MATEMÁTICAS

4ºA de ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

ÍNDICE

NÚMEROS. ÁLGEBRA

GEOMETRÍA

FUNCIONES Y ESTADÍSTICA

MATEMÁTICAS: 4ºA ESO
Capítulo 1:
Números reales

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti

Revisor: Javier Rodrigo y María Molero

Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Números reales. 4ºA de ESO

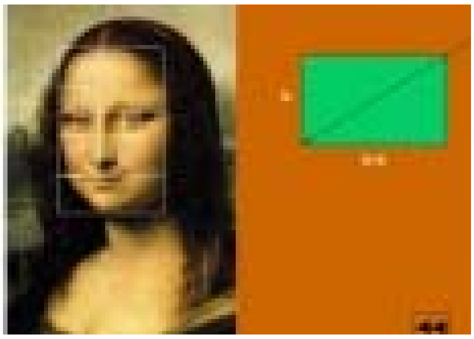
Índice

Resumen

Ya conoces los números naturales, los números enteros y los números racionales. En este capítulo vamos a estudiar los números reales que están formados por los números racionales y los irracionales.

Con algunos números reales irracionales ya te habías encontrado, como con $\sqrt{2}$, o con π… Pero hay muchos, muchos más. Hay muchos más números irracionales que racionales. Y te preguntarás, ¿cómo se puede decir eso si son infinitos? Resulta que hay unos infinitos más grandes que otros. Al infinito de los números naturales se le denomina "*infinito numerable*". El infinito de los números enteros y de los números racionales también es "*infinito numerable*", pero el de los números reales ya no es numerable, es mucho mayor, se le denomina "*la potencia del continuo*".

El número de oro en la Gioconda



Una de las propiedades más importantes de los números reales es su relación con los puntos de una recta, por lo que aprenderemos a representarlos en la recta "*real*" en la que no dejan "agujeros".

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Números reales. 4ºA de ESO

En este primer capítulo vamos a repasar muchas cosas que ya conoces, como las operaciones con los números, representar los números en una recta, las potencias… Si todo eso lo dominas suficientemente, lo mejor es que pases muy deprisa por él, y dediques tu tiempo a otros capítulos que te resulten más nuevos. Sin embargo, seguro que hay pequeños detalles que sí pueden resultarte nuevos, como por ejemplo que los números irracionales, junto con los números racionales forman el conjunto de los *números reales*, y que a cada número real le corresponde un punto de la recta (propiedad que ya tenían los números racionales) y a cada punto de la recta le corresponde un número real. Por eso, a la recta numérica la vamos a llamar *recta real*.

Empezamos con un problema para que midas lo que recuerdas sobre operaciones con fracciones:

Actividades propuestas

1. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

1.1. Operaciones con números enteros, fracciones y decimales

Operaciones con números enteros

Recuerda que:

Los números **naturales** son: $\mathbb{N}$ **= {1, 2, 3….}**.

Existen ocasiones de la vida cotidiana en las que es preciso usar números diferentes de los números naturales. Fíjate en estos ejemplos:

Ejemplos:

- Si se tienen 20 € y se gastan 30 euros, se tendrá una deuda de 10 euros, es decir –10 €.
- Cuando hace mucho frío, por ejemplo 5 grados bajo cero, se indica diciendo que hace –5 ºC.
- Al bajar en ascensor al sótano 3, has bajado al piso –3.

Los **números enteros** son una ampliación de los números **naturales** ($\mathbb{N}$). Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5… Los enteros **negativos** van precedidos del signo –: –1, –2, –3… El **cero** es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ **= {…–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3…}.**

Recuerda que:

Para **sumar** (o restar) números enteros podemos sumar por un lado todos los números enteros positivos, y los negativos por otro, restando el resultado.

Ejemplo:

Si *a, b* y *c* son números enteros entonces:

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Para **multiplicar** o dividir números enteros se tiene en cuenta la regla de los signos.

Ejemplo:

(+5) · (+4) = +20   (–3) · (–5) = +15   (+5) · (–4) = –20   (–6) · (+5) = –30

Actividades propuestas

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) +8 + (–1) · (+6)   b) –6 + (–7) : (+7)   c) +28 – (–36) : (–9–9)

d) +11*ab* + (+7) · (+6*ab* – 8*ab*)   e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$ f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]

3. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20   b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5)   d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

Operaciones con fracciones

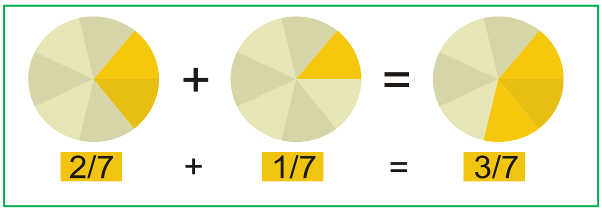
Recuerda que:

Una ***fracción*** es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto *m* como *n* son números enteros. Para referirnos a ella decimos *"m partido por n"*; *m* recibe el nombre de ***numerador*** y *n* el de ***denominador***.

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de **fracciones propias.**

Para **sumar** o restar fracciones que tienen **el mismo denominador** se realiza la suma, o la resta, de los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

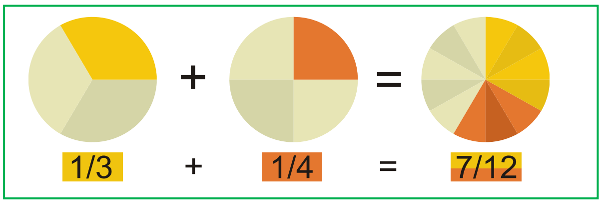
Para sumar o restar fracciones con **distinto denominador**, se reducen a común denominador, buscando el mínimo común múltiplo de los denominadores.



Ejemplos:

a) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$



Los denominadores son diferentes, 3 y 4. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 3 nos da 4 y al hacerlo entre 4 obtenemos 3.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Actividades propuestas

4. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

5. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Operaciones con expresiones decimales

Una **expresión decimal** consta de dos partes: su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma.

Observa que:

La coma se puede escribir arriba: 3'5, o abajo: 3,5, e incluso en Estados Unidos se utiliza un punto: 3.5. En este capítulo vamos a escribir la coma abajo.

Para **sumar o restar** expresiones decimales, basta conseguir que tengan el mismo número de cifras decimales.

Ejemplo:

a) 24,7 + 83,15 – 0,05 = 24,70 + 83,15 – 0,05 = 107, 80 b) 53,39 – 56 + 0,06 = 53,45 – 56,00 = –2,55

Para **multiplicar** dos expresiones decimales, se multiplican ignorando la coma que posee cada una de ellas. Al resultado de ese producto se le pone una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Ejemplo:

$$5{,}7a \cdot 3{,}2a \cdot 7{,}14a = 130{,}2336a^3$$

Para **dividir** expresiones decimales igualamos el número de cifras decimales de ambos números, y luego dividimos.

Ejemplo:

$$\frac{9{,}3}{4'81}=\frac{9{,}30}{4'81}=\frac{930}{481}=1{,}9$$

Actividades propuestas

6. Realiza las operaciones:

a) $31{,}3+5{,}97$ b) $3{,}52\cdot 6{,}7$ c) $11{,}51-4{,}8$ d) $19{,}1-7{,}35$

e) $4{,}32+32{,}8+8{,}224$ f) $46{,}77-15{,}6+2{,}3$ g) $1{,}16\cdot 3{,}52$ h) $3{,}2\cdot 5{,}1\cdot 1{,}4$

i) $2{,}3\cdot 4{,}11\cdot 3{,}5$ j) $4\cdot(3{,}01+2{,}4)$ k) $5{,}3\cdot(12+3{,}14)$ l) $3{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Números racionales. Fracciones y expresiones decimales

Toda expresión decimal exacta, o periódica, se puede poner como fracción.

Una expresión **decimal exacta** se convierte en la fracción cuyo numerador coincide con el número decimal, tras eliminar la coma, y el denominador es el número 1 seguido de tantos ceros como cifras tenía la parte decimal del número en cuestión.

Ejemplo:

$$93'15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$$

Para escribir en forma de fracción una expresión **decimal periódica**, como por ejemplo N = 1,725252525…, tenemos que conseguir dos números con la misma parte decimal para que al restar desaparezcan los decimales:

$$N = 1,7252525\ldots$$
$$1000N = 1725,2525\ldots$$
$$10N = 17,2525\ldots$$
$$Si\ restamos: 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Para ello multiplicamos a N de forma que la coma quede después del primer periodo, en este caso después de 1725. También multiplicamos a N de manera que la coma quede al principio del primer periodo, en este caso detrás de 17. Ahora 1000N y 10N tienen la misma parte decimal (infinita) que si restamos desaparece, y podemos despejar N.

Actividades propuestas

7. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:

a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23; d) 2,353535…..

e) 87,2365656565….; f) 0,9999…..; g) 26,5735735735…..

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta, o periódica.

Recuerda que:

Si el denominador (de la fracción irreducible) sólo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 su expresión decimal es exacta.

Ejemplo:

- $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0,025;\ ya\ que\ \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, y esto es general ya que siempre habrá una potencia de 10 que sea múltiplo del denominador si éste sólo contiene doses o cincos. Fíjate que el número de decimales es el mayor de los exponentes de 2 y 5.

Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Si dividimos 1 entre 23 obtenemos un primer resto que es 10, luego otro que es 8 y seguimos, pero, ¿se repetirá alguna vez el resto y por lo tanto las cifras del cociente? La respuesta es que sí, seguro que sí, los restos son siempre menores que el divisor, en este caso del 1 al 22, si yo obtengo 22 restos distintos (como es el caso) al sacar uno más ¡tiene que repetirse!, es el llamado *Principio del Palomar*. Y a partir de ahí los valores del cociente se repiten. Por lo tanto la expresión decimal es periódica y el número de cifras del periodo es como máximo una unidad inferior al denominador (no siempre ocurre esto pero 1/23 tiene un periodo de 22 cifras, 1/97 lo tiene de 96 cifras, sin embargo 1/37 tiene un periodo de sólo 3 cifras.

Se llaman **números racionales** a aquellos cuya expresión decimal es finita o periódica, y se les representa por $\mathbf{Q}$. Acabamos de ver que se pueden escribir en forma de fracción por lo que se puede definir el conjunto de los números racionales como:

$$\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

¿Por qué imponemos que el denominador sea distinto de cero? Observa que no tiene sentido una fracción de denominador 0.

Actividades propuestas

8. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.

a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11

9. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

1.3. Números irracionales. Expresión decimal de los números irracionales

Existen otros números cuya expresión decimal es infinita no periódica. Ya conoces algunos: π, $\sqrt{2}$... Cuando los griegos demostraron que existían números como $\sqrt{2}$, o como el número de oro, que no se podían poner en forma de fracción y que tenían, por tanto, infinitas cifras decimales no periódicas, les pareció algo insólito. Por eso estos números recibieron ese extraño nombre de "*irracionales*". No lo podían entender dentro de su filosofía. Lo interesante es que existe una longitud que mide exactamente $\sqrt{2}$, que es la diagonal de cuadrado de lado 1, o la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1.

El método para demostrar que $\sqrt{2}$ no se puede escribir en forma de fracción se denomina "reducción al absurdo" y consiste en suponer que sí se puede, y llegar a una contradicción. Este procedimiento sirve igual para **todas las raíces no exactas**, como con $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$...

Pero no vale para todos los irracionales. Para demostrar que π es un número irracional hay que estudiar mucho. Está relacionado con el interesante problema de la *cuadratura del círculo*. Fue demostrado a finales del siglo XVIII por Lambert. Hasta ese momento todavía se seguían calculando decimales para encontrar un periodo que no tiene.

Estos números cuya expresión decimal es infinita y no periódica se denominan **números irracionales**.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Se llaman **números reales** al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales.

Con estos números tenemos resuelto el problema de poder medir cualquier longitud. Esta propiedad de los números reales se conoce con el nombre de *completitud*.

A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Observa que también a cada número racional le corresponde un punto de la recta, pero no al contrario, pues $\sqrt{2}$ es un punto de la recta que no es racional.

Actividades propuestas

10. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1,4, pues $(1{,}4)^2$ es distinto de 2; no 1,41 pues $(1{,}41)^2$ es distinto de 2; ni 1,414, pues $(1{,}414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $(\sqrt{2})^2 = 2$.

11. Halla la expresión decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

1.4. Distintos tipos de números

Ya conoces distintos tipos de números:

Naturales ➔ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Son los números que se usan para contar y ordenar. El 0 no suele considerarse un número natural.

Notación:

$\in$ significa "pertenece a"

$\cup$ significa "unión"

$\subset$ significa "incluido en"

$\cap$ significa "intersección"

Enteros ➔ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Son los números naturales, sus opuestos y el cero. No tienen parte decimal, de ahí su nombre. Incluyen a los Naturales.

A los números que se pueden expresar en forma de cociente de dos números enteros se les denomina números **racionales** y se les representa por la letra $\mathbf{Q}$. Por tanto

Racionales ➔ $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Los números racionales incluyen a los Enteros.

También contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0,12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7,01252525…) pues pueden escribirse en forma de fracción.

Los números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \pi \ldots$ son los números **irracionales**, y tienen una expresión decimal infinita no periódica. Junto con los números racionales forman el conjunto de los números reales. Por tanto

Irracionales ➔ $\mathbf{I} = \Re - \mathbf{Q}$.

Son números irracionales aquellos números que **no** pueden ponerse como fracción de números

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

enteros. Hay más de lo que podría parecer (de hecho hay más que racionales ¡!), son todos aquellos que tienen una expresión decimal que no es exacta ni periódica, es decir, **infinitas cifras decimales y sin periodo.** Ejemplos: 17,6766766676… que me lo acabo de inventar o 0,1234567891011… que se lo inventó Carmichael. Invéntate uno, busca en Internet y si no lo encuentras, pues es tuyo (por ahora ☺)

Reales ➔ $\Re = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Es la unión de los números racionales y de los irracionales.

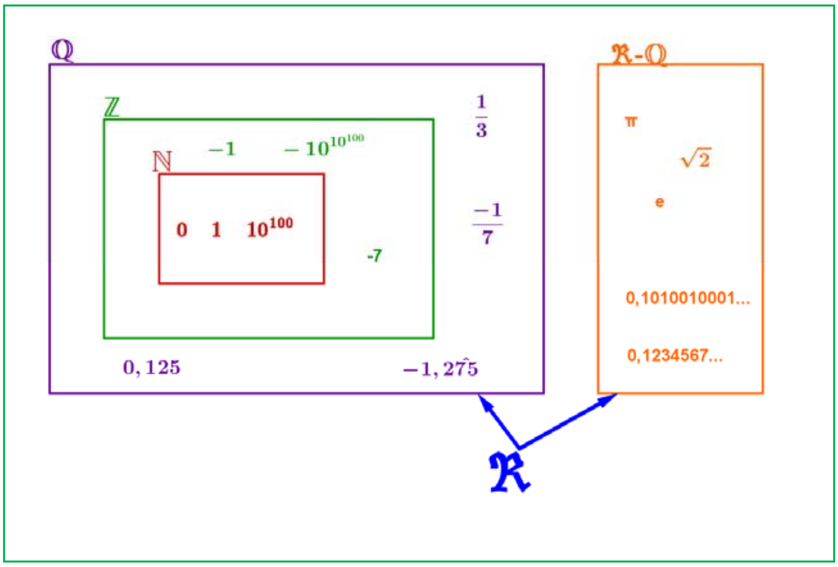
Tenemos por tanto que:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \Re.$$

$$\mathbf{I} \subset \Re$$

¿Son estos todos los números?

No, los reales forman parte de un conjunto más amplio que es el de los Números Complejos $\mathbf{C}$ (en 1º de bachillerato se estudian en la opción de Ciencias).

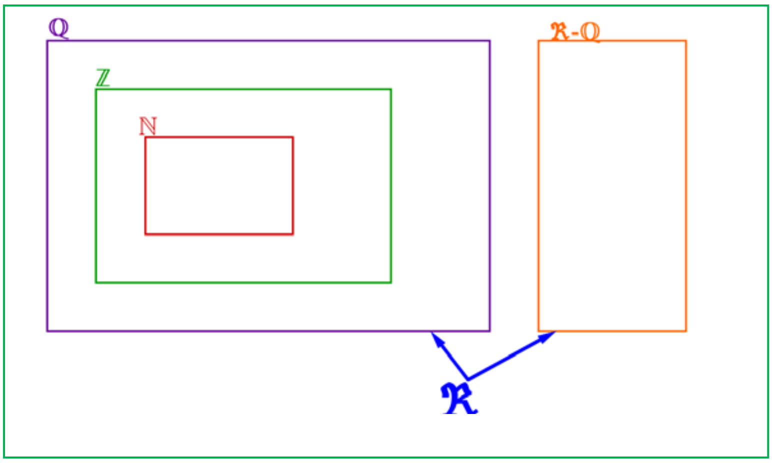


Actividades propuestas

12. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	N	Z	Q	I	$\Re$
−7,63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0,121212…					
π					
1/2					
1,99999…					

13. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:



14. ¿Puedes demostrar que 4,99999… = 5?, ¿cuánto vale 2,5999…? Escríbelos en forma de fracción.

15. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{53}$?

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

2. POTENCIAS

2.1. Repaso de las potencias de exponente natural

Recuerda que:

Para calcular la **potencia** de exponente un número natural y de base un número cualquiera se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplos:

a) $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$

b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

c) $(1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$

d) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

$$(-2)^2 = +4$$
$$(-2)^3 = -8$$

Ejemplos:

$$(-5)^2 = +25$$
$$(-5)^3 = -125$$

Actividades propuestas

16. Calcula:

a) $1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

2.2. Potencias de exponente fraccionario

Si el exponente es, por ejemplo, –2, no sabemos multiplicar algo *menos dos* veces. Tampoco sabemos multiplicar algo por si mismo *cero* veces. Ahora la definición anterior no nos sirve. Las definiciones que se van a dar van a mantener las propiedades que conocemos de las operaciones con potencias de exponente natural, que van a seguir siendo válidas.

Se define: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ y se define $a^0 = 1$

En efecto, $\dfrac{a^3}{a^3} = 1$ y $\dfrac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define $a^0 = 1$.

Recuerda

Siempre se verifica que:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$
$$c^m : c^n = c^{m-n}$$
$$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$$

También, $\dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{1}{a^2}$ y $\dfrac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

17. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\dfrac{\left(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4\right)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

2.3. Operaciones con radicales

La raíz enésima de un número *a* es un número *x* que al elevarlo a *n*, da como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

La **raíz cuadrada** de un número real no negativo *a* es un *único* número no negativo *x* que elevado al cuadrado nos da *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a \geq 0,\ x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos. Sin embargo $\sqrt[3]{-1} = -1$ sí existe, pues $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Observa que: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$, por lo que se define:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Ejemplo:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Podemos **operar** con radicales utilizando las mismas propiedades de las potencias de exponente fraccionario.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \dfrac{2}{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$

Recuerda

Hay operaciones con radicales que **NO** están permitidas.

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36}$ que es distinto de: $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$.

- $\dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \dfrac{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

En ocasiones es posible **extraer factores** de un radical.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3\cdot x^2} = x\cdot\sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{2^4\cdot 3^3\cdot 5} = \sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 5} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{3\cdot 5} = 12\cdot\sqrt{15}$

Actividades propuestas

19. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

20. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8000}$ factorizando previamente los radicandos

21. Calcula y simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

22. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

23. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

2.4. Notación científica

Un número expresado en **notación científica** está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo n un número entero positivo o negativo.

$$\boldsymbol{a\cdot 10^n \quad \text{siendo} \quad 1 \le a \le 9}$$

Si el exponente $\boldsymbol{n}$ es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente $\boldsymbol{n}$ es negativo para expresar números pequeños

Ejemplo:

- $7810000000000 = 7,81\cdot 10^{12}$ $0,000000000038 = 3,8\cdot 10^{-11}$
- $500.000 = 5\cdot 10^5$ $0,00002 = 2\cdot 10^{-5}$
- Hay galaxias que están a 200.000.000.000.000 km de nosotros, y lo escribimos $2\cdot 10^{14}$
- La masa de un electrón es aproximadamente de 0,000000000000000000000000000911 gramos, que se escribe como $9,11\cdot 10^{-28}$

Actividades resueltas

- En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de lo grande que es, podemos usar la notación científica.

Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

64 es $9 \cdot 10^{18}$, con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 92233720368547758089223372036854775808 que da un poco de mareo.

- Escribe en notación científica: 2^{16}, 2^{32} y 2^{64}

$2^{16} = 65536 \approx 6{,}5 \cdot 10^4$

$2^{32} = 4294967296 \approx 4{,}29 \cdot 10^9$

$2^{64} = 18446744073709551616 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$

Actividades propuestas

24. Escribe en notación científica:

a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0,0000001 e) 0,00000046

Operaciones con notación científica

Para realizar **sumas y restas**, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

Ejemplo:

- Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2{,}3 \cdot 10^6 - 6{,}5 \cdot 10^5$ expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso 10^5: $4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6{,}5 \cdot 10^5$. Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4000 + 23 - 6{,}5) = 4016{,}5 \cdot 10^5 = 4{,}0165 \cdot 10^8$

El **producto** (o el **cociente**) de dos expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar (o de dividir) los números decimales y sumar (o restar) los exponentes de base 10.

Ejemplo:

- $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}36 \cdot 10^6 = (2{,}5 \cdot 1{,}36) \cdot 10^{5+6} = 3{,}4 \cdot 10^{11}$
- $5{,}4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5{,}4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1{,}35 \cdot 10^2$
- Para hacer el cociente para calcular 2^{63} dividiendo 2^{64} entre 2 en notación científica:

  $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1{,}8 \cdot 10^{19} / 2 = 0{,}9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

25. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.

26. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

Actividades propuestas

27. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $0{,}000481 + 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5{,}4 \cdot 10^6 + 7{,}2 \cdot 10^5$

c) $(2{,}9 \cdot 10^5) \cdot (5{,}7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3{,}8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^6) \cdot (8{,}1 \cdot 10^{-4})$

e) $(4{,}8 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6{,}28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2{,}9 \cdot 10^2) : (3{,}98 \cdot 10^{-7})$

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

3. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES

3.1. Representación de números enteros y racionales

Recuerda que:

Para representar un número entero en la recta numérica se traza una recta horizontal en la que se marca el cero, que se denomina origen, y se marca el 1. Se divide la recta en segmentos iguales, de longitud 1. Se representan los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

De esta forma quedan ordenados los números enteros. Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado es menor.

Ejemplo 6:

- Represena en una recta numérica y ordena los números enteros siguientes:

–2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 y 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Orden de menor a mayor: –7 < –3 < –2 < –1 < 0 < 2 < 4 < 8.

Orden de mayor a menor: 8 > 4 > 2 > 0 > –1 > –2 > –3 > –7.

Actividades propuestas

28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –9, 7, 6, –5, 9, –2, –1, 1 y 0.

29. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de mayor a menor: +1, –4, –8, +9, +4, –6, –7

30. *Pitágoras* vivió entre el 569 a. C. y el 475 años a. C. y *Gauss* entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de siglos hay entre ambas fechas?

31. Representa gráficamente y ordena en sentido creciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros: 10, −4, −7, 5, −8, 7, −6, 0, 8.

Para representar una fracción en la recta numérica:

Distinguimos entre fracciones propias e impropias.

En cualquier caso debemos recordar cómo se divide un segmento en partes iguales.

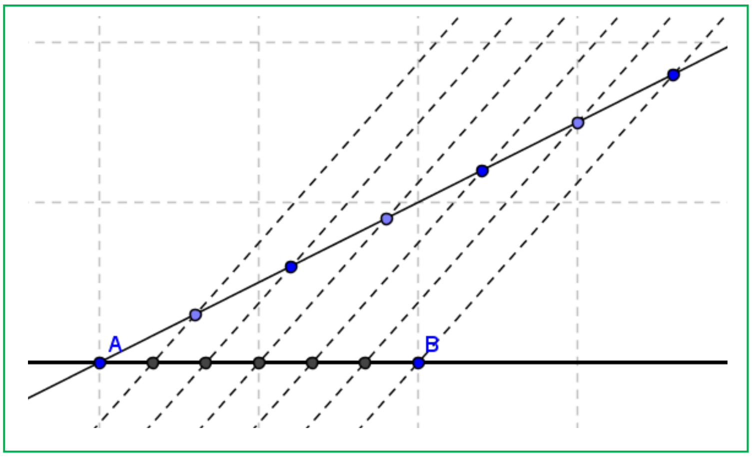
Actividades resueltas

- Si la fracción es **propia** (numerador menor que el denominador, valor menor que 1), por ejemplo $\frac{5}{6}$ bastará con dividir la primera unidad en 6 partes iguales y tomar 5. En caso de ser negativa contaremos hacia la izquierda. (Ver figura)

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

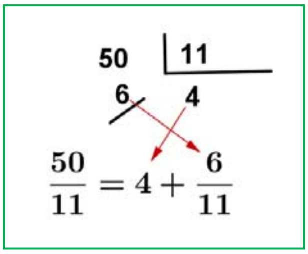
Dividir un segmento en parte iguales

Para dividir el segmento AB en por ejemplo 6 partes iguales, trazamos por A una línea auxiliar oblicua cualquiera, abrimos el compás una abertura cualquiera y marcamos 6 puntos en la recta anterior a distancia igual. Unimos el último punto con B y trazamos paralelas que pasen por los puntos intermedios de la recta oblicua. Por el *Teorema de Tales*, el segmento AB ha quedado dividido en 6 partes iguales. Para representar 5/6, tomamos 5 de esas partes.



Normalmente no te exigirán que lo hagas tan exacto, lo harás de forma aproximada, pero ten cuidado en que las partes parezcan iguales.

- Si la fracción es **impropia** (numerador mayor que denominador y por tanto valor mayor que 1) haremos la división entera (sin decimales) quedándonos con el cociente y el resto. Esto nos permite ponerla en forma mixta (suma de un entero y una fracción propia). Así por ejemplo: $\frac{50}{11}=4+\frac{6}{11}$ ya que al dividir 50 entre 11 obtenemos 4 de cociente y 6 de resto. *El cociente es la parte entera y el resto el numerador de la fracción propia*.

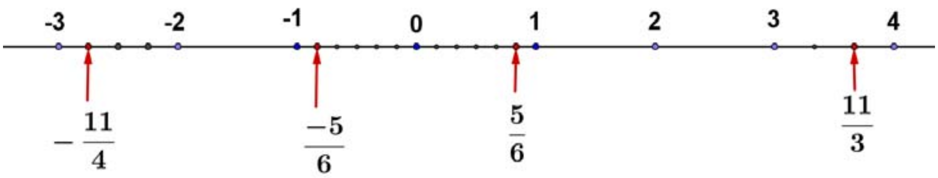


Para representarla sólo nos tenemos que ir donde dice la parte entera (4) y la unidad siguiente (la que va del 4 al 5) la dividimos en 11 partes iguales y tomamos 6.

- Otro ejemplo: $\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}$, pues la división da 2 de cociente y 3 de resto.

Nos vamos al 2, dividimos la unidad siguiente (del 2 al 3) en 7 partes iguales y tomamos 3.

- **En caso de ser negativa**: $-\frac{11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, se hará igual pero contando hacia la izquierda. Nos vamos al –2, la unidad que va del –2 al –3 se divide en 4 partes y tomamos 3 (pero contando del –2 al –3 ¡claro!).



Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

32. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números: $\frac{7}{6}; \frac{-17}{4}; 2,375; -3,\overset{\frown}{6}$

33. Representa en la recta numérica 6,5; 6,2; 3,76; 8,43; 8,48; 8,51 y 8,38.

34. Ordena los siguientes números de mayor a menor: +1,47; –4,32; –4,8; +1,5; +1,409; 1,4, –4,308.

3.2. Representación en la recta real de los números reales:

Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual, si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

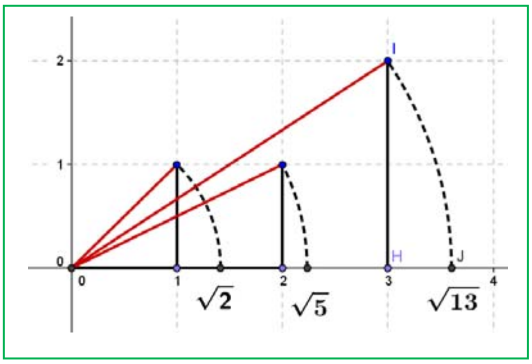
Esta segunda parte, es la propiedad más importante de los números reales y la que los distingue de los números racionales.

Veamos como representar de forma exacta **algunos** números reales:

Representación en la recta de las raíces cuadradas:

Para representar raíces cuadradas usamos el *Teorema de Pitágoras*. Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa es *h* y los catetos son *a*, *b* tenemos que $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Actividades resueltas



- Representa en la recta $\sqrt{2}$

Si *a* = *b* = 1 tenemos que $h = \sqrt{2}$. Sólo tenemos que construir un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, su hipotenusa mide $\sqrt{2}$, (la diagonal del cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$). Ahora utilizando el compás, llevamos esa distancia al eje X (ver figura).

- Representa en la recta $\sqrt{5}$

Como $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ sólo hay que construir un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1, y su hipotenusa mide $\sqrt{5}$.

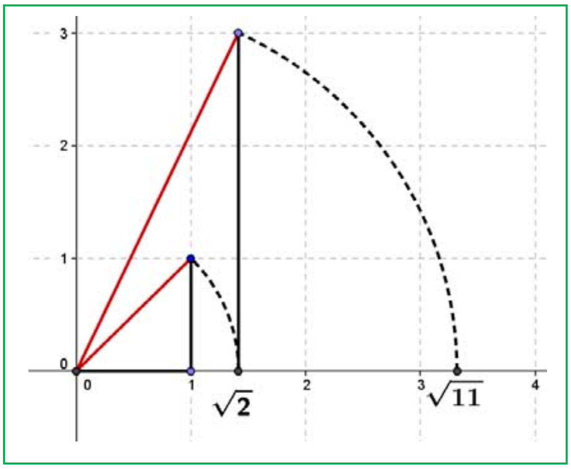
¿Has pillado el truco?, el radicando hay que expresarlo como suma de 2 cuadrados. El triángulo rectángulo tendrá como catetos esos dos números.

- Así, para representar $\sqrt{13}$, expresamos 13 como suma de 2 cuadrados: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ luego en un triángulo rectángulo de lados 3 y 2 la hipotenusa será $\sqrt{13}$.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

- ¿Pero, y si el número no puede ponerse como suma de 2 cuadrados?, por ejemplo el 11 (¡siempre complicando las cosas! ☹).

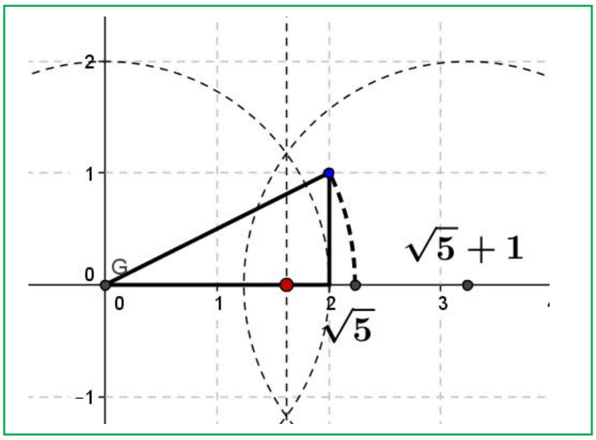
Habrá que hacerlo en 2 pasos. 11 = 2 + 9, ¿hay algún número cuyo cuadrado sea 2?, por supuesto que sí, $\sqrt{2}$. Por tanto $\sqrt{11}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+3^2}$, tenemos que hacer un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ y 3. Para ello primero se construye $\sqrt{2}$ como antes y se traza una perpendicular de longitud 3 (ver figura).



¿Pueden dibujarse ya así todas las raíces?, no. Hay algunas para las que hay que hacer más pasos ($\sqrt{7}$ por ejemplo requiere 3), pero mejor lo dejamos aquí, ¿no?

Actividades resueltas

- Representa en la recta numérica de forma exacta el número de oro $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



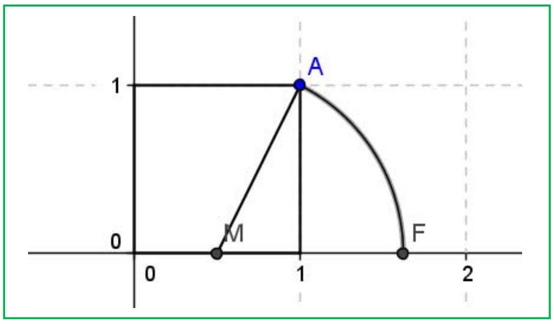
¿Has oído hablar del número de oro?

