
  - NOTACIÓN CIENTÍFICA
  - RADICALES
    - $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
    - Comprobación y ordenación
    - Operaciones
  - LOGARITMOS
    - $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$
    - Propiedades
      - $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
      - $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
      - $\log_a (b^c) = c \log_a b$
      - Cambio de base: $\log_a b = \dfrac{\log_n b}{\log_n a}$

1. Números reales

Ya sabemos que los números racionales son aquellos que se pueden expresar en forma de fracción y que, por tanto, se corresponden con decimales exactos o periódicos (tanto puros como mixtos).



No obstante, existe otro tipo de números decimales cuyas cifras no se repiten de forma periódica. Por ejemplo, 2,1234567891011... es un número decimal no periódico. Este tipo de números, que, por tanto, no se pueden expresar en forma de fracción, constituye el conjunto de los **números irracionales**, y se denota $\mathbb{I}$.

El conjunto de **números reales**, $\mathbb{R}$, está formado por los números racionales y los irracionales.

2. Aproximaciones y errores en la expresión aproximada de un número real

A veces no es necesario trabajar con todas las cifras decimales de un número real y hacemos una aproximación. Esta aproximación se puede realizar por *truncamiento* o *redondeo*.

- **Truncamiento:** se hacen cero todas las cifras por debajo de la posición marcada. Por ejemplo, el truncamiento a las centésimas de 32,56789 es 32,56.
- **Redondeo:** se hacen cero todas las cifras por debajo de la posición marcada y esa cifra de la posición marcada se mantiene en función de si la siguiente es 0, 1, 2, 3, 4 o se incrementa si es 5, 6, 7, 8, 9. Por ejemplo, el redondeo de 587,654 a las décimas es 587,7 y el redondeo a las centésimas es 587,65.

Llamaremos **cifras significativas** a todas las cifras descontando los ceros que están en los extremos. Así, el número 0,002006 tiene 4 cifras significativas, al igual que el 703 500 000.

Al realizar aproximaciones cometemos errores, que se pueden clasificar en absolutos o relativos.

- **Error absoluto:** es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real y el aproximado.

$$E_a = |\text{valor real} - \text{valor aproximado}|$$

- **Error relativo:** es la razón entre el error absoluto y el valor real (en caso de que se desconozca, se puede emplear el aproximado).

$$E_r = \frac{E_a}{\text{Valor real}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Clasifica los siguientes números según el menor conjunto numérico al que pertenezcan:

$\sqrt{4}$ $\quad -2$

$\frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{6}{2}$ $\quad 9{,}87887888788887...$

$\sqrt[3]{-8}$ $\quad 3{,}0101010101...$

Naturales: $\sqrt{4}, \frac{6}{2}$

Enteros: $-2, \sqrt[3]{-8}$

Racionales: $3{,}0101010101...$

Irracionales: $\frac{\pi}{3}, 9{,}87887888788887...$

Solución

2. Calcula el error absoluto y el error relativo al aproximar $5{,}\widehat{2}$ por $5{,}2$.

Para obtener el error absoluto y el relativo trabajaremos con la fracción generatriz de $5{,}\widehat{2}$, a saber:

$5{,}\widehat{2} = \frac{52-5}{9} = \frac{47}{9}$. Por tanto,

$$E_a = \left|\frac{47}{9} - \frac{52}{10}\right| = \frac{470-468}{90} = \frac{2}{90} = 0{,}0\widehat{2}$$

$$E_r = \frac{\frac{2}{90}}{\frac{47}{9}} = \frac{18}{4230} = \frac{1}{235} \approx 0{,}0043$$

Solución

EJERCICIOS

1. ●○○ Halla tres números irracionales entre $\frac{4}{17}$ y $\frac{5}{17}$. ¿Serías capaz de encontrar alguno más? ¿Cuántos?

2. ●○○ Halla tres números racionales entre π y $\pi + \frac{1}{1000}$. ¿Cuántas posibilidades hay?

3. ●○○ Halla dos números racionales cuya suma sea un entero.

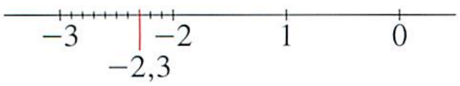
4. ●○○ Halla dos números irracionales cuya diferencia sea un entero.

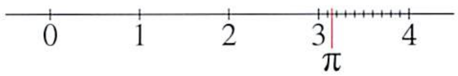
5. ●○○ Completa la siguiente tabla con las aproximaciones y errores del número 254,362:

	Aproximación	Error absoluto	Error relativo
A las unidades por redondeo			
A las décimas por truncamiento			
A las centenas por redondeo			

3. Representación y ordenación de los reales en la recta

La representación de números reales en la recta se puede hacer de forma aproximada empleando una aproximación de su expresión decimal.





3.1. Representación exacta de números racionales

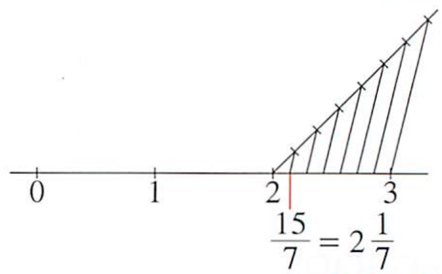
También podemos situar de forma exacta los números racionales utilizando el teorema de Tales para representar la fracción asociada a un número racional.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Utiliza el teorema de Tales para representar $\frac{15}{7}$ en la recta.

En primer lugar, debemos pasar a número mixto $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

A continuación, utilizamos una recta auxiliar sobre la parte entera del número mixto, en este caso sobre el 2, para representar de forma exacta $\frac{1}{7}$, trazando paralelas tal como se muestra en el ejemplo.



Solución

3.2. Representación exacta de números irracionales

Los números irracionales que se expresan por medio de raíces cuadradas no exactas (radicales) también se pueden representar de forma exacta en la recta real. Existen dos procedimientos, como se ve en los ejemplos.

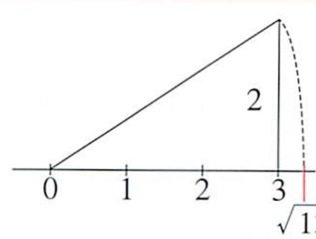
EJERCICIOS RESUELTOS

1. Utiliza el teorema de Pitágoras para representar $\sqrt{13}$ en la recta.

Se trata de buscar un triángulo rectángulo de hipotenusa $\sqrt{13}$. En este caso, podemos utilizar un triángulo rectángulo de catetos 3 y 2, pues el valor de la hipotenusa será, por el teorema de Pitágoras,

$hip^2 = 3^2 + 2^2 \rightarrow hip^2 = 9 + 4 \rightarrow hip = \sqrt{13}$

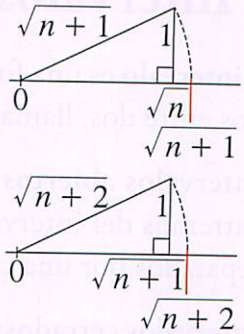
La representación gráfica quedará como sigue.



Solución

OBSERVA

El teorema de Pitágoras permite representar de una vez raíces muy concretas que se puedan obtener como hipotenusas en triángulos rectángulos de catetos naturales. No obstante, conocida la representación de una raíz, podemos emplear este procedimiento para dibujar raíces de números consecutivos.

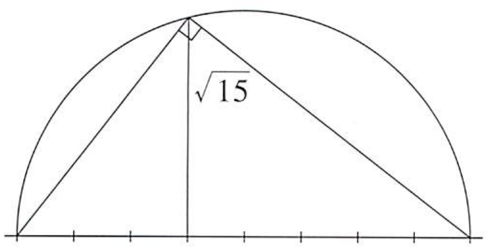


EJERCICIOS RESUELTOS

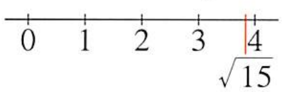
1. Utiliza el teorema de la altura para representar $\sqrt{15}$ en la recta.

Se trata de buscar dos factores de 15, por ejemplo, 3 y 5.

Dibujamos en la recta segmentos de dichas longitudes, uno a continuación de otro, y trazamos una semicircunferencia de diámetro el segmento total. Desde el punto de división de los dos segmentos, dibujamos un segmento perpendicular hasta la semicircunferencia, que será la altura de un triángulo rectángulo inscrito en la semicircunferencia.



Por el teorema de la altura $h^2 = 3 \cdot 5 \rightarrow h = \sqrt{15}$ y solo queda trasladar esta altura a la recta real empleando un compás.



OBSERVA

El procedimiento que emplea el teorema de la altura en la representación de radicales se puede utilizar para representar cualquier radical empleando únicamente los divisores del radicando.

Solución

EJERCICIOS

6. ●●○ Representa de forma exacta y aproximada las siguientes fracciones:

a) $-\frac{3}{5}$ *b)* $\frac{-10}{7}$ *c)* $\frac{7}{3}$ *d)* $\frac{7}{9}$

7. ●●○ Representa de forma exacta empleando el teorema de Pitágoras y de forma aproximada con su expresión decimal los siguientes radicales:

a) $\sqrt{29}$ *b)* $\sqrt{30}$ *c)* $\sqrt{37}$ *d)* $\sqrt{61}$

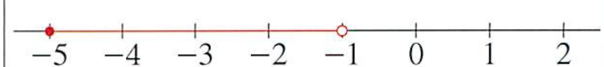
8. ●●○ Representa con el teorema de la altura los siguientes radicales. Emplea varias parejas de factores en cada caso y comprueba que la representación es la misma.

a) $\sqrt{21}$ *b)* $\sqrt{12}$ *c)* $\sqrt{30}$ *d)* $\sqrt{24}$

4. Intervalos y semirrectas

Un **intervalo** es una forma de agrupar todos los números reales comprendidos entre dos, llamados **extremos**. Existen los siguientes tipos:

- **Intervalos abiertos:** son aquellos en los que no queremos incluir los extremos del intervalo. Se denotan entre paréntesis, con los extremos separados por una coma y ordenados de menor a mayor.
- **Intervalos cerrados:** son aquellos en los que queremos incluir los extremos del intervalo. Se denotan entre corchetes, con los extremos separados por una coma y ordenados de menor a mayor.
- **Intervalos semiabiertos o semicerrados:** son aquellos en los que queremos incluir solo uno de los extremos del intervalo. Se denotan mediante un paréntesis y un corchete, con los extremos separados por coma y ordenados de menor a mayor.