El Número de Oro (o Razón Áurea o Proporción Armónica o Divina Proporción) es igual a $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- ¿Cómo lo representamos en la recta?

Sólo hay que construir $\sqrt{5}$ como arriba, sumar 1 (trasladamos 1 unidad con el compás) y dividir entre 2 hallando el punto medio (con la mediatriz), hecho.

- Otra forma distinta:



Construimos un cuadrado de lado 1 (¿un qué?, ¡un lo que quieras!). Hallamos el punto medio del lado inferior (M) y llevamos la distancia MA con el compás al eje horizontal, OF es el número de oro.

Veamos:

$$MA=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF=\frac{1}{2}+MA=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Actividades propuestas

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

35. Busca rectángulo áureo y espiral áurea en Internet.

36. Ya de paso busca la relación entre el *Número de Oro* y la *Sucesión de Fibonacci*.

37. Busca en youtube "algo pasa con phi" y me cuentas.

Actividades propuestas

38. Representa en la recta numérica de forma exacta:

$$\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Densidad de los números reales

Los números reales son **densos**: entre cada dos números reales hay infinitos números reales en medio.

Eso es fácil de deducir, si *a*, *b* son dos números con *a* < *b* sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, es decir, la media está entre los dos números. Como esto podemos hacerlo las veces que queramos, pues de ahí el resultado.

Curiosamente los racionales son también densos en los números reales, así como los irracionales.

Actividades propuestas

39. Calcula 3 números reales que estén entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y 1.

40. Halla 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}\ y\ 1{,}5$

41. Halla 5 números irracionales que estén entre 3,14 y π

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS:

Como ya sabemos entre dos números reales hay infinitos números. Hay una notación especial para referirse a esos infinitos números que deberás dominar para éste y futuros cursos.

4.1. Intervalos. Tipos y significado

(Del lat. *intervallum*): **2.** m. Conjunto de los valores que toma una magnitud entre dos límites dados. RAE.

Definición:

Un subconjunto de $\mathfrak{R}$ es un intervalo si para cualquier par de elementos, *a* y *b*, de ese subconjunto se verifica que si $a < x < b$ entonces *x* debe pertenecer a dicho subconjunto.

Vamos a estudiar en este apartado intervalos acotados de distintos tipos: los intervalos abiertos, los intervalos cerrados y los intervalos semiabiertos (o semicerrados)

Intervalos abiertos:

Si nos queremos referir al conjunto de los números que hay entre dos valores pero sin contar los extremos, usamos un **intervalo abierto**

Ejemplo:

- Los números superiores a 2 pero menores que 7 se representan por (2, 7) y se lee "*intervalo abierto de extremos 2 y 7*". A él pertenecen infinitos números como 2,001; 3,5; 5; 6,999; … pero no son de este conjunto ni el 2 ni el 7. Eso representan los paréntesis, que entran todos los números de en medio pero no los extremos.

Ejemplo:

- Los números positivos menores que 10, se representan por (0, 10), el intervalo abierto de extremos 0 y 10. Fíjate que 0 no es positivo, por lo que no entra y el 10 no es menor que 10, por lo que tampoco entra.

Nota: No se admite poner (7, 2), ¡el menor siempre a la izquierda!

También hay que dominar la expresión de estos conjuntos usando desigualdades, prepárate:

$$(2, 7) = \{x \in \mathfrak{R} / 2 < x < 7\}.$$

Traducimos: Las llaves se utilizan para dar los elementos de un conjunto, dentro de ellas se enumeran los elementos o se da la propiedad que cumplen todos ellos. Se utiliza la *x* para denotar a un número real, la / significa "tal que" (en ocasiones se utiliza un punto y coma ";" o una raya vertical "|") y por último se dice la propiedad que cumplen mediante una doble desigualdad. Así que no te asustes, lo de arriba se lee: *los números reales tal que son mayores que 2 y menores que 7*.

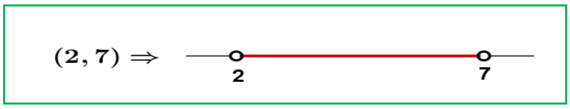
Usaremos indistintamente varias de estas nomenclaturas para que todas te resulten familiares.

Es necesario dominar este lenguaje matemático puesto que la frase en castellano puede no entenderse en otros países pero te aseguramos que eso de las llaves y la | lo entienden todos los estudiantes de matemáticas del mundo (bueno, casi todos).

El otro ejemplo: $(0, 10) = \{x \in \mathfrak{R} / 0 < x < 10\}$.

Por último la **representación gráfica**:

Se ponen **puntos sin rellenar** en los extremos y se resalta la zona intermedia.



En ocasiones también se pueden poner en el 2 y en el 7 paréntesis: “( )”, o corchetes al revés: “] [“.

Pregunta: ¿Cuál es número que está más cerca de 7, sin ser 7?

Piensa que 6,999…=7 y que entre 6,999 y 7 hay “muchos, muchísimos …” números.

Nota:

En algunos textos los intervalos abiertos se representan así:]2 , 7[lo cual tienen algunas ventajas como que los estudiantes no confundan el intervalo (3, 4) con el punto del plano (3, 4), que aseguramos que ha ocurrido (pero tú no serás uno de ellos ¿no?), o la fastidiosa necesidad de poner (2,3 ; 3,4) porque (2,3,3,4) no lo entendería ni Gauss.

Intervalos cerrados:

Igual que los abiertos pero ahora **sí** pertenecen los extremos.

Ejemplo:

- El intervalo de los números mayores o iguales que –2 pero menores o iguales que 5. Ahora el –2 y el 5 sí entran. Se hace igual pero poniendo corchetes: [–2, 5].

En forma de conjunto se escribe:

$$[-2, 5] = \{x \in \Re; -2 \leq x \leq 5\}.$$

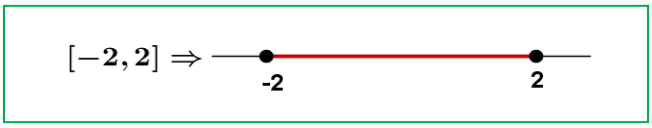
Fíjate que ahora ponemos $\leq$ que significa “*menor o igual*”.

Ejemplo:

- El intervalo de los números cuyo cuadrado no es superior a 4. Si lo piensas un poco verás que son los números entre el –2 y el 2, ambos incluidos (no superior $\Leftrightarrow$ menor o igual). Por tanto:

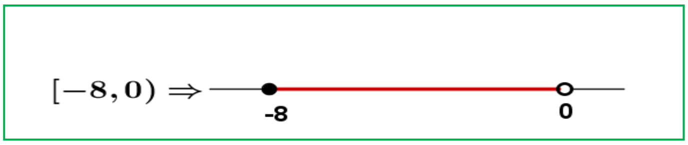
$$[-2, 2] = \{x \in \Re; -2 \leq x \leq 2\}.$$

La representación gráfica es igual pero poniendo **puntos rellenos**. En ocasiones también se puede representar gráficamente con corchetes: “[ ]”.



Intervalos semiabiertos (o semicerrados, a elegir)

Por supuesto que un intervalo puede tener un extremo abierto y otro cerrado. La notación será la misma.



Ejemplo:

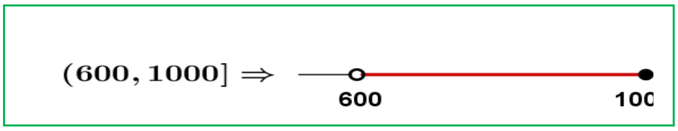
- Temperatura negativa pero no por debajo de –8 ºC:

$$[-8, 0) = \{x \in \Re; -8 \leq x < 0\}.$$

Es el intervalo cerrado a la izquierda de extremos –8 y 0.

- Números superiores a 600 pero que no excedan de 1000.

  (600, 1000] = {$x \in \Re$; $600 < x \leq 1000$}.



Es el intervalo cerrado a la derecha de extremos 600 y 1000.

4.2. Semirrectas

Muchas veces el conjunto de interés no está limitado por uno de sus extremos.

Ejemplo:

- Los números reales positivos: No hay ningún número positivo que sea el mayor. Se recurre entonces al símbolo ∞ y se escribe:

$$(0, +\infty) = \{x \in \Re \mid x > 0\}.$$

Nótese que es equivalente poner $x > 0$ que poner $0 < x$, se puede poner de ambas formas.

Ejemplo:

- Números no mayores que 5:

$$(-\infty, 5] = \{x \in \Re \mid x \leq 5\}.$$

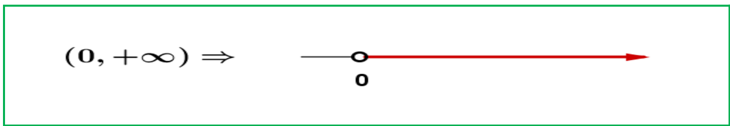
Aquí el 5 sí entra y por eso lo ponemos cerrado ("no mayor" equivale a "menor o igual")

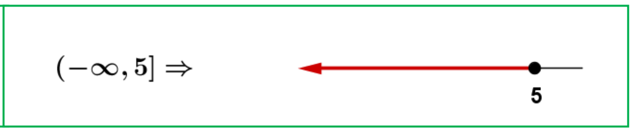
Ejemplo:

- Solución de $x > 7$:

$$(7, +\infty) = \{x \in \Re \mid x > 7\}.$$

Nota: **El extremo no acotado siempre se pone abierto**. No queremos ver esto: (7, +∞]





Las semirrectas también son intervalos. Son intervalos no acotados.

Incluso la recta real es un intervalo:

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \Re \mid -\infty < x < +\infty\} = \Re.$$

Es el único intervalo no acotado ni superiormente ni inferiormente.

Observa que con esta nomenclatura estamos diciendo que $-\infty$ y que $+\infty$ no son números reales.

4.3. Entornos

Es una forma especial de representar los intervalos abiertos.

Se define el entorno de centro a y radio r y se denota E(a, r) (otra forma usual es $E_r(a)$) como el conjunto de números que están a una **distancia de *a* menor que *r***.

E(*a*, *r*) = (*a* − *r*, *a* + *r*)

Observa que un entorno es siempre un intervalo abierto y acotado.

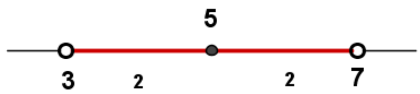
Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Con un ejemplo lo entiendes mejor:

Ejemplo:

- El entorno de centro 5 y radio 2 son los números que están de 5 a una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre 5 – 2 y 5 + 2, es decir, el intervalo (3, 7). Es como coger el compás y con centro en 5 marcar con abertura 2.

$E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$



Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

Ejemplo:

- E(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2, 6)

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

Ejemplo:

- Si tengo el intervalo abierto (3, 10), ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ = 6,5 que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

(10 – 3) : 2 = 3,5 es el radio (la mitad del ancho).

Por tanto (3, 10) = E(6,5 ; 3,5)

En general:

El intervalo (*b*, c) es el entorno $E\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-b}{2}\right)$.

Ejemplo:

- El intervalo (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2}, \frac{1-(-8)}{2}) = E(-3,5; 4,5)$.

Actividades propuestas

42. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Porcentaje superior al 15 %.
b) Edad inferior o igual a 21 años.
c) Números cuyo cubo sea superior a 27.
d) Números positivos cuya parte entera tiene 2 cifras.
e) Temperatura inferior a 24 ºC.
f) Números que estén de 2 a una distancia inferior a 3.
g) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

43. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0,001)

44. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (1, 7) b) (–5 , –1) c) (–4 , 2)

45. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales? **Pista:* 600,222333€ ¿puede ser un sueldo?

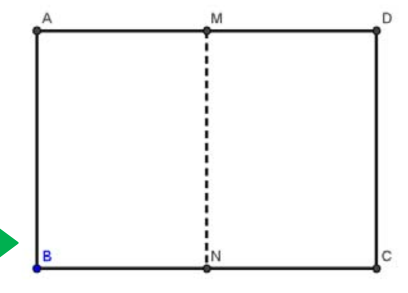
Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Folios y $\sqrt{2}$

Ya sabemos que un cuadrado de lado L tiene una diagonal que vale $\sqrt{2}$ L , veamos algo más:

La imagen representa un folio con la norma DIN 476 que es la más utilizada a nivel mundial.



Esta norma especifica que un folio DIN A0 tiene una superficie de 1 m^2 y que al partirlo por la mitad obtendremos un DIN A1 que debe ser un rectángulo semejante al anterior. Partiendo el A1 en 2 iguales obtenemos el DIN A2 , después el DIN A3 y el DIN A4 que es el más usado. Todos son semejantes a los anteriores.

¿Qué significa ser semejante?

Pues que $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AM}$, pero AM = AD/2 luego

$$AB^2=\frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB=\frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD=\sqrt{2}AB$$

Por lo tanto en los folios DIN 476:

la razón entre el largo y ancho es $\sqrt{2}$.

No queda aquí la cosa, fíjate que al partir el folio en 2 partes iguales el nuevo folio tiene el lado mayor que coincide con el lado menor del original: AB es ahora el lado mayor y antes era el menor, como AB = AD/$\sqrt{2}$ resulta que la razón de semejanza es $\sqrt{2}$. Es decir, para pasar de un folio A0 a otro A1 dividimos sus lados entre $\sqrt{2}$. Lo mismo para los siguientes.

Calculemos las dimensiones:

Para el A0 tenemos que el área es AD · AB = 1m^2

$\Rightarrow \frac{AD\cdot AD}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow AD^2=\sqrt{2}\Rightarrow AD=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}\approx$ 1,189 m;

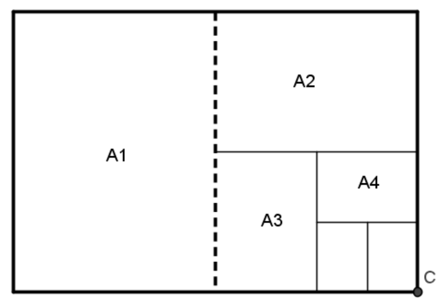
AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}\approx$ 0,841 m. Para obtener las medidas del A4 dividimos 4 veces entre $\sqrt{2}$:

Largo = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4}\approx$ 0,297 m =29,7 cm

Ancho= Largo/$\sqrt{2}\approx$ 0,210 m = 21,0 cm

Una tabla

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	118,92	84,09	10000
A1	84,09	59,46	5000
A2	59,46	44,04	2500
A3	42,04	29,83	1250
A4	29,73	21,02	625
A5	21,02	14,87	415,2



Cuestiones:

1) Comprueba los valores de la tabla anterior (hay al menos tres valores equivocados ☺)
2) ¿Cuántos folios A4 caben en un folio A0?
3) ¿Cuáles son las dimensiones del A6?, ¿y del A7?

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

El número de oro

Dividimos un segmento en dos partes de forma que si dividimos la longitud del segmento total entre la parte mayor debe de dar lo mismo que al dividir la parte mayor entre la parte menor.
Tenemos que $(a+b)/a = a/b$.

El número de Oro (o Razón Aúrea) llamado Φ (fi) es precisamente el valor de esa proporción, así:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1+\frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$$

Ya tenemos dos curiosidades:

1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

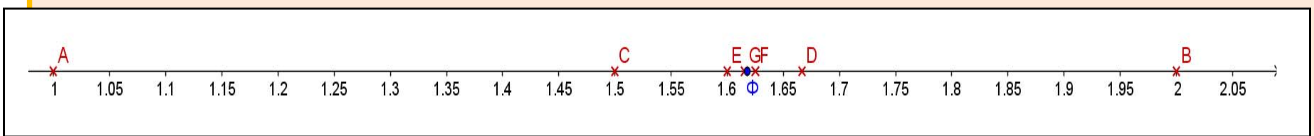
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

Donde F_n es el *n*-ésimo Número de Fibonacci. Estos números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 … donde cada término a partir del tercero se obtiene sumando los dos anteriores.

Más relaciones entre el Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci:

a) Si vamos dividiendo un número de la sucesión entre su anterior obtenemos: 1/1 =1; 2/1 =2; 3/2 =1,5; 5/3 =1,666…; 8/5 =1,6; 13/8 = 1,625



Como puede verse, nos acercamos rápidamente al valor del número de Oro, primero por debajo, después por arriba, por debajo, … alternativamente.

b) Formula de Binet:

Para calcular un número de Fibonacci, por ejemplo el que ocupa el lugar 20 hay que calcular los 19 anteriores.

Esto no tiene que ser necesariamente así, pues Binet dedujo esta fórmula, que para los autores es una de las más bonitas de las matemáticas.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Si por ejemplo sustituimos *n* por 20 obtenemos $F_{20} = 6765$.
Realmente podemos prescindir del 2º término del numerador, para $n > 3$ se hace mucho más pequeño que el primero. Por ejemplo, para $n = 6$, si hacemos $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtenemos 8,0249 que redondeado es 8, el valor correcto.

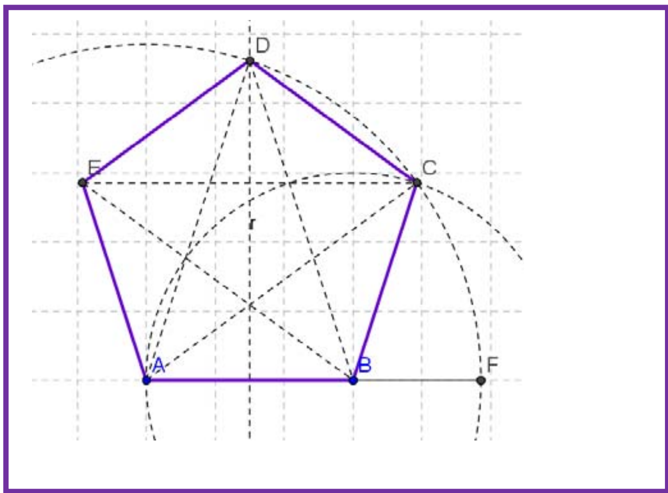
Actividades:

a) Calcula F_{31} y F_{30} con la fórmula de Binet.

b) Haz el cociente y mira si es una buena aproximación del Número de Oro.

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

El pentágono regular y el Número de Oro.



En un pentágono regular la razón entre una diagonal y el lado es Φ . Como sabemos construir Φ, la construcción de un pentágono regular es muy sencilla:

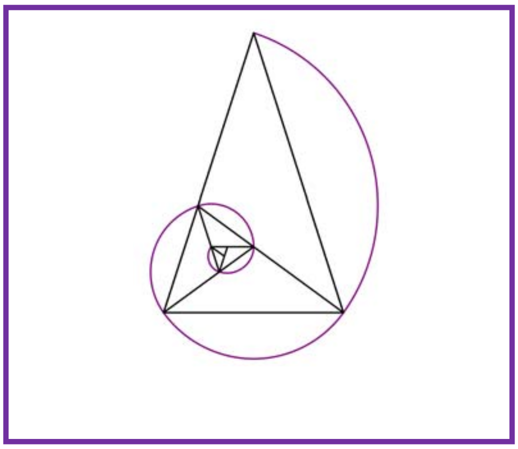
Si AB va a ser un lado de nuestro pentágono, construimos el punto F alineado con A y B que cumpla AF/AB igual a Fi (se indica cómo hacerlo en el texto).

Entonces, AB será el lado y AF la medida de la diagonal.

Trazamos la mediatriz de AB y una circunferencia de centro A y radio AF. Se cortan en D que es un vértice del pentágono.

Trazamos ahora una circunferencia con centro B y radio AB, se corta con la anterior en C que es otro vértice del pentágono. Sólo queda hallar E que es muy fácil.

El pentágono regular con sus diagonales se conoce como “Pentagrama Místico” y parece ser que volvía loquitos a los pitagóricos, en él el número de Oro aparece de forma desmesurada.



Del Pentagrama hemos sacado este triángulo, llamado Triángulo Áureo que permite obtener más triángulos áureos haciendo la bisectriz en uno de los ángulos iguales y formar esta espiral. Esta espiral es parecida a la Espiral Áurea, a la de *Fibonacci* y a la espiral logarítmica que es la que aparece en: galaxias, huracanes, conchas, girasoles …

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

El ajedrez

Cuenta la leyenda que cuando el inventor del ajedrez le mostró este juego al rey Shirham de la India, éste se entusiasmó tanto que le ofreció regalarle todo lo que quisiera.

El inventor pidió un grano de trigo para la primera casilla del juego, dos para la segunda, 4 para la tercera, y así duplicando la cantidad en cada casilla.

Al rey le pareció una petición modesta, pero… como se puede comprobar ese número de granos dan poco más de 15 billones de toneladas métricas lo que corresponde a la producción mundial de trigo de 21.685 años.

¡Imposible que el rey tuviera tanto trigo!

¡Te gusta hacer magia!

Puedes hacer este juego con tus amigos. Para hacerlo necesitas papel y lápiz, o mejor, una calculadora, o todavía mejor, una hoja de cálculo.

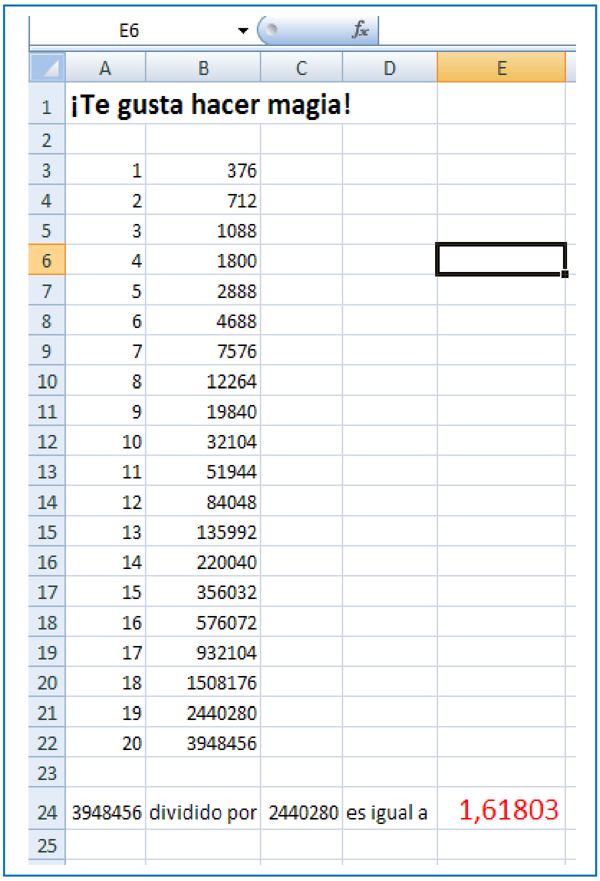
Escribe en una columna los números del 1 al 20. Al lado del 1 escribe el número que te diga tu amigo o amiga, de una, dos o tres cifras (376). Al lado del 2 escribe también otro número inventado de 1, 2 o 3 cifras (712). Al lado del 3, la suma de los dos números anteriores (1088). Al lado del 4, lo mismo, la suma de los dos números anteriores (ahora los de al lado del 2 y del 4), y así hasta llegar a la casilla 20.

Ahora divide el número de al lado del 20 (3948456) entre el número de al lado del 19 (2440280), y ¡magia!, puedes adivinar el resultado. ¡Se aproxima al número de oro!

1,618…

¿Por qué? ¿Sabes algo de la sucesión de Fibonacci? Búscalo en Internet.

Haz una hoja de cálculo como la del margen.

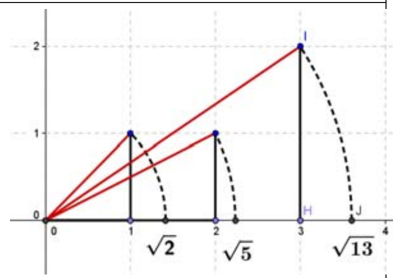
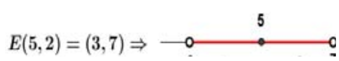


E6

	A	B	C	D	E
1	¡Te gusta hacer magia!				
2					
3	1	376			
4	2	712			
5	3	1088			
6	4	1800			
7	5	2888			
8	6	4688			
9	7	7576			
10	8	12264			
11	9	19840			
12	10	32104			
13	11	51944			
14	12	84048			
15	13	135992			
16	14	220040			
17	15	356032			
18	16	576072			
19	17	932104			
20	18	1508176			
21	19	2440280			
22	20	3948456			
23					
24	3948456	dividido por	2440280	es igual a	1,61803
25					

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Conjuntos de números	**Naturales** ➔ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; **Enteros** ➔ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **Racionales** ➔ $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionales** ➔ $\mathbf{I} = \Re - \mathbf{Q}$; $\Re = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$	
Fracciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ $x = 1{,}7252525\ldots = 854/495$
Números racionales	Su expresión decimal es exacta o periódica.	2/3; 1,5; 0,333333333….
Representación en la recta real	Fijado un origen y una unidad, existe una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	
N. Reales	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	0,333333; π; $\sqrt{2}$
Intervalo abierto	Intervalo abierto en el que los extremos **no** pertenecen al intervalo	$(2, 7) = \{x \in \Re / 2 < x < 7\}$. 
Intervalo cerrado	Los extremos **SI** pertenecen al intervalo	$[-2, 2] = \{x \in \Re; -2 \leq x \leq 2\}$ 
Intervalos Semiabiertos (o semicerrados)	Intervalo con un extremo abierto y otro cerrado	$[-8, 0) = \{x \in \mathbb{R} \; / -8 \leq x < 0\}$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo abierto: **E(*a* , *r*) = (*a* − *r* , *a* + *r*)**	

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

3. Realiza las operaciones:

a) (24,67 + 6,91)3,2 b) 2(3,91 + 98,1) c) 3,2(4,009 + 5,9)4,8

4. Halla el valor exacto de $\frac{0,\overset{\frown}{4}}{0,4}$ sin calculadora.

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Halla 3 fracciones *a, b, c* tal que $\frac{3}{4}<a<b<c<\frac{19}{25}$

7. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7\cdot 5^4}$?, ¿te atreves a explicar el motivo?

8. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

9. Ahora divide 999 entre 37 y después haz 1:37, ¿es casualidad?

10. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

2,73535...; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100} ; $\frac{102}{34}$; $-2,5$; 0,1223334444...

11. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

a) $\mathbf{Q}\cap(\Re - \mathbf{Q}) = \{0\}$

b) $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$

c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.

d) $\sqrt{7}\notin\mathbf{Q}$

e) 1/47 tiene expresión decimal periódica.

12. Pon ejemplos que justifiquen:

a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.

b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

13. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

14. La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

15. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ m.

16. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

17. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

18. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

19. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

20. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

21. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?

22. Tenemos una circunferencia y un hexágono regular inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)

Potencias

23. Calcula:

a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

24. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

25. Calcula:

a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{\left(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4\right)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

26. Extrae los factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

27. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

28. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

29. Simplifica la expresión:

a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

30. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35000000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

31. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

32. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

Representación en la recta real

33. *Pitágoras* vivió entre el 569 y el 475 años a. C. y Gauss entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de años hay entre ambas fechas?

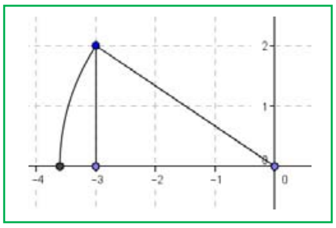
34. Representa de forma exacta en la recta numérica: –2,45; 3,666…

35. Sitúa en la recta real los números 0,5; 0,48; 0,51 y 0,505.

36. Ordena los siguientes números de mayor a menor: 2,4; –3,62; –3,6; 2,5; 2,409; –3,9999…

37. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números:

$$\frac{2}{3};\ \frac{-3}{5};\ \frac{5}{2};\ 1{,}256;\ 3{,}\hat{5}$$



38. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?

39. Representa de forma exacta en la recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

40. Halla 5 números racionales que estén entre 3,14 y π.

Intervalos

41. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

a. (–5, 5] b. $\{x \in \Re \mid -2 < x \leq 7\}$.

c. $\{x \in \Re \mid x > 7\}$ d. $(-3, +\infty)$

42. Halla:

a. (2, 4] U (3, 5] b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

43. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta? Razona la respuesta.

44. Expresa como entornos abiertos, si es posible, los siguientes intervalos:

a. (0 , 8) b. (–6 , –2) c. (2, $+\infty$)

45. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:

a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. E(1, 2) d. E(0, 1)

46. ¿Qué números al cuadrado dan 7?

47. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?

48. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

Varios

49. Un numero irracional tan importante como Pi es el número "e". $e \approx 2,718281828...$ que parece periódico, pero no, no lo es. Es un número irracional. Se define como el número al que se acerca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando *n* se hace muy, pero que muy grande. **Coge la calculadora** y dale a *n* valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, …

Apunta los resultados en una **tabla**.

50. Otra forma de definir *e* es $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$

Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo: 4! = 4·3·2·1 = 24, se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No te preocupes, que la tecla "!" está en la calculadora. ¿Puedes calcular e con 6 cifras decimales correctas? **Nota:* Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta *n* = ¿?

51. Ordena de menor a mayor las siguientes masas:

Masa de un electrón	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos
Masa de la Tierra	$5{,}983 \cdot 10^{24}$ kilogramos
Masa del Sol	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kilogramos
Masa de la Luna	$7{,}3 \cdot 10^{22}$ kilogramos

52. Tomando $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gramos como masa de un protón y $1{,}2 \cdot 10^{-15}$ metros como radio, y suponiéndolo esférico, calcula: a) su volumen en cm^3 (Recuerda el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$. b) Encuentra el peso de un centímetro cúbico de un material formado exclusivamente por protones. c) Compara el resultado con el peso de un centímetro cúbico de agua (un gramo) y de un centímetro cúbico de plomo (11,34 gramos).

Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica qué afirmación es falsa. El número –0,3333333… es un número

a) real b) racional c) irracional d) negativo

2. Operando y simplificando la fracción $\frac{a^2-4a+4}{a-2} : \frac{a-2}{a+3}$ se obtiene:

a) $a + 3$ b) $1/(a + 3)$ c) $a - 2$ d) $1/(a - 2)$

3. La expresión decimal 0,63636363…. Se escribe en forma de fracción como

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

4. Al simplificar $\sqrt{2}\,(7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$ obtienes:

a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}\,(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

5. Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones 4/7; 9/150, 7/50 tienen una expresión decimal:

a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

6. El conjunto de los números reales menores o iguales a –2 se escribe:

a) $(-\infty, -2)$ b) $(-\infty, -2]$ c) $(-2, +\infty)$ d) $(-\infty, -2[$

7. El entorno de centro –2 y radio 0,7 es el intervalo:

a) (–3,7, –2,7) b) (–2,7, –1,3) c) (–3,3, –2,7) d) (–2,7, –1,3]

8. El intervalo (–3, –2) es el entorno:

a) E(–2’5; 1/2) b) E(–3’5; –0,5) c) (–3’5, 1/2) d) (–2’5; –0,5)

9. Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. Al efectuar la operación $0{,}000078 + 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ se obtiene:

a) $3{,}6 \cdot 10^{-10}$ b) $1{,}8912 \cdot 10^{-10}$ c) $10{,}2 \cdot 10^{-5}$ d) $18{,}72 \cdot 10^{-5}$

MATEMÁTICAS: 4ºA ESO
Capítulo 2: Proporcionalidad

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autora: Nieves Zuasti
Revisores: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

En la vida cotidiana es interesante saber manejar la proporcionalidad, por ejemplo para calcular el descuento de unas rebajas, o el interés que se debe pagar por un préstamo. En multitud de ocasiones debemos efectuar repartos proporcionales, directos o inversos: premios de lotería, herencias, mezclas, aleaciones…

El tanto por ciento y el interés es un concepto que aparece constantemente en los medios de comunicación y en nuestra propia economía. En este capítulo haremos una primera aproximación a la denominada “*economía financiera*”.

La proporcionalidad es una realidad con la que convivimos a nuestro alrededor. Para comprenderla y utilizarla correctamente, necesitamos conocer sus reglas. Reconoceremos la proporcionalidad directa o inversa, simple y compuesta, y realizaremos ejercicios y problemas de aplicación.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

INTRODUCCIÓN

A Esther le gusta ir en bicicleta a la escuela y ha comprobado que en hacer ese recorrido tarda andando cuatro veces más. Tenemos aquí tres magnitudes: tiempo, distancia y velocidad.

Recuerda que:

Una **magnitud** es una propiedad física que se puede medir.

A más velocidad se recorre más distancia.

Son **magnitudes directamente proporcionales**.

A más velocidad se tarda menos tiempo.

Son **magnitudes inversamente proporcionales**.