Tipo intervalo	Intervalo	Enunciado	Representación gráfica	Expresión algebraica
Abierto	$(-1, 3)$	El conjunto de números mayores que -1 y menores que 3		$x \in \mathbb{R}$ tales que $-1 < x < 3$
Cerrado	$[2, 5]$	El conjunto de los números comprendidos entre 2 y 5, incluidos		$x \in \mathbb{R}$ tales que $2 \leq x \leq 5$
Semicerrado	$[-5, -1)$	El conjunto de los números mayores o iguales que -5 y menores que -1		$x \in \mathbb{R}$ tales que $-5 \leq x < -1$

RECUERDA

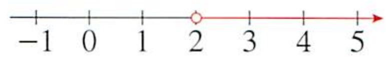
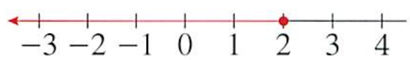
El paréntesis indica que el extremo que está colocado junto a él no se incluye en el intervalo, mientras que el corchete sí lo incluye.

Una **semirrecta** es una forma de agrupar todos los números mayores o menores que otro. En función de si queremos considerar o no el extremo numérico en la semirrecta, encontramos la siguiente clasificación, que sigue las mismas notaciones que los intervalos anteriores:

- **Semirrecta abierta:** el extremo no se incluye en la semirrecta.
- **Semirrecta cerrada:** el extremo se incluye en la semirrecta.

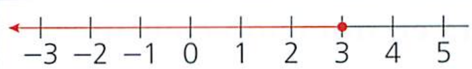
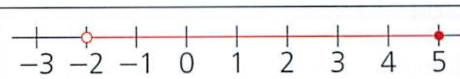
OBSERVA

El símbolo de infinito siempre va colocado junto a un paréntesis.

Tipo semirrecta	Semirrecta	Enunciado	Representación gráfica	Expresión algebraica
Abierta	$(2, +\infty)$	El conjunto de los números mayores que 2		$x \in \mathbb{R}$ tales que $x > 2$
Cerrada	$(-\infty, 2]$	El conjunto de los números menores o iguales que 2		$x \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq 2$

EJERCICIOS

9. ●○○ Completa la siguiente tabla:

Intervalo o semirrecta	Enunciado	Representación gráfica	Expresión algebraica
$(-2, 3)$			
	Conjunto de números mayores que -1		
			
			$x \in \mathbb{R}$ tales que $-1 \leq x \leq 2$
$[1, 4)$			
			

10. ●●● Escribe en forma de intervalo los números que se expresan por medio de desigualdades.

a) $|x| \geq 2$

b) $|x| < 3$

c) $|x - 1| > 1$

d) $|x + 2| \leq 2$

e) $|x| > -3$

f) $|2x - 1| < -1$

11. ●●○ Escribe un intervalo abierto de longitud 0,5 que contenga a $\sqrt{3}$. Ahora escribe otro de longitud 0,1. Por último escribe un intervalo que la contenga y tenga longitud 0,001.

5. Notación científica

La expresión de cantidades muy grandes o muy pequeñas y las operaciones con ellas han sido siempre un problema. La notación científica y otras herramientas, como los logaritmos que verás más adelante, nos permiten trabajar de forma óptima con este tipo de números.

Una cantidad está correctamente escrita en notación científica si consta de un número decimal de parte entera entre 1 y 9 seguido de una potencia de 10 de exponente entero.

Por ejemplo, $3{,}7\cdot 10^{3}$ o $5{,}987\cdot 10^{-3}$ son cantidades escritas en notación científica y $52{,}6\cdot 10^{3}$ o $0{,}37\cdot 10^{2}$ no son expresiones correctas.

RECUERDA

Las potencias de base 10 equivalen a multiplicar o dividir por la unidad seguida de tantos ceros como diga el exponente (positivo o negativo, respectivamente). Por ejemplo, $3{,}2\cdot 10^{3} = 3\,200$ y $3{,}2\cdot 10^{-3} = 0{,}0032$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Pasa a notación científica o expresa con todas sus cifras, según corresponda.

a) 0,00000000056

b) 12 050 000 000

c) $3{,}46\cdot 10^{-5}$

d) $9{,}7\cdot 10^{6}$

a) $5{,}6\cdot 10^{-10}$

b) $1{,}205\cdot 10^{10}$

c) 0,0000346

d) 9 700 000

Solución

USA TU CALCULADORA

La calculadora dispone de una tecla para introducir la potencia de 10 en cantidades expresadas en notación científica. Se trata de EXP: para ello, primero introducimos el número que multiplica a la potencia de 10 y, posteriormente, pulsamos la tecla y el exponente de la potencia de 10. Esto nos permite realizar cualquier cálculo en este tipo de notación. La calculadora devuelve resultados grandes o pequeños en esa notación: compruébalo realizando algunas operaciones con números muy grandes o muy pequeños.

5.1. Suma y resta en notación científica

Para sumar o restar cantidades en notación científica es necesario que tengan la misma potencia de 10. Se procede extrayendo dicha potencia de 10 factor común y operando con los números que multiplican a las potencias de 10.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica:

a) $4{,}1\cdot 10^{4} + 1{,}2\cdot 10^{3}$

b) $6{,}1\cdot 10^{-3} - 2{,}5\cdot 10^{-4}$

a) $4{,}1\cdot 10^{4} + 1{,}2\cdot 10^{3} = 4{,}1\cdot 10\cdot 10^{3} + 1{,}2\cdot 10^{3} =$
$= 41\cdot 10^{3} + 1{,}2\cdot 10^{3} = 42{,}2\cdot 10^{3} = 4{,}22\cdot 10\cdot 10^{3} = 4{,}22\cdot 10^{4}$

b) $6{,}1\cdot 10^{-3} - 2{,}5\cdot 10^{-4} = 6{,}1\cdot 10^{-3} - 2{,}5\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-3} =$
$= 6{,}1\cdot 10^{-3} - 0{,}25\cdot 10^{-3} = 5{,}85\cdot 10^{-3}$

Solución

5.2. Producto y cociente en notación científica

Para multiplicar o dividir cantidades en notación científica, aplicaremos la propiedad asociativa y operaremos (multiplicando o dividiendo) por un lado los números que multiplican a las potencias de 10, y por otro, las potencias de 10.

5.3. Potencias en notación científica

Para elevar a cierta potencia cantidades en notación científica, elevaremos por un lado el número que multiplica la potencia de 10, y por otro, la potencia de 10.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica:

a) $(4 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-2})$

b) $(6 \cdot 10^{15}) : (9 \cdot 10^{-6})$

c) $(4 \cdot 10^{-5})^3$

a) $(4 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-2}) = 24 \cdot 10^3 = 2{,}4 \cdot 10^4$

b) $(6 \cdot 10^{15}) : (9 \cdot 10^{-6}) = 0{,}67 \cdot 10^{21} = 6{,}7 \cdot 10^{20}$

c) $(4 \cdot 10^{-5})^3 = 64 \cdot 10^{-15} = 6{,}4 \cdot 10^{-14}$

Solución

EJERCICIOS

12. ●○○ Determina si los siguientes números están correctamente escritos en notación científica. Si no es así, corrígelos.

a) $0{,}83 \cdot 10^{32}$

b) $12{,}56 \cdot 10^{-14}$

c) $10 \cdot 10^5$

13. ●○○ Expresa con todas las cifras.

a) $4{,}56 \cdot 10^5$

b) $-2{,}76 \cdot 10^{-4}$

c) $9{,}87 \cdot 10^{-3}$

14. ●●○ Expresa en notación científica.

a) 98 700 000

b) 0,000000409

c) −2 930 000

15. ●●○ **CD** Realiza los siguientes productos, cocientes y potencias en notación científica, redondeando la parte decimal de los resultados a las centésimas. Comprueba el resultado empleando tu calculadora en modo científico.

a) $(4{,}86 \cdot 10^{54}) \cdot (-1{,}98 \cdot 10^{-32})$

b) $(8{,}65 \cdot 10^{-43}) : (9{,}32 \cdot 10^{-76})$

c) $(4{,}32 \cdot 10^3)^2$

16. ●●○ **CD** Realiza las siguientes sumas y restas. Comprueba el resultado con tu calculadora.

a) $4{,}56 \cdot 10^{32} + 6{,}87 \cdot 10^{30} - 9{,}34 \cdot 10^{31}$

b) $3{,}78 \cdot 10^{-43} - (9{,}87 \cdot 10^{-44} + 7{,}65 \cdot 10^{-45})$

17. ●●● **CD** Opera y comprueba el resultado con tu calculadora.

a) $\dfrac{(3{,}46 \cdot 10^{20} - 4{,}56 \cdot 10^{19}) \cdot 9{,}87 \cdot 10^{-30}}{8{,}76 \cdot 10^{-24}}$

b) $\dfrac{(2{,}5 \cdot 10^{-21} + 1{,}6 \cdot 10^{-21}) \cdot 8{,}7 \cdot 10^{20}}{5{,}9 \cdot 10^{21}}$

6. Raíces. Potencias de exponente fraccionario

La raíz enésima de un número a se denota $\sqrt[n]{a}$ y verifica que

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

El número a se llama **radicando**, n es el **índice** de la raíz, b es el resultado o la **raíz** buscada, y el conjunto $\sqrt[n]{a}$ se denomina **radical**.

Es decir, $\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$, y $\sqrt[4]{81} = 3$, ya que $3^4 = 81$, y también $\sqrt[4]{81} = -3$ porque $(-3)^4 = 81$.

El número de soluciones reales de una raíz depende del signo del radicando y de la paridad del índice, tal como se recuerda en la siguiente tabla:

	Índice par	Índice impar
Radicando positivo	2 (una positiva y otra negativa)	1 (positiva)
Radicando negativo	0	1 (negativa)

RECUERDA

La raíz cuadrada carece de índice, pero como su propio nombre indica, el índice oculto es el 2, de esta forma, $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$.

6.1. Radicales y potencias

Todo radical se puede expresar en forma de potencia de exponente fraccionario de la siguiente forma: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Comprobemos con un ejemplo la expresión anterior:

$\sqrt[3]{8} = 2 = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}$

Cuando tenemos el radical expresado en forma de potencia, podemos observar si el exponente fraccionario se puede simplificar. En estos casos, es posible encontrar un radical equivalente al inicial pero más sencillo.

Por ejemplo, $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

OBSERVA

Si el máximo común divisor del índice de la raíz y el exponente del radicando es distinto de 1, se puede simplificar el radical dividiendo estos números por su mcd. Por ejemplo, en $\sqrt[8]{2^6}$, podemos dividir exponente e índice entre 2, obteniendo $\sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Pasa de potencia a raíz o viceversa según corresponda.

a) $\sqrt[4]{2^3}$

b) $(-3)^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{4}}$

a) $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

b) $(-3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[3]{9}$

c) $\sqrt{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{-1}{2}}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}}$

Solución

6.2. Comparación y ordenación de radicales

Podemos comparar y ordenar los radicales de forma aproximada calculando los resultados de las raíces. Sin embargo, es mucho mejor hacerlo de forma exacta para no perder precisión.

Primero debemos conseguir que todos los radicales tengan el mismo índice, y entonces simplemente compararemos los radicandos. Para ello, solo tendremos que expresar en forma de potencia los radicales y reducir a común denominador los exponentes de esas potencias.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Ordena de menor a mayor los siguientes radicales: $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{3}$

En primer lugar buscamos el índice común, que es $\text{mcm}(3,4,2) = 12$. En tal caso, los radicales equivalentes a los del enunciado son $\sqrt[12]{4^4}$, $\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[12]{3^6}$, esto es, $\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[12]{125}$, $\sqrt[12]{729}$ y por tanto el orden correcto es $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3}$

Solución

EJERCICIOS

18. ●○○ Calcula todas las soluciones de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{625}$

b) $\sqrt[3]{216}$

c) $\sqrt[5]{-1024}$

d) $\sqrt[6]{-64}$

19. ●●○ Expresa en forma de raíz las siguientes potencias:

a) $3^{\frac{-1}{2}}$

b) $(-2)^{\frac{5}{4}}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$

d) $a^{\frac{2}{5}}$

20. ●●○ Expresa en forma de potencia las siguientes raíces y simplifícalas si es posible:

a) $\sqrt[10]{256}$

b) $\sqrt[6]{a^4b^2c^4}$

c) $\sqrt[12]{576}$

d) $\sqrt[8]{324}$

21. ●●○ Ordena los siguientes radicales de mayor a menor:

a) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[8]{5}$, $\sqrt{6}$

b) $-\sqrt[3]{4}$, $-2\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt{3}$

6.3. Operaciones con radicales

Todas las operaciones que se van a presentar a continuación se pueden demostrar gracias a las propiedades de las operaciones con potencias.

- **Extracción de factores fuera de la raíz**

La extracción de factores del radical consiste en encontrar una expresión equivalente a otra pero con radicando menor. Para ello, descomponemos el radicando en factores primos y expresamos el radical en forma de potencia de exponente fraccionario, pensándolo como número mixto, extrayendo, por tanto, la potencia de exponente entero fuera de la raíz.

Es decir, para extraer factores de $\sqrt[3]{432}$, procedemos como sigue:

$\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} = 2^{1\frac{1}{3}} \cdot 3 = 2 \cdot 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$

En general:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^c \sqrt[n]{a^r} \quad \text{con} \quad \begin{array}{r|l} m & n \\ \hline r & c \end{array}$$

- **Introducción de factores en la raíz**

El proceso inverso a la extracción de factores consiste en la introducción de factores en la raíz. Para ello trabajaremos también con la expresión en forma de potencia, consiguiendo exponentes fraccionarios del mismo denominador.

Por tanto, si queremos introducir los factores en $2^2 \cdot 3^4 \sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 5}$, haremos lo siguiente: $2^2 \cdot 3^4 \sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5}$

En general:

$$a^m \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{mn} \cdot b}$$

- **Suma y resta de radicales**

Solo se pueden sumar o restar radicales que posean el mismo radicando y el mismo índice. En ese caso, se extrae el radical como factor común y se operan los coeficientes.

$$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x+y)\sqrt[n]{a}$$
$$x\sqrt[n]{a} - y\sqrt[n]{a} = (x-y)\sqrt[n]{a}$$

Por ejemplo, $\sqrt{32} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{18} = \sqrt{2^5} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3^2 \cdot 2} =$
$= 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

OBSERVA

También podemos calcular raíces de cualquier índice mediante la extracción de factores. Por ejemplo, en lugar de realizar, con el algoritmo o por tanteo, la raíz cuadrada de 5 184, podemos proceder como sigue:

$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} =$
$= 2^{\frac{6}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{2}} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

• Producto y cociente de radicales

Para multiplicar o dividir radicales del mismo índice, operamos los radicandos y conservamos el índice común.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

En el caso de que tengan distinto índice, los reduciremos primero a índice común, para después multiplicarlos o dividirlos como ya hemos aprendido.

Por ejemplo, $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{3^3}\cdot\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{27\cdot 16}=\sqrt[12]{432}$

• Potencia y raíz de un radical

Para elevar un radical a una potencia, elevamos el radicando a dicha potencia.

Para realizar la raíz de un radical, multiplicamos los índices de los radicales.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^b=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^b=a^{\frac{b}{n}}=\sqrt[n]{a^b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{nm}}=\sqrt[nm]{a}$$

Por ejemplo, $\left(\sqrt[3]{2^2}\right)^4\cdot\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^{16}\cdot 2}=\sqrt[6]{2^{17}}$

EJERCICIOS

22. ●●○ Extrae factores fuera de la raíz.

a) $\sqrt{4\,320}$

b) $\sqrt[3]{97\,200}$

c) $\sqrt[5]{12\,096}$

d) $\sqrt{3\,600}$

23. ●●○ Introduce factores en la raíz.

a) $12\sqrt{6}$

b) $2^3\cdot 3^2\sqrt[3]{2^2\cdot 3\cdot 5^2}$

c) $5^2\cdot 3^3\cdot 7\sqrt[5]{2^4\cdot 6\cdot 5^3\cdot 7}$

d) $a^2\cdot b^5\cdot c^3\sqrt[10]{abcd^4}$

24. ●●○ Realiza las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $2\sqrt{24}-3\sqrt{216}+5\sqrt{54}-\sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{125}+2\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{320}$

c) $\sqrt[5]{a^8b^4}-\sqrt[5]{32a^{13}b^9}+\sqrt[5]{243a^8b^9}$

d) $\sqrt{72}-2\sqrt{48}+3\sqrt{18}-\sqrt{12}$

25. ●●○ Opera los productos, cocientes, potencias y raíces de radicales y simplifica.

a) $\sqrt{24}\cdot\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[6]{72}$

b) $\left(\sqrt[5]{a^3b^2c^4}\right)^3$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3\sqrt{2}}}$

d) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\cdot 4\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt[6]{144}}$

• **Racionalización**

Cuando trabajamos con fracciones y radicales, si tenemos radicales en el denominador, la suma y resta se complica por la dificultad añadida del cálculo del mínimo común múltiplo con radicales. La racionalización consiste en la eliminación de radicales de los denominadores, trabajando con fracciones equivalentes a las originales.

Vamos a trabajar tres tipos de **racionalizaciones:**

- **Tipo I:** Con una raíz cuadrada en el denominador (sin sumas ni restas en el denominador)

  En este caso, para eliminar el radical, multiplicaremos denominador y numerador por el mismo radical de la fracción original.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Racionaliza.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{-2}{5\sqrt{6}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{-2}{5\sqrt{6}} = \dfrac{-2}{5\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{-2\sqrt{6}}{5(\sqrt{6})^2} = \dfrac{-2\sqrt{6}}{5 \cdot 6} = \dfrac{-2\sqrt{6}}{30} = \dfrac{-\sqrt{6}}{15}$

Solución

- **Tipo II:** Con una raíz de índice arbitrario en el denominador (sin sumas ni restas en el denominador)

  En este caso, para eliminar el radical, multiplicaremos denominador y numerador por el radical necesario para extraer todos los factores del radical del denominador.

EJERCICIOS RESUELTOS

2. Racionaliza.

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$ *b)* $\dfrac{-2}{3\sqrt[4]{12}}$ *c)* $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[5]{64}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

b) $\dfrac{-2}{3\sqrt[4]{12}} = \dfrac{-2}{3\sqrt[4]{2^2 \cdot 3}} = \dfrac{-2}{3\sqrt[4]{2^2 \cdot 3}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}}{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}} = \dfrac{-2\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}}{3\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4}} = \dfrac{-2\sqrt[4]{108}}{3 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{-\sqrt[4]{108}}{9}$

c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2^6}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2^6}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \dfrac{3\sqrt{2}\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^{10}}} = \dfrac{3\sqrt[10]{2^5}\sqrt[10]{2^8}}{2^2} = \dfrac{3\sqrt[10]{2^{13}}}{4} = \dfrac{3 \cdot 2\sqrt[10]{2^3}}{4} = \dfrac{3\sqrt[10]{8}}{2}$

Solución

- **Tipo III:** Con una suma o resta que incluya raíces cuadradas en el denominador

  En este caso, para eliminar el radical, multiplicaremos denominador y numerador por el conjugado de la suma o resta del denominador.

EJERCICIOS RESUELTOS

3. Racionaliza.

a) $\dfrac{5}{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$ *b)* $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$

$$a)\ \frac{5}{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=\frac{5}{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}=\frac{5\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})}=$$
$$=\frac{5\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2}=\frac{5\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{9\cdot 2-4\cdot 5}=\frac{5\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{-2}$$

$$b)\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}\cdot\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+3}=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)}=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2})^2-3^2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{2-9}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{-7}$$

Solución

EJERCICIOS

26. ●●○ Racionaliza y simplifica el resultado final si es posible.

a) $\dfrac{15}{2\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

27. ●●○ Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{4}}$

b) $\dfrac{-2\sqrt[4]{8}}{\sqrt[6]{2}}$

c) $\dfrac{6\sqrt{3}-3\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{81}}$

28. ●●○ Racionaliza y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{1+3\sqrt{10}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

29. ●●○ Opera.

a) $\dfrac{7}{\sqrt{3}}-\dfrac{5}{6}\sqrt{3}+\dfrac{4}{\sqrt{27}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{4}}-\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt[3]{108}}{2\sqrt[3]{32}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}}$

7. Logaritmos

Los logaritmos permiten hacer de forma eficaz potencias, multiplicaciones y divisiones de números muy grandes, dado que tienen la propiedad de transformar este tipo de operaciones en sumas y restas. Su uso en nuestro entorno es oculto, pero se emplean en la escala Richter de los terremotos, en la escala del pH, en la medida del brillo de las estrellas o en la intensidad del sonido.

7.1. Definición

Definimos el **logaritmo** en base a de b, y se denota $\log_a b$, de la siguiente manera:

$$\log_a b = x \text{ es equivalente a } b = a^x$$

a es la base del logaritmo y debe ser un número positivo y distinto de 1, b el argumento, que debe ser positivo, y x el logaritmo.

Los logaritmos de base 10, se llaman *logaritmos decimales*, y se denotan sin la base explícitamente, es decir, se escribe $\log 2$ en lugar de $\log_{10} 2$. Los logaritmos de base el número e, se llaman *logaritmos neperianos*, y se denotan ln o L, es decir, $\ln 2 = \text{L}2 = \log_e 2$.

RECUERDA

El número e es un número irracional muy importante para el análisis. Su valor es aproximadamente 2,718 y está relacionado con diversos campos como la física, la biología, la química...