Pero, cuidado, no todas las magnitudes son proporcionales. Esto es una confusión muy frecuente. Porque al crecer una magnitud, la otra también crezca, aún no se puede asegurar que sean directamente proporcionales. Por ejemplo, Esther recuerda que hace unos años tardaba más en recorrer el mismo camino, pero la edad no es directamente proporcional al tiempo que se tarda. Vamos a estudiarlo con detalle para aprender a reconocerlo bien.

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1.1. Magnitudes directamente proporcionales

Recuerda que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

- Si tres bolsas contienen 15 caramelos, siete bolsas (iguales a las primeras) contendrán 35 caramelos, porque:

$$3 \cdot \mathbf{5} = 15 \qquad 7 \cdot \mathbf{5} = 35$$

La **razón de proporcionalidad directa *k*** es el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Ejemplo:

- En el ejemplo anterior la razón de proporcionalidad es 5, porque: $\frac{15}{3} = \frac{35}{7} = 5$

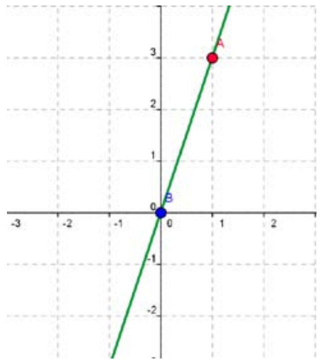
Ejemplo:

- Copia en tu cuaderno la siguiente tabla, calcula la razón de proporcionalidad y completa los huecos que faltan sabiendo que es una tabla de proporcionalidad directa:

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Magnitud A	18	1,5	60	2,7	0,21
Magnitud B	6	0,5	20	0,9	0,07

La razón de proporcionalidad es ***k*** = $\frac{18}{6}=3$. Por tanto todos los valores de la magnitud B son tres veces menores que los de la magnitud A: $\frac{18}{6}=\frac{1,5}{0,5}=\frac{60}{20}=\frac{2,7}{0,9}=\frac{0,21}{0,07}=3$.



Recta y = 3x

Observa que:

Si se representan gráficamente los puntos de una proporcionalidad directa, todos ellos están sobre una **recta** que pasa por el origen de coordenadas. La razón de proporcionalidad es la **pendiente** de la recta. La función lineal *y* = *kx* se denomina también **función de proporcionalidad directa**.

Ejemplo:

- Ecuación de la recta del ejemplo anterior

La ecuación de la recta es *y* = 3*x*. Comprobamos que todos los puntos la verifican:

18 = 3·6; 1,5 = 3·0,5; 60 = 3·20; 2,7 = 3·0,9; 0,21 = 3·0,07.

Reducción a la unidad

Si debemos usar la misma ecuación de la recta en distintas ocasiones el problema puede simplificarse con la **reducción a la unidad**. Si *x* = 1 entonces *y* = ***k***.

Ejemplo:

- Para celebrar su cumpleaños José ha comprado 3 botellas de refresco que le han costado 4,5 €. Piensa que no van a ser suficientes y decide comprar 2 más. Calcula el precio de las 2 botellas utilizando la reducción a la unidad.

  $y=\frac{4,5}{3}x \Rightarrow y=\frac{4,5}{3}\cdot 1 \Rightarrow$ k = 1,5 $\Rightarrow$ *y* = 1,5*x*. Ahora podemos calcular el precio de cualquier número de botellas. En nuestro caso *x* = 2, luego *y* = 1,5·2 = 3 €.

Actividades propuestas

1. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7,82		1		50
Euros	36		9,27		10	

2. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{24}{100}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80}=\frac{46}{12}$ c) $\frac{3'6}{12'8}=\frac{x}{60}$

3. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Proporcionalidad simple directa

Acabamos de ver que la proporcionalidad simple directa consiste en encontrar la ecuación de una recta que pasa por el origen: $y = kx$.

Ejemplo:

- Veinte cajas pesan 400 kg, ¿cuántos kg pesan 7 cajas?

Buscamos la ecuación de la recta: $y = kx \Rightarrow 400 = k20 \Rightarrow k = 400/20 = 20 \Rightarrow y = 20x$ Ecuación de la recta

Si $x = 7$ entonces $y = 20 \cdot 7 = 140$ kg.

Actividades propuestas

4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?

5. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25 m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43 m?

6. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?

7. Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?

8. Mi coche ha gasta 67 litros de gasolina en recorrer 1250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5823 km?

9. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?

10. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?

1.3. Porcentajes

El porcentaje o tanto por ciento es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana.

El **tanto por ciento** es una razón con denominador 100.

Ejemplo:

- 37 % = $\frac{37}{100}$. La ecuación de la recta es: $y = \frac{37}{100}x$.

Los porcentajes son proporciones directas.

Ejemplo:

- La población de Zarzalejo era en 2013 de 7380 habitantes. En 2014 se ha incrementado en un 5 %. ¿Cuál es su población a final de 2014?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$y = \frac{7380}{100}x$, por lo que el 5 % de 7392 es $y = \frac{7380}{100} \cdot 5 = 369$ habitantes. La población se ha incrementado en 369 habitantes, luego al final de 2014 la población será de: 7380 + 369 = 7749 habitantes.

Actividades propuestas

11. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$

12. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?

13. Un depósito de 2000 litros de capacidad contiene en este momento 1036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?

14. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?

1.4. Incremento porcentual. Descuento porcentual. Porcentajes encadenados

Incremento porcentual

Ejemplo:

- El ejemplo anterior puede resolverse mediante **incremento porcentual**: 100 + 5 = 105 %

$y = \frac{7380}{100}x$, por lo que el 105 % de 7392 es $y = \frac{7380}{100} \cdot 105 = 7749$ habitantes.

Descuento porcentual

- En las rebajas a todos los artículos a la venta les aplican un 30 % de descuento. Calcula el precio de los que aparecen en la tabla:

Precio sin descuento	75 €	159 €	96 €	53 €
Precio en rebajas	52,50 €	111,3 €	67,2 €	37,1 €

Ya que nos descuentan el 30 %, pagaremos el 70 %. Por tanto: $k = \frac{70}{100} = 0,7$ es la razón directa de proporcionalidad que aplicaremos a los precios sin descuento para calcular el precio rebajado. Por tanto: $y = 0,7\ x$.

Porcentajes encadenados

Muchas veces hay que calcular varios incrementos porcentuales y descuentos porcentuales. Podemos **encadenarlos**. En estos casos lo más sencillo es calcular, para cada caso, el tanto por uno, e irlos multiplicando.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- En unas rebajas se aplica un descuento del 30 %, y el IVA del 21 %. ¿Cuánto nos costará un artículo que sin rebajar y sin aplicarle el IVA costaba 159 euros? ¿Cuál es el verdadero descuento?

En un descuento del 30 % debemos pagar un 70 % ((100 – 30) %), por lo que el tanto por uno es de 0,7. Por el incremento del precio por el IVA del 21 % ((100 + 21) %) el tanto por uno es de 1,21. Encadenando el descuento con el incremento tendremos un índice o tanto por uno de 0,7 · 1,21 = 0,847, que aplicamos al precio del artículo, 159 €, 0,847 · 159 = 134,673 € ≈ 134,67 €. Por tanto nos han descontado 24,33 euros.

Si estamos pagando el 84,7 % el verdadero descuento es el 15,3 %.

Ejemplo:

- Calcula el precio inicial de un televisor, que después de subirlo un 20 % y rebajarlo un 20 % nos ha costado 432 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje de variación?

Al subir el precio un 20 % estamos pagando el 120 % y el tanto por uno es 1,2. En el descuento del 20 % estamos pagando el 80 % y el tanto por uno es 0,8. En total con las dos variaciones sucesivas el tanto por uno es de 0,8 ·1,2 = 0,96, y el precio inicial es 432 : 0,96 = 450 €. Precio inicial = 450 €.

El tanto por uno 0,96 es menor que 1 por lo tanto ha habido un descuento porque hemos pagado el 96 % del valor inicial y este descuento ha sido del 4 %.

Actividades propuestas

15. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.

16. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %.

17. Copia en tu cuaderno y completa:

a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un ……… % de descuento

b) Me han descontado el 9 % de una factura de .... € y he pagado 280 €.

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

18. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?

19. Una persona ha comprado acciones de bolsa en el mes de enero por un valor de 10 000 €. De enero a febrero estas acciones han aumentado un 8 %, pero en el mes de febrero han disminuido un 16 % ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?

20. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10 %, luego un 25 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.

21. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25 %, pero luego cargan en la factura un

20 % de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento? ¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros? ¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?

1.7. Escalas

En planos y mapas encontramos anotadas en su parte inferior la escala a la que están dibujados.

La **escala** es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.

Principales calzadas romanas

Ejemplo:

- Se expresa de la forma 1 : 2000 que significa que 1 cm del plano corresponde a 2000 cm = 20 m en la realidad.

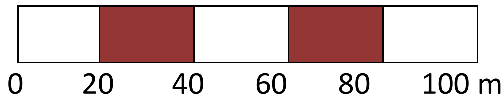
Por tanto si *"y"* son las medidas en la realidad, y *"x"* lo son en el plano, esta escala se puede escribir con la ecuación de la recta:

$$y = 2000x.$$

Las escalas también se representan en forma gráfica, mediante una barra dividida en segmentos de 1 cm de longitud

Escalímetro

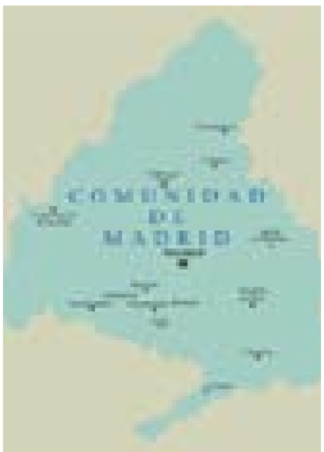
Ejemplo:



Esta escala identifica cada centímetro del mapa con 20 m en la realidad es decir 1 : 2000, $y = 2000x$.

Al estudiar la semejanza volveremos a insistir en las escalas.

Un instrumento sencillo para realizar trabajos a escala es el ***pantógrafo*** que facilita copiar una imagen o reproducirla a escala.



El pantógrafo es un paralelogramo articulado que, al variar la distancia entre los puntos de articulación, permite obtener diferentes tamaños de dibujo sobre un modelo dado.

Actividades propuestas

22. La distancia real entre dos pueblos es 28,6 km. Si en el mapa están a 7 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?

23. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 200 presenta una altura de 8 cm?

24. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.

25. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 7 cm y 23 cm. Si está dibujado a escala 1 : 50, calcula sus medidas reales.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

2.1. Magnitudes inversamente proporcionales

Recuerda que:

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:

- Cuando un automóvil va a 90 km/h, tarda cuatro horas en llegar a su destino. Si fuera a 120 km/h tardaría 3 horas en hacer el mismo recorrido.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

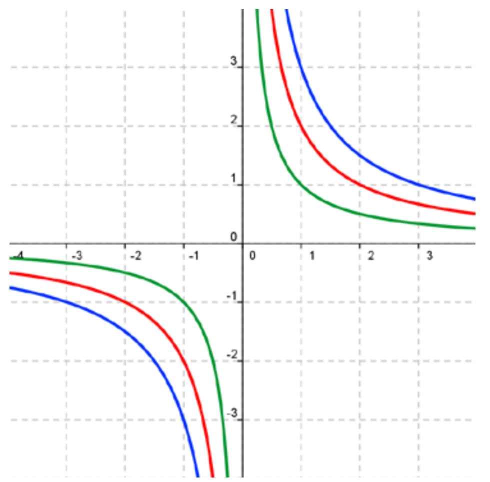
La **razón de proporcionalidad inversa** *k´* es el producto de cada par de magnitudes: ***k' = a · b = a´· b´***

Ejemplo:

- Copia la tabla en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

a	18	150	1,5	3600	100
b	50	6	600	0,25	9

k´ = 18 · 50 = 900. Comprueba que todas las columnas dan este resultado.



Hipérbolas: y = 3/x; y = 2/x; y = 1/x

Observa que:

Si se representan gráficamente los puntos de una proporcionalidad inversa, todos ellos están sobre la gráfica de una **hipérbola** de ecuación $y = \frac{k'}{x}$. La razón de proporcionalidad inversa es la **constante k'**. A esta hipérbola $y = \frac{k'}{x}$ también se la denomina **función de proporcionalidad inversa**.

Ejemplo:

- Ecuación de la hipérbola del ejemplo anterior

La hipérbola es $y = \frac{900}{x}$. Comprobamos que todos los puntos verifican la ecuación de dicha hipérbola:

$$y = \frac{900}{18} = 50; \quad y = \frac{900}{150} = 6; \quad y = \frac{900}{1{,}5} = 600; \quad y = \frac{900}{3600} = 0{,}25; \quad y = \frac{900}{100} = 9.$$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12			60
Horas de trabajo			80		28	10	

2.2. Proporcionalidad simple inversa

Para calcular el cuarto término entre dos magnitudes inversamente proporcionales calculamos la constante de proporcionalidad y escribimos la ecuación de la hipérbola

Ejemplo:

- Cuatro personas realizan un trabajo en 18 días, ¿cuántas personas necesitaremos para realizar el mismo trabajo en 8 días?

$$\boldsymbol{k'} = 4 \cdot 18 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{8} \cdot 4 = 9 \text{ personas.}$$

Actividades propuestas

27. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1,25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?

28. En un huerto ecológico se utilizan 5000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?

29. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1,7 kilogramo? ¿Y para envasarlas en cajas de 2,3 kilogramos?

30. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?

31. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0,07		8	
Magnitud B	0,25		5		6,4

2.3. Proporcionalidad compuesta

Una proporción en la que intervienen más de dos magnitudes ligadas entre sí por relaciones de proporcionalidad directa o inversa se denomina **proporción compuesta**.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Para resolverlo, lo reduciremos a un problema simple de proporcionalidad directa o inversa.

Ejemplo:

- En el instituto 30 alumnos de 4º A de ESO han ido a esquiar y han pagado 2700 € por 4 noches de hotel; 25 alumnos de 4º B de ESO han ganado en la lotería 3375 € y deciden ir al mismo hotel. ¿Cuántas noches de alojamiento pueden pagar?

Tenemos tres magnitudes: el número de alumnos, la cantidad en € que pagan por el hotel y el número de noches de hotel. Observa que a más alumnos se paga más dinero, luego estas magnitudes son directamente proporcionales. A más noches de hotel se paga más dinero, luego estas otras dos magnitudes son también directamente proporcionales. Pero para una cantidad de dinero fija, a más alumnos pueden ir menos noches, luego el número de alumnos es inversamente proporcional al número de noches de hotel.

El mejor método es reducirlo a un problema de proporcionalidad simple, para ello obtenemos el precio del viaje por alumno.

Cada alumno de 4º A ha pagado 2700 : 30 = 90 € por 4 noches de hotel. Luego ha pagado por una noche 90/4 = 22,5 €. La ecuación de proporcionalidad directa es: $y = 22,5x$, donde "*y*" es lo que paga cada alumno y "*x*" el número de noches.

Cada alumno de 4º B cuenta con 3375 : 25 = 135 € para pasar *x* noches de hotel, por lo que 135 = 22,5x, luego pueden estar 6 noches.

Actividades propuestas

32. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?

33. Si 16 bombillas originan un gasto de 4500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?

34. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?

35. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?

36. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?

37. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?

38. Si 4 máquinas fabrican 2400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7000 piezas durante 10 horas diarias?

Autora: Nieves Zuasti

Revisor: Javier Rodrigo y María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. REPARTOS PROPORCIONALES

Cuando se realiza un reparto en partes desiguales se debe establecer previamente si se trata de un reparto proporcional directo o inverso.

3.1. Reparto proporcional directo

En un reparto proporcional directo le corresponderá más a quien tiene más partes.

Actividad resuelta

- Tres amigos deben repartirse los 400 € que han ganado en una competición de acuerdo a los puntos que cada uno ha obtenido. El primero obtuvo 10 puntos, el segundo 7 y el tercero 3 puntos.

  El reparto directamente proporcional se inicia sumando los puntos: 10 + 7 + 3 = 20 puntos.

  Calculamos el premio por punto: 400 : 20 = 20 €.

  El primero obtendrá 20 · 10 = 200 €.

  El segundo: 20 · 7 = 140 €.

  El tercero: 20 · 3 = 60 €.

  La suma de las tres cantidades es 200 + 140 + 60 = 400 €, la cantidad total a repartir.

Como se trata de una proporción, se debe establecer la siguiente regla:

Sea N (en el ejemplo anterior 400) la cantidad a repartir entre cuatro personas, a las que les corresponderá A, B, C, D de manera que N = A + B + C + D. Estas cantidades son proporcionales a su participación en el reparto: *a, b, c, d*.

a + *b* + *c* + *d* = *n* es el número total de partes en las que ha de distribuirse N.

N : *n* = *k* que es la cantidad que corresponde a cada parte. En el ejemplo anterior: *k* = 400 : 20 = 20.

El reparto finaliza multiplicando *k* por *a*, *b*, *c* y *d*, obteniéndose así las cantidades correspondientes A, B, C y D.

Es decir, ahora la ecuación de la recta es: $y = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}x = \frac{N}{n}x$

Actividades propuestas

39. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?

40. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500€, ¿cuánto corresponde a cada uno?

41. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48.000.000 € para tres estados de 1.500, 900 y 600 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?

42. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.

43. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

3.2. Reparto proporcional inverso

En un reparto proporcional inverso recibe más quien menos partes tiene.

Sea N la cantidad a repartir y *a*, *b* y *c* las partes. Al ser una proporción inversa, el reparto se realiza a sus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Para calcular las partes totales, reducimos las fracciones a común denominador, para tener un patrón común, y tomamos los numeradores que son las partes que corresponden a cada uno.

Actividad resuelta

- Repartir 4000 € de forma inversamente proporcional a 12 y 20.

Calculamos el total de las partes: 1/12 + 1/20 = **5**/60 + **3**/60 = **8**/60.

4000 : 8 = 500 € cada parte.

500 · 5 = 2500 €.

500 · 3 = 1500 €.

En efecto, 2500 + 1500 = 4000.

Actividades propuestas

44. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

45. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?

46. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?

47. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

48. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

3.3. Mezcla y aleaciones

Las **mezclas** que vamos a estudiar son el resultado final de combinar distintas cantidades de productos, de distintos precios.

Actividad resuelta

- Calcula el precio final del litro de aceite si mezclamos 13 litros a 3,5 € el litro, 6 litros a 3,02 €/l y 1 litro a 3,9 €/l.

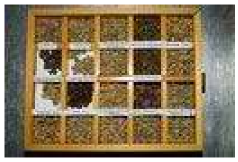
  Calculamos el coste total de los distintos aceites:

  $$13 \cdot 3{,}5 + 6 \cdot 3{,}02 + 1 \cdot 3{,}9 = 67{,}52 \text{ €}.$$

  Y el número total de litros: 13 + 6 + 1 = 20 l.

  El precio del litro de mezcla valdrá 67,52 : 20 = 3,376 €/l.

Actividades propuestas



Granos de café

49. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.

50. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2,40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1,80 €/l para obtener una mezcla a 2,13 €/l?

Una **aleación** es una mezcla de metales para conseguir un determinado producto final con mejores propiedades o aspecto.

Las aleaciones se realizan en joyería mezclando metales preciosos, oro, plata, platino, con cobre o rodio. Según la proporción de metal precioso, se dice que una joya tiene más o menos **ley.**

La **ley** de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.

Ejemplo:

- Una joya de plata de 50 g de peso contiene 36 g de plata pura. ¿Cuál es su ley?

$$\textbf{Ley} = \frac{peso\ metal\ puro}{peso\ total} = \frac{36}{50} = 0{,}72$$

Otra forma de medir el grado de pureza de una joya es el **quilate**.

Un quilate de un metal precioso es 1/24 de la masa total de la aleación.

Para que una joya sea de oro puro ha de tener 24 quilates.

Ejemplo:

Una joya de oro de 18 quilates pesa 62 g. ¿Qué cantidad de su peso es de oro puro?

$$\text{Peso en oro} = \frac{62 \cdot 18}{24} = 46{,}5 \text{ g.}$$

El término ***quilate*** viene de la palabra griega *"keration" (algarroba).* Esta planta, de semillas muy uniformes, se utilizaba para pesar joyas y gemas en la antigüedad.

Actividades propuestas

51. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 87 g y contiene 69 g de oro puro.

52. ¿Cuántos quilates tiene, aproximadamente, la joya anterior?

Autora: Nieves Zuasti

Revisor: Javier Rodrigo y María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. INTERÉS

4.1. Cálculo de interés simple

El **interés** es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo.

En el **interés simple**, al capital *C* depositado se le aplica un tanto por ciento o rédito *r* anualmente.

El cálculo del interés obtenido al cabo de varios años se realiza mediante la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el tiempo que se deposita el capital son meses o días, el interés se calcula dividiendo la expresión anterior entre 12 meses o 360 días (año comercial).

$I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ tiempo en meses $I = \dfrac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ tiempo en días

Actividades resueltas

- Depositamos 4000 € al 2 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 30 meses?

Calculamos el interés simple:

$$I = \frac{4000 \cdot 2 \cdot 30}{1200} = 200 \text{ €}$$

Sumamos capital e intereses:

4000 + 200 = 4200 €

Actividades propuestas

54. Calcula el interés simple que producen 10.000 € al 3 % durante 750 días.

55. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?

4.2. Interés compuesto

Desde otro punto de vista, el interés es el porcentaje que se aplica a un préstamo a lo largo de un tiempo, incrementando su cuantía a la hora de devolverlo.

Este tipo de interés no se calcula como el interés simple sino que se establece lo que se llama "*capitalización*".

El **interés compuesto** se aplica tanto para calcular el capital final de una inversión, como la cantidad a devolver para amortizar un préstamo.

Normalmente los préstamos se devuelven mediante cuotas mensuales que se han calculado a partir de los intereses generados por el préstamo al tipo de interés convenido.

La capitalización compuesta plantea que, a medida que se van generando intereses, pasen a formar parte del capital inicial, y ese nuevo capital producirá intereses en los períodos sucesivos.

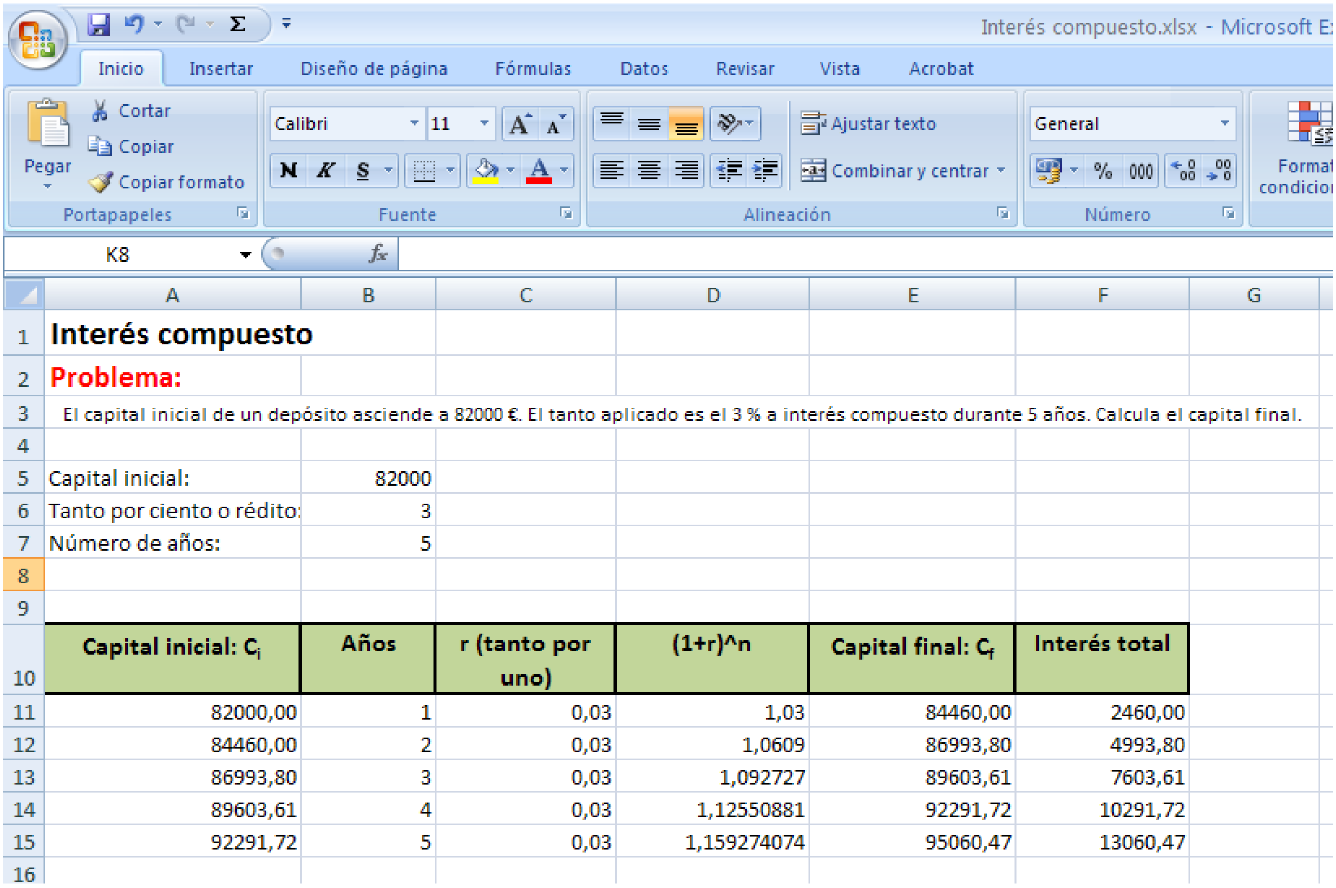
Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si se trata de un depósito bancario, el capital final se calculará siguiendo el siguiente procedimiento:

C_i (capital inicial)	1 año	*i* (tanto por uno)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 años	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 años	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
....	....	....	....
	n años		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cabo de *n* años, el capital final será $\mathbf{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Para hacer los cálculos puedes utilizar una "Hoja de cálculo". Basta que en la hoja de cálculo adjunta modifiques los datos de las casillas B5 donde está el "Capital inicial", casilla B6 donde está el "Tanto por uno" y de la casilla B7 donde aparece el número de "Años", y arrastres en la columna B hasta que el número final de años coincida con dicha casilla.



	A	B	C	D	E	F
1	**Interés compuesto**					
2	**Problema:**					
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.					
4						
5	Capital inicial:	82000				
6	Tanto por ciento o rédito:	3				
7	Número de años:	5				
8						
9						
10	**Capital inicial: C_i**	**Años**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47
16						

Actividades resueltas

- El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto por ciento aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 82000 \cdot 1{,}159\ldots = 95060 \text{ €}$$

Actividades propuestas

56. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39500 €?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

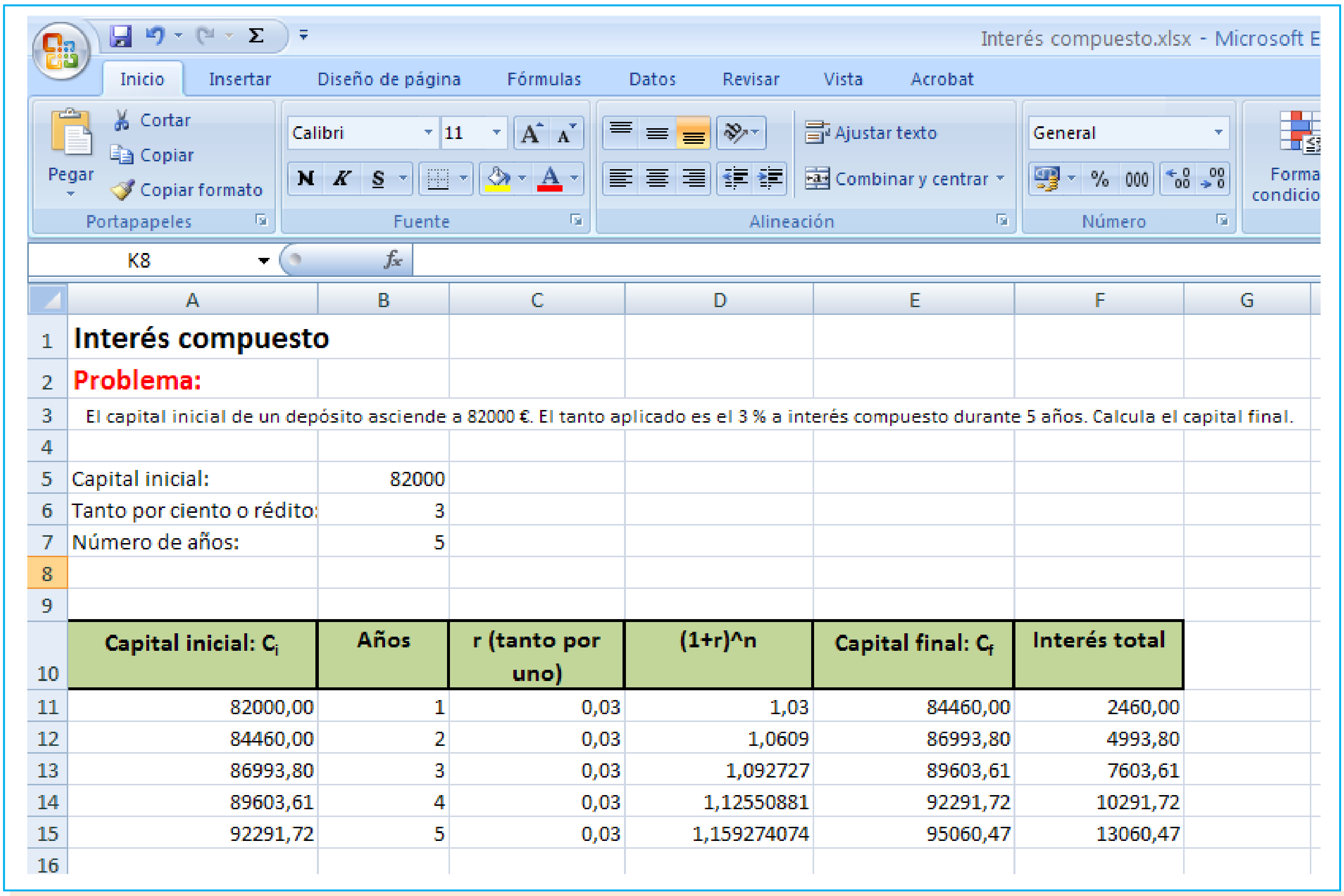
Confecciona tu propia hoja de cálculo

Vamos a resolver el problema “El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final” confeccionando una hoja de cálculo.

Abre Excel o cualquier otra hoja de cálculo. Verás que las hojas están formadas por cuadrículas, con letras en la horizontal y números en la vertical. Así cada cuadrícula de la hoja se puede designar por una letra y un número: A1, B7, …

Vamos a dejar las primeras 9 filas para poner títulos, anotaciones…

En la fila 10 vamos a escribir los títulos de las casillas. En la casilla A10 escribe: Capital inicial. En la B10: Años. En la C10: Tanto por uno. En la D10: $(1 + r)^n$. En la E10: capital final. En la F10: Interés total.



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Interés compuesto**						
2	**Problema:**						
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.						
4							
5	Capital inicial:	82000					
6	Tanto por ciento o rédito:	3					
7	Número de años:	5					
8							
9							
10	**Capital inicial: C_i**	**Años**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**	
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00	
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80	
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61	
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72	
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47	
16							

En la fila 11 comenzamos los cálculos. En A11 anotamos 82000, que es el capital inicial.

En B11, escribimos 1, pues estamos en el año primero; en B12, escribimos 2, y seleccionando las casillas B11 y B12 arrastramos hasta B15, pues nos piden 5 años.

Como se ha puesto el capital al 3 %, el tanto por uno es 0,03, cantidad que copiamos en C11 y arrastramos hasta C15.

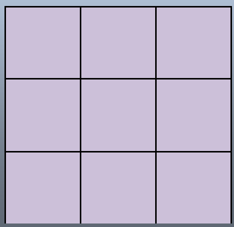
Para calcular $(1 + r)^n$, podemos hacerlo usando la función POTENCIA. Para ello escribimos un signo = en la casilla D11 y buscamos la función POTENCIA, en número escribiremos 1+C11 y en exponente B11. Te habrá quedado: =POTENCIA(1+C11;B11). Ahora, lo señalas y lo arrastras hasta D15.

Para calcular $C\cdot (1 + r)^n$, en la columna E, sólo tenemos que multiplicar A11*D11. Queremos dejar invariante el capital inicial, para decírselo a Excel, que no nos lo cambie, escribimos: =$A$11*D11 y arrastramos hasta la fila E15.

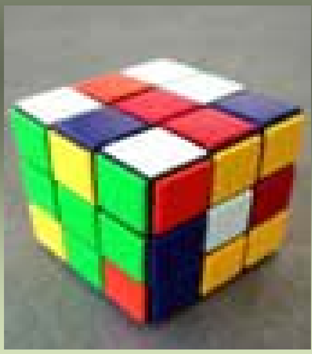
Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Proporcionalidad en áreas y volúmenes

Al aumentar el lado de un cuadrado al doble, su superficie queda multiplicada por 4. Al multiplicar por 3 el lado, el área se multiplica por 9.

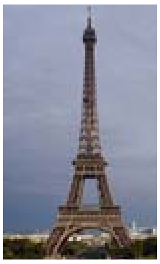


Al aumentar el lado de un cubo al doble, su volumen queda multiplicado por 8. Al multiplicar por 3 el lado, el volumen se multiplica por 27.



En general, si hacemos un cambio de escala de factor de proporcionalidad k, el área tiene un factor de proporcionalidad k^2, y el volumen k^3.

Utiliza esta observación para resolver los siguientes problemas:



La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

Antes de empezar a calcular, da tu opinión.

Ayuda: k^3 = 8 000 000/1 luego k = 200. Si la Torre Eiffel mide 300 metros de altura, nuestra torre medirá 300/200 = 1,5 m. ¡Metro y medio! ¡Mucho más que un lápiz!

1. En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?
2. Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
3. En un día frio un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frio?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Proporcionalidad directa	Dos magnitudes son **directamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número. La función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen: $y = kx$. La pendiente de la recta, ***k***, es la **razón de proporcionalidad directa**.	Para empapelar 300 m^2 hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m^2, necesitaremos 8,32 rollos, pues $k = 300/24 = 12,5$, $y = 12,5x$, por lo que $x = 104/12,5 = 8,32$ rollos.
Proporcionalidad inversa	Dos magnitudes son **inversamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La función de proporcionalidad inversa es la hipérbola $y = k'/x$. Por tanto la **razón de proporcionalidad inversa** k' es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.	Dos personas pintan una vivienda en 4 días. Para pintar la misma vivienda, 4 personas tardarán: $k' = 8$, $y = 8/x$, por lo que tardarán 2 días.
Porcentajes	Razón con denominador 100.	El 87 % de 2400 es ——= 2088
Escalas	La escala es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.	A escala 1:50000, 35 cm son 17,5 km en la realidad.
Reparto proporcional directo Repartir directamente a 6,10 y 14, 105000 € 6 + 10 + 14 = 30 105000 : 30 = 3500 6 · 3500 = 21000 € 10 ·3500 = 35000 € 14 · 3500 = 49000 €	**Reparto proporcional inverso** Repartir 5670 inversamente a 3,5 y 6 $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5670 : 21 = 270 270 · 10 = **2700** 270 · 6 = **1620** 270 · 5 = **1350**	
Mezclas y aleaciones	Mezclar distintas cantidades de productos, de distintos precios. La **ley** de una **aleación** es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.	Una joya que pesa 245 g y contiene 195 g de plata, su ley es: $\frac{195}{245} = 0,795$
Interés simple y compuesto	El interés es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo	C = 3600; r = 4,3 %; t = 8 años $I = \frac{3600 \cdot 4,3 \cdot 8}{100} = 1238,4$ €

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

litros	8,35		0,75	1,5	
euros		14	2,25		8

2. Estima cuántas personas caben de pié en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?

3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?

4. Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?

5. Para tapizar cinco sillas he utilizado 0,6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?

6. Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?

7. Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?

8. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es k = 1,8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15,9			0,01	
Magnitud B		6	0,1		10

9. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)

10. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?

11. Si un litro de leche de 0,85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?

12. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1200 €?

13. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?

14. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?

15. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pago por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?

16. Por liquidar una deuda de 35000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

17. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)

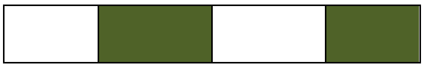
18. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?

19. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?

20. Un mapa está dibujado a escala 1 : 800000. La distancia real entre dos ciudades es 200 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?

21. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 12 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?

22. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



0 3 6 9 12 km

23. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

24. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	8	7,5		3,5	
Magnitud B		12	0,15		10

25. Determina si las siguientes magnitudes se encuentran en proporción directa, inversa o en ninguna de ellas:

a) Velocidad a la que circula un coche y espacio que recorre

b) Dinero que tienes para gastar y bolsas de almendras que puedes comprar

c) Talla de zapatos y precio de los mismos

d) Número de miembros de una familia y litros de leche que consumen

e) Número de entradas vendidas para un concierto y dinero recaudado

f) Números de grifos que llenan una piscina y tiempo que esta tarda en llenarse

g) Edad de una persona y estatura que tiene

h) Número de trabajadores y tiempo que tardan en hacer una valla

i) Edad de una persona y número de amigos que tiene

26. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

27. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	20		7		10,8
B		0,05		0,3	

28. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 cerdos durante 9 semanas. Si vende 60 cerdos, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta cerdos? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con los 240 cerdos?

29. Un granjero con 65 gallinas tiene maíz para alimentarlas 25 días. Si vende 20 gallinas, ¿Cuántos días podrá alimentar a las restantes?

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada uno pueden comer 150 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2,7 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

31. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

33. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?

34. Si 15 operarios instalan 2500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5250 m de valla?

35. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

37. Un trabajo se paga a 3120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

38. Repartir 4350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.

39. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1,5 kg de nueces a 6 €/kg, 1,75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

40. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2,5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1,6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1,2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?

41. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4,2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.

42. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

43. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2350000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?

44. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280,5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?

45. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0,900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0,950 de ley y 20 g de 0,750 de ley?

46. ¿Qué capital hay que depositar al 3,5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?

47. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25400 € al 1,4 % en 10 años?

48. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74500 € al 3 % para obtener un interés de 2980 €?

49. Al 3 % de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63338,5 €. ¿De qué capital se trata?

50. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?

51. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otro dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

a) 612,5; 1000; 0,0005; 0,5   b) 1,25; 2,5; 125; 0,125   c) 62; 500; 0,005; 0,05

2. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:

a) 2000 €   b) 1900 €   c) 1800 €   d) 1500 €.

3. Un artículo que costaba 2000 € se ha rebajado a 1750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

a) 10 %   b) 12,5 %   c) 15,625 %   d) 11,75 %

4. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 590 botellas   b) 700 botellas   c) 650 botellas   d) 680 botellas

5. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

a) 40; 200; 11,5; 1000   b) 11; 200; 20; 300   c) 11; 220; 10; 1100   d) 40; 220; 10; 500

6. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirán:

a) 24 t y 20 t   b) 20 t y 24 t   c) 24 t y 18 t   d) 25 t y 20 t

7. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 2,7 cm equivalen a 0,81 km es:

a) 1 : 34000   b) 1 : 3000   c) 1 : 30000   d) 1 : 300

8. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?

a) 3 rollos   b) 5 rollos   c) 4 rollos   d) 2 rollos

9. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg clase B a 0,85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:

a) 1,12€   b) 0,98 €   c) 1,03€   d) 1,049€

10. La ley de una aleación es 0,855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:

a) 259,92 g   b) 255,4 g   c) 248,9 g   d) 306 g

MATEMÁTICAS: 4ºA ESO
Capítulo 3: Polinomios. Fracciones algebraicas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF. commons.wikimedia

Índice

Resumen

En Babilonia ya utilizaban el Álgebra, pero los egipcios y los griegos la trataban utilizando la Geometría. Los árabes recogieron el saber antiguo de Oriente y Occidente y trajeron el Álgebra a Europa. La palabra “*álgebra*” en árabe significa “*restaurar*” y en el Quijote aparecen algebristas que restauraban los huesos rotos. En el siglo XIII, *Fibonacci*, (Leonardo de Pisa) viajó y contactó con matemáticos árabes e hindúes. Su libro, *Liber abaci*, puede ser considerado el primer libro de Álgebra europeo. En el Renacimiento italiano ya hubo grandes algebristas que se ocupaban, principalmente, de la resolución de ecuaciones.

Luego, el punto de vista cambió. El *Álgebra Moderna* se ocupa de las estructuras algebraicas, que viene a ser el encontrar las propiedades comunes que puedan tener distintos conjuntos, como por ejemplo, encontrar similitudes entre los números enteros, que ya conoces, y los polinomios que vamos a trabajar en este capítulo.

Hoy los ordenadores son capaces de trabajar con expresiones algebraicas.

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1. Introducción

No hace falta imaginar situaciones rebuscadas para que, a la hora de realizar un razonamiento, nos topemos con alguna de las cuatro operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación o división.

Ejemplos:

- Ana, Antonio y Eduardo han realizado un viaje, y a la vuelta han sumado los gastos efectuados que ascienden a 522 €. El gasto realizado por cada uno ha sido de $\frac{522}{3}$ €, es decir, 174 €.

- Si vamos a comprar manzanas a una frutería en la que el precio de un kilogramo es de 1’3 €, resulta habitual que, según vamos colocando la fruta en la balanza, vaya indicando el importe final. Para ello realiza la operación: 1,3 · x, donde x es la cantidad de kilogramos que nos ha indicado la balanza. Después de cada pesada, el resultado de esa multiplicación refleja el importe de las manzanas que, en ese momento, contiene la bolsa.
- Recuerdas la fórmula del Interés: $I = \frac{Crt}{100}$, donde I es el interés que se recibe al colocar un capital C, con un rédito r, durante un número de años t.
- Supongamos que tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada. Con esa tarifa, una llamada de 3 minutos nos costará:

$$(0'05 \cdot 3) + 0'12 = 0'15 + 0'12 = 0'27 \quad €$$

Pero ¿cuál es el precio de una llamada cualquiera? Como desconocemos su duración, nos encontramos con una cantidad no determinada, o indeterminada, por lo que en cualquier respuesta que demos a la pregunta anterior se apreciará la ausencia de ese dato concreto. Podemos decir que el coste de una llamada cualquiera es

$$(0'05 \cdot x) + 0'12 = 0'05 \cdot x + 0'12 \quad \text{euros}$$

donde x señala su duración, en minutos.

- Para calcular el valor del perímetro de un rectángulo de lados a y b se utiliza la expresión:

$$2 \cdot a + 2 \cdot b$$

- La expresión algebraica que nos representa el producto de los cuadrados de dos números cualesquiera x e y se simboliza por $x^2 \cdot y^2$

Actividades propuestas

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

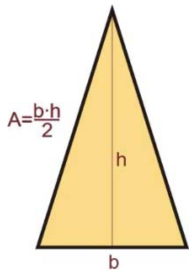
cantidad total de minutos de conversación (*M*). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \quad €$$

Ejemplo:

- Es bien conocida la *fórmula* del área de un triángulo de base *b* y altura asociada *h*:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



En todos estos ejemplos han surgido **expresiones algebraicas**.

1.2. Expresiones algebraicas

Llamaremos **expresión algebraica** a cualquier expresión matemática que se construya con números reales, letras y las operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división.

En una expresión algebraica puede haber datos no concretados; unas veces deberemos obtener los valores que "resuelven" la expresión, y en otras, como la fórmula del área del triángulo, se verifican para cualquier valor. Según el contexto, recibirán el nombre de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, ***incógnita***, entre otros.

Si en una expresión algebraica no hay *variables*, dicha expresión no es más que un número real.

Al fijar un valor concreto para cada *indeterminada* de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el que se obtiene al sustituir las letras de esa expresión por determinados valores.

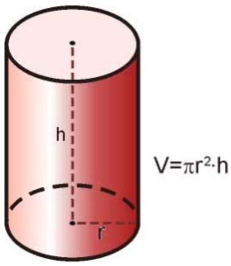
Ejemplo:

- El volumen de un cilindro viene dado por la expresión algebraica

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a:

$$\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi \quad cm^3$$



- El valor de la expresión 2*a* + 5 para el caso concreto de *a* igual a 3 lo calculamos sustituyendo *a* por 3. Así resulta 2 · 3 + 5 = 11, y se dice que el valor numérico de 2*a* + 5 para *a* = 3 es 11.
- Si en la expresión

$$7 + \frac{x}{2} + x \cdot y^3 - \frac{6}{z}$$

particularizamos las tres variables con los valores

$$x = 4,\ y = -1,\ z = \frac{1}{2}$$

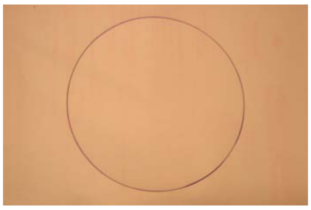
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

surge el número real

$$7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$$

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z=0$.

Actividades propuestas



2. Escribe la expresión algebraica que nos proporciona el área de un círculo.

3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera: *x* e *y*:

a) La mitad del opuesto de su suma.

b) La suma de sus cubos

c) El cubo de su suma

d) El inverso de su suma

e) La suma de sus inversos

4. Traduce a un enunciado en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x + 4$ b) $x/3 - x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3)/3$ d) $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$

5. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 15 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

6. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 15 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 20 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

8. Indica en cada caso el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

b) $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$

c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números reales y variables (o indeterminadas). Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número real que multiplica a la **parte literal**, indeterminada o indeterminadas.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el doble de una cantidad, 2·*x*, es un monomio con una única variable, *x*, y coeficiente 2.
- El volumen de un cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, r y h, y coeficiente π. Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- La expresión $7xy^2 + 3xy + 2x$ está formada por tres términos, tres monomios, cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primero, $7xy^2$, el coeficiente es 7 y la parte literal $x\,y^2$

  El segundo, 9*xy*, tiene por coeficiente 9 y parte literal *x*·*y*

  Y en el tercero, 5*x*, el coeficiente es 5 y la parte literal *x.*

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

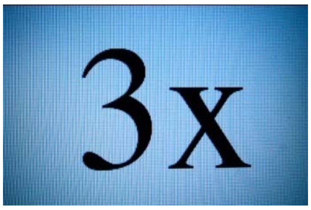
Por ejemplo:

Son monomios semejantes: $7xy^3$ y $3xy^3$.

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:



- 3·*x* es un monomio de grado 1 en la variable *x*.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas r y h.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ es un monomio de grado 5 en x e y.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ es un monomio de grado 4 en x, y y z.

Un número real puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Actividades propuestas

9. Indica el coeficiente y la parte literal de las siguientes monomios:

a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios.

El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Un polinomio está **ordenado** si sus monomios están escritos de menor a mayor grado o viceversa.

Un polinomio es **completo** si están los monomios de todos los grados, sin coeficientes nulos.

Ejemplos:

- $-8x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 23$ es un polinomio de grado 4 en la variable x. Está ordenado y no es completo.
- $7y^3 + 4y - 9$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada y. Está ordenado y no es completo.
- $z^2 - 6z + 8$ es un polinomio de grado 2 en z. Además, es un polinomio mónico, ordenado y completo.
- $5x + 2$ es un polinomio de grado 1 en x. Además, es un polinomio ordenado y completo.

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotamos por $p(-3)$, y leemos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente. De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real. En ese caso a *y* = $p(x)$ decimos que es una función polinómica.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3\cdot 5^4 + \frac{1}{5}\cdot 5^2 + 2 = -3\cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es

$$q(-1) = 4\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1) - 7 = 4\cdot(-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Al particularizar el polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta el número $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios, con la misma indeterminada, procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2-6) =$$
$$= (-3-1)\cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right)\cdot x^2 - 5x + (2-6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$
- $5abx^2 + 3abx - 2abx^2 - 4abx + 3abx^2 = (5abx^2 - 2abx^2 + 3abx^2) + (3abx - 4abx) = 6\,abx^2 - abx$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\
+ & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\
\hline
 & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2
\end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$p + q \equiv q + p$$

Ejemplo:

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) = -x^3 + (4x^2 + x^2) + (-2x - 3x) + (7 + 1) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 8$$

$$(-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (4x^2 - 2x + 7) = -x^3 + (x^2 + 4x^2) + (-3x - 2x) + (1 + 7) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 8$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p + q) + r \equiv p + (q + r)$$

Ejemplo:

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) = (4x^2 - 2x + 7 - x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) =$$
$$= (-x^3 + 5x^2 - 5x + 8) + (x - 6) = -x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

También:

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) = (4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1 + x - 6) =$$
$$= (4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 2x - 5) = -x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

Actividades propuestas

10. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

- $(2x^2 - 2x) + (-3x^2 - 4x + 2) + (3x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$
- $-2x^4 + (2x^3 + 3x - 4) + (-4x^2 - 6x + 5) + (3x^3 - 2x + 6)$

11. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x - 4 - (3x + 2) + 4x$ b) $3(x^2 - 4x + 6) - (x^2 - 6x + 5)$

c) $(-3)(2a + 4b) - (2b - 3a)$ d) $4(2a^2 - 2ab + 2b^2) - (3a^2 - 4ab)$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es éste último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el *polinomio cero*.

Ejemplo:

$$0 + (-7x^3 + 3x + 7) = (-7x^3 + 3x + 7) + 0 = -7x^3 + 3x + 7$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su *polinomio opuesto*, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p \equiv -2x^4 + x^3 + 2x - 7$ es $2x^4 - x^3 - 2x + 7$, al que denotaremos como $"-p"$. Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-2x^4 + x^3 + 2x - 7) + (2x^4 - x^3 - 2x + 7) = (-2x^4 + 2x^4) + (x^3 - x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

Actividades propuestas

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

- $4x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x - 2$
- $9x$
- $-2x^4 + 4x^2$

13. Considera los polinomios $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$, $q \equiv 2x^2 + 2x + 9$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

14. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

2.3. Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$
  $=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x)=(x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x)=(x^4-6x^3)+(-2x^2+12x)=x^4-6x^3-2x^2+12x$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordemos que el polinomio *opuesto* de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p\equiv(-1)\cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p-q\equiv p+(-q)\equiv p+(-1)\cdot q$$

Ejemplo:

$$(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$$
$$=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$$

Actividades propuestas

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

- $(-5x^3+3x)\cdot(-4x^2)$
- $(3x^4+2x)\cdot(-4x-5)$
- $(3x^3+2x^2-2x)\cdot(4x^2-x)$
- $(-1)\cdot(6x^3-3x^2-2x+3)$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

- $(-3x^3 + x) - (-2x^2)$
- $(3x^4 + 2x) - (-4x - 5)$
- $(4x^2 - 2x) - (x^3 + 2x^2 - 2x)$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

- $3x^3 - 2x^2 + x$
- $-4x^4 + 2x - 5$
- $-x^2 + 2x - 6$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Ejemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2) = 2x\cdot(-x^3+x^2) - 7\cdot(-x^3+x^2) = -2x^4+2x^3+7x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7) = -x^3\cdot(2x-7) + x^2\cdot(2x-7) = -2x^4+7x^3+2x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p \cdot q) \cdot r \equiv p \cdot (q \cdot r)$$

Ejemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x) = (-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x) =$$
$$= 12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right) = (4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x) =$$
$$= 12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

Actividades propuestas

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

- $x^2 \cdot (-3x^2 - 4x + 2) \cdot 3x^3$
- $(3x - 4) \cdot (-4x^2 - 6x + 5) \cdot (-2x)$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el *polinomio unidad*.

Ejemplo:

$$1 \cdot (-5x^3 - 2x + 3) = (-5x^3 - 2x + 3) \cdot 1 = -5x^3 - 2x + 3$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot \left(x^3 - 6x + 7\right) =$$
$$= 3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot (-2x + 7) + (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) =$$
$$= (-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo:

$$6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$$

Actividades propuestas

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

- $-20x^3 - 40x^2 + 10x$
- $60x^4 - 30x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introducción a las fracciones polinómicas

Hasta este momento hemos estudiado la suma y el producto de polinomios. En cualquiera de los casos el resultado siempre es otro polinomio. Cuando establecemos una **fracción polinómica** como, por ejemplo,

$$\frac{3x^3-x}{2x^2+x-3}$$

lo que tenemos es una **fracción algebraica**, que en general, no es un polinomio. Sí aparece un polinomio en el caso particular en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que la expresión anterior no es un polinomio: cualquier polinomio puede ser evaluado en cualquier número real. Sin embargo esa expresión no puede ser evaluada para $x=1$, ya que nos quedaría el número 0 en el denominador.

Podríamos creer que la siguiente fracción polinómica sí es un polinomio:

$$\frac{-2x^3+5x^2-3x}{x}=\frac{-2x^3}{x}+\frac{5x^2}{x}+\frac{-3x}{x}=-2x^2+5x-3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x=0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor. Son **expresiones equivalentes** cuando ambas tienen sentido.

3.2. División de polinomios

Aunque, como hemos visto en el apartado anterior, una fracción polinómica, en general, no es un polinomio, vamos a adentrarnos en la división de polinomios pues es una cuestión importante y útil.

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (*c*) y el resto (*r*). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D=d\cdot c+r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d}=c+\frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando $r=0$.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente *c*, tal que el resto *r* sea un número menor que el divisor *d*, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto *r*, podemos escoger arbitrariamente un valor para el cociente *c* el cual nos suministra su valor asociado como resto *r*. En efecto, si tenemos como dividendo *D* = 673 y como divisor *d* = 12, "si queremos" que el cociente sea *c* = 48 su resto asociado es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

y la conexión entre estos cuatro números es

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$. También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

También escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aunque, en tal caso, seremos conscientes de las cautelas señaladas en el apartado anterior en cuanto a las equivalencias entre polinomios y otras expresiones algebraicas.

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto.

Ejemplo:

Vamos a dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

o, como igualdad entre expresiones algebraicas,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

A la vista de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, y de lo dicho sobre $r(x)$, es evidente que el grado del polinomio cociente, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Vamos a obtenerlo monomio a monomio.

- Primera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Para poder lograr la igualdad $p \equiv q \cdot c + r$, como el grado de $r(x)$ será 1 o 0, el término de mayor grado de $p(x)$, $6x^4$, surgirá del producto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtenemos la primera aproximación de $c(x)$, su monomio de mayor grado:

$$c_1(x) = 3x^2$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

y, de manera automática, también un primer resto $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ es de grado 3, mayor que 2, el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación a los polinomios cociente y resto:

Si particularizamos la igualdad entre expresiones algebraicas $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ a lo que tenemos hasta ahora resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir el polinomio $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, surgido como resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. Es decir, repetimos lo hecho antes pero considerando un nuevo polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

El nuevo objetivo es alcanzar la igualdad $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Al igual que antes, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. Como el término de mayor grado de $r_1(x)$, $8x^3$, sale del producto $q(x) \cdot c_2(x)$, es necesario que el polinomio cociente contenga el monomio

$$c_2(x) = 4x$$

Ello nos lleva a un segundo resto $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ es de grado 2, igual que el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Tercera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Lo realizado en la etapa segunda nos permite avanzar en la adecuada descomposición de la expresión algebraica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta tercera etapa consiste en dividir el polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nuevo repetimos el algoritmo pero con otro polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Como en cada paso, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. El término de mayor grado de $r_2(x)$, $-4x^2$, surge del producto $q(x)\cdot c_3(x)$, por lo que

$$c_3(x)=-2$$

y el tercer resto $r_3(x)$ es

$$r_3(x)=r_2(x)-q(x)\cdot c_3(x)=(-4x^2-9x-2)-(2x^2-x+3)\cdot(-2)=$$
$$=(-4x^2-9x-2)-(-4x^2+2x-6)=-11x+4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ es de grado 1, menor que 2, grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto sí es el definitivo. Hemos concluido:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Si lo expresamos mediante polinomios:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusión: al dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x)=3x^2+4x-2$ y como polinomio resto $r(x)=-11x+4$.

Seguidamente vamos a agilizar la división de polinomios:

Actividades propuestas

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ \ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 &
\end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ \ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\
-4x^2-9x-2 &
\end{array}$$

- Las tres etapas:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\
-4x^2-9x-2 & \\
\underline{4x^2-2x+6} & \\
-11x+4 &
\end{array}$$

22. Divide los siguientes polinomios:

- $3x^3-2x^2-2x+6$ entre x^2-3x+5
- $-15x^3-3x^2+4x+5$ entre $5x^3-2x^2-2x+4$
- $6x^4-7x^3+7x^2-4x-8$ entre $-2x^2+2x+5$
- $-16x^5-3x^4+7x^3+3x^2+4x+6$ entre $4x^3+2x^2+x-2$
- $-7x^5+3x^2+2$ entre x^2+4

23. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2+2x-1$ como polinomio cociente y $r(x)=-2x^2+3$ como resto.

3.3. Operaciones con fracciones algebraicas

Puesto que tanto los polinomios como las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números reales, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números reales.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones algebraicas debemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Actividades propuestas

24. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1}+\frac{5}{2x}$ b) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-2x}{5x^2+4x}\cdot\frac{5}{3x-2}$ d) $\frac{x-4}{x^2+5x}:\frac{x-4}{x+5}$

25. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

- $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3}+\frac{4x-1}{x^2}$
- $\frac{x-1}{x^2+5x}-\frac{6}{x+5}$

26. Comprueba, simplificando, las siguientes igualdades:

- $\frac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$
- $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\frac{3}{2}y$
- $\frac{3x^2-9x}{6x+12}=\frac{x^2-3x}{x+4}$
- $\frac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y}=\frac{3y^2+2y}{y-4}$
- $\frac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b}=\frac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

27. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3-9x^2-6x):3x$

b) $(7a^3-70a^2-21):7$

c) $(25x^4-10x^2):5x^2$

d) $(3x^2y^3-8xy^2):xy^2$

28. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

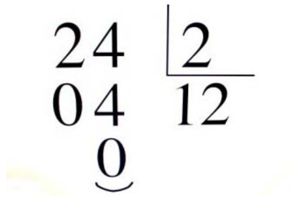
a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

4.1. Factorización de un polinomio

Tal y como ocurre con la división entera, la división de polinomios también puede ser **exacta**, es decir, el resto puede ser el polinomio cero.



Ejemplo:

$$\begin{array}{rl} 3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8 & \underline{|\;-3x^2+3x-2\;} \\ \underline{-3x^5+3x^4-2x^3} \qquad\qquad\qquad & -x^3+2x-4 \\ -6x^3+18x^2-16x+8 & \\ \underline{6x^3-6x^2+4x} \quad & \\ 12x^2-12x+8 & \\ \underline{-12x^2+12x-8} & \\ 0 & \end{array}$$

En este caso escribimos

$$\frac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$$

y diremos que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divide a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Si optamos por una igualdad polinómica:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$$

Observamos que el haber obtenido como resto el polinomio 0 nos permite expresar el polinomio dividendo, $p(x)$, como producto de otros dos polinomios, los polinomios divisor y cociente, $q(x)\cdot c(x)$. Hemos alcanzado una **factorización** del polinomio $p(x)$, o una **descomposición en factores** de $p(x)$.

En general, un polinomio concreto puede ser factorizado, o descompuesto, por medio de diferentes grupos de factores. Si continuamos con el polinomio $p(x)$ anterior, una manera de obtener una descomposición alternativa consiste en, a su vez, alcanzar una factorización de alguno de los polinomios $q(x)$ o $c(x)$. Constatemos que el polinomio $-x^2+2x-2$ divide a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{rl} -x^3 \qquad\quad +2x-4 & \underline{|\;-x^2+2x-2\;} \\ \underline{x^3-2x^2+2x} \quad & x+2 \\ -2x^2+4x-4 & \\ \underline{2x^2-4x+4} & \\ 0 & \end{array}$$

En efecto, la división es exacta y ello nos lleva a la siguiente igualdad:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Si la trasladamos a la descomposición que teníamos de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Actividades propuestas

29. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

- $-3x^3+3x=-3x\cdot(\qquad\quad)$
- $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad\quad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad\quad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad\quad)$

30. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

Diremos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

Es claro que los polinomios de grado 1 no pueden ser descompuestos como producto de otros dos polinomios de menor grado. Son polinomios irreducibles. En el siguiente apartado constataremos que hay polinomios de grado 2 que también son irreducibles.

De las diferentes factorizaciones que puede admitir un polinomio la que más información nos proporciona es aquella en la que todos los factores que intervienen son polinomios irreducibles, puesto que *no es mejorable*. Conviene advertir que, en general, no es fácil alcanzar ese tipo de descomposiciones. Seguidamente vamos a ahondar en esta cuestión.

4.2. Raíces de un polinomio

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$p(\alpha)=0$$

Ejemplo:

Consideremos el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- El número 2 es una raíz de $s(x)$, puesto que

$$s(2)=2\cdot2^3+2\cdot2^2-8\cdot2-8=2\cdot8+2\cdot4-16-8=16+8-16-8=0$$

- Otra raíz de $s(x)$ es el número -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

- En cambio, el número 1 no es una raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-8\cdot 1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq 0$$

- Tampoco es raíz de $s(x)$ el número 0:

$$s(0)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-8\cdot 0-8=0+0-0-8=-8\neq 0$$

Actividades propuestas

31. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

- $x=3$ de x^3-3x^2+1
- $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2
- $x=1$ de x^3-3x^2+x+1
- $x=0$ de x^3-3x^2+1
- $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

En el siguiente ejercicio vamos a recoger algunas conexiones entre las raíces de un polinomio y las operaciones de suma y producto de polinomios.

Actividades propuestas

32. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

- Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?
- Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?
- ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

El que un número real sea raíz de un polinomio está fuertemente conectado con la factorización de dicho polinomio:

Si un número real concreto α es una raíz del polinomio $p(x)$, entonces el polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$. Dicho de otro modo, el polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la siguiente forma:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para cierto polinomio $c(x)$, el cual puede ser conocido al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Vamos a demostrar la anterior aseveración.

Si dividimos $p(x)$ entre $x-\alpha$, obtendremos

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+r(x)$$

Como el polinomio divisor, $x-\alpha$, es de grado 1, y el polinomio resto ha de ser de inferior grado, deducimos que el resto anterior es un número real β. Escribamos $r(x)\equiv\beta$:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$$

El polinomio de la izquierda, $p(x)$, es idéntico al de la derecha, $(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$. Por esa razón, al evaluarlos en cierto número real obtendremos el mismo valor. Procedamos a particularizarlos para $x=\alpha$. Al ser α raíz de $p(x)$, $p(\alpha)=0$. Esto nos lleva a

$$0=p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)+\beta=0\cdot c(\alpha)+\beta=0+\beta=\beta$$

y, así, el resto es 0, y

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Es natural que nos preguntemos si es cierto el recíproco del resultado anterior. La respuesta es afirmativa:

Si un polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para cierto polinomio $c(x)$ y cierto número real α, entonces el número α es una raíz del polinomio $p(x)$, esto es, $p(\alpha)=0$.

Su demostración es sencilla. Basta que evaluemos p en $x=\alpha$:

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)=0\cdot c(\alpha)=0$$

Si fundimos estos dos últimos resultados en uno solo nos encontramos ante el denominado *teorema del factor*:

Teorema del factor. Un número real concreto α es raíz de un polinomio $p(x)$ si y solo si el polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$, es decir, si y solo si el polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Ejemplo:

Volvamos con el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- Sabemos que el número 2 es una raíz de $s(x)$. Ratifiquemos que $x-2$ divide a $s(x)$:

$$\begin{array}{rl} 2x^3+2x^2-8x-8 & \underline{|\ \ x-2\ \ } \\ \underline{-2x^3+4x^2}\qquad\qquad & 2x^2+6x+4 \\ 6x^2-8x-8 & \\ \underline{-6x^2+12x}\quad\ & \\ 4x-8 & \\ \underline{-4x+8} & \\ 0 & \end{array}$$

Podemos descomponer $s(x)$ de la siguiente forma:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vimos que otra raíz de $s(x)$ es el número -1. Si observamos la precedente factorización de $s(x)$, es evidente que este número -1 no es raíz del factor $x-2$, por lo que necesariamente debe serlo del otro factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

Al haber constatado que -1 es raíz del polinomio $c(x)$, deducimos que $x-(-1)=x+1$ nos va a ayudar a descomponer $c(x)$:

$$\begin{array}{rl} 2x^2+6x+4 & \underline{|\ \ x+1\ \ } \\ \underline{-2x^2-2x}\qquad & 2x+4 \\ 4x+4 & \\ \underline{-4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

Luego:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Si reunimos lo hecho en los apartados precedentes de este ejemplo:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

Se ha descompuesto $s(x)$ como producto de tres polinomios irreducibles de grado 1. A la vista de ellos conocemos todas las raíces de $s(x)$, los números 2, -1 y -2.