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

   a) $\log_2 32$

   b) $\log_3 \sqrt{27}$

   c) $\log \sqrt{0{,}1}$

   d) $\ln \sqrt[4]{e^3}$

a) $\log_2 32 = x \Leftrightarrow 2^x = 32$

Como $32 = 2^5$, tenemos que $2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

Visto de otra manera, como podemos expresar 32 en la base del logaritmo, el resultado es el exponente de dicha potencia, esto es, $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$ (porque la base del logaritmo y la base del argumento coinciden).

b) $\log_3 \sqrt{27} = x \Leftrightarrow 3^x = \sqrt{27} \Rightarrow 3^x = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Visto del otro modo, $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$

c) $\log \sqrt{0{,}1} = \log \sqrt{\dfrac{1}{10}} = \log \sqrt{10^{-1}} = \log 10^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{-1}{2}$

d) $\ln \sqrt[4]{e^3} = \ln e^{\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{4}$

USA TU CALCULADORA

La calculadora científica dispone de una tecla para el logaritmo decimal y otra para el logaritmo neperiano. log ln

Solución

7.2. Propiedades de los logaritmos

- **Logaritmo del producto:** $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Demostremos esta propiedad:

$$\begin{cases}\log_a b = x \\ \log_a c = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^x \\ c = a^y\end{cases} \Rightarrow b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Leftrightarrow \log_a (b \cdot c) = x + y = \log_a b + \log_a c$$

- **Logaritmo del cociente:** $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Demostremos esta propiedad:

$$\begin{cases}\log_a b = x \\ \log_a c = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^x \\ c = a^y\end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Leftrightarrow \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = x - y = \log_a b - \log_a c$$

- **Logaritmo de la potencia:** $\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$

Demostremos esta propiedad:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x \Rightarrow b^c = (a^x)^c = a^{xc} \Leftrightarrow \log_a (b^c) = xc = c \log_a b$$

- **Cambio de base de logaritmo:** $\log_a b = \dfrac{\log_n b}{\log_n a}$

Demostremos esta propiedad:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \Rightarrow$$

$$\log_n (a^x) = \log_n b \Leftrightarrow x \log_n a = \log_n b \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}$$

OBSERVA

Si conseguimos expresar el argumento del logaritmo como una potencia de base la base del logaritmo, el resultado del logaritmo será, simplemente, el exponente de dicha potencia, es decir, $\log_a a^x = x$.

OBSERVA

No existen los logaritmos cuyos argumentos son números negativos o cero.

EJERCICIOS

30. ●●○ Calcula los siguientes logaritmos, aplicando la definición o alguna de las propiedades si lo consideras necesario:

a) $\log_2 128$

b) $\log_5 0{,}04$

c) $\log \sqrt[7]{100}$

d) $\log_3 \sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}$

e) $\ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{e^2}}}$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 64$

g) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{81}$

h) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}} \sqrt{125}$

31. ●●○ Obtén la x en las siguientes igualdades:

a) $\log_x 3125 = 5$

b) $\log_x 81 = -4$

c) $\log_x \sqrt{343} = \dfrac{3}{2}$

d) $\log_x \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} = \dfrac{4}{3}$

e) $\log_3 x = \dfrac{-2}{3}$

f) $\log_{\frac{2}{3}} x = -1$

g) $\ln x = 1$

h) $\log_4 x = 2$

32. ●●● Conocido $\log 2 = 0{,}301$, calcula los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 16$

b) $\log 25$

c) $\log \sqrt{40}$

d) $\log_2 \sqrt{10}$

33. ●●○ Agrupa en un solo logaritmo las siguientes sumas y restas:

a) $\log x - \log y + 3\log z - 2\log a$

b) $2\ln 5 + \dfrac{\ln 25}{2} - \dfrac{1}{3}\ln 0{,}008$

34. ●●○ Desarrolla y expresa como suma o resta de varios logaritmos.

a) $\log_2 \left(\dfrac{x^3 y \sqrt[3]{z^2}}{a^2 b \sqrt{c}}\right)$

b) $\ln \left(\dfrac{ab^2 \sqrt[3]{c}}{4d^2}\right)$

35. ●●○ Aplica el cambio de base para obtener los siguientes logaritmos con la calculadora:

a) $\log_3 5$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 18$

SABER MÁS

Una de las aplicaciones más directas de las funciones exponenciales y los logaritmos es el **interés compuesto**.

El interés simple es aquel que se aplica a cierta cantidad de dinero si se acuerda que los intereses que se obtengan se retiran al cabo del plazo. Su fórmula es:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

que expresa los intereses, I, que se retiran al invertir un capital inicial, C, durante un tiempo (en años), t, a un rédito, r.

Si en lugar de retirar los intereses generados, añadimos esos intereses a la cantidad depositada durante más tiempo, obtenemos un problema de interés compuesto.

En este caso, el capital final, C_f, que se obtiene al invertir un capital inicial, C, durante un tiempo (en años), t, a un rédito, r, sigue la fórmula:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

En ambos casos, si el tiempo, en lugar de estar en años, está en días, meses… origina cambios en el denominador de la fórmula. Así, si el tiempo está en días, el denominador será 36 500 y si está en meses, 1 200.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcula el tiempo en que debemos colocar 15 000 € al 3 % de interés compuesto para recoger, al final del periodo, un capital de 16 882,63 €.

Aplicaremos la fórmula del interés compuesto y despejaremos el tiempo, que es la incógnita.

$$16\,882{,}63 = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^t \Rightarrow \frac{16\,882{,}63}{15\,000} = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^t \Rightarrow 1{,}125 = 1{,}03^t \Rightarrow \log_{1{,}03} 1{,}125 = t$$

$$\frac{\log 1{,}125}{\log 1{,}03} = t \Rightarrow t = 3{,}98 \approx 4$$ años, es el tiempo que debe transcurrir.

Solución

EJERCICIOS

36. ●●○ Calcula los intereses que se obtendrán al depositar un capital de 2 000 € al 2 % de interés durante 18 meses, si el interés es:

a) Simple.

b) Compuesto.

37. ●●● Calcula el capital invertido al 5 % durante 2 años si se han recogido 1 076,25 € de intereses.

a) Si el interés es simple.

b) Si el interés es compuesto.

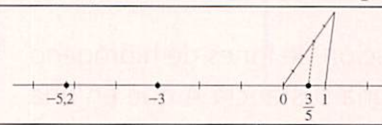
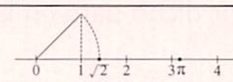
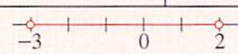
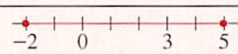
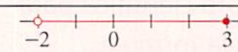
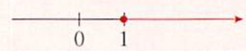
38. ●●○ Calcula el rédito al que se han depositado 8 000 € durante 3 años si se han obtenido 8 615,13 € a interés:

a) Simple. *b)* Compuesto.

39. ●●● Calcula el tiempo de inversión de 40 000 € al 3,5 % si se han obtenido unos intereses de 7 507,45 €.

a) Si el interés es simple.

b) Si el interés es compuesto.

Números reales	Números racionales	Concepto	Naturales, enteros, fraccionarios y decimales exactos o periódicos			
		Representación				
		Decimales y fracciones	Tipos decimales	Exacto 2,5	Periódico puro $1,\widehat{3}$	Periódico mixto $2,31\widehat{5}$
			Fracción generatriz	$\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$	$\frac{13-1}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$	$\frac{2315-231}{900}=\frac{2084}{900}=\frac{521}{225}$
	Números irracionales	Concepto	Raíces no exactas, decimales no periódicos			
		Representación				
		Aproximaciones y errores	Truncamiento		Redondeo	
			$3,25 \approx 3,2$		$3,25 \approx 3,3$	
			$E_a = \lvert 3,25-3,2\rvert = 0,05$		$E_a = \lvert 3,25-3,3\rvert = 0,05$	
			$E_r = \frac{0,05}{3,25} = 0,015$		$E_r = \frac{0,05}{3,25} = 0,015$	
	Intervalos y semirrectas	Abiertos	$(-3, 2)$		$-3 < x < 2$	
		Cerrados	$[-2, 5]$		$-2 \leq x \leq 5$	
		Semiabiertos o semicerrados	$(-2, 3]$		$-2 < x \leq 3$	
			$[1, +\infty)$		$x \geq 1$	

Radicales			
Concepto	Operaciones		
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ a = **radicando** n = **índice** b = **raíz;** $\sqrt[n]{a}$ = **radical** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	Introducción de factores $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2}$	Extracción de factores $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$	
	Suma y resta (mismo radical) $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$	Producto y cociente $3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt[3]{6} = 15\sqrt[6]{3^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = 15\sqrt[6]{3^5 \cdot 2^2}$ $\frac{5\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{3^2}} = 5\sqrt[4]{\frac{6}{9}} = 5\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$	
	Potencias y raíz $(\sqrt[5]{6})^3 = \sqrt[5]{6^3}$ $\sqrt[5]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[15]{5}$	Racionalización $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$	$\frac{3}{2-3\sqrt{2}} = \frac{3}{2-3\sqrt{2}} \cdot \frac{2+3\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}} =$ $= \frac{3(2+3\sqrt{2})}{2^2-3^2 \cdot 2} = -\frac{3(2+3\sqrt{2})}{14}$

Notación científica	Logaritmos		
Decimal de parte entera entre 1 y 9 seguido de una potencia de 10.	Definición	Propiedades	
Los productos y cocientes se operan por separado decimales y potencias. $(3 \cdot 10^2) \cdot (2 \cdot 10^3) = 6 \cdot 10^5$	$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$ a base $(a > 0, a \neq 1)$ b argumento $(b > 0)$	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
Las sumas y restas deben tener los mismos exponentes		$\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$	$\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}$

Ejercicios iniciales

40. ●●○ **CCT** Si la concentración de iones de hidrógeno es 10 veces mayor en una sustancia A que en una B, ¿qué relación habrá entre el pH de A y el de B?

41. ●●● **CCT, CD** El método del carbono 14 para datar restos arqueológicos de seres vivos consiste en medir la cantidad N de átomos de dicho isótopo radiactivo en el resto hallado e introducir dicho dato en la siguiente fórmula:

$$t = -8033 \ln \frac{N}{N_0}$$

donde N_0 es la cantidad de átomos que había en el resto arqueológico cuando el ser vivo murió.

¿Cuántos años de antigüedad tiene un resto del que ya se han desintegrado la mitad de los átomos de carbono 14 que tenía inicialmente?

Utiliza la tecla ln de tu calculadora científica para hallar el logaritmo neperiano ln de la fórmula.

42. ●●● **CCT, CD** La fórmula que utiliza la policía científica para hallar la hora de la muerte en un cadáver es la siguiente:

$$t = -3{,}5 \ln\left(\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}\right)$$

donde t es la cantidad de horas que el sujeto lleva muerto, T es la temperatura del interior del cadáver actualmente (medida en el hígado), T_0 es la temperatura inicial del cuerpo (se supone 36,5° C), y T_a es la temperatura ambiental.