Los resultados teóricos que hemos establecido nos conducen a este otro:

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Hay polinomios que no admiten raíces, es decir, que no se anulan nunca:

Ejemplos:

- El polinomio $t(x)=x^2+1$ no tiene raíces puesto que al evaluarlo en cualquier número real α siempre nos da un valor positivo y, por lo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1 > 0$$

  Además, este polinomio de grado dos, $t(x)=x^2+1$, es un polinomio irreducible porque, al carecer de raíces, no podemos expresarlo como producto de polinomios de menor grado.

- Otro polinomio sin raíces es

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

  Sin embargo, $u(x)=x^4+2x^2+1$ es un polinomio reducible puesto que, obviamente, puede ser expresado como producto de dos polinomios de inferior grado.

Aunque no sea posible demostrarlo, por su dificultad, sí se puede anunciar que todo polinomio de grado impar posee, al menos, una raíz real.

Actividades propuestas

33. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

34. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

35. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

36. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

37. Demuestra una regla que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

38. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admite al número 1 como raíz.

39. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

- $x+6$
- $-x+4$
- $2x-7$
- $-4x-5$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $-3x$
- x^2-5x
- $4x^2-x-3$
- x^3-4x
- x^3+4x

4.3. Regla de Ruffini

En el apartado anterior se probó la equivalencia entre que un número real α sea raíz de un polinomio $p(x)$ y el hecho de que el polinomio mónico de grado uno $x-\alpha$ divida a $p(x)$, esto es, que exista otro polinomio $c(x)$ tal que sea posible una factorización de $p(x)$ del tipo:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Debido a la importancia que tiene la división de polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x-\alpha$, es conveniente agilizar tales divisiones.

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Vamos a dividirlo entre $x+2$. Si el resto es 0 el número -2 será una raíz de $p(x)$; en el caso contrario, si no es 0 el resto, entonces -2 no será raíz de $p(x)$.

$$\begin{array}{rl}
3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\ \ x+2\qquad} \\
\underline{-3x^3-6x^2} \qquad\qquad & 3x^2-10x+21 \\
-10x^2+\ x\ +3 & \\
\underline{10x^2+20x}\quad\ & \\
21x+3 & \\
\underline{-21x-42} & \\
-39 &
\end{array}$$

Puesto que el resto no es cero, -2 no es una raíz de $p(x)$.

Veamos cómo han surgido tanto el polinomio cociente como el resto. El que el grado del dividendo sea tres y que el divisor sea de grado uno impone que el cociente tenga grado dos y que el resto sea un número real. El cociente consta de los monomios $3x^2$, $-10x$ y 21, los cuales coinciden con los monomios de mayor grado de cada uno de los dividendos después de disminuir sus grados en una unidad: $3x^2$ procede de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividendo inicial), $-10x$ viene de $-10x^2+\ x\ +3$ y, por último, 21 de $21x+3$. Este hecho, coincidencia en el coeficiente y disminución del grado en una unidad, se debe a que el divisor, $x+2$, es mónico y de grado uno.

Seguidamente, vamos a tener en cuenta únicamente los coeficientes del dividendo, por orden de grado,

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3, –4, 1 y 3; en cuanto al divisor, como es mónico y de grado uno, basta considerar su término independiente, +2, pero como el resultado de multiplicar los monomios que van conformando el cociente por el divisor hemos de restárselo a cada uno de los dividendos, atendiendo a este cambio de signo, en lugar del término independiente, +2, operaremos con su opuesto, –2, número que, a la vez, es la raíz del divisor $x+2$ y sobre el que pesa la pregunta de si es o no raíz de $p(x)$.

- Primer paso de la división:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & -10 & & \end{array}$$

Aparece en el cociente el monomio $3x^2$ (coeficiente 3), el cual provoca la "desaparición" de $3x^3$ en el dividendo y la aparición del monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) y, en el cociente, $-10x$.

- Segundo paso. El dividendo pasa a ser $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \end{array}$$

La irrupción en el cociente del monomio $-10x$ (coeficiente -10) provoca la "desaparición" de $-10x^2$ en el dividendo y la aparición del monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) y, en el cociente, 21.

- Tercer paso. El dividendo pasa a ser $21x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \\ \qquad\quad \underline{-21x-42} & \\ \qquad\qquad\quad -39 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & -39 \end{array}$$

Tenemos en el cociente el término independiente 21. Éste provoca la eliminación de $21x$ en el dividendo y la aparición del término $-42=(-2)\cdot 21$. Después de operar (sumar) nos encontramos con el resto $-39=3-42$.

En cada uno de los pasos figura, en la parte derecha, lo mismo que se ha realizado en la división convencional, pero con la ventaja de que todo es más ágil debido a que solo se manejan números reales: los coeficientes de los distintos polinomios intervinientes.

Estamos ante la llamada **regla de Ruffini**, un algoritmo que nos proporciona tanto el cociente como el resto que resultan de dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x-\alpha$.

Ejemplo:

- Dividamos el polinomio $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{c|rrrr|r} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

El cociente es $-x^3-x^2-3x-4$ y el resto -8. Como el resto no es 0 deducimos que el número 3 no es raíz de $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$. La relación entre dividendo, divisor, cociente y resto es, como siempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3-5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Si evaluamos $p(x)$ en $x=3$ no puede dar cero, pero ¿qué valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalmente hemos obtenido el resto anterior. Este hecho viene recogido en el denominado teorema del resto.

Teorema del resto. El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Actividades propuestas

40. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

- $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$
- x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$
- $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$
- x^3-8x+2 entre $x-3$

41. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

- $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5

- $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$
- $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$
- $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$

42. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ en $x = 3$.

43. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ entre $2x + 6$.

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este tema la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Ejemplos:

- Comprobemos, mediante la regla de Ruffini, que $\alpha = \frac{1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^2 - 3x + 1$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Para conocer las raíces del polinomio $x^2 - 2$ debemos estudiar si hay algún número real α tal que lo anule, es decir, para el que se tenga

$$\alpha^2 - 2 = 0$$
$$\alpha^2 = 2$$
$$\alpha = \pm\sqrt{2}$$

  Así, el polinomio de grado dos $x^2 - 2$ tiene dos raíces distintas, las cuales son números irracionales.
- Ya sabemos que hay polinomios que carecen de raíces, como por ejemplo $x^2 + 4$.

Apreciamos que la regla de Ruffini nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo apartado destacaremos ciertos "números candidatos" a ser raíz de un polinomio.

4.4. Cálculo de las raíces de un polinomio

A la hora de buscar las **raíces enteras de un polinomio** disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Procedamos a su demostración. Supongamos que cierto número entero α es una raíz de ese polinomio. Tal número debe anularlo:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha \cdot (a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la última igualdad, el número del lado izquierdo es entero, porque está expresado como una suma de productos de números enteros. Por ello, el número del lado derecho, $\frac{-a_0}{\alpha}$, también es entero. Al ser también enteros tanto $-a_0$ como α, alcanzamos que α es un divisor de a_0.

Ejemplos:

- Determinemos, con arreglo al anterior resultado, qué números enteros son candidatos a ser raíces del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:
  Tales números enteros candidatos deben ser divisores de -6, el término independiente del polinomio. Por ello, los únicos números enteros que pueden ser raíz de ese polinomio son:
  $$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$
  Puede comprobarse que los números enteros 2 y -3 son raíces; los demás no lo son.
- Las únicas posibles raíces enteras del polinomio $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ también son:
  $$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$
  En este caso ninguno de esos números es una raíz del polinomio.

Actividades propuestas

44. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

- $x^3 - x^2 + 2x - 2$
- $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
- $2x^3 + x^2 - 18x - 9$
- $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Algo más general podemos afirmar sobre clases de números y raíces de un polinomio:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces racionales**, si las tuviera, necesariamente tienen por numerador algún divisor del término independiente, a_0, y por denominador algún divisor del coeficiente del término de mayor grado, a_n.

Ejemplos:

- Volviendo a uno de los polinomios del ejemplo anterior, $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$, los números racionales candidatos a ser raíces suyas tienen por numerador a un divisor de -6 y por denominador a un divisor de 2. Por lo tanto, los únicos números racionales que pueden ser raíz de ese polinomio son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

  Además de 2 y -3, también es raíz $\frac{-1}{2}$; los demás no lo son.

- Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 3$ son:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

  En este caso ninguno de esos números es raíz del polinomio.

Actividades propuestas

45. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

46. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

- $3x^2 + 4x + 1$
- $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

En el tema próximo, dedicado a las ecuaciones, seremos capaces de obtener las raíces de todo polinomio de grado dos, si las tuviere.

4.5. Factorización de polinomios y fracciones algebraicas

La factorización de polinomios puede ser utilizada para simplificar algunas expresiones en las que intervienen fracciones algebraicas. Veámoslo a través de un par de ejemplos:

Ejemplo:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Una fracción algebraica como:

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizaciones en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idénticas pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, es decir, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Ejemplo:

- En una suma de fracciones polinómicas como ésta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en los cocientes a partir de la descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factorizado. De esa forma, entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

Actividades propuestas

47. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

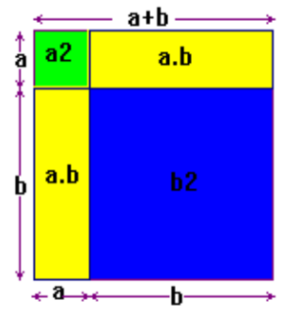
- $\dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$
- $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$
- $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

48. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

- $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$
- $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

4.6. Productos notables de polinomios

En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en un algún caso concreto, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.



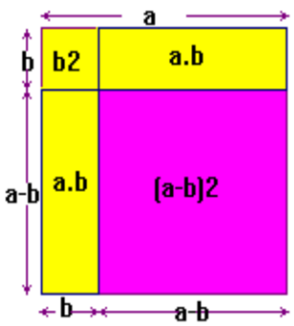
Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Observa los cuadrados de la ilustración y comprueba cómo se verifica.

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Observa los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Actividades propuestas

49. Realiza los cálculos:

- $(1+4a)^2$
- $(-x+5)^2$
- $(-2x-3)^2$
- $(x^2-1)^3$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $(5x+3)^3$

50. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

- $(a+b+c)^2$
- $(a+b-c)^2$

51. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x – 5/x)^2$

d) $(3a – 5)^2$ e) $(a^2 – b^2)^2$ f) $(3/5y – 2/y)^2$

52. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

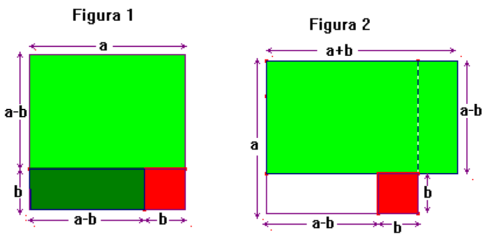
a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 – 4x + 1$ c) $b^2 – 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 – 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Observa la ilustración.



Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$ $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Actividades propuestas

53. Efectúa estos productos:

- $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$
- $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$
- $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$

Conviene darse cuenta de que sus fórmulas, leídas al revés, constituyen una factorización de un polinomio.

Ejemplos:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$

- $x^2 - 5 = (x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{5})$
- $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

Actividades propuestas

54. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

- $x^2 - 4x + 4$
- $3x^2 + 18x + 27$
- $3x^5 - 9x^3$

55. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$

56. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

57. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2 - 1}{3x + 3}$ b) $\dfrac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 - 9}$ c) $\dfrac{6 - 3a}{a^2 - 4}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Haz magia

- Piensa un número
- Multiplícalo por 2
- Suma 4
- Multiplica por 5
- Divide por 10
- Resta el número
- Magia, magia, magia…
- ¡El resultado es **2**!

Analiza cómo tú, el mago, has podido conocer el resultado.

Pasatiempo

A B A

A B A

A B A

B C B

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Demostró dos teoremas esenciales para la teoría de la relatividad que permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Trabajó en estructuras algebraicas y en la actualidad el calificativo ***noetheriano*** se utiliza para designar muchos conceptos en álgebra: anillos *noetherianos*, grupos *noetherianos*, módulos *noetherianos*, espacios topológicos *noetherianos*, etc.

Cuando intentó dar clases en la Universidad de *Göttingen* el reglamento indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres por lo que *Noether* no pudo acceder a la docencia universitaria. Se cuenta, como anécdota, que *Hilbert* dijo en un Consejo de dicha Universidad:

> *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños"*

De ella dijo Albert Einstein:

> *"En el reino de Álgebra en el que los mejores matemáticos han trabajado durante siglos, ella descubrió métodos que se ha demostrado que tienen una importancia enorme... La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas. ... En este esfuerzo hacia la belleza lógica se descubren fórmulas espirituales para conseguir una penetración más profunda en las leyes de naturaleza"*

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y letras sometidos a las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ de grado 6 y coeficiente –5 $7\cdot x^2$ de grado 2 y coeficiente 7
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$2ax - ax = ax$ $2ax\cdot ax = 2a^2x^2$
División de dos polinomios	Al dividir el polinomio $p(x)$ entre $q(x)$ se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente, $c(x)$, y resto, $r(x)$, tales que $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Raíces y factorización	Si α es una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 3
iii. Que al resultado anterior le sume 18
iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
v. Que divida entre 6 la última cantidad
vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
vii. Independientemente del número desconocido original, ¿qué número ha surgido?

2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
iii. Que multiplique por 5 lo obtenido
iv. Que multiplique el resultado precedente por 5
v. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
vi. Si tu compañero te dice el resultado de estas operaciones, tu descubres sus dos números. Si te dice, por ejemplo, 467, entonces sabes que el número de una cifra es 4 y el de dos cifras es 67, ¿por qué?

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

- $\dfrac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)}$
- $\dfrac{-x}{x^2-6x+9}$
- $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$
- $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Una persona tiene ahorrados 2500 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(5) = -2$.

7. Consideremos los polinomios $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 8$ y $r(x) = 5x^2 + 6x - 2$. Realiza las siguientes operaciones:

- $p + q + r$
- $p - q$
- $p \cdot r$
- $p \cdot r - q$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) (0,3*x* – 0,2*y* + 0,1*z*) · (0,1*x* + 0,2*y* – 0,3*z*) c) (*x* – 1) (*x* – *a*) (*x* – *b*)

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

- $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$
- $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$

10. Calcula los cocientes:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza las operaciones entre las siguientes fracciones algebraicas:

- $\frac{2x-3}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{2x-3}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \frac{3x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{2x-3}{x^2-3x} : \frac{3x}{x^2-6x+9}$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

14. Determina un polinomio de grado 4 tal que sus raíces sean 6, -3, 2 y 0.

15. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

16. Determina un polinomio de grado 5 tal que sus raíces sean 6, -3, 2, 4 y 5.

17. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = x^2 + x + 1$.

18. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

- $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$
- $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$
- $3x^3 + 5x^2 + x - 1$
- $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

19. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

20. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

- $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$
- $3x^3 + 5x^2 + x - 1$
- $2x^3 + x^2 - 6x - 3$
- $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

21. Calcula las potencias:

a) $(x - 2y + z)^2$ b) $(3x - y)^3$ c) $((1/2)a + b^2)^2$ d) $(x^3 - y^2)^2$

22. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

- $x^2 - 36$
- $5x^2 + 1$
- $5x^2 - 11$
- $x^2 - 3y^2$
- $x^2 - 6x + 9$
- $x^4 - 8x^2 + 16$
- $x^2 + \sqrt{20}\,xy + 5y^2$
- $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
- $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

23. Descompón en factores:

a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

24. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

25. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7} : \dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b} - \dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x + (1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

28. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a+b}$

29. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}} : \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+y}}$ b) $\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y}}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$ b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado tres suele ser otro polinomio de grado ……….

b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

d) La diferencia de dos polinomios de grado cuatro suele ser otro polinomio de grado ……….

4. Al dividir el polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado 1. d) debe ser de grado menor que 2.

5. Considera el polinomio $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

a) -3 b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces. b) tiene, a lo sumo, tres raíces. c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

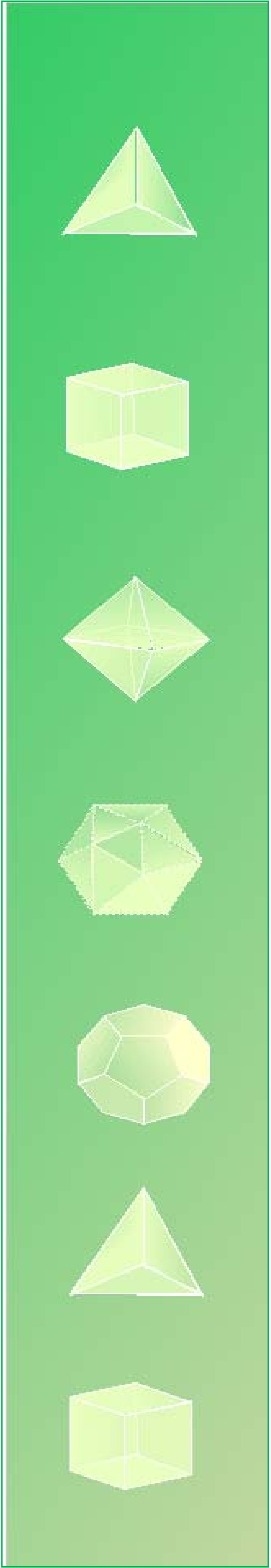
b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado diez que no tenga ninguna raíz.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



MATEMÁTICAS: 4ºA ESO
Capítulo 4:
Ecuaciones y sistemas lineales

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

Ya sabes resolver muchas ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y utilizarlo para resolver gran número de problemas de lo más variado. En este capítulo vamos a repasar la resolución de ecuaciones que ya conoces, de primer grado, de segundo… y aprenderemos a resolver algunas nuevas ecuaciones y a utilizar lo aprendido para resolver problemas de la vida cotidiana por medio de las ecuaciones.

Repasaremos también los sistemas de ecuaciones lineales, cómo se resuelven por diferentes métodos y su aplicación para resolver problemas que nos rodean, pero utilizaremos esos métodos para resolver algunos sistemas nuevos que no sean lineales.

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tan bien conoces cómo $ax + b = 0$. Ya los egipcios resolvían problemas que se pueden considerar de ecuaciones aunque no existía la notación algebraica. El matemático griego *Diofanto* en el siglo III resolvió ecuaciones de primer y segundo grado. En el siglo XV hubo un desafío para premiar a quien resolviera una ecuación de tercer grado. En el siglo XIX se demostró que no existe una fórmula general que resuelva las ecuaciones de quinto grado.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

ECUACIONES

1.1. Concepto de ecuación

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que únicamente es cierta para algunos valores de las incógnitas. Los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad son las **soluciones** de la ecuación.

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones, es decir, los valores que al sustituirlos en la ecuación la convierten en una identidad numérica.

Comprobar la solución consiste en sustituirla en la ecuación y ver si la igualdad obtenida es una identidad.

Hay que diferenciar una **ecuación** de una **identidad** algebraica como $x(x + 2) = x^2 + 2x$ que es cierta para todo valor de x.

Las ecuaciones pueden tener una única incógnita, o más de una. Pueden ser polinómicas o de otro tipo (exponencial, racional, irracional…). En las ecuaciones polinómicas los exponentes de las incógnitas son números naturales. Pueden ser de primer grado, si el exponente más alto de la incógnita es uno, de segundo grado si es dos…

Ejemplo:

- La ecuación $(x + 3)^2 = 4x^3$ es una ecuación polinómica de tercer grado con una incógnita.
- La ecuación $7x + \frac{1}{x-2} = 0$ es una ecuación racional. No es polinómica.
- La ecuación $7x + sen2x = 0$ no es una ecuación polinómica.
- La ecuación $4xy + 8x = 0$ es polinómica de dos variables.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

Para resolver ecuaciones vamos sustituyéndola por otra equivalente hasta llegar a la solución. Para obtener ecuaciones equivalentes podemos:

1) Sumar o restar un mismo término a ambos miembros de la ecuación.
2) Multiplicar ambos miembros por un mismo número.
3) Dividir ambos miembros por un mismo número cuidando que ese valor no sea cero.

Ejemplo:

- Para resolver $5x + 3 = 9$ la vamos sustituyendo por otras equivalentes:

$5x + 3 = 9 \Rightarrow$ (restamos 3 a ambos miembros de la ecuación)

$5x + 3 - 3 = 9 - 3 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow$ (dividimos ambos miembros por 5 que es distinto de cero)

$5x/5 = 6/5 \Rightarrow x = 6/5$. Ya conocemos la solución, $x = 6/5$.

Comprobamos si $x = 6/5$ es la solución sustituyendo en la ecuación:

$5x + 3 = 9 \Rightarrow 5(6/5) + 3 = 9 \Rightarrow 6 + 3 = 9$. En efecto, 6/5 es solución.

El procedimiento para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, recuerda que es:

1) Eliminar los denominadores
2) Eliminar los paréntesis
3) Agrupar los términos con la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

4) Efectuar operaciones
5) Despejar la incógnita.

Ejemplo:

- Resolver: $9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}$

1) Eliminar los denominadores

$$9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5} \Rightarrow 5\cdot 9(2-3x)+4(x-3)=5\cdot 4x-(7-3x) \Rightarrow$$

2) Eliminar los paréntesis

$90 - 135x + 4x - 12 = 20x - 7 + 3x \Rightarrow$

3) Agrupar los términos con la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro.

$-135x + 4x - 20x - 3x = -7 - 90 + 12 \Rightarrow$

4) Efectuar operaciones

$-154x = -85 \Rightarrow$

5) Despejar la incógnita.

$x = -85/-154 = 85/154$

Actividades propuestas

1. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $4x - 5xy + 7 - 2yx = 8x$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5(7x + 6) = 21$ b) $-2x + 7 = -7(3x - 2) - 8x$ c) $2x - 6(9 + 5x) = 4(x + 6) + 7$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}$ b) $6-\left(8-4\left(3x-\frac{3}{7}\right)\right)=2x-\frac{5-9x}{7}$ c) $8(3x-5)=7(6-9x)$

4. Comprueba que la solución de $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{1}{6}$ es $x = 6$.

5. Escribe tres ecuaciones de primer grado que tengan como solución 3, otras tres que tengan infinitas soluciones y tres que no tengan solución.

6. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 30 cm y que su base es doble que su altura.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(3x + 4) = 7$ b) $-4x + 6 = -9(5x - 1) - 5x$

c) $4x - 7(11 + 2x) = 6(x + 8) + 9$ d) $2(3-4x)+\frac{4}{7}(x-2)=2x-\frac{5-4x}{7}$

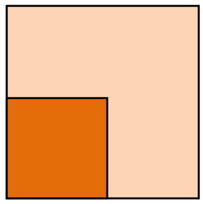
e) $2-\left(7-5\left(2x-\frac{1}{3}\right)\right)=4x-\frac{6-2x}{3}$ f) $3(7x-1)=9(3-2x)$

1.2. Ecuaciones de 2º grado

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. En este capítulo vamos a profundizar y a aprender a resolver este tipo de ecuaciones. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 3 cm y su área ha quedado multiplicada por 4, ¿Qué lado tenía la baldosa?



Planteamos la ecuación:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 3 = 2x$, luego el lado es de 3 cm.

Hay otra solución, $x = -1$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a repasar de forma ordenada el estudio de estas ecuaciones.

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo:

- Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo

$$5x^2 - 8x + 3 = 0; \qquad -3x^2 + 9x + -6 = 0; \qquad x^2 - (3/4)x - 2,8 = 0$$

Ejemplo:

- Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números reales, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -5,8x^2 + 1,7x + -0,02 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0$$

Actividades propuestas

8. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3,2x^2 - 1,25 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $5xy^2 - 8 = 0$ d) $28 - 6,3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

9. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $2 - 7x^2 + 11x = 0$ b) $-2,3x^2 + 6,7x = 0$

c) $5x^2 - 9 = 0$ d) $9,1x^2 - 2,3x + 1,6 = 0$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas se utiliza la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de la ecuación.

Llamamos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5\cdot3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5\cdot2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

10. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $3x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $2x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 2\cdot\frac{x-1}{5} = x^2 - \frac{10x+8}{5}$ b) $4\cdot\frac{x-3}{5} - \frac{7-4x}{x} = 8$ c) $x(x-2) + 3(x^2 - 7) + 11 = -11$

d) $6(x^2 - 7) + 2(x^2 - 9) + 3 = 2$ e) $\frac{3-6x^2}{2x} - \frac{1}{3} = \frac{2x-5}{6}$ f) $\frac{1-2x^2}{3x} - \frac{2}{5} = \frac{4x-2}{15}$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, ¿te acuerdas?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de 2º grado, nos vamos a fijar en el signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales (una solución doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

- La ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$ tiene como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 16 + 48 = 64 > 0$$

Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 6 y –2. (*Comprobación:* $6^2 - 4\cdot 6 - 12 = 36 - 24 - 12 = 0$ y $(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 4 + 8 - 12 = 0$).

- La ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Se puede escribir como:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0$, que tiene la solución doble $x = 2$.

- La ecuación $x^2 + 5x + 9 = 0$ tiene como discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4\cdot 1\cdot(9) = 25 - 36 = -11 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

12. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $5x^2 + 2x + 4 = 0$ **b)** $2x^2 - 7x + 8 = 0$

c) $x^2 - 5x - 11 = 0$ **d)** $3x^2 - 8x + 6 = 0$

1.5. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente b vale 0 (falta b), o el coeficiente c vale 0 (falta c).

Observa: Si el coeficiente a vale cero no es una ecuación de segundo grado.

Ejemplo:

- La ecuación de 2º grado $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta b.
- La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene c, es decir, $c = 0$.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

Una ecuación de segundo grado incompleta también se puede resolver utilizando la fórmula de las completas pero es un proceso más lento y es más fácil equivocarse.

Si el coeficiente *b* = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow$$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $\frac{-c}{a} > 0$ tiene dos soluciones distintas, si $\frac{-c}{a} < 0$ no existe solución.

Si el coeficiente *c* = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resumen

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, \text{ si } c \leq 0.$$

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{-b}{a}.$$

Ejemplo:

- En la ecuación $2x^2 - 50 = 0$ falta la *b*. Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, hacemos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 5 y –5. En efecto, $2\cdot 5^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$, y $2\cdot(-5)^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$

Ejemplo:

- En la ecuación $4x^2 - 24x = 0$ falta la *c*. Para resolverla, sacamos factor común:

$$4x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 4x(x - 6) = 0$$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $4x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 6$.

En efecto, $4\cdot 0^2 - 24\cdot 0 = 0$, y $4\cdot(6)^2 - 24\cdot 6 = 4\cdot 36 - 24\cdot 6 = 144 - 144 = 0$.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de 2º grado $3x^2 - 27 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *b*. Por lo tanto, despejamos la incógnita

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

$3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 27/3 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Las soluciones son 3 y –3.

- Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 8x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*.

Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x + 8) = 0$

Obtenemos las dos soluciones: $x = 0$ y $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$. Las soluciones son 0 y –8.

Actividades propuestas

13. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

1.6. Suma y producto de las soluciones en una ecuación de segundo grado

Si en una ecuación de segundo grado: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, conocemos sus soluciones: x_1 y x_2 sabemos que podemos escribir la ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Hacemos operaciones:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

por lo que el coeficiente *c* es igual al producto de las soluciones y la suma de las soluciones es igual al opuesto del coeficiente *b*, es decir, –*b*.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Si la ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$, dividiendo por *a*, ya tenemos una de coeficiente $a = 1$, y obtenemos que:

$$x_1\, x_2 = \frac{c}{a};\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Esta propiedad nos permite, en ocasiones, resolver mentalmente algunas ecuaciones de segundo grado.

Actividades resueltas

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, y $2 + 3 = 5$, luego las soluciones de la ecuación son 2 y 3.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

El producto debe ser 9. Probamos con 3 como solución, y en efecto 3 + 3 = 6. Las soluciones son la raíz 3 doble.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

Las soluciones son –1 y 2, pues su producto es –2 y su suma 1.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones son 1 y –2, pues su producto es –2 y su suma –1.

Actividades propuestas

14. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

15. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.

16. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm^2. Calcula sus dimensiones.

17. Si 3 es una solución de $x^2 - 5x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

1.7. Otras ecuaciones

Durante siglos los algebristas han buscado fórmulas, como la que ya conoces de la ecuación de segundo grado, que resolviera las ecuaciones de tercer grado, de cuarto, de quinto… sin éxito a partir del quinto grado. Las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado son complicadas. Sólo sabemos resolver de forma sencilla algunas de estas ecuaciones.

Ejemplo:

- Resuelve: $(x - 2) \cdot (x - 6) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) = 0$.

Es una ecuación **polinómica** de grado cinco, pero al estar factorizada sabemos resolverla pues para que el producto de varios factores de cero, uno de ellos debe valer cero. Igualando a cero cada factor tenemos que las soluciones son 2, 6, –1, 3 y 7.

Ejemplo:

- La ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ es una ecuación polinómica de cuarto grado, pero con una forma muy especial. Se llama ecuación **bicuadrada**, porque podemos transformarla en una ecuación de segundo grado llamando a x^2 por ejemplo, z.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Una solución de la ecuación de segundo grado es $z = 4$, y la otra es $z = 1$.

Por tanto si $z = x^2 = 4$, entonces $x = 2$ y $x = -2$.

Y si $z = x^2 = 1$, entonces $x = 1$ y $x = -1$.

Nuestra ecuación de cuarto grado tiene cuatro soluciones: 2, –2, 1 y –1.

Ejemplo:

Si hay incógnitas en el denominador, la ecuación se denomina **racional**, y se resuelve de forma similar, quitando denominadores.

- Resuelve $\frac{3x-8+9x}{2x}=4$

Quitamos denominadores: $\frac{3x-8+9x}{2x}=4 \Rightarrow 3x-8+9x=8x \Rightarrow 3x+9x-8x=8 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$.

Ejemplo:

Si hay incógnitas dentro de un radical, la ecuación se denomina **irracional**, y se resuelve aislando el radical y elevando al cuadrado (o al índice del radical). Ahora es preciso tener una precaución, al elevar al cuadrado, la ecuación obtenida no es equivalente, se pueden haber añadido soluciones.

- Resuelve $2+\sqrt{x-3}=x-1$

Se aísla el radical: $2+\sqrt{x-3}=x-1 \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-1-2 \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-3$

Elevamos al cuadrado: $(\sqrt{x-3})^2=(x-3)^2 \Rightarrow x-3=x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-7x+12=0$.

Resolvemos la ecuación de segundo grado que tiene por soluciones 4 y 3, y comprobando en la ecuación inicial, ambas son soluciones de esta ecuación.

Ejemplo:

Si la incógnita está en un exponente la ecuación se denomina **exponencial**. Si podemos expresar los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base, se igualan los exponentes.

- Resuelve: $3^{2x}=\frac{1}{81}$

Expresamos la ecuación como potencias de una misma base: $3^{2x}=\frac{1}{81} \Rightarrow 3^{2x}=3^{-4}$

Igualamos los exponentes: $2x=-4 \Rightarrow x=-2$.

Actividades propuestas

18. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-6)\cdot(x-3)\cdot(x+7)\cdot(x-1)\cdot(x-9)=0$ b) $3(x-4)\cdot(x-8)\cdot(x+5)\cdot(x-2)\cdot(x-1)=0$

19. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4-13x^2+36=0$ b) $x^4-29x^2+100=0$ c) $x^4-10x^2+9=0$ d) $x^4-26x^2+25=0$

20. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2$ b) $\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1$

21. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$

22. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $2^{x+5}+2^{x+4}+2^{x+3}=28$ b) $5^{3x}=\frac{1}{625}$ c) $2^{2x}\cdot 4^{x}=\frac{1}{16}$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

2.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Una ecuación con varias incógnitas es una igualdad que las relaciona.

Por ejemplo:

$x^2 + y^2 = 36$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 6.

Un **sistema de ecuaciones** es, por tanto, un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación es la de una circunferencia de centro el origen y radio 6, y la segunda es la ecuación de una recta que pasa por el origen. Las soluciones del sistema son los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta.

Se llama **solución del sistema** a cada uno de los conjuntos de números que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas está formado por ecuaciones de primer grado y se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

La **solución** del sistema es un par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 9y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 6x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 8x - 4y = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5y + 3 = 4x \\ 8x - 4 = 6y \end{cases}$$

Ejemplo:

No es un sistema lineal $\begin{cases} 4xy + 6y = 1 \\ 5x - 7xy = 3 \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*, aunque es un sistema de dos ecuaciones.

Tampoco lo es $\begin{cases} 4x^2 + 6y = 5 \\ 3x - 7y = 8 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2, aunque es un sistema de dos ecuaciones.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

23. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3xy + y = 5 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y - 4x = 3 \\ x - 7y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 3 = 2y \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

2.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

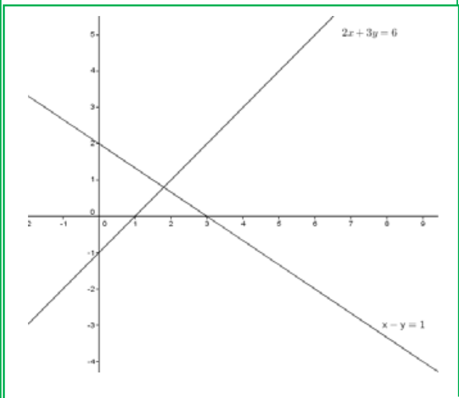
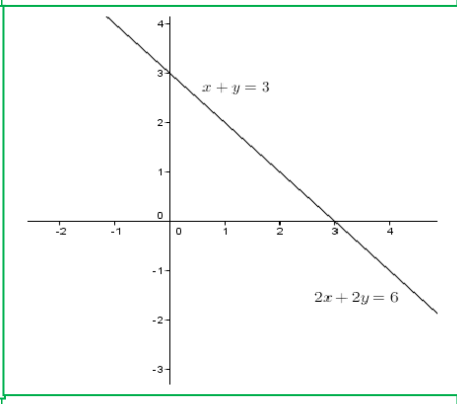
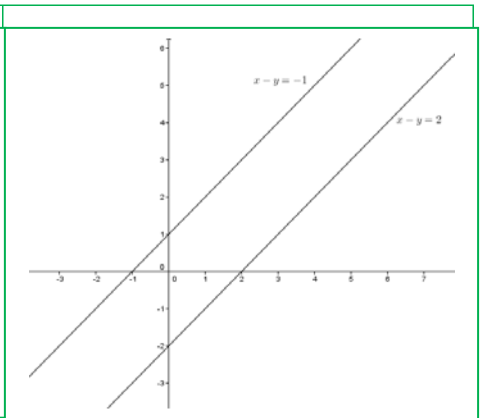
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un único punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**

		
Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Actividades resueltas

- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

  a) Compatible determinado

  b) Incompatible

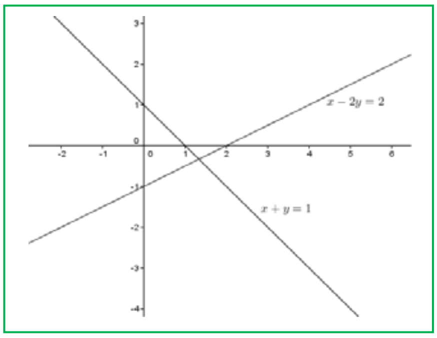
Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

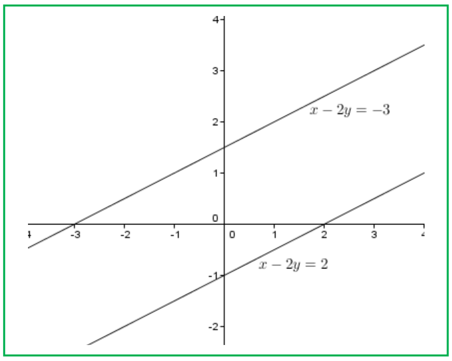
c) Compatible indeterminado

Solución:

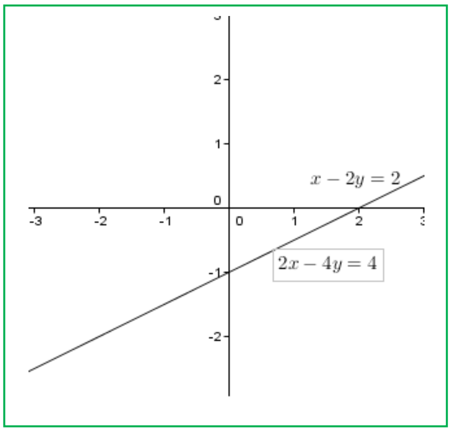
a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.



b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Una forma de resolver un sistema lineal de dos ecuaciones es el de **resolución gráfica**, representando, como hemos visto en el ejemplo anterior, las dos rectas definidas por las ecuaciones del sistema en los mismos ejes coordenados, clasificando el sistema y si es compatible y determinado, determinando el punto de intersección.

Actividades propuestas

24. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

2.3. Resolución de sistemas lineales por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot 1 = 1.$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

26. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

2.4. Resolución de sistemas lineales por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

27. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=18 \\ -2x+3y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 4x+2y=26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$

2.5. Resolución de sistemas lineales por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 0-7y=-7 \end{cases} \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x - 3\cdot1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=8 \\ 2x-5y=-23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=19 \\ 4x+y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

2.6. Sistemas de ecuaciones no lineales

Si alguna de las ecuaciones del sistema **no** es lineal, el sistema ya no es lineal.

Se resuelve por cualquiera de los métodos anteriores, por ejemplo por sustitución, despejando, si es posible una incógnita de exponente uno.

Ejemplo:

Para resolver $\begin{cases} x+y=14 \\ xy=-15 \end{cases}$ despejamos "*y*" de la primera ecuación: $y = 14 - x$, y lo sustituimos en la segunda: $xy = x(14 - x) = -15 \Rightarrow 14x - x^2 = -15 \Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0$.

Resolvemos la ecuación de segundo grado, y las soluciones son: 15 y –1.

Como $y = 14 - x$, si $x = 15$ entonces $y = -1$, y si $x = -1$ entonces $y = 15$.

Las soluciones son los puntos (15, –1) y (–1, 15), puntos de intersección entre la hipérbola $xy = 15$, y la recta $x + y = 14$.

Actividades propuestas

29. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=-2 \\ 2x^2-3y^2=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2+y^2=3 \\ 5x^2-2y^2=5 \end{cases}$ *Ayuda*: Utiliza el método de reducción:

c) $\begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-4y=-3 \\ xy=1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{array}{r} x+y-\dfrac{y}{x}=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

30. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

31. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=81 \\ xy=4 \end{array}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{array}\right\}$

2.7. Sistemas de ecuaciones lineales de más de dos incógnitas

La mejor forma de resolver sistemas lineales de más de dos incógnitas es ir sustituyendo el sistema por otro equivalente de forma que cada vez se consiga que sean ceros los coeficientes de más incógnitas.

Ejemplo:

Para resolver el sistema: $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+2y+z=4 \\ x+4y-2z=3 \end{cases}$, dejamos la primera ecuación sin modificar. Queremos que la segunda ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", para ello la multiplicamos por 2 y le restamos la primera. Para que la tercera ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", la multiplicamos por 2 y le restamos la primera:

$$\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+2y+z=4 \\ x+4y-2z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 0+3y+5z=8 \\ 0+7y-z=6 \end{cases}$$

Ahora podemos resolver el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas formado por las dos últimas ecuaciones, o continuar con nuestro procedimiento. Para conseguir que en la tercera ecuación el coeficiente de la "*y*" sea un cero multiplicamos la tercera ecuación por 3 y la segunda por 7 y las restamos:

$$\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 0+3y+5z=8 \\ 0+7y-z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 0+3y+5z=8 \\ 0+0+32z=32 \end{cases}$$

y ahora ya podemos despejar cada una de las incógnitas de forma ordenada:

$$\begin{cases} z=1 \\ 3y+5(1)=8 \\ 2x+y-3(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

32. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ x+2y+2z=4 \\ 3x-2y-3z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+2y-2z=5 \\ x-2y+2z=-1 \\ x-2y-3z=-6 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar la incógnita

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear la ecuación y resolverla

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 unidades es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice “número natural” el número buscado es el 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

33. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?

34. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.

35. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

36. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm^2.

37. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

38. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

39. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm^2. ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?

40. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 39 años". Calcula la edad del hijo.

41. Halla las dimensiones de rectángulo cuya área es 21 m^2, sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.

42. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 3 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

43. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.

44. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.

3.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x+y=39 \\ x-y=25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} \begin{cases} x+y=39 \\ 2x+0=64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Actividades propuestas

45. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 74. ¿Qué edad tienen cada uno?

46. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

47. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.

48. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

49. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.

50. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?

51. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 62, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?

52. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:

El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.

El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.

El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.

Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

53. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0.5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 150 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?

54. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1,2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?

55. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

56. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

CURIOSIDADES. REVISTA

Obtención de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\Downarrow \text{ Multiplicamos por } 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$\Downarrow \text{ Sumamos } b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$\Downarrow \text{ Completamos cuadrados}$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Downarrow \text{ Hallamos la raíz cuadrada}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow \text{Despejamos la } x$$

$$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

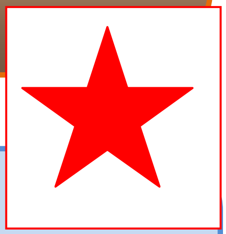
$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.



$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$ que es el número de oro, otro número irracional

$x^2 = -1$

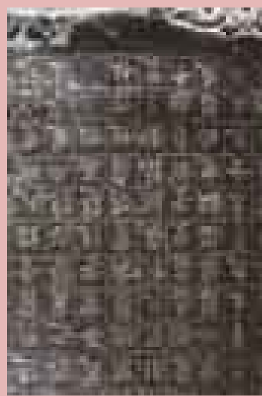
La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1}$ = i, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números $a + b\cdot\mathrm{i}$ se les llama **números complejos**.

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tan bien conoces como $ax + b = 0$. Ya los **egipcios** en el papiro del *Rhid* (1650 aC) y en el de *Moscú* (1850 aC) resuelven algunos problemas que se podrían considerar de ecuaciones, como por ejemplo: "*Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*".

En **Mesopotamia** y **Babilonia** ya se sabían resolver sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado.
Un problema que aparece en una tablilla es: "*La cuarta parte de la anchura más una longitud es igual a 7 manos. Y longitud más anchura es igual a 10 manos*". En este problema "longitud" y "anchura" son incógnitas no relacionadas con estas medidas.

En China en el siglo III a C se editó "*El arte matemático*" donde utilizaban el ábaco y se resolvían ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas.
Uno de los problemas resueltos puede considerarse como la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando el método matricial.



En Grecia, en el siglo III Diofanto de Alejandría publicó "*Aritmética*" trabajó con ecuaciones y utilizó la primera letra de la palabra griega "*arithmos*" que significa número, para representar a la incógnita.

En su tumba aparece este problema:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto. Es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años".

En el siglo VII los **hindúes** conocían procedimientos algebraicos y trabajaban con eficacia los números.

En el siglo IX el matemático musulmán **Al-Jwarizmi** trabajó sobre procedimientos algebraicos.

En 1489 se inventaron los símbolos + y –.
En 1525 el símbolo de la raíz cuadrada.
En 1557 el símbolo **=**.
En 1591 François Viète representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes.
En 1637 René Descartes inventó la geometría analítica con la notación que hoy usamos de x, y z… para las incógnitas y *a, b, c*… para las constantes.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Ecuación de primer grado	Quitar denominadores Quitar paréntesis Transponer términos Simplificar y despejar	$5/3x + 3(x + 1) = 2 \Rightarrow$ $5/3x + 3x + 3 = 2 \Rightarrow$ $5x + 9x + 9 = 6 \Rightarrow$ $14x = -3 \Rightarrow x = -3/14$.
Ecuación de segundo grado	Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ Se usa la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Número de soluciones de una ecuación de 2º grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, tiene dos soluciones 5 y -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \dfrac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma y producto de raíces	$x_1\, x_2 = \dfrac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Ecuaciones

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $4(3-2x)+\frac{5}{7}(6x-2)=2x-\frac{1-9x}{7}$ b) $4-\left(3-5\left(2x-\frac{1}{6}\right)\right)=3x-\frac{4-5x}{3}$ c) $4(2x-5)=6(9-4x)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-3x^2 - 5x - 2 = 0$ b) $2x(-3 + x) = 5$ c) $3x^2 = 27x$

d) $5(3x + 2) - 4x(x + 6) = 3$ e) $4(x - 9) + 2x(2x - 3) = 6$ f) $10(2x^2 - 2) - 5(3 + 2x) = -21$

g) $4(x + 5)\cdot(x - 1) = -2x - 4$ h) $3x\cdot(5x + 1) = 99$ i) $2(3x^2 - 4x + 2) - 2x(3x - 2) = -5$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$ b) $\frac{x^2-3}{5}+\frac{x^2-4x+1}{5}=2$ c) $\frac{2x^2+3}{3}+\frac{x+5}{6}=2$

d) $\frac{1-x^2}{3}+\frac{4x-1}{2}=\frac{1}{6}$ e) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{3x-7}{4}=2x-5$ f) $\frac{3x+2x^2}{5}-\frac{4x-7}{10}=2$

4. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

5. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow 2(x + 5)\cdot(x - 5) = 0$.

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

6. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 10x + 24 = 0$ b) $x^2 - 8x - 12 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

7. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

a) $(x-3)\cdot(x-7)=0$ b) $(x+2)\cdot(x-4)=0$ c) $(x-8)\cdot(x-4)=0$

d) $(x-2)\cdot(x+5)=0$ e) $(x+6)\cdot(x-3)=0$ f) $(x-5)\cdot(x+3)=0$

8. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2+5x-2=0$ b) $5x^2+2x-4=0$ c) $2x^2+4x+11=0$

d) $2x^2-3x+8=0$ e) $3x^2-x-5=0$ f) $4x^2+2x-7=0$

9. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

12. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan solución real.

13. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^5-37x^3+36x=0$ b) $x^3-2x^2-5x=0$ c) $2x^3-\frac{1}{2}x^2-4x=0$

d) $x^4-5x^2-2=0$ e) $2x^4=32x^2-96$ f) $x(x-3)(2x+3)(3x-5)=0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $x^8+81=82x^4$ b) $x^4-24x^2+144=0$ c) $x^6-7x^3-8=0$ d) $x^4+8x^2-9=0$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $2x+\dfrac{3}{x}=5$ b) $\dfrac{3}{5x}+\dfrac{1}{2x}=x$ c) $\dfrac{1}{x-3}+2=\dfrac{5}{x-3}$ d) $\dfrac{2x}{3-2x}-5x=1$

e) $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3(2x+1)}{x-1}+3$ f) $\dfrac{2x-3}{x+1}-\dfrac{4+5x}{x}=7$ g) $\dfrac{3x-2}{x+1}-\dfrac{2+3x}{x-1}=4$

h) $\dfrac{3}{1-x}=\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x-x^2}$ i) $\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{5x}{x^2-4}=\dfrac{3x}{2}$ j) $\dfrac{1}{2}=\dfrac{x-5}{3-4x}$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x=-3+\sqrt{5+2x^2}$ b) $\sqrt{25-x}=x-5$ c) $7+\sqrt{x^2-3x+2}=3x$

d) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=1$ e) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+1=0$ f) $\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}=5$

g) $3\sqrt{x-2}-4=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}=1$ i) $\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}=4$

17. Resuelve las ecuaciones siguientes: a) $3^{3x}=\dfrac{1}{81}$ b) $5^{2x}=\dfrac{1}{625}$

Sistemas

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ -8x+3y=-13 \end{cases}$

20. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

21. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

22. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{3}-\dfrac{y-1}{5}=-1 \\ \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2y+3}{5}=-3 \\ 5x+2y=-10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-2}{3}=2 \\ 7x-y=1 \end{cases}$

23. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea *x* = 2 e *y* = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

Su solución sea *x* = –1 e *y* = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

24. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.
25. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.
26. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.
27. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

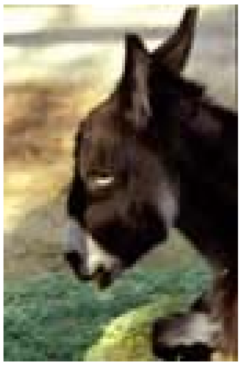
Problemas

28. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

29. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

30. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6.

31. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?



32. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

33. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

34. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

35. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365.

36. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

37. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

38. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?

39. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

40. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

41. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

42. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

43. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

44. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

45. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

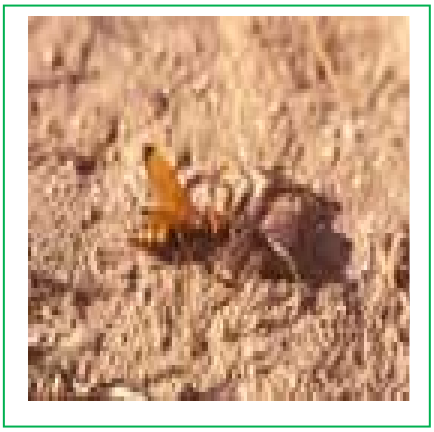
46. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

47. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

48. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

49. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?



50. En una bolsa hay monedas de 1 € y 2 €. Si en total hay 40 monedas y 53 €, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

51. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?

52. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

53. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 49 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿qué edades tienen?

54. Se mezclan 15 kg de maíz de 2,3 € el kilogramo con 27 kg de maíz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 3 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo maíz?

55. La altura de un trapecio isósceles es de 4 cm, el perímetro, 24 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.

56. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Valencia a las 8 de la mañana. Uno va a 100 km/h y el otro a 120 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿A cuántos km de Madrid estarán?

57. En un concurso se ganan 50 euros por cada respuesta acertada y se pierden 100 por cada fallo. Después de 20 preguntas, Pilar lleva ganados 250 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?

58. Juan ha comprado 6 zumos y 4 batidos por 4,6 €, luego ha comprado 4 zumos y 7 batidos y le han costado 4,8 €. Calcula los precios de ambas cosas.

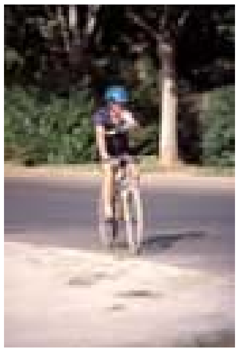
59. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a $\frac{1}{2}$ cuando se suma 1 al denominador?

60. El cociente de una división es 2 y el resto es 3. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en 4 y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.

61. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: "Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". La otra le respondió: "Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenía cada una?

62. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 30 cm^2, y cuyo perímetro mide 26 cm.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF



63. Un peatón sale de una ciudad “A” a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad “B” que está a 12 km de la ciudad “A”, 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad “B” a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia “A”, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de “B” se cruzan?

64. Se desea mezclar aceite de 3 €/l con otro aceite de 4,2 €/l de modo que la mezcla resulte a 3,50 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?

65. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 27 unidades mayor. Halla el número inicial.

66. La diagonal de un rectángulo mide 26 cm, y el perímetro 42 cm. Halla los lados del rectángulo.

67. Una valla rodea un terreno rectangular de 1000 m^2. Si la valla mide 130 metros, calcula las dimensiones del terreno.

68. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 900 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan dos amigos más, con lo que cada uno toca a 15 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?

69. Las diagonales de un rombo se diferencian en 3 cm y su área es de 20 cm^2. Calcula su perímetro.

70. Un tren sale de Bilbao hacia Alcázar de San Juan a una velocidad de 140 km/h. Una hora más tarde sale otro tren de Alcázar de San Juan hacia Bilbao a 100 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 500 km. ¿Al cabo de cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Alcázar de San Juan?

71. Un coche sale de una ciudad “A” a una velocidad de 70 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de “A” en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de “A” se produce el encuentro?

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $3(x - 1) - 2(x - 2) = 5$ es:

a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = -2/3$ d) $x = 3$

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{4x-1}{3} - \frac{x+2}{6} = \frac{x^2}{2}$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$

4. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son:

a) 1, −1, 4, −4 b) 1, −1, 2, −2 c) 2, −2, 3, −3 d) 2, −2, 5, −5

5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3 + 2x - 7 = x - 1 + y \\ 2x - 9y = 13 \end{cases}$ es:

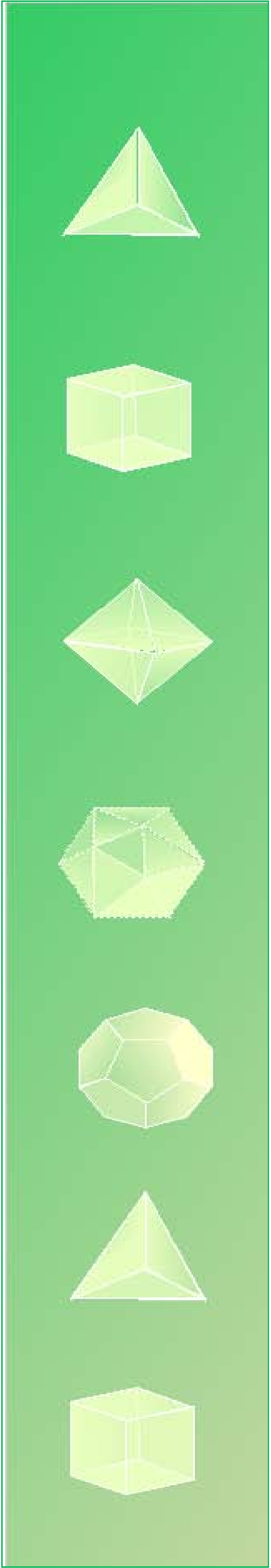
a) $x = 2$ e $y = -1$ b) $x = -2$ e $y = 1$ c) $x = 1$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 1$

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 20 años b) 7 años c) 25 años d) 8 años



MATEMÁTICAS: 4ºA ESO
Capítulo 5: Geometría del plano y del espacio. Longitudes, áreas y volúmenes.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

La Geometría es una de las ramas más antiguas de las Matemáticas y su estudio nos ayuda a interpretar mejor la realidad que percibimos. Su nombre significa "*medida de la Tierra*". Medir es calcular longitudes, áreas y volúmenes. En este tema recordarás las fórmulas que estudiaste ya el año pasado y profundizarás sobre sus aplicaciones en la vida real.

Nos movemos en el espacio de dimensión tres, caminamos sobre una esfera (que por ser grande, consideramos plana), las casas son casi siempre ortoedros. La información que percibimos por medio de nuestros sentidos la interpretamos en términos geométricos. Precisamos de las fórmulas de áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos para calcular las medidas de los muebles que caben en nuestro salón, o para hacer un presupuesto de la reforma de nuestra vivienda.

Muchas plantas distribuyen sus hojas buscando el máximo de iluminación y sus flores en forma esférica buscando un aprovechamiento óptimo del espacio. El átomo de hierro dispone sus electrones en forma de cubo, los sistemas de cristalización de los minerales adoptan formas poliédricas, los panales de las abejas son prismas hexagonales. Éstos son algunos ejemplos de la presencia de cuerpos geométricos en la naturaleza.

ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA

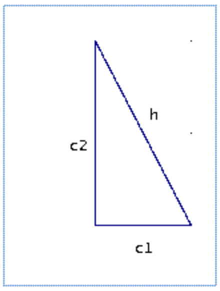
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras en el plano

Ya sabes que:

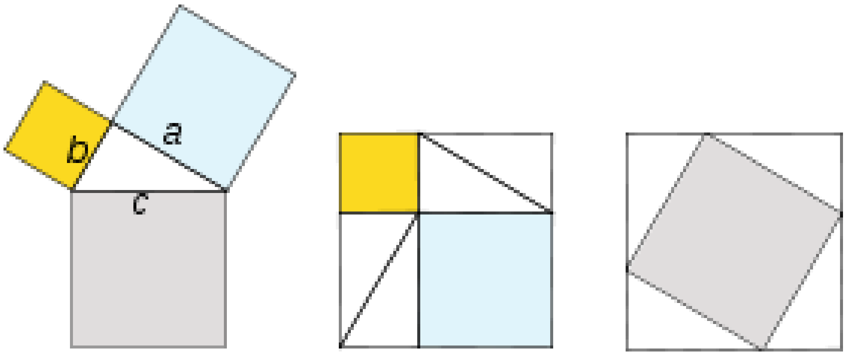


En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Demostración:



Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 *cm* y 8 *cm*, su hipotenusa vale 10 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \ cm.$$

Actividades resueltas

- *Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 dm y uno de sus catetos mide 12 dm, halla la medida del otro cateto:*

  Solución: Por el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

Actividades propuestas

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 *cm* y su hipotenusa 30 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 16 *cm*.

2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
a) 4 *cm* y 3 *cm* b) 1 *m* y 7 *m*
c) 2 *dm* y 5 dm d) 23,5 *km* y 47,2 *km*.
Utiliza la calculadora si te resulta necesaria.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 8 *cm* y 3 *cm* b) 15 *m* y 9 *m*

c) 35 *dm* y 10 *dm* d) 21,2 *km* y 11,9 *km*

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 *m*.

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 *cm*.

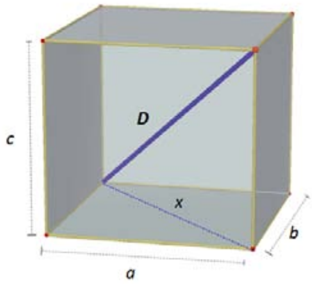
Teorema de Pitágoras en el espacio

Ya sabes que:

La diagonal de un ortoedro al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de sus aristas.

Demostración:

Sean *a, b* y *c* las aristas del ortoedro que suponemos apoyado en el rectángulo de dimensiones *a* , *b*.



Si *x* es la diagonal de este rectángulo, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

El triángulo de lados *D, x, a* es rectángulo luego: $D^2 = x^2 + c^2$

Y teniendo en cuenta la relación que verifica *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resueltas

- *Calcula la longitud de la diagonal de un ortoedro de aristas 7, 9 y 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274$. $D \approx 16{,}55$ cm.

- *Las aristas de la base de una caja con forma de ortoedro miden 7 cm y 9 cm y su altura 12 cm. Estudia si puedes guardar en ella tres barras de longitudes 11 cm, 16 cm y 18 cm.*

El rectángulo de la base tiene una diagonal *d* que mide: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11{,}4$ cm

Luego la barra más corta cabe apoyada en la base.

La diagonal del ortoedro vimos en la actividad anterior que mide 16,55, luego la segunda barra si cabe, inclinada, pero la tercera, no.

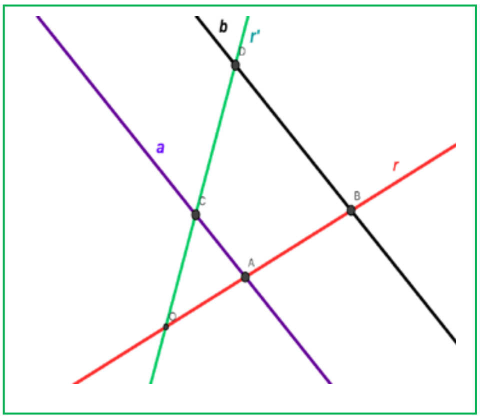
Actividades propuestas

6. Una caja tiene forma cúbica de 3 *cm* de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

7. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Teorema de Tales



Ya sabes que:

Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces el Teorema de Tales afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Se dice que los triángulos *OAC* y *OBD* están en posición *Tales*. Son **semejantes**. Tienen un ángulo común (coincidente) y los lados proporcionales.

Actividades resueltas

- *Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OBD es 20 cm, y OA mide 2 cm, AC mide 5 cm y OC mide 3 cm. Calcula las longitudes de los lados de OBD.*

Utilizamos la expresión: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ sustituyendo los datos:

$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, por lo que despejando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, y *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro del triángulo.

- *Cuenta la leyenda que Tales midió la altura de la pirámide de Keops comparando la sombra de la pirámide con la sombra de su bastón. Tenemos un bastón que mide 1 m, si la sombra de un árbol mide 12 m, y la del bastón, (a la misma hora del día y en el mismo momento), mide 0,8 m, ¿cuánto mide el árbol?*

Las alturas del árbol y del bastón son proporcionales a sus sombras, (forman triángulos en posición *Tales*), por lo que, si llamamos *x* a la altura del árbol podemos decir:

$\frac{0{,}8}{1}=\frac{12}{x}$. Por tanto *x* = 12/0,8 = 15 metros.

Actividades propuestas

8. En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1,5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0,2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio?

9. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.

10. En un triángulo regular *ABC* de lado, 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?

11. Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

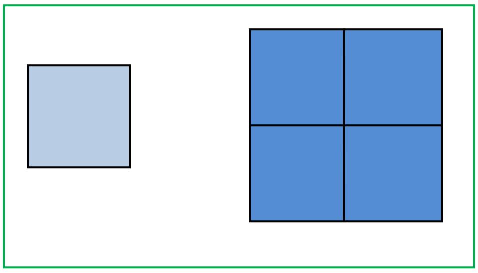
Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos… a la razón de semejanza se la llama **escala**.

Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$.

Ejemplo:

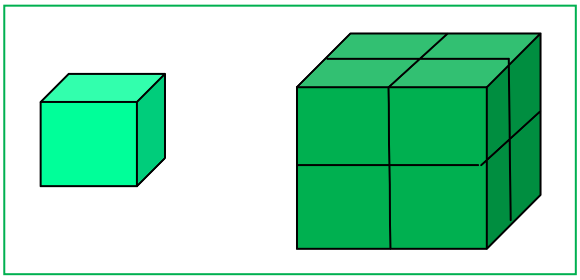


Observa la figura del margen. Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.

Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Ejemplo:



Observa la figura del margen. Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) el del cubo pequeño.

Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?*

El peso está relacionado con el volumen. La torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material que pese 1 kilo. Por tanto k^3 = 8000000/1 = 8 000 000, y k = 200. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m*, y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a x = 1,5 *m*. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

12. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

13. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

14. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

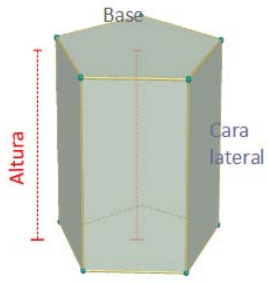
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

2.1. Longitudes, áreas y volúmenes en prismas y cilindros

Recuerda que:

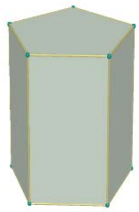
Prismas

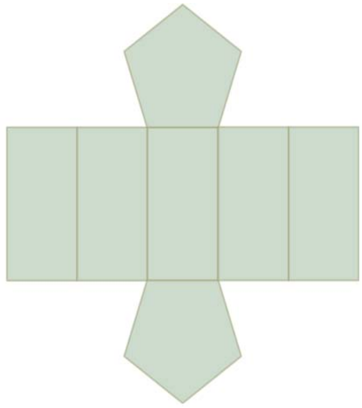


Un ***prisma*** es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.

Áreas lateral y total de un prisma.

El **área lateral** de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales.





Como las caras laterales son paralelogramos de la misma altura, que es la altura del prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma de las áreas de las caras laterales =

= Perímetro de la base · altura del prisma.

Si denotamos por h la altura y por P_B el perímetro de la base:

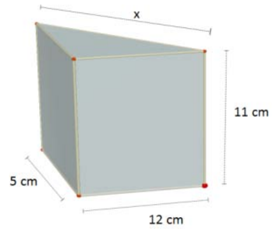
$$\text{Área lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

El **área total** de un prisma es el área lateral más el doble de la suma del área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Actividades resueltas

- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*



Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \quad cm$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm;\ A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2 \qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$$

Volumen de un cuerpo geométrico. Principio de *Cavalieri*.

Recuerda que:

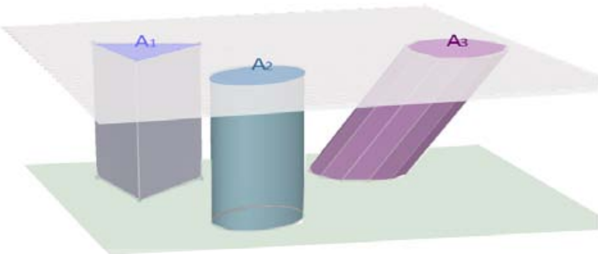
Bonaventura Cavalieri, matemático del siglo XVII enunció el principio que lleva su nombre y que afirma:

"Si dos cuerpos tiene la misma altura y al cortarlos por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con el mismo área, entonces los volúmenes de los dos cuerpos son iguales"

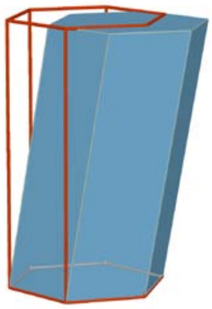
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

En la figura adjunta las áreas de las secciones A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo a las bases, son iguales, entonces, según este principio los volúmenes de los tres cuerpos son también iguales.