¿A qué hora murió una persona que fue hallada a las 6:00 h con una temperatura interior de 16,5° C, siendo la temperatura ambiente de 10° C?

Usa tu calculadora para hallar el logaritmo neperiano ln de la fórmula.

Números reales

43. ●○○ Completa la tabla siguiente con SÍ o NO, en función de los conjuntos numéricos a los que pertenezca cada número.

	$-5{,}023$	$3{,}10269...$	$-\frac{21}{3}$	$\sqrt{49}$	$2{,}7\overset{\frown}{1}$
$\mathbb{N}$					
$\mathbb{Z}$					
$\mathbb{Q}$					
$\mathbb{I}$					
$\mathbb{R}$					

44. ●○○ **CI** Escribe un número irracional utilizando únicamente ceros y unos.

45. ●●○ **@** Investiga en Internet cuál es el valor aproximado de los siguientes números irracionales:

a) π

b) e

c) El número áureo ϕ

d) El número plateado δ_s

46. ●○○ Escribe cinco números racionales y cinco irracionales entre π y 3,5.

Aproximaciones y errores en la expresión aproximada de un número real

47. ●○○ Realiza los siguientes truncamientos:

a) 26 345,69 a las unidades de millar

b) 3790,563 a las decenas

c) 4,79523 a las décimas

d) 51,8741256 a las milésimas

48. ●●○ Halla el error absoluto y relativo de las aproximaciones del ejercicio anterior.

49. ●○○ Realiza los siguientes redondeos:

a) 4769,261 a las centenas

b) 84,3251 a las unidades

c) 9,27572 a las centésimas

d) 0,01498 a las diezmilésimas

50. ●●○ Halla el error absoluto y relativo de las aproximaciones del ejercicio anterior.

51. ●●○ Trunca los siguientes números para obtener una aproximación con 2 cifras significativas en cada caso. Halla los errores absolutos y relativos cometidos.

a) 17 259

b) 32,541

c) 0,26341

d) 0,000007496

52. ●●○ Redondea los números del ejercicio anterior para obtener una aproximación con 2 cifras significativas en cada caso. Halla los errores absolutos y relativos cometidos.

53. ●●○ Halla los errores absolutos y relativos de las siguientes aproximaciones, expresándolos en forma de fracción:

a) Aproximar $1{,}\widehat{3}$ por 1,3.

b) Aproximar $2{,}\widehat{69}$ por 2,7.

c) Aproximar $3{,}0\widehat{6}$ por 3,1.

d) Aproximar $0{,}1\widehat{49}$ por 0,15.

54. ●●● **CA** ¿Cuál es el menor número de cifras significativas que debe tener una aproximación del número 23 451 294 para poder estar seguros de que el error relativo cometido es menor que 0,001?

Representación y ordenación de los reales en la recta

55. ●●○ Representa en la recta numérica, ayudándote del teorema de Tales, los siguientes números fraccionarios:

a) $\frac{3}{5}$

b) $-\frac{5}{7}$

c) $\frac{16}{3}$

d) $-\frac{47}{6}$

56. ●●○ Representa, utilizando el teorema de Pitágoras, los siguientes números irracionales en la recta real:

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{10}$

c) $\sqrt{18}$

d) $\sqrt{29}$

57. ●●● Utiliza el teorema de Pitágoras para representar en la recta numérica las siguientes raíces:

a) $\sqrt{6}$

b) $\sqrt{14}$

c) $\sqrt{22}$

d) $\sqrt{33}$

58. ●●○ Utilizando el teorema de la altura, dibuja un segmento que mida:

a) $\sqrt{6}$

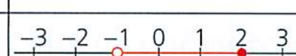
b) $\sqrt{14}$

c) $\sqrt{22}$

d) $\sqrt{33}$

Intervalos y semirrectas

59. ●○○ Completa la tabla.

Intervalo	Desigualdad	Representación
$(5, +\infty)$		
	$-3 \leq x < -1$	
		
$(-\infty, -1]$		

60. ●●○ El centro de un intervalo es su punto medio, y el radio es la distancia entre dicho punto medio y cualquiera de los dos extremos del intervalo.
Halla el centro y el radio de los siguientes intervalos:

a) (2, 14)

b) (0, 5)

c) (−11, −3)

d) (−2, 5)

61. ●●○ Halla los extremos de cada intervalo abierto, con su centro y radio siguientes:

a) Centro = 2; radio = 1

b) Centro = −3; radio = 3

c) Centro = 5; radio = 6

d) Centro = 1,5; radio = 2,5

62. ●○○ Encuentra el conjunto de los números que verifican las siguientes desigualdades:

a) $|x| < 4$

b) $|x| \geq 5$

c) $|x| \geq -1$

d) $|x| < 0$

63. ●●○ Encuentra el conjunto de los números que verifican las siguientes desigualdades:

a) $|x-1| < 3$

b) $|x+2| \geq 2$

c) $|x-5| > 1$

d) $|x+1| \leq 0$

64. ●●● Encuentra el conjunto de los números que verifican las siguientes desigualdades:

a) $|2x| \leq 1$

b) $|2x-1| < 3$

c) $|1-x| \geq 4$

d) $|3x+2| > 6$

Notación científica

65. ●○○ Escribe los siguientes números en notación científica:

a) 135 000 000 000

b) 0,0000006025

c) −492 400 000 000 000 000

d) −0,0000000003005

66. ●○○ Escribe con todas sus cifras los siguientes números representados en notación científica:

a) $2,61 \cdot 10^{6}$

b) $-3,54 \cdot 10^{-12}$

c) $-9 \cdot 10^{21}$

d) $8,2651 \cdot 10^{-10}$

67. ●●○ Los siguientes números están incorrectamente escritos en notación científica. Explica por qué y escríbelos correctamente.

a) $32,24 \cdot 10^{7}$

b) $0,264 \cdot 10^{15}$

c) $-561 \cdot 10^{-8}$

d) $0,0007456 \cdot 10^{-56}$

68. ●●○ Realiza las siguientes sumas y restas expresando los resultados en notación científica:

a) $-6,25 \cdot 10^{22} + 5,6214 \cdot 10^{24}$

b) $4,21 \cdot 10^{-8} - 3,26 \cdot 10^{-9}$

c) $5,21 \cdot 10^{-31} + 6,02 \cdot 10^{-33} + 2,045 \cdot 10^{-32}$

d) $3,8 \cdot 10^{26} + 5,6 \cdot 10^{25} - 8,1 \cdot 10^{24}$

69. ●●○ Efectúa las multiplicaciones y divisiones siguientes expresando los resultados en notación científica:

a) $(3,2 \cdot 10^{26}) \cdot (-5,4 \cdot 10^{11})$

b) $(5,12 \cdot 10^{-21}) \cdot (2,15 \cdot 10^{51})$

c) $(-6,23 \cdot 10^{62}) : (-7,6 \cdot 10^{-26})$

d) $(7,86 \cdot 10^{-15}) : (-1,4 \cdot 10^{-25})$

70. ●●○ Halla los resultados de las siguientes potencias en notación científica:

a) $(3,5 \cdot 10^{15})^{3}$

b) $(8,1 \cdot 10^{-10})^{6}$

c) $(-4,25 \cdot 10^{26})^{2}$

d) $(2,45 \cdot 10^{-21})^{4}$

71. ●●● Halla los resultados de las siguientes operaciones combinadas escribiéndolos en notación científica:

a) $\left(2{,}5\cdot 10^{18}+3{,}1\cdot 10^{19}\right)\cdot\left(4{,}8\cdot 10^{-22}-5{,}1\cdot 10^{-21}\right)$

b) $\left(6{,}4\cdot 10^{-15}-5{,}9\cdot 10^{-16}\right)^{3}$

c) $\dfrac{3{,}81\cdot 10^{29}+4{,}52\cdot 10^{28}}{2{,}5\cdot 10^{-45}}$

d) $\dfrac{\left(4{,}5\cdot 10^{-12}\right)^{4}}{2{,}561\cdot 10^{41}+5{,}264\cdot 10^{39}}$

72. ●●○ **CCT** La masa de la Tierra es de $5{,}9722\cdot 10^{24}$ kg. La siguiente tabla nos da la razón o cociente entre la masa de cada planeta del Sistema Solar y la de la Tierra:

Planeta	$\dfrac{\text{masa del planeta}}{\text{masa de la Tierra}}$
Mercurio	$6\cdot 10^{-2}$
Venus	$8{,}2\cdot 10^{-1}$
Marte	$1{,}1\cdot 10^{-1}$
Júpiter	$3{,}18\cdot 10^{2}$
Saturno	$9{,}5\cdot 10^{1}$
Urano	$1{,}46\cdot 10^{1}$
Neptuno	$1{,}72\cdot 10^{1}$

Halla la suma de las masas de los ocho planetas del Sistema Solar sin hallar la masa de cada uno de ellos.

73. ●●○ **CCT** La masa de un protón es $1{,}6726\cdot 10^{-27}$ kg, la de un electrón es 1 836 veces más pequeña, y la de un neutrón es $1{,}6794\cdot 10^{-27}$ kg, prácticamente igual a la del protón.

¿Cuál será la masa de un átomo de oxígeno que tiene 8 protones, 8 neutrones y 8 electrones?

Raíces. Potencias de exponente fraccionario

74. ●○○ Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos de números reales:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[4]{2^3}$, $\sqrt[5]{2^4}$

b) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[8]{15}$

75. ●●○ Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos de números reales:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[6]{6}$

b) $\sqrt[5]{16}$, $\sqrt[10]{216}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$

76. ●○○ Simplifica.

a) $\sqrt[36]{2^{24}}$

b) $\sqrt[25]{3^{15}}$

c) $\sqrt[12]{x^{18}}$

d) $\sqrt[75]{10^{100}}$

77. ●●○ Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[6]{512}$

b) $\sqrt[15]{243}$

c) $\sqrt[10]{1000}$

d) $\sqrt[12]{32\,768}$

78. ●○○ Introduce todos los factores dentro del radical y reduce.

a) $2\cdot 3^2\sqrt[3]{2^2\cdot 3}$

b) $x^2y^3z\sqrt[4]{xy^2z^3}$

c) $3^3\cdot 5\sqrt{3}$

d) $2^2\cdot 3^4\cdot 5\sqrt[5]{2\cdot 3\cdot 5^2}$

79. ●○○ Completa.

a) $24\sqrt{3}=\sqrt{\square}$

b) $15\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{\square}$

c) $5\sqrt[4]{10}=\sqrt[4]{\square}$

d) $10\sqrt[5]{10}=\sqrt[5]{\square}$

80. ●○○ Extrae factores fuera del radical.

a) $\sqrt{2^7}$

b) $\sqrt[3]{3^{10}}$

c) $\sqrt[4]{5^{15}}$

d) $\sqrt[5]{x^{22}}$

81. ●●○ Extrae todos los factores que sea posible fuera del radical.

a) $\sqrt{512}$

b) $\sqrt[3]{243}$

c) $\sqrt[5]{2\,000\,000}$

d) $\sqrt{3240}$

82. ●●○ Halla el resultado de las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $7\sqrt{27}+2\sqrt{12}-5\sqrt{3}+4\sqrt{75}$

b) $3\sqrt{20}+2\sqrt{45}-2\sqrt{125}$

c) $4\sqrt{18}-2\sqrt{50}+3\sqrt{162}+5\sqrt{2}-\sqrt{32}$

d) $2\sqrt{24}+\sqrt{128}-2\sqrt{150}+5\sqrt{72}-3\sqrt{200}+$
$+4\sqrt{216}+3\sqrt{8}$

83. ●●○ Calcula las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $2\sqrt[3]{24}+5\sqrt[3]{81}-12\sqrt[3]{3}$

b) $3\sqrt[5]{64}-5\sqrt[5]{2}+2\sqrt[5]{486}$

c) $3\sqrt[3]{250}-4\sqrt[3]{54}-7\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2000}-3\sqrt[3]{16}$

d) $2\sqrt[4]{243}-5\sqrt[4]{48}+7\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{1875}$

84. ●●○ Opera con los siguientes radicales, extrayendo todos los factores que sea posible y simplificando el resultado al máximo:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt{2\cdot 3^3}\cdot\sqrt[6]{2^5}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[6]{2}\cdot\left(\sqrt[8]{2^3}\right)^2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2\cdot 3^3}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 3^2}}{\sqrt[4]{2^3\cdot 3}}$

d) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{2^2}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$

85. ●●● Opera con los siguientes radicales, extrayendo todos los factores que sea posible y simplificando el resultado al máximo:

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[6]{x^5y}$

b) $\sqrt[18]{\dfrac{a^9b^{27}}{c^{30}}}$

c) $\dfrac{\left(x\sqrt{y}\sqrt[4]{z^3}\right)^3}{\sqrt{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{y}\right)^3 z}}$

d) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{xy}}\cdot\sqrt[9]{x^2y}}{\left(\sqrt[6]{xy^3}\right)^2}$

86. ●○○ Racionaliza.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

87. ●○○ Racionaliza.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$

c) $\dfrac{10}{\sqrt[5]{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

88. ●●○ Racionaliza.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{9}{3-\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$

89. ●●○ Racionaliza, opera y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

90. ●●○ Racionaliza, opera y simplifica.

a) $\dfrac{9}{\sqrt[3]{9}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}$

c) $\dfrac{18}{\sqrt[5]{27}}$

d) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}}$

91. ●●● Racionaliza, opera y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{2\sqrt{11}}{\sqrt{11}-3}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Logaritmos

92. ●○○ Calcula los siguientes logaritmos a partir de la definición:

a) $\log_2 64$

b) $\log_3 343$

c) $\log_5 625$

d) $\log 10\,000\,000$

93. ●●○ Usando únicamente la definición, calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 \dfrac{1}{8}$

b) $\log_7 \sqrt{343}$

c) $\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{10\,000}}$

d) $\log_5 \sqrt[4]{125}$

94. ●●○ Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log \sqrt{0{,}001}$

b) $\log \dfrac{1}{0{,}0001}$

c) $\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{100\,000\,000}}$

d) $\log \dfrac{1}{\sqrt[4]{0{,}1}}$

e) $\ln \sqrt{e^5}$

f) $\ln \dfrac{1}{\sqrt[7]{e^2}}$

95. ●●● Usando únicamente la definición, calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$

b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2}$

c) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{\sqrt{243}}$

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$

96. ●●○ Halla x.

a) $\log_x \dfrac{1}{9} = 2$

b) $\log_2 x = -\dfrac{1}{3}$

c) $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt[5]{81}} = x$

d) $\log_x \sqrt{10} = -\dfrac{3}{2}$

e) $\log_{\frac{1}{10}} x = -\dfrac{1}{2}$

f) $\log_{\sqrt[3]{4}} \sqrt{2} = x$

97. ●●○ Calcula los siguientes logaritmos, aplicando la definición y las propiedades de los logaritmos:

a) $\log \dfrac{\sqrt{10\sqrt[3]{0{,}1}}}{\sqrt[4]{1000}}$

b) $\log_2 \dfrac{\sqrt{8\sqrt{2}}}{16}$

c) $\log_3 \dfrac{\sqrt[4]{27}}{(9\sqrt{3})^2}$

d) $\log_5 \dfrac{125\sqrt[3]{5}}{25^3}$

98. ●●○ Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301$, halla:

a) $\log 8$

b) $\log 5$

c) $\log 40$

d) $\log 0{,}25$

99. ●●○ Conocido $\log 2 = 0{,}301$ y $\log 3 = 0{,}477$, calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log 6$

b) $\log 12$

c) $\log 1{,}5$

d) $\log 75$

100. ●●○ Agrupa en un solo logaritmo.

a) $\log x + 2\log y - \log z$

b) $3\log_a A - \dfrac{\log_a B}{2}$

c) $\dfrac{3\log_2 a}{2} + \dfrac{2\log_2 b}{3}$

d) $2\log 2 + 3\log 3 - \dfrac{\log 5}{2} + \log 7$

101. ●●● Agrupa en un solo logaritmo.

a) $3\left(2\log x - 3\log y + \dfrac{\log z}{2}\right) - \dfrac{2\log t}{3}$

b) $-2\log A + \dfrac{1}{2}\log B - \dfrac{3}{4}\log C - \dfrac{2\log D}{5}$

c) $\dfrac{\dfrac{\log a}{3} - 2\log b}{5} - \dfrac{3\log c}{2}$

d) $2\left(\dfrac{\ln P}{5} + 4\ln Q\right) - \dfrac{2\ln R - 3\ln S}{7}$

102. ●●○ Desarrolla lo máximo posible.

a) $\log \dfrac{a^2 b}{c}$

b) $\log \dfrac{x^2 y^3}{z^3 t}$

c) $\log_2 \dfrac{1}{A\sqrt{B}}$

d) $\log_a \sqrt{x^3 y^4}$

103. ●●● Desarrolla todo lo que sea posible.

a) $\log \dfrac{\sqrt{A^3 \cdot \sqrt[3]{B}}}{(\sqrt{C} \cdot D^2)^3}$

b) $\log_2 \sqrt[3]{\dfrac{(x \cdot y^7)^2}{z^2 \cdot \sqrt{t}}}$

c) $\ln \dfrac{(a^2\sqrt{b^3})^3}{\sqrt[3]{c^2\sqrt{d}}}$

d) $\log\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}}}{z^4}\right)^9$

104. ●○○ **CD** Utiliza la fórmula de cambio de base para obtener con tu calculadora el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 3$

b) $\log_7 10$

c) $\log_5 \dfrac{1}{2}$

d) $\log_3 \sqrt{2}$

105. ●●● Calcula los siguientes logaritmos utilizando la fórmula de cambio de base. Debes elegir la base apropiada para que el cálculo sea posible sin utilizar calculadora.

a) $\log_8 0{,}5$

b) $\log_{64} \dfrac{1}{\sqrt{32}}$

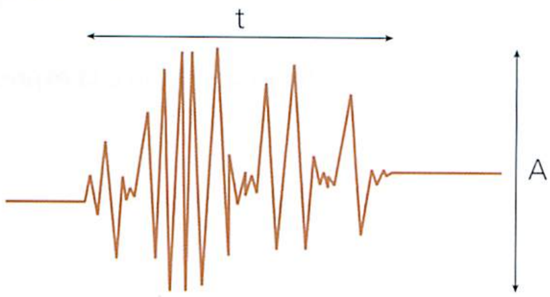
c) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{\sqrt[3]{81}}$

d) $\log_{\frac{1}{e}} \sqrt[3]{e^2}$

106. ●●○ **CCT, CD** La escala de Richter nos indica la cantidad de energía liberada en un terremoto según la siguiente fórmula:

$M = \log A + 3\log t - 2{,}92$

donde A es la amplitud en milímetros de la onda registrada en un sismógrafo durante cierto tiempo t en segundos.



a) Halla la magnitud M de un terremoto sabiendo que el sismógrafo ha registrado ondas de 25 mm en 15 segundos.

b) ¿Y si las ondas tienen una amplitud de 50 mm durante 30 segundos?

107. ●●● **CCT** En un laboratorio se observa que un determinado tipo de bacterias se reproduce de forma que el número de bacterias N que hay en cada momento t (dado en horas transcurridas desde el inicio de la observación) sigue la igualdad $N = 20\,000e^{0{,}05776t}$.

a) ¿Cuántas horas transcurrirán hasta que el número de bacterias duplique al número inicial?

b) ¿Y para que lo triplique?

SABER MÁS

108. ●●○ **CI** Calcula el capital que se obtendrá al depositar 12 500 € al 3,75 % de interés durante 2 años. Considera que el interés es:

a) Simple.

b) Compuesto.

109. ●●○ **CI** Calcula el capital invertido al 4 % durante 3 años si se han recogido 56 243,2 €. Considera el problema de interés:

a) Simple.

b) Compuesto.

110. ●●○ **CI** Calcula el interés al que se han depositado 3 500 € durante 21 meses si se han obtenido 3 624,56 €. Considera el problema de interés:

a) Simple.

b) Compuesto.

111. ●●● **CI** Calcula los años de inversión de 42 000 € al 2,5 % si se han obtenido unos intereses de 6 707,12 €. Considera el problema de interés:

a) Simple.

b) Compuesto.

112. ●●○ **CI** ¿Qué conclusiones extraes respecto a los beneficios de emplear el interés simple o el compuesto? ¿Cuál aporta más ganancias en menos tiempo?

1. Si expresamos $\sqrt{2\sqrt[5]{4}}$ en un solo radical obtendremos:

a) $\sqrt[10]{2^3}$

b) $\sqrt[7]{2^3}$

c) $\sqrt[10]{2^7}$

d) $\sqrt[7]{2^7}$

NAVARRA

2. En el año 2011 se han producido en Cataluña, aproximadamente, 1 500 000 000 huevos. Marca la expresión numérica que corresponde a dicha cantidad.

a) $1{,}5 \cdot 10^9$

b) $1{,}5 \cdot 10^{10}$

c) 10^{15}

CATALUÑA

3. El precio de venta de un coche es de 21 357 €. Rosa le ha dicho a un amigo suyo, de manera rápida, que el coche cuesta unos 21 000 €.

a) ¿Cuál es el error absoluto entre los dos precios?

b) ¿Cuál es el error relativo entre los dos precios expresados?

c) Si Rosa hubiera dicho que el coche costaba unos 20 000 €, ¿el error relativo habría sido superior al 5 %?