Volumen de un prisma y de un cilindro



El volumen de un prisma recto es el producto del área de la base por la altura. Además, según el principio de *Cavalieri*, el volumen de un prisma oblicuo coincide con el volumen de un prisma recto con la misma base y altura. Si denotamos por *V* este volumen, A_B el área de la base y *h* la altura:

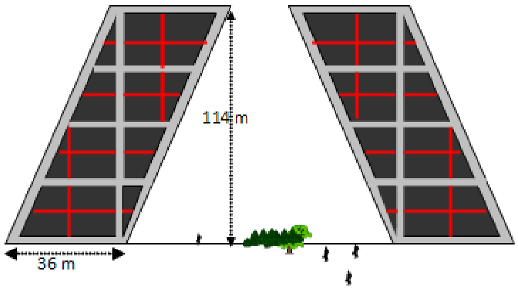
Volumen prisma = $V = A_B \cdot h$

También el volumen de un cilindro, recto u oblicuo es área de la base por altura. Si llamamos *R* al radio de la base, A_B el área de la base y *h* la altura, el volumen se escribe:

Volumen cilindro = $V = A_B \cdot h \;=\; \pi R^2 \cdot h$

Actividades resueltas

- *Las conocidas torres Kio de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa. Cada una de ellas es un prisma oblicuo cuya base es un cuadrado de 36 metros de lado y tienen una altura de 114 metros. El volumen interior de cada torre puede calcularse con la fórmula anterior:*



$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744\ m^3$$

Actividades propuestas

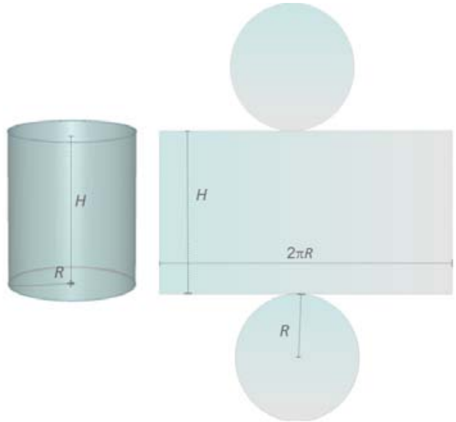
15. Calcula el volumen de un prisma recto de 20 *dm* de altura cuya base es un hexágono de 6 *dm* de lado.

16. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 *cm* de diámetro y que el agua alcanza 12 *dm* de altura.

Áreas lateral y total de un cilindro.

El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene su desarrollo.

A partir de éste, podemos ver que el área lateral de cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.



Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es:

$$A_L = \text{Longitud de la base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R)\cdot H = 2\pi RH$$

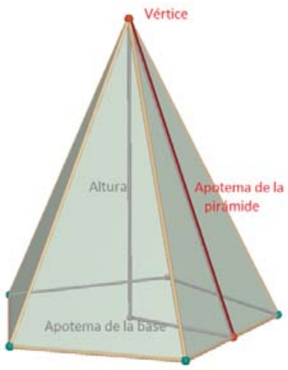
Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

2.2. Longitudes, áreas y volúmenes en pirámides y conos

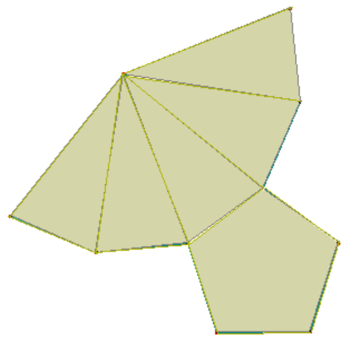
Recuerda que:

Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide regulares.



Una **pirámide** es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común como lados tiene la base.

Desarrollo de pirámide pentagonal regular



El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de las caras laterales.

Son triángulos isósceles iguales por lo que, si la arista de la base mide b, el apotema de la pirámide es Ap y la base tiene n lados, este área lateral es:

$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{b \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot b \cdot Ap}{2}$$

y como $n \cdot b$ = Perímetro de la base

$$A_L = \frac{\text{Perímetro de la base}\ .\ \text{Apotema de la pirámide}}{2} = \frac{\text{Perímetro de la base}}{2} \cdot \text{Apotema}$$

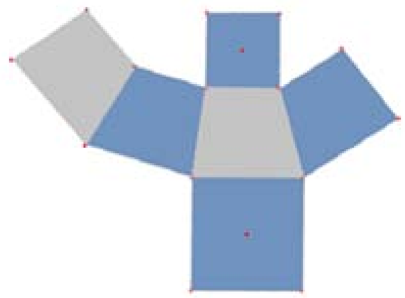
El área lateral de una pirámide es igual al semi-perímetro por el apotema.

El área total de una pirámide es el área lateral más el área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

Un tronco de pirámide regular es un cuerpo geométrico desarrollable. En su desarrollo aparecen tantas caras laterales como lados tienen las bases. Todas ellas son trapecios isósceles.

Desarrollo de tronco de pirámide cuadrangular



Si B es el lado del polígono de la base mayor, b el lado de la base menor, n el número de lados de las bases y Ap es la altura de una cara lateral

$$\text{Área lateral} = A_L = n\,.\frac{(B+b).\,Ap}{2} = \frac{(P_B+P_b).\,Ap}{2} =$$

$$= \frac{\text{Suma de perímetro de las bases}\ .\ \text{Apotema del tronco}}{2}$$

El área total de un tronco de pirámide regular es el área lateral más la suma de áreas de las bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resueltas

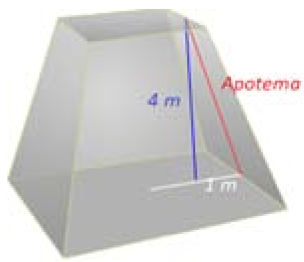
- *Calculemos el área total de un tronco de pirámide regular de 4 m de altura si sabemos que las bases paralelas son cuadrados de 4 m y de 2 m de lado.*

En primer lugar calculamos el valor del apotema. Teniendo en cuenta que el tronco es regular y que las bases son cuadradas se forma un triángulo rectángulo en el que se cumple:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12\ m$$

$$A_L = \frac{(P_B+P_b)\cdot Ap}{2} = \frac{(16+8)\cdot 4{,}12}{2} = 49{,}44\ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 + 16 + 4 = 69{,}44\ m^2$$



Actividades propuestas

17. Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 *cm* y cada arista lateral 2 *dm*.

18. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 m^2 y tiene 10 *m* de altura. Calcula el perímetro de la base.

19. El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 *cm* y la altura de la pirámide 15 *cm*. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.

20. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 3 y 8 *dm* y que la altura de cada cara lateral es de 9 *dm*.

21. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2, calcula el apotema de la pirámide y su altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Áreas lateral y total de un cono.

Recuerda que:

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora *R* al radio de la base y *G* a la generatriz. El área lateral del cono es el área de sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

$$\frac{A\ Lateral\ del\ cono}{Longitud\ de\ arco\ correspondiente\ al\ sector} = \frac{A\ total\ del\ círculo\ de\ radio\ G}{Longitud\ de\ la\ circunferencia\ de\ radio\ G}$$

Es decir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos:

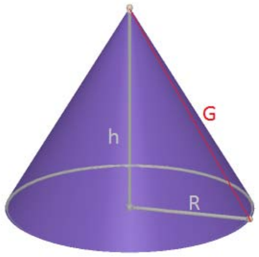
$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi RG$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base mide 18,84 dm .(Toma 3,14 como valor de π)*



Calculamos en primer lugar el radio *R* de la base:

$$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3\ dm.$$

Calculamos ahora la generatriz *G*:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37\ dm.$$

Entonces $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79\ dm^2$.

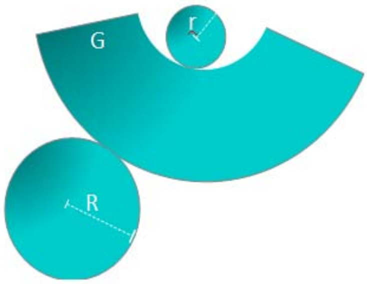
Áreas lateral y total de un tronco de cono.

Recuerda que:

Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtiene un tronco de cono. Al igual que el tronco de pirámide, es un cuerpo desarrollable y su desarrollo lo constituyen los dos círculos de las bases junto con un trapecio circular, cuyas bases curvas miden lo mismo que las circunferencias de las bases.

Llamando *R* y *r* a los radios de las bases y *G* a la generatriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$



Si a la expresión anterior le sumamos las áreas de los círculos de las bases, obtenemos el área total del tronco de cono:

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

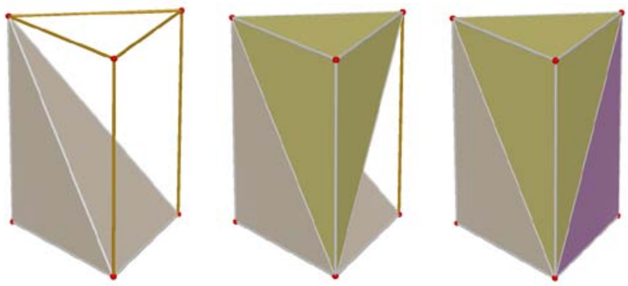
Volumen de una pirámide y de un cono.

Recuerda que:

También en los casos de una pirámide o cono, las fórmulas del volumen coinciden en cuerpos rectos y oblicuos.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y altura.

$$\text{Volumen pirámide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$



Si comparamos cono y cilindro con la misma base y altura, concluimos un resultado análogo

$$\text{Volumen cono} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

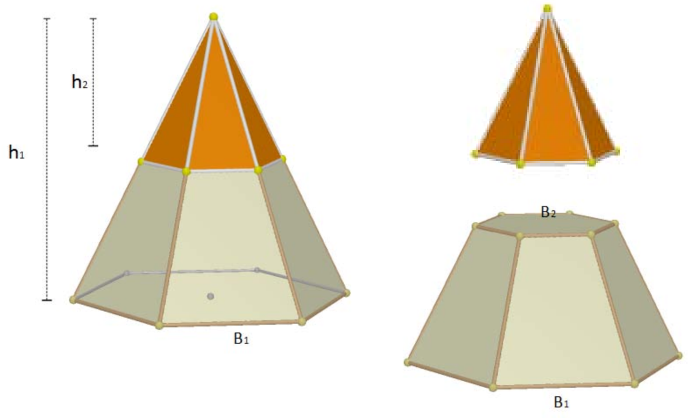
Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono.

Existe una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide regular pero la evitaremos. Resulta más sencillo obtener el volumen de un tronco de pirámide regular restando los volúmenes de las dos pirámides a partir de las que se obtiene.

Si representamos por A_{B1} y A_{B2} las áreas de las bases y por h_1 y h_2 las alturas de las pirámides citadas, el volumen del tronco de pirámide es:

Volumen tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$



El volumen del tronco de cono se obtiene de modo parecido. Si R_1 y R_2 son los radios de las bases de los conos que originan el tronco y h_1 y h_2 sus alturas, el volumen del tronco de cono resulta:

$$\textit{Volumen tronco de cono} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el volumen de un tronco de pirámide regular de 10 cm de altura si sus bases son dos hexágonos regulares de lados 8 cm y 3 cm.*

Primer paso: calculamos las apotemas de los hexágonos de las bases:

Para cada uno de estos hexágonos:

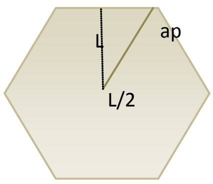


Figura 1

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Luego las apotemas buscadas miden: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\ cm$; $ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\ cm$

Como segundo paso, calculamos el apotema del tronco de pirámide

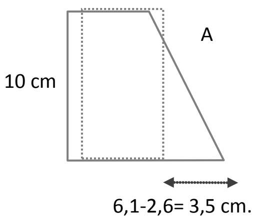


Figura 2

$$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\ cm$$

En tercer lugar, calculamos el valor de los segmentos *x, y* de la figura 3 que nos servirán para obtener las alturas y apotemas de las pirámides que generan el tronco con el que trabajamos:

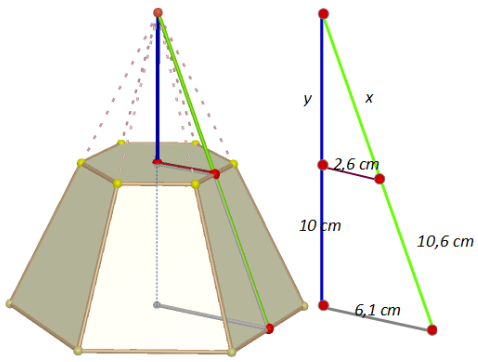


Figura 3

Por el teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{10{,}6 + x}{6{,}1} \Rightarrow 6{,}1\,x = (10{,}6 + x)2{,}6 \Rightarrow 6{,}1\,x - 2{,}6x = 27{,}56 \Rightarrow$

$$x = \frac{27{,}56}{3{,}5} \approx 7{,}9\ cm$$

Entonces el apotema de la pirámide grande es 10,6 + 7,9=18,5 cm y el de la pequeña 7,9 *cm*. Y aplicando el teorema de *Pitágoras*:

$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5\ cm$$

Luego las alturas de las pirámides generadoras del tronco miden 10 + 7,5 = 17,5 *cm* y 7,5 *cm.*

Por último calculamos el volumen del tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 18{,}5 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{18 \cdot 7{,}9 \cdot 7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066.5}{6} = 2412{,}25\ cm^3$$

Actividades propuestas

22. Una columna cilíndrica tiene 35 *cm* de diámetro y 5 *m* de altura. ¿Cuál es su área lateral?

23. El radio de la base de un cilindro es de 7 *cm* y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

24. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 *dm* y su radio de la base 6 *dm*.

25. La circunferencia de la base de un cono mide 6,25 *m* y su generatriz 12 *m*. Calcula el área total.

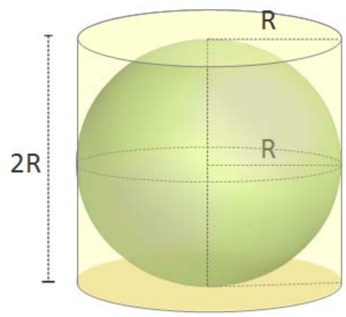
2.3. Longitudes, áreas y volúmenes en la esfera

Recuerda que:

Área de una esfera.

La esfera **no** es un cuerpo geométrico desarrollable, por lo que es más complicado que en los casos anteriores encontrar una fórmula para calcular su área.

Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.



Si llamamos *R* al radio de la esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos.

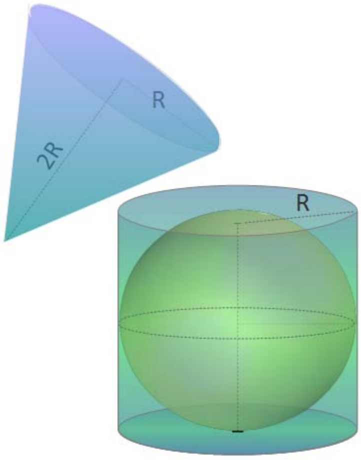
Actividades propuestas

26. Una esfera tiene 4 *m* de radio. Calcula:

a) La longitud de la circunferencia máxima;

b) El área de la esfera.

Volumen de la esfera



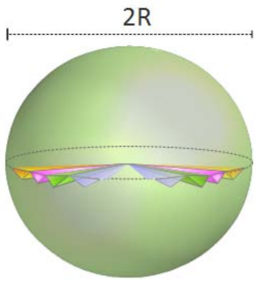
Volvamos a pensar en una esfera de radio R y en el cilindro que la circunscribe. Para rellenar con agua el espacio que queda entre el cilindro y la esfera, se necesita una cantidad de agua igual a un tercio del volumen total del cilindro circunscrito.

Se deduce entonces que la suma de los volúmenes de la esfera de radio R y del cono de altura $2R$ y radio de la base R, coincide con el volumen del cilindro circunscrito a la esfera de radio R. Por tanto:

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \text{Volumen}_{\text{cilindro}} - \text{Volumen}_{\text{cono}} \Rightarrow$$

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Existen demostraciones más rigurosas que avalan este resultado experimental que hemos descrito. Así por ejemplo, el volumen de la esfera se puede obtener como suma de los volúmenes de pirámides que la recubren, todas ellas de base triangular sobre la superficie de la esfera y con vértice en el centro de la misma.



Actividades propuestas

27. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 *m* de altura y 2 *m* de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π).
b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

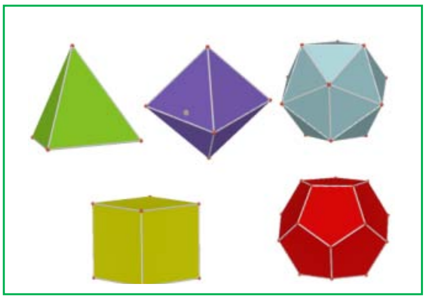
28. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 4 *dm* sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 8 *dm* de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 *dm* de altura y 4 *dm* de radio de la base.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Longitudes, áreas y volúmenes de poliedros regulares

Recuerda que:



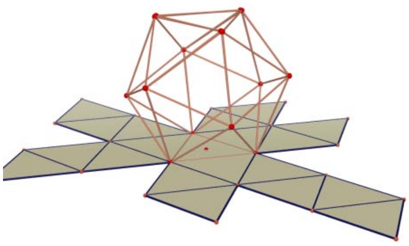
Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales.

Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro

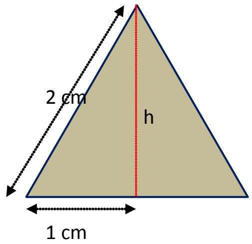
Área total de un poliedro regular.

Como las caras de los poliedros regulares son iguales, el cálculo del área total de un poliedro regular se reduce a calcular el área de una cara y después multiplicarla por el número de caras.

Actividades resueltas



- *Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.*



Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 *cm* de base. Calculamos la altura *h* que divide a la base en dos segmentos iguales

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}\ cm$$

Luego el área de una cara es:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{2\,.\,\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ cm^2$$ y por tanto Área icosaedro = 20 ‾ cm^2

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1. Puntos y vectores

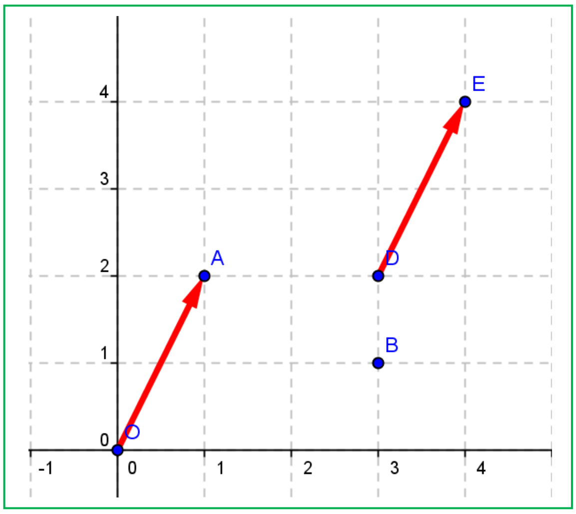
En el plano

Ya sabes que

Un conjunto formado por el **origen** *O*, los dos **ejes de coordenadas** y la **unidad de medida** es un **sistema de referencia cartesiano**.

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo "***x***" la primera coordenada o **abscisa** e "***y***" la segunda coordenada u **ordenada**.

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2)$ y $E(e_1, e_2)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, ***DE***, vienen dadas por ***DE*** = $(e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.



Ejemplo:

Las coordenadas de los puntos, de la figura son:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) y *E*(4, 4)

Las componentes del vector ***DE*** son

DE = (4 – 3, 4 – 2) = (1, 2)

Las componentes del vector ***OA*** son:

OA = (1 – 0, 2 – 0) = (1, 2).

DE y ***OA*** son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2).

En el espacio de dimensión tres

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son una terna ordenada de números reales **(*x*, *y*, *z*)**, siendo "***z***" la altura sobre el plano *OXY*.

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2, d_3)$ y $E(e_1, e_2, e_3)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, ***DE***, vienen dadas por ***DE*** = $(e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Ejemplo:

Las coordenadas de puntos en el espacio son:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4)

Las componentes del vector ***DE*** son: ***DE*** = (4 – 3, 4 – 2, 4 – 1) = (1, 2, 3)

Las componentes del vector ***OA*** son: ***OA*** = (1 – 0, 2 – 0, 3 – 0) = (1, 2, 3).

DE y ***OA*** son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2, 3)

Actividades propuestas

29. Representa en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4) y vectores: ***DE*** y ***OA***.

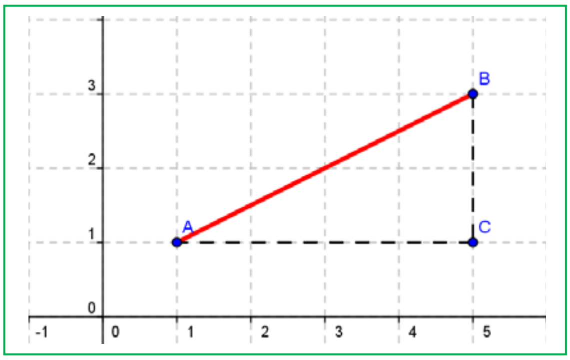
30. El vector de componentes ***u*** = (2, 3) y origen *A* = (1, 1), ¿qué extremo tiene?

3.2. Distancia entre dos puntos

En el plano

La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ es:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Ejemplo:

Por el Teorema de *Pitágoras* sabemos que la distancia al cuadrado entre los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (5, 3)$ es igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

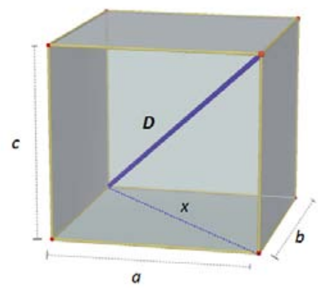
ya que el triángulo *ABC* es rectángulo de catetos 4 y 2.

Luego $D \approx 4{,}47$.

En el espacio de dimensión tres

La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ es igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Ejemplo:

La distancia al cuadrado entre los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (5, 3, 8)$ es igual, por el Teorema de *Pitágoras* en el espacio, a

$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56$.

Luego $D \approx 7{,}5$.

Actividades propuestas

31. Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2)$ y $B(3, 9)$.

32. Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2, 5)$ y $B(3, 9, 7)$.

33. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (3, 4)$

34. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (3, 4, 1)$.

35. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $O(0, 0)$ y $A(3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

36. Dibuja un cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(3, 3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.

37. Sea $X(x, y)$ un punto genérico del plano, y $O(0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

38. Sea $X(x, y, z)$ un punto genérico del espacio, y $O(0, 0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

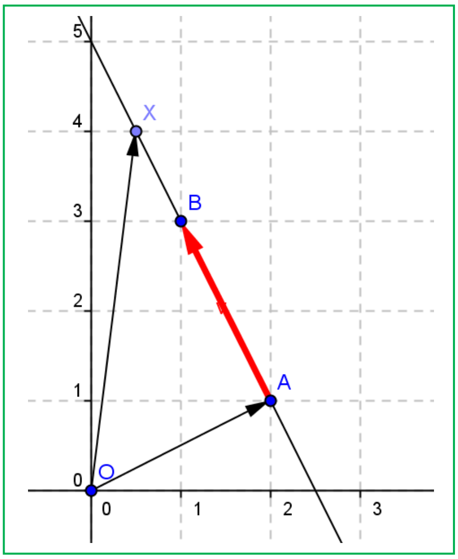
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Ecuaciones y rectas y planos

Ecuaciones de la recta en el plano.

Ya sabes que la **ecuación de una recta** en el plano es: $y = mx + n$. Es la expresión de una recta como función. Esta ecuación se denomina **ecuación explícita** de la recta.

Si pasamos todo al primer miembro de la ecuación, nos queda una ecuación: $ax + by + c = 0$, que se denomina **ecuación implícita** de la recta.



Ecuación vectorial: También una recta queda determinada si conocemos un punto: $A(a_1, a_2)$ y un vector de dirección $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Observa que el vector ***OX*** puede escribirse como suma del vector ***OA*** y de un vector de la misma dirección que ***v***, *t**v***. Es decir:

$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

donde a *t* se le denomina parámetro. Para cada valor de *t*, se tiene un punto distinto de la recta. Con coordenadas quedaría:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

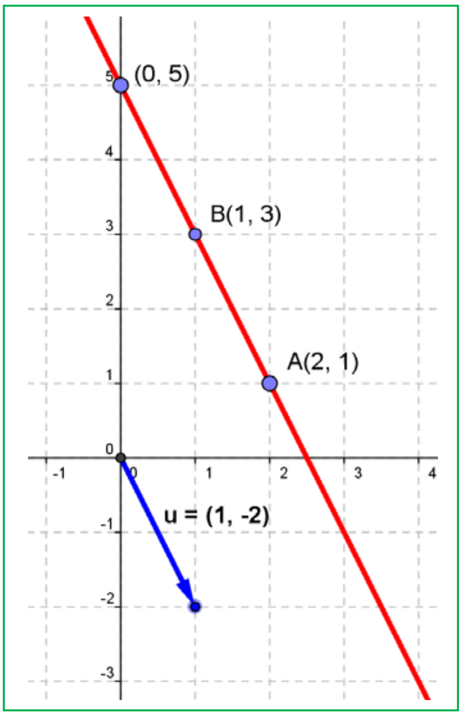
que es la **ecuación paramétrica** de la recta.

Actividades resueltas

- *De la recta de ecuación explícita y* = –2*x* + 5, conocemos la pendiente, –2, y la ordenada en el origen, 5. La pendiente nos da un vector de dirección de la recta, en general (1, *m*), y en este ejemplo: (1, –2). La ordenada en el origen nos proporciona un punto, en general, el (0, *n*), y en este ejemplo, (0, 5). La ecuación paramétrica de esta recta es:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

Su ecuación implícita es: $-2x - y + 5 = 0$.



- *Escribe la ecuación paramétrica de la recta* que pasa por el punto *A*(2, 1) y tiene como vector de dirección ***v*** = (1, 2).

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación de la recta* que pasa por los puntos *A*(2, 1) y *B*(1, 3). Podemos tomar como vector de dirección el vector ***AB*** = (1 – 2, 3 – 1) = (–1, 2), y escribir su ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

La recta es, en los tres ejemplos, la misma, la de la

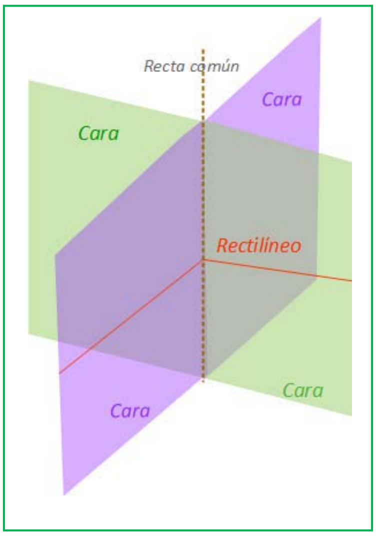
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

figura. Con ello podemos observar que una recta puede tener muchas ecuaciones paramétricas dependiendo del punto y del vector de dirección que se tome. Pero eliminando el parámetro y despejando "*y*" llegamos a una única ecuación explícita.

Actividades propuestas

39. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 9), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.



La ecuación **implícita de un plano** es: $ax + by + cz + d = 0$. Observa que es parecida a la ecuación implícita de la recta pero con una componente más.

La **ecuación vectorial de una recta** en el espacio es: ***OX*** = ***OA*** + *t****v***, aparentemente igual a la ecuación vectorial de una recta en el plano, pero al escribir las coordenadas, ahora puntos y vectores tiene tres componentes:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Una recta también puede venir dada como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dos puntos determinan una recta y tres puntos determinan un plano.

Actividades resueltas

- *Escribe la ecuación de la recta en el espacio que pasa por los puntos A(1, 2, 3) y B(3, 7, 1).*

Tomamos como vector de dirección de la recta el vector ***AB*** = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) y como punto, por ejemplo el *A*, entonces:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podemos encontrar las ecuaciones de dos planos que se corten en dicha recta, eliminando *t* en dos ecuaciones. Por ejemplo, sumando la primera con la tercera se tiene: $x + z = 4$. Multiplicando la primera ecuación por 5, la segunda por 2 y restando, se tiene: $5x – 2y = 1$. Luego otra ecuación de la recta, como intersección de dos planos es:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B de la actividad anterior, y C(2, 6, 2).*

Imponemos a la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ que pase por los puntos dados:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$3a + 7b + c + d = 0$

$2a + 6b + 2c + d = 0.$

Restamos a la segunda ecuación la primera, y a la tercera, también la primera:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$2a + 5b - 2c = 0$

$a + 4b - c = 0$

Multiplicamos por 2 la tercera ecuación y le restamos la segunda:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$a + 4b - c = 0$

$3b = 0$

Ya conocemos un coeficiente, $b = 0$. Lo sustituimos en las ecuaciones:

$a + 3c + d = 0$

$a - c = 0$

Vemos que $a = c$, que sustituido en la primera: $4c + d = 0$. Siempre, al tener 3 ecuaciones y 4 coeficientes, tendremos una situación como la actual, en que lo podemos resolver salvo un factor de proporcionalidad. Si $c = 1$, entonces $d = -4$. Luego $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ y $d = -4$. Es el plano de ecuación:

$$x + z = 4$$

plano que ya habíamos obtenido en la actividad anterior.

Actividades propuestas

40. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(6, 2, 5)$ y $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.

41. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.

42. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.

43. En el cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(6, 6, 6)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

3.4. Algunas ecuaciones

Actividades resueltas

- ¿Qué puntos verifican la ecuación $x^2 + y^2 = 1$?

¡Depende! Depende de si estamos en un plano o en el espacio.

En el plano, podemos ver la ecuación como que el cuadrado de la distancia de un punto genérico $X(x, y)$ al origen $O(0, 0)$ es siempre igual a 1:

$$D^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lugar de todos los puntos del plano que distan 1 del origen es la circunferencia de centro $O(0, 0)$ y radio 1.

En el espacio el punto genérico $X(x, y, z)$ tiene tres coordenadas, y $O(0, 0, 0)$, también. No es una circunferencia, ni una esfera. ¿Y qué es? Lo que está claro es que si cortamos por el plano *OXY*, ($z = 0$) tenemos la circunferencia anterior. ¿Y si cortamos por el plano $z = 3$? También una circunferencia. Es un cilindro. El cilindro de eje, el eje vertical, y de radio de la base 1.

- ¿Qué puntos verifican la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Ahora sí. Sí podemos aplicar la distancia de un punto genérico $X(x, y, z)$ al origen $O(0, 0, 0)$,

$$D^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Es la ecuación de la superficie esférica de centro el origen y radio 1.

Actividades propuestas

44. Escribe la ecuación del cilindro de eje el eje OZ y radio 2.

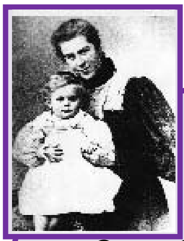
45. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.

46. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ y radio 1.

47. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(2, 5)$ y radio 2.

48. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF



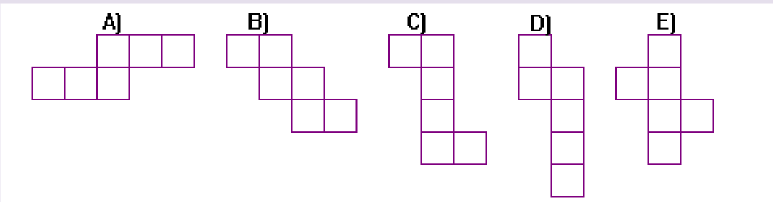
CURIOSIDADES. REVISTA

Grace Chisholm Young (1868 - 1944)

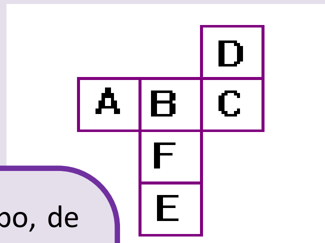
Grace Chisholm Young nació el 15 de marzo de 1868, cerca de Londres, Inglaterra, durante el reinado de la reina Victoria. Para hacernos una idea sobre el estado de la educación en esa época recordemos que hacia 1881, el 20 % de la población de Inglaterra todavía no sabía escribir su nombre. Era la más pequeña de cuatro hermanos (tres supervivientes) y también la más consentida. Sólo le enseñaban lo que quería aprender y en este sentido su educación fue un tanto informal. Le gustaba el cálculo mental y la música. Sin embargo fue una preparación suficiente para, a los 17 años, pasar los exámenes de *Cambridge* (*Cambridge Senior Examination*). Estudió Matemáticas pero para doctorarse fue a *Göttingen* donde se doctoró en 1895. En 1896 se casó con *William Young* con el que tuvo seis hijos. Ocupó mucho de su tiempo en la educación de sus hijos.

Escribió libros y muchos artículos. Escribió ***Primer libro de Geometría*** En él *Grace* escribía que la geometría en dimensión tres recibía, en primaria y en secundaria, mucha menos atención que la geometría del plano. Opinaba que esto no debía ser así porque *"en cierto sentido la geometría plana es más abstracta que la tridimensional"*, pues consideraba que la geometría tridimensional era más natural. Pero admitía, sin embargo, muy difícil representar figuras tridimensionales en una superficie bidimensional como es una página de un libro, y consideraba que ésta era la razón por la no se trabajaba (y actualmente tampoco se trabaja) adecuadamente. *Grace* opinaba que el alumnado debía construir figuras espaciales, por lo que incluyó en su libro muchos diagramas de figuras tridimensionales para ser recortados y construidos. Opinaba que esa era la forma en que el alumnado debía familiarizarse con las propiedades de estas figuras y que utilizándolas, con su ayuda, podía visualizar los teoremas de la geometría tridimensional.