CATALUÑA

4. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 \frac{1}{128}$

b) $\log \sqrt[3]{0{,}0001}$

c) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

5. Realiza las siguientes operaciones con radicales y expresa el resultado lo más reducido posible:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} - 4\sqrt[6]{1024} - 6\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{32}$

b) $\left(\frac{\left(\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{32}\right)^{-2}}{\left(\sqrt[4]{8}\right)^{-3}}\right)^2$

6. Realiza las siguientes operaciones en notación científica y expresa correctamente el resultado en notación científica:

a) $(3{,}65 \cdot 10^{-3} - 9{,}65 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-3}$

b) $\frac{6{,}45 \cdot 10^5}{3{,}76 \cdot 10^2 + 6{,}87 \cdot 10^4} : (2{,}76 \cdot 10^{-5})$

EVALÚATE

1. Clasifica, representa en la recta y ordena de menor a mayor los siguientes números:

$\sqrt{18}$ $\qquad \frac{13}{4}$ $\qquad \sqrt{33}$ $\qquad \frac{7}{5}$

2. Copia y completa la siguiente tabla con las aproximaciones y errores del número 755,93:

	Aproximación	Error absoluto	Error relativo
A las unidades por redondeo			
A las décimas por truncamiento			
A las centenas por redondeo			

3. Copia y completa la siguiente tabla de intervalos y semirrectas:

Intervalo o semirrecta	Enunciado	Representación gráfica	Expresión algebraica
$(-1, 5)$			
	Conjunto de números mayores que 3		
		$-\infty$ -8 -7 -6	
			$x \in \mathbb{R}$ tales que $-7 \le x \le -3$
$[-3, 5)$			
		0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	

4. Realiza las siguientes operaciones en notación científica:

a) $3{,}2 \cdot 10^{-5} + 2{,}4 \cdot 10^{-4} - 1{,}7 \cdot 10^{-6}$

b) $(4{,}5 \cdot 10^{14}) \cdot (3{,}2 \cdot 10^{-20}) : (2 \cdot 10^{-16})$

c) $3 \cdot 10^{-15} \cdot (4 \cdot 10^{15})^3$

5. Ordena los siguientes radicales de menor a mayor:

$\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{9}, \sqrt[6]{12}, \sqrt{2}$

6. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $-5\sqrt{99} + 4\sqrt{44} + 3\sqrt{1331}$

b) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{135} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{320} + 3\sqrt[3]{625}$

7. Opera los productos, cocientes y potencias.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[6]{625}$ $\qquad$ *b)* $(\sqrt[3]{1024})^2 : \sqrt[6]{\sqrt{128}}$

8. Racionaliza y simplifica.

a) $\frac{18\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}$ $\qquad$ *b)* $\frac{4+\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{16}}$ $\qquad$ *c)* $\frac{6\sqrt{32}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{8}}$

9. Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición o las propiedades:

a) $\ln\sqrt[4]{e^5}$ $\qquad$ *b)* $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}$ $\qquad$ *c)* $\log_{\sqrt{3}} 9$

10. Conocido el $\log 7 = 0{,}845$, calcula los logaritmos siguientes sin emplear la calculadora:

a) $\log\frac{1}{49}$ $\qquad$ *b)* $\log_{343}\sqrt[4]{7}$ $\qquad$ *c)* $\log 700$

MATEMÁTICAS RECREATIVAS

1. Observa el siguiente razonamiento.

– Sabemos que $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$, o lo que es lo mismo, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

– Tomando logaritmos, tenemos que $\log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

– Aplicando las propiedades de los logaritmos, se obtiene que $2\log\frac{1}{2} > 3\log\frac{1}{2}$.

– Simplificando $\log\frac{1}{2}$ en cada miembro de la desigualdad, $2\,\cancel{\log\frac{1}{2}} > 3\,\cancel{\log\frac{1}{2}}$, queda $2 > 3$.

Se ha llegado a una conclusión, evidentemente falsa, $2 > 3$, que procede de un error cometido en el proceso de demostración. ¿En qué parte del razonamiento se ha cometido dicho error?

2. Algunos números cumplen la curiosa propiedad de que su raíz cúbica es igual a la suma de sus cifras. Por ejemplo:

$\sqrt[3]{512} = 5 + 1 + 2$

$\sqrt[3]{4913} = 4 + 9 + 1 + 3$

$\sqrt[3]{5\,832} = 5 + 8 + 3 + 2$

a) ¿Cuál es el siguiente número que cumple esta propiedad?

b) ¿Cuál es el primer número mayor que 1 que cumple la propiedad análoga para la raíz cuarta?

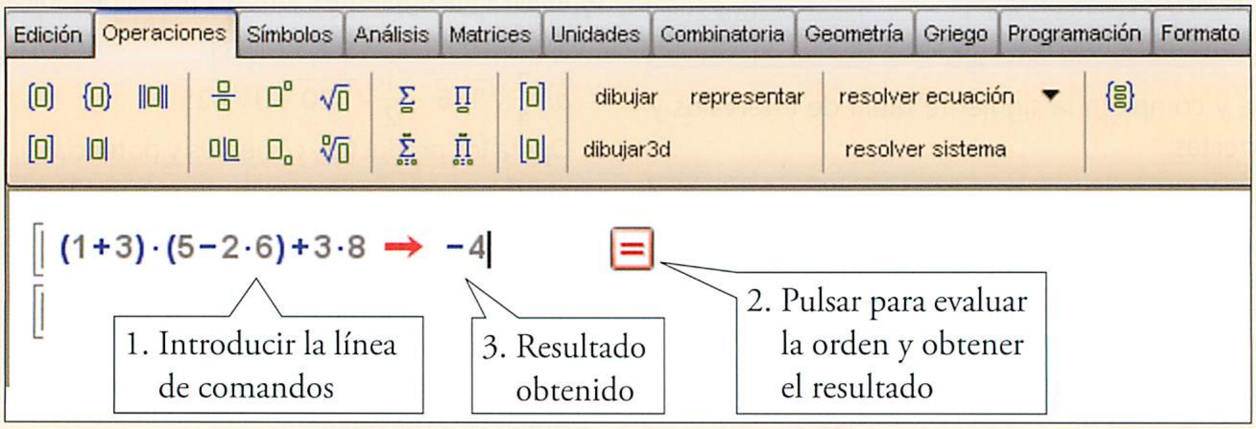
3. Halla el valor de $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$.

Bloque I: Aritmética

Funcionamiento de Wiris

Wiris es un sencillo programa que nos permite realizar cálculos de dificultad variable y que podemos utilizar en ámbitos diversos de la materia.

Su funcionamiento es muy simple: basta con introducir el comando deseado y pulsar [=] para evaluar la orden y obtener el resultado. Los comandos aparecerán en color negro.



Operaciones

Operaciones aritméticas básicas: suma (+), resta (−), multiplicación (·), división (/).

Números decimales: la coma decimal se denota con un punto (.) y no con coma. Del mismo modo emplearemos el punto decimal para trabajar con notación científica si deseamos que el resultado se nos dé en el mismo tipo de notación.

Números fraccionarios: en la pestaña *Operaciones*, se puede escoger el símbolo $\frac{\square}{\square}$ e introducir el numerador y el denominador de una fracción. En caso de necesitar paréntesis grandes que abarquen toda la fracción, se emplearán los que aparecen en *Operaciones* $(\square)$.

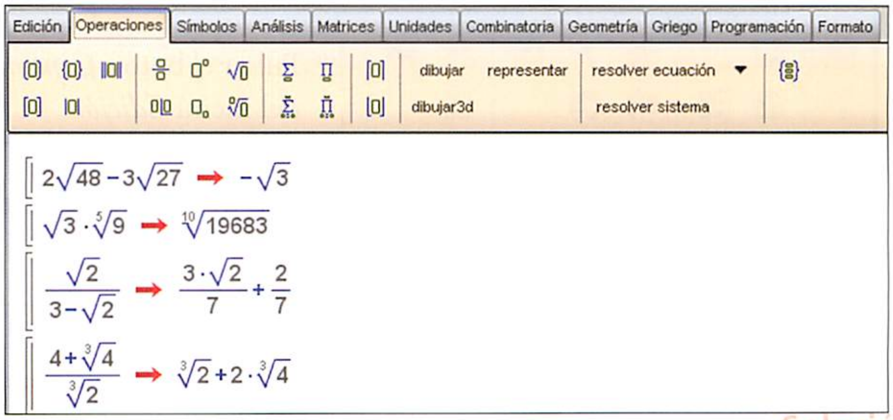
Potencias y raíces: en el menú *Operaciones* se encuentra el símbolo $\square^{\square}$, que permite introducir la base y el exponente de una potencia, y los símbolos $\sqrt{\square}$ y $\sqrt[\square]{\square}$, que nos facilitan las operaciones con radicales, la racionalización y la extracción de factores fuera de la raíz.

Logaritmos: la función **log**(*argumento, base*) nos calcula el $\log_{base}$(*argumento*). En el caso del logaritmo decimal bastará con poner **log**(*argumento*) y en el neperiano, **ln**(*argumento*). El número *e* se puede encontrar en la pestaña *Símbolos* ***e***.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resuelve las siguientes operaciones con radicales:

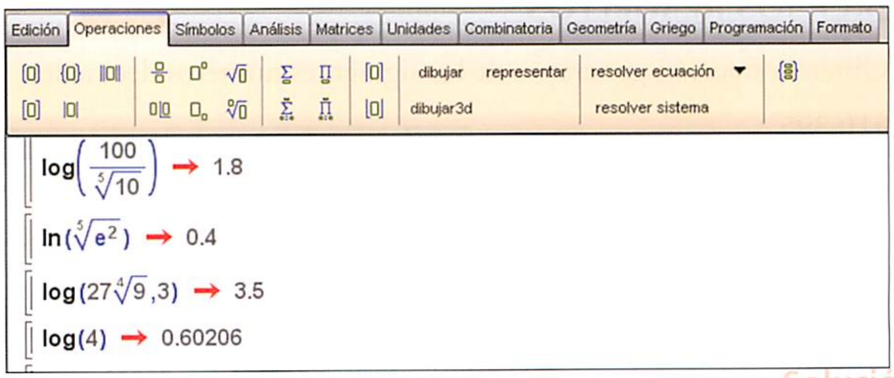
a) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$ *b)* $\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{9}$ *c)* $\dfrac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$ *d)* $\dfrac{4 + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}$



Solución

2. Halla los logaritmos.

a) $\log\left(\dfrac{100}{\sqrt[5]{10}}\right)$ *b)* $\ln\left(\sqrt[5]{e^2}\right)$ *c)* $\log_3\left(27\sqrt[4]{9}\right)$ *d)* $\log(4)$

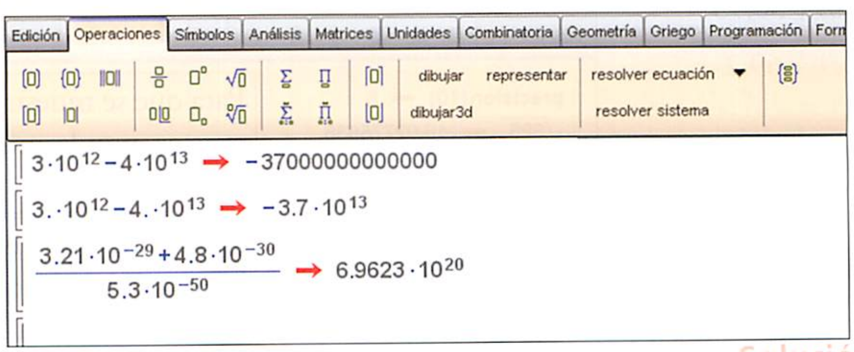


Solución

3. Opera y expresa en notación científica.

a) $3 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{13}$ (resultado desarrollado y en notación científica)

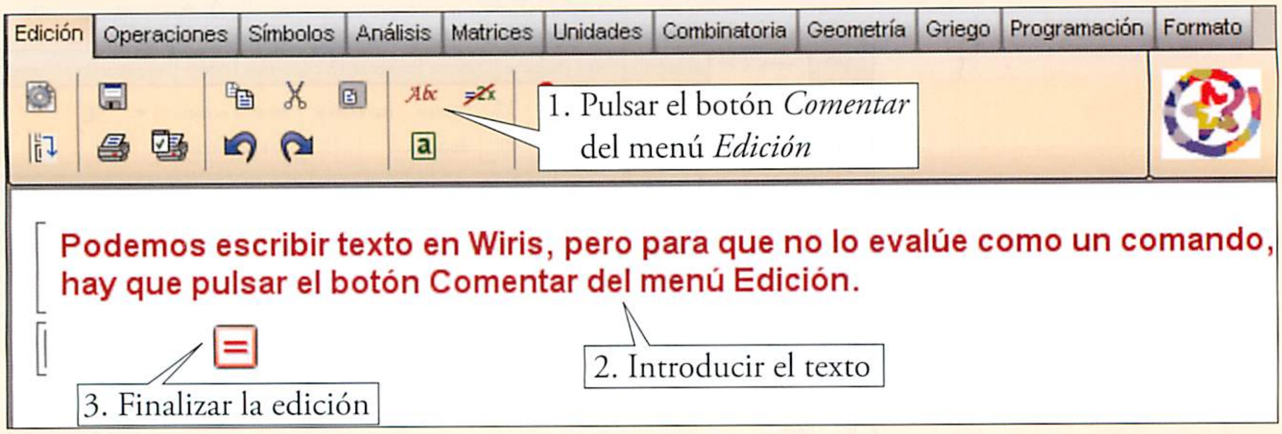
b) $\dfrac{3{,}21 \cdot 10^{-29} + 4{,}8 \cdot 10^{-30}}{5{,}3 \cdot 10^{-50}}$



Solución

Introducción de texto

Para editar texto no evaluable y no comandos (aparecerá en rojo) se debe escoger el menú *Edición* y pulsar el botón Abc. Para indicar que dejamos de editar texto, pulsaremos =.



Comandos

racional(*número decimal exacto*): calcula la fracción irreducible correspondiente a un decimal exacto.

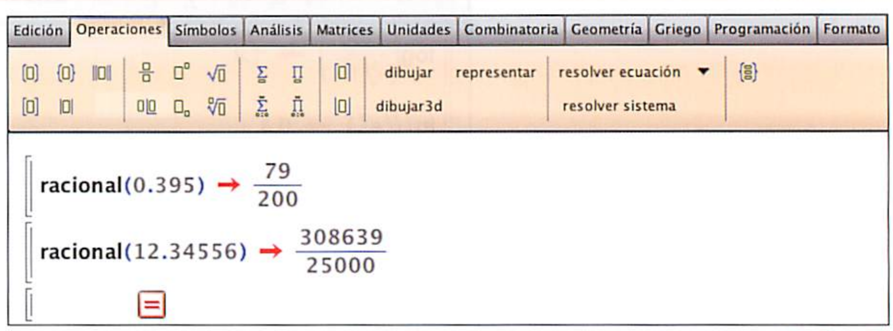
precisión(*número*): fija el número de cifras significativas (por defecto 5).

EJERCICIOS RESUELTOS

4. Obtén la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a) 0,395

b) 12,34556



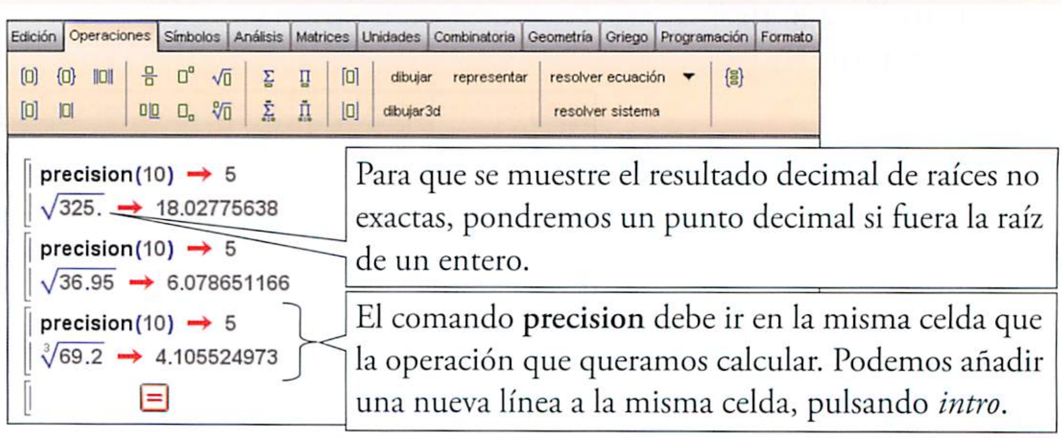
Solución

5. Calcula las siguientes raíces con 10 cifras significativas:

a) $\sqrt{325}$

b) $\sqrt{36,95}$

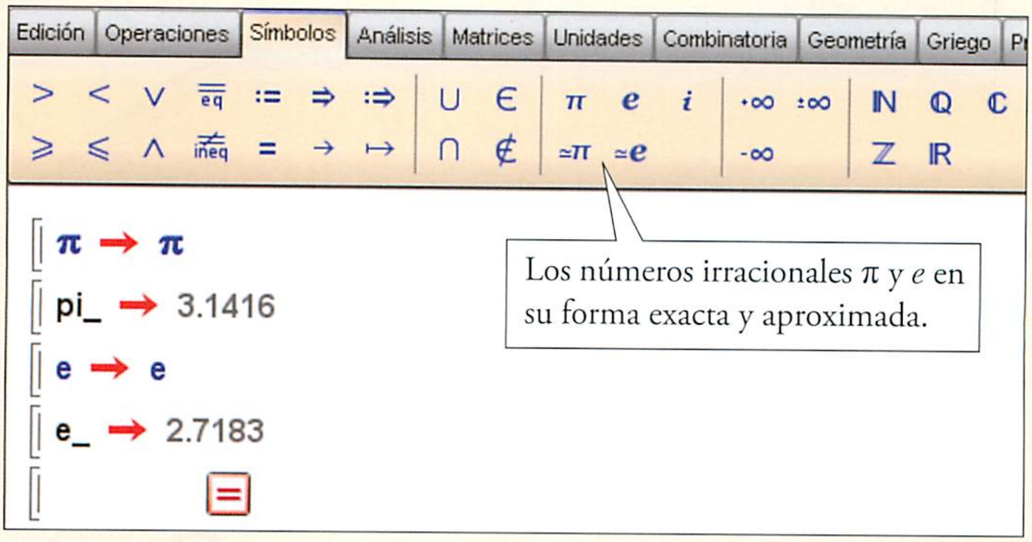
c) $\sqrt[3]{69,2}$



Solución

Símbolos

En la pestaña de símbolos encontramos dos de los números irracionales más empleados, π y e. Ambos con valor exacto, empleados de forma simbólica, y también de forma aproximada, empleando su valor decimal redondeado al número de cifras decimales que deseemos (5 cifras significativas por defecto).



EJERCICIOS

1. Realiza las siguientes operaciones con radicales y expresa el resultado de la forma más simplificada. Calcúlalo después con 10 cifras de precisión.

a) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \frac{3}{4}\sqrt{147}$ *c)* $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^4$

b) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$ *d)* $\left(\sqrt{\sqrt[4]{16}}\right)^3\cdot\sqrt{2}$

2. ¿De qué fracción provienen los siguientes números decimales?

a) 4,56 *b)* 56,2 *c)* 3,987

3. Pasa a decimal las siguientes fracciones. Obtén 5 cifras decimales y clasifica el decimal resultante.

a) $\frac{77}{90}$ *b)* $\frac{143}{25}$ *c)* $\frac{25}{21}$

4. Resuelve las siguientes raíces con 5 cifras significativas en el resultado:

a) $\sqrt{65{,}12}$ *c)* $\sqrt[3]{123\,456}$ *d)* $\sqrt[4]{9\,876{,}564}$

5. Calcula los siguientes logaritmos y exprésalos en forma de fracción si los resultados son decimales exactos o con 8 cifras de precisión si no son exactos:

a) $\log_4\sqrt[5]{16}$ *b)* $\ln\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^{-2}}}$ *c)* $\log 600$ *d)* $\log_2\left(\dfrac{32}{\sqrt[5]{4}}\right)$

6. Extrae factores fuera de la raíz.

a) $\sqrt[3]{768\,000}$ *b)* $\sqrt{5\,336\,100}$

7. Obtén el número que corresponde a las siguientes expresiones en notación científica:

a) $1{,}2\cdot 10^5$ *b)* $2{,}31\cdot 10^{-4}$

8. Realiza las siguientes operaciones en notación científica:

a) $1{,}26\cdot 10^{40} + 2{,}16\cdot 10^{38}$

b) $\left(3{,}3\cdot 10^{15}\right)\cdot\left(2{,}5\cdot 10^{-28}\right)$

c) $\left(4{,}07\cdot 10^{15}\right):\left(9{,}16\cdot 10^{-30}\right)$

d) $9{,}87\cdot 10^{25} - 6{,}87\cdot 10^{27}$

9. a) Halla con 12 dígitos de precisión el número π y el número e.

b) Obtén la fracción generatriz de dichas aproximaciones.

10. Opera de forma aproximada con raíces.

a) $2\sqrt{23} - \sqrt{11}$ *b)* $-\sqrt{30} - 2\sqrt{21} + 5\sqrt{10}$