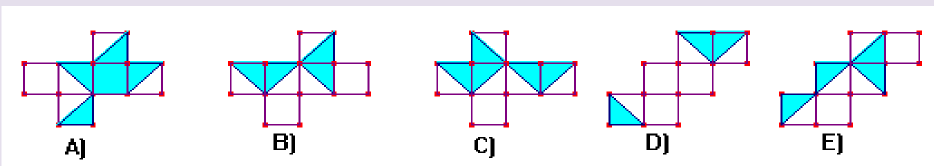
¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?

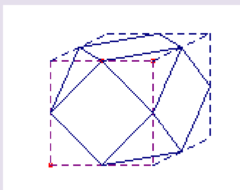


Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?



A partir de uno de estos desarrollos bicolores, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?

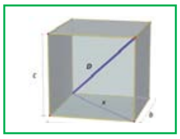
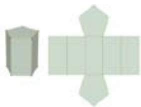
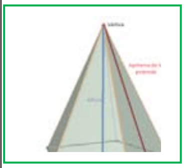




Haz el desarrollo

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Teorema de Pitágoras en el espacio	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	a= 2, b = 3, c = 4, entonces $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ D = $\sqrt{29}$ = 5,4.
Teorema de Tales:	Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. Si la recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*, entonces los segmentos correspondientes son proporcionales	
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$; $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$; $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	 $A_{Lateral} = 2\pi RH$; $A_{total} = 2\pi RH + 2\pi R^2$ $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi RG$; $A_{total} = \pi RG + \pi R^2$ $Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volumen = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Ecuaciones de la recta en el plano	**Ecuación explícita:** $y = mx + n$. **Ecuación implícita:** $ax + by + c = 0$ **Ecuación paramétrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.	**Ecuación implícita de un plano**: $ax + by + cz + d = 0$ **Ecuación paramétrica de una recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Teorema de *Pitágoras* y teorema de *Tales*

1. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *cm*.
2. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 *m*.
3. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 6 *cm*.
4. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 *cm*, 5 *cm* y 6 *cm* que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.
5. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?

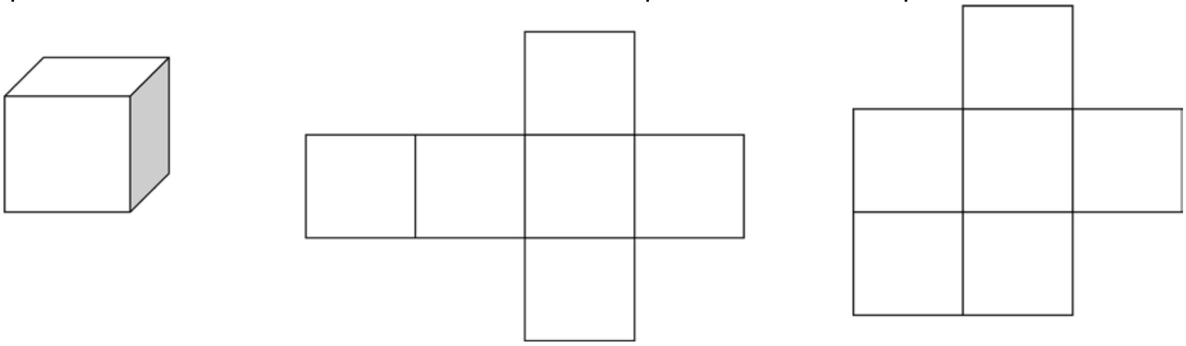
6. Un vaso de 11 *cm* de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 *cm*. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 *cm*?
7. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 *cm*, 3 *cm* y 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de longitud?
8. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 *cm* y la altura del prisma 8 *cm*.
9. Si un ascensor mide 1,2 *m* de ancho, 1,6 *m* de largo y 2,3 *m* de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 *m* de altura?
10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 *m* de ancho, 8 *m* de largo y 4 *m* de altura?
11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3,46 *cm*.
12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 *cm* y 2 *cm*, y altura 10 *cm*.
13. En una pizzería la pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € y la de 40 *cm* vale 5 €. ¿Cuál tiene mejor precio?
14. Vemos en el mercado una merluza de 30 *cm* que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

Longitudes, áreas y volúmenes

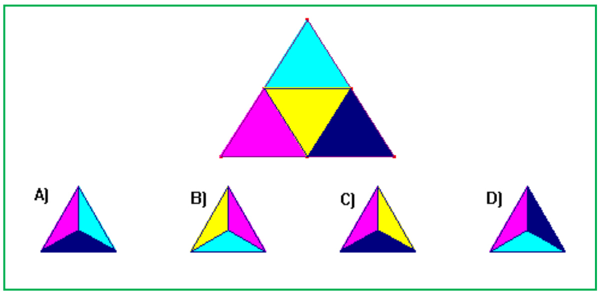
16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

17. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.
18. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?
19. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?

20. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo



21. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* y 4 *dm*. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

23. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 *cm* de arista basal y 0.9 *dm* de altura y calcula las áreas de la base y total.

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.

25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2,7 *dm*, 6,2 *dm* y 80 *cm*.

26. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 *m* de altura y 3 *cm* de radio de la base.

27. Calcula el área total de una esfera de 7 *cm* de radio.

28. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm^2 y su base es un hexágono de 4 *cm* de lado.

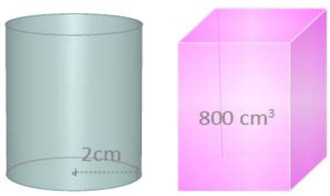
29. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 *dm* y la altura de la pirámide es de 6 *dm*. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* y 16 *cm* gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

31. Tres bolas de metal de radios 15 *dm*, 0,4 *m* y 2 *m* se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

32. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,50 *m* de diámetro y 30 *m* de profundidad?

33. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 *cm* y que su altura sea de 15 *cm*?



34. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 *cm* de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 *cm* de lado y 800 cm^3 de volumen.

35. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,50 *m* de alto y 135 dm^3 de volumen?

36. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio de la base y 20 *m* de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

37. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.

38. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 *dm* de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.

39. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de lado de la base y 5 *cm* de altura.

40. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 *cm* de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 *cm*. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

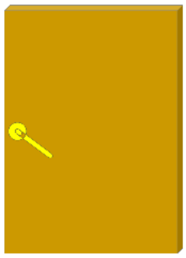
41. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 2, 4 y 8. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 17,3 *m*.

42. Un ortoedro tiene 0,7 *dm* de altura y 8 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?

43. Si el volumen de un cilindro de 15 *cm* de altura es de 424 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro.

44. (**CDI Madrid 2011**) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

45. (**CDI Madrid 2012**) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 *cm* de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.



46. Una circunferencia de longitud 18,84 *cm* gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.

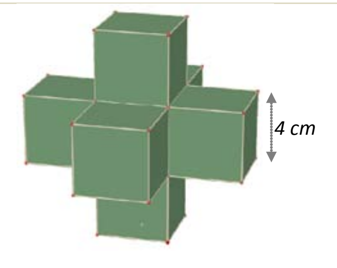
47. Una puerta mide 1,8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho y 3 *cm* de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.

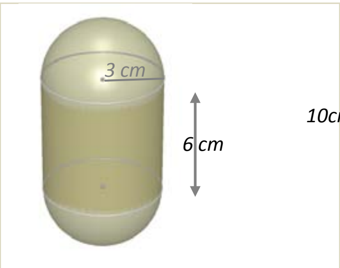
48. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 *cm* de altura y 15 *cm* de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

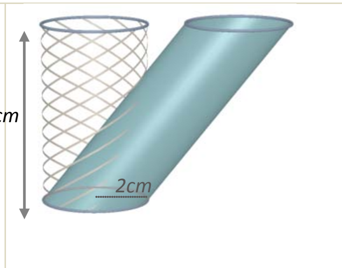
49. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 *cm* de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

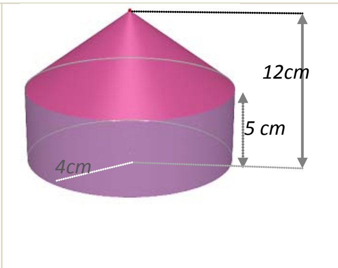
50. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251,2 *m*?

51. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



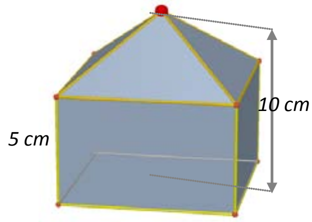




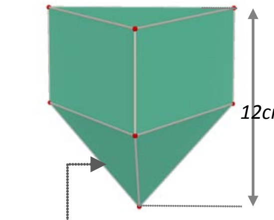


Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

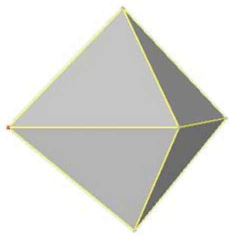
52. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



La base es cuadrada



Tetraedro de 5cm de arista

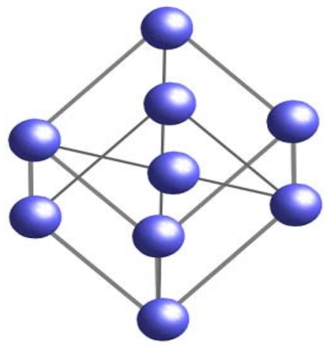

Octaedro de 6cm de arista


Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

53. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

54. Calcula el radio de una esfera que tiene 33,51 dm^3 de volumen.

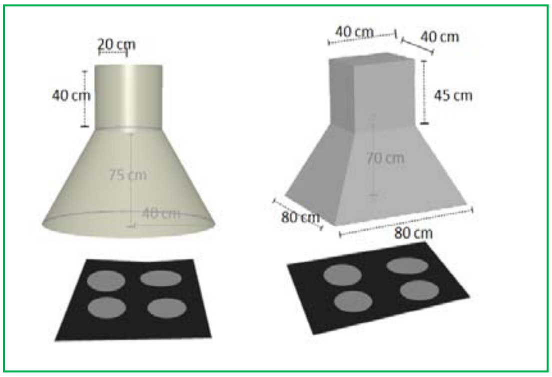
55. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?



56. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

57. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.

a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?

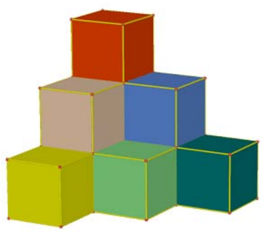


58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?

59. En una vasija cilíndrica de 3 *m* de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,5 *m* el nivel del agua?

60. El precio de las tejas es de 12,6 €/m^2 ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 *m* de altura y 15 m de lado de la base?

61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 *cm* y 26 *cm* formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?



62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 *cm* de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?

63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 *cm* y la altura total es de 12 *cm*, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 *m*, y su altura 146 *m*. ¿Qué volumen encierra?

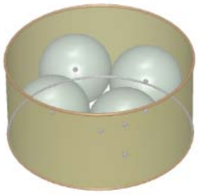
65. La densidad de un tapón de corcho es de 0,24, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus base miden 2,5 *cm* y 1,2 *cm*, y su altura 3 *cm*?

66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.

67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 *cm*.

68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 cm^3, y de área lateral 240 cm^2.

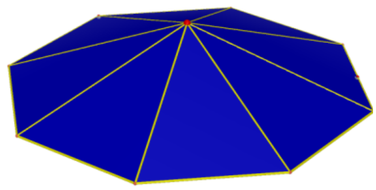
69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura y bases de radios 20 y 10 *cm*. Calcula su superficie.



70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio y 30 *cm* de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 *cm*. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

71. Un embudo cónico de 15 *cm* de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?

72. En un depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?



73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0,5 *m* de altura y 40 *cm* de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 *m*. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?

74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, ¿cuál es su profundidad?

75. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 *cm* de altura y 4 *cm* diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm^3 de helado contiene?

Iniciación a la Geometría Analítica

76. Calcula la distancia entre los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 5)$.

77. Calcula la distancia entre los puntos $A(7, 3, 4)$ y $B(2, 5, 8)$.

78. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (4, 5)$.

79. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (4, 5, 0)$.

80. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5)$ tiene el origen en el punto $A(3, 7)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

81. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5, 2)$ tiene el origen en el punto $A(3, 7, 5)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

82. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $A(2, 3)$ y $C(5, 6)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

83. Dibuja un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(4, 4, 4)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.

84. Sea $X(x, y)$ un punto del plano, y $A(2, 4)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

85. Sea $X(x, y, z)$ un punto del espacio, y $A(2, 4, 3)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

86. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y tiene como vector de dirección $\boldsymbol{u} = (4, 5)$. Represéntala gráficamente.

87. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

88. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, 6)$ y $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.

89. En el cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(5, 5, 5)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe también las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

90. Escribe la ecuación del cilindro de eje $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y radio 3.

91. Escribe la ecuación de la esfera de centro $A(2, 7, 3)$ y radio 4.

92. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ y radio 2.

93. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(3, 7)$ y radio 3.

94. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Las longitudes de los lados del triángulo de vértices $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ y $C(0, 3)$ son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. La altura de un prisma de base cuadrada es 20 *cm* y el lado de la base es 5 *cm*, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura y lado de la base 1 *m*. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}\ m^3$ b) $45\sqrt{2}\ m^3$ c) $30000\sqrt{2}\ dm^3$ d) $90\sqrt{2}\ m^3$

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0,5 *m* de altura y 1000 *cm* de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:

a) 1051 tejas. b) 150 tejas. c) 245 tejas. d) 105 tejas.

6. Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 *cm*, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 *dm* de radio de la base y 120 *cm* de altura es:

a) $5\sqrt{3}\ dm$ b) $\sqrt[3]{75}\ dm$ c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}\ cm$

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura y 3 *cm* de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(1, 3)$ es:

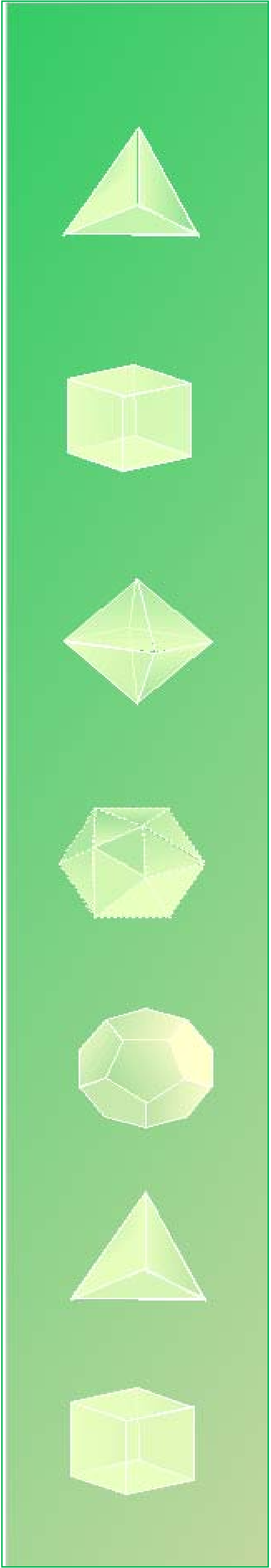
a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. La ecuación de la esfera de centro A(2, 3, 5) y radio 3 es:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF



MATEMÁTICAS: 4ºA ESO
Capítulo 6:
Funciones y gráficas.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

La Ciencia utiliza modelos, y muchos modelos se consiguen ajustando una función a una tabla de valores. Por ejemplo, en este momento estamos ajustando unas parábolas a la relación entre la duración del desarrollo en días y la temperatura de los diferentes estadios de la cochinilla roja, *Aonidiella aurantii*, que es una plaga que ataca a los cítricos produciendo desde la muerte del árbol a su desvalorización comercial, y de sus enemigos naturales, como los del género *Aphytis*, que bajo ciertas condiciones pueden llegar a regular las poblaciones de tal forma que no hagan falta utilizar otras medidas adicionales de control como insecticidas.

Una vez conseguida una función que se ajuste a una tabla de valores se puede pronosticar lo que va a ocurrir o dar valores que no se conocían previamente.

Ajustar modelos mediante funciones que sirvan en las situaciones más variadas es una de sus aplicaciones más importantes.

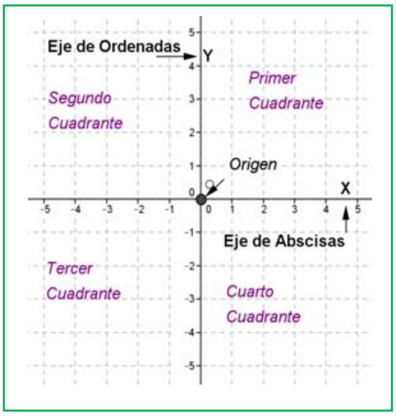
Autores: José Gallegos y David Miranda

Revisor: Miguel Paz

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. FUNCIONES

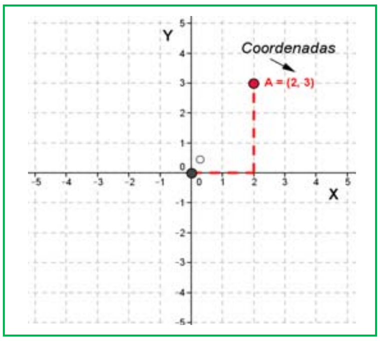
1.1. Ejes de coordenadas o cartesianos. Coordenadas cartesianas



Recuerda que:

Un conjunto formado por el **origen** *O*, los dos **ejes de coordenadas** y la **unidad de medida** es un **sistema de referencia cartesiano**.

Las **coordenadas** de un punto *A* son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo "***x***" la primera coordenada o **abscisa** e "***y***" la segunda coordenada u **ordenada**. A toda pareja ordenada de números (*x*, *y*) le corresponde un punto del plano.

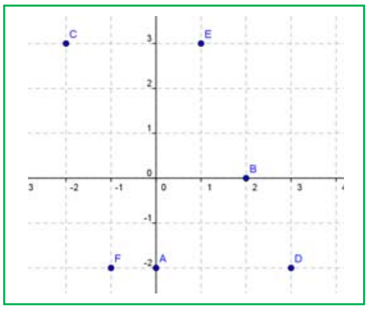


También cualquier punto del plano queda totalmente determinado mediante sus coordenadas.

Ejemplo:

- En el gráfico anterior, el punto *A* tiene coordenadas (2, 3).

Actividades propuestas



1. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:

2. Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano: *A* (2, –3); *B* (0, –1); *C* (3, 4).

1.2. Concepto intuitivo de función

Ya sabes que:

Existen multitud de fenómenos en nuestra vida cotidiana en los que aparecen relacionadas dos magnitudes. Por ejemplo, el precio de un kilo de manzanas y el número de kilos que compramos, la duración de un trayecto y la velocidad a la que vamos…

Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una, llamada **variable independiente** ("*x*"), le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra, llamada **variable dependiente** ("*y*").

Observa que si a un mismo valor de *x* le corresponden dos o más valores de *y*, entonces la relación **no** es una función. En cambio, a la inversa, en una función un mismo valor de *y* sí puede provenir de distintos valores de *x*.

Las relaciones funcionales se pueden establecer mediante una tabla de valores, una gráfica o una expresión matemática o fórmula.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Un kilo de tomates cuesta 0,8 €/kg. La función que establece cuánto debemos pagar en función de la cantidad de tomates que nos llevamos es $y = f(x) = 0,8\,x$.

En la expresión $y = f(x)$, ***f*** es el nombre que le ponemos a la **función**, (podríamos llamarla usando otras letras, las que se usan más frecuentemente son "*f*", "*g*" y "*h*"). Entre paréntesis va la variable "***x***" que representa el número de kilos que compramos, es la **variable independiente** puesto que nosotros elegimos libremente la cantidad de tomates que queremos o necesitamos. La variable "***y***" representa el precio que debemos pagar, es la **variable dependiente** puesto que "depende" de cuántos kilos nos llevamos, es decir, de "*x*".

La expresión, ***f*(*x*)**, que se lee "*f* de *x*", se suele usar con mucha frecuencia para designar a la variable dependiente porque resulta muy cómodo escribir cuánto nos costaría comprar una cantidad concreta, por ejemplo, 5 kg, se expresaría "*f* de 5" y su valor es $f(5) = 0,8·5 = 4$ €.

Actividades propuestas

3. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:

a. Edad y peso de una persona concreta a lo largo de su vida
b. Peso y edad de esa misma persona
c. Un número y su mitad
d. Un número y su cuadrado
e. Precio de la gasolina y el día del mes
f. Día del mes y precio de la gasolina

4. Si hoy el cambio de euros a dólares está 1 € = 1,3 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	x
$					

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas, en la que, conociendo los euros, se obtengan los dólares. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?

Si cuando realizas el cambio en una oficina te cobran una comisión fija de 1,5 €, ¿cómo quedaría la fórmula en este caso?

1.3. Grafo y gráfica de una función

Ya que en toda función tenemos dos valores que se relacionan de forma única, podemos dibujar ambos en los ejes cartesianos de forma que, si unimos todos esos puntos, obtenemos una curva que nos permite visualizar dicha función.

Dicha representación tiene una serie de limitaciones, muchas de ellas comunes a cualquier dibujo que se pueda hacer: es aproximada puesto que los instrumentos que se utilizan para hacerlo (regla, compás, lápiz…), por muy precisos que sean (ordenadores), siempre tienen un margen de error; también existen fallos de tipo visual o de los instrumentos de medida; o muchas veces tenemos que representar los

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

infinitos puntos del grafo en un espacio finito, lo cual es imposible y hace que solo podamos dibujar una parte de lo que se pretende, pero no todo.

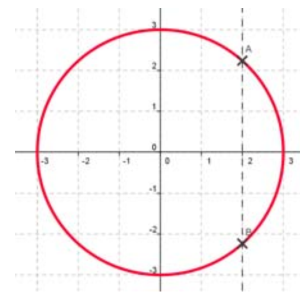
A pesar de todos estos inconvenientes, representar gráficamente esta serie de puntos relacionados que conforman la función, aunque sea de forma aproximada, es importante, puesto que nos permite entender muchas propiedades a simple vista: “*más vale una imagen que mil palabras*”.

Además, una representación también nos permite descubrir si la misma representa a una función o no, ya que en el dibujo es fácil interpretar si a un valor de la variable independiente le corresponde únicamente uno de la dependiente o más de uno, propiedad fundamental que define a las funciones.

Ejemplo:

- El siguiente dibujo, que corresponde a una circunferencia, al valor **0** de la variable independiente le corresponden los valores **3** y –**3** de la dependiente. Además, hay otros muchos valores a los que les pasa lo mismo, como para *x* = 2, que corta a la gráfica en los puntos *A* y *B*. La circunferencia no puede ser la representación de una función.

La fórmula que corresponde a dicha gráfica es $x^2 + y^2 = 9$ o, también $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.



$x^2 + y^2 = 9$

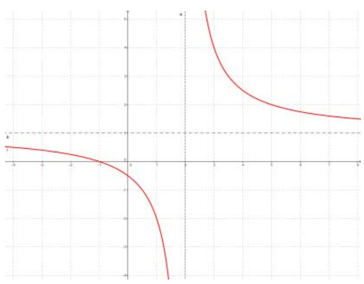
El **grafo de una función** es el conjunto de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función:

$$Grafo(f) = \{(x, y); x \in \Re, y = f(x)\}$$

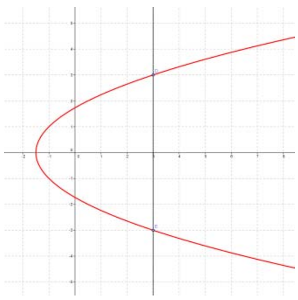
La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los puntos que forman el grafo de la misma.

Actividad resuelta

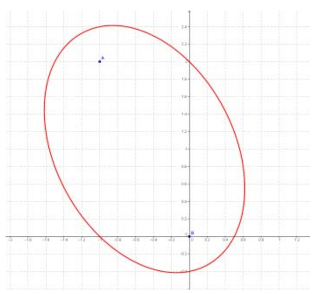
- *Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no:*



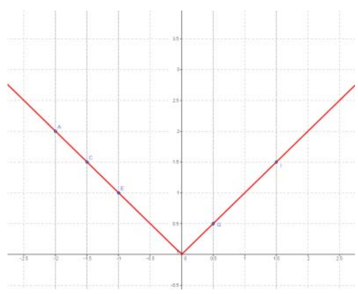
SÍ



NO



NO



SÍ

¿Cuál es la clave o regla para reconocer, a partir del dibujo, si este corresponde a una función o no?

Si trazamos rectas verticales imaginarias y estas chocan con el dibujo, como mucho, en un punto, la gráfica corresponde a una función. Si choca en dos o más puntos, no es una función.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

5. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y otra que no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

6. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–10	–5	10	–10	27
$f(x)$	–3	0	5	4	0

7. Una persona camina a una velocidad de 4 km/h y parte del kilómetro 10. Escribe la expresión algebraica de la función que indica los kilómetros recorridos en función del tiempo. Señala cuáles son los valores que no tiene sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.

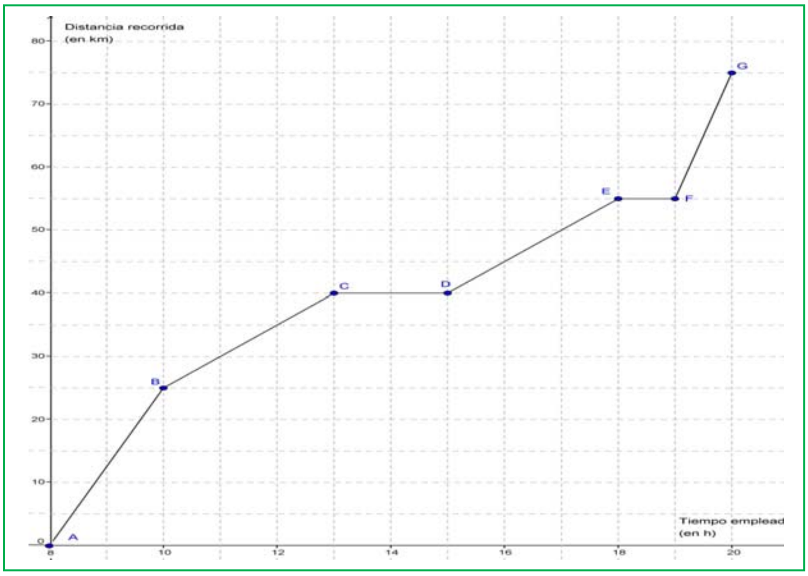
8. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. Su área es 1 u^2. Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.

9. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. La tarifa mínima es de 0,50 euros, el tiempo máximo de aparcamiento es de 2 horas, cada media hora más cuesta 0,90 euros, y cada fracción, 0,05 euros. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo que se espera va a estar aparcado el vehículo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.

10. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 5 cm y de altura total del vaso 18 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?

11. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:

a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable "distancia al punto de partida", ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?



12. La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes de un equipo de baloncesto, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? ¿Y la relación entre la edad y la altura? Escribe tres correspondencias que sean funcionales y tres que no.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

2.1. Dominio y continuidad.

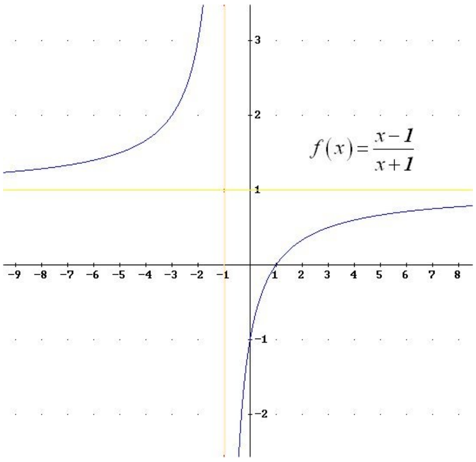
El **dominio** de una función es el conjunto de puntos en los que está definida.

$$Dom(f) = \{x \in \Re \mid \exists\, f(x)\}$$

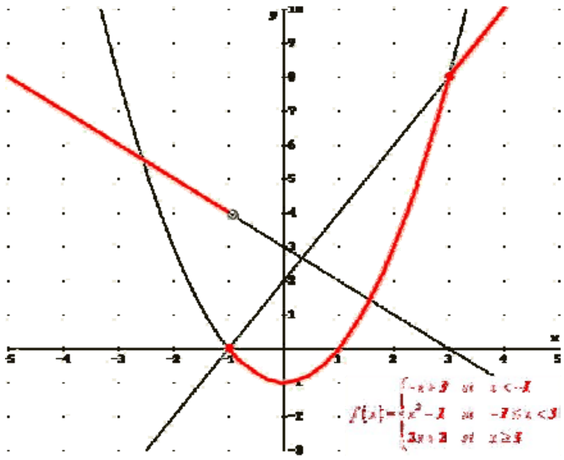
El concepto de **continuidad** de una función es muy intuitivo ya que se corresponde con que la gráfica se pueda dibujar sin levantar el lápiz del papel. Cuando esto no ocurre, se producen "*saltos*" en determinados puntos que reciben el nombre de discontinuidades.

Actividad resuelta

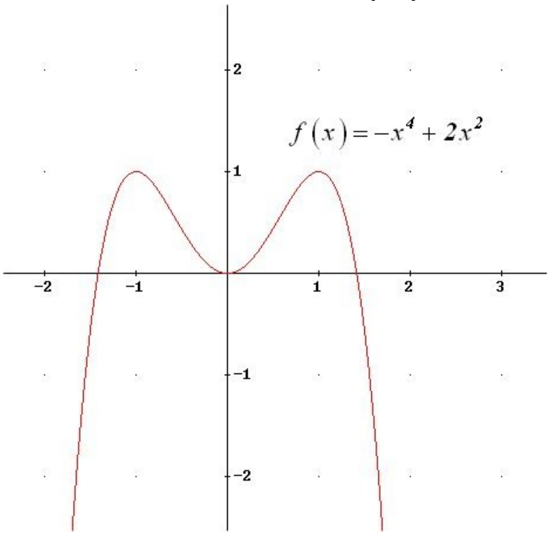
- *¿Qué funciones son continuas según su gráfica y cuáles no? Indica en estas últimas el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad:*



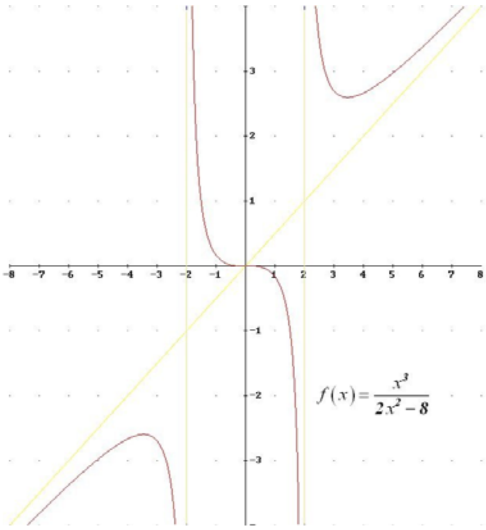
NO es continua en $x = -1$ donde tiene un salto infinito. Es continua en el resto de los puntos
Su dominio es $\Re - \{-1\}$.



NO es continua en $x = -1$ donde tiene un salto finito de 4 unidades. En el resto, es continua.
Su dominio es $\Re$.



SÍ, es continua para cualquier valor de *x*.
Su dominio es $\Re$.



NO es continua ni en $x = -2$ ni en $x = 2$ donde tiene saltos infinitos.
Es continua en $\Re - \{-2, 2\}$, que es su dominio.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Monotonía: crecimiento y decrecimiento.

Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la variable dependiente.

Una función es **decreciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el de la variable dependiente.

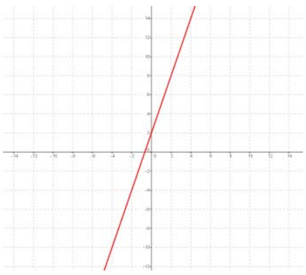
Una función es **monótona** en un intervalo cuando es únicamente creciente (o únicamente decreciente) en dicho intervalo.

Una función es **constante** en un intervalo cuando la variable dependiente toma siempre el mismo valor.

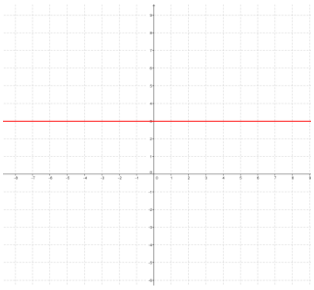
Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

Actividad resuelta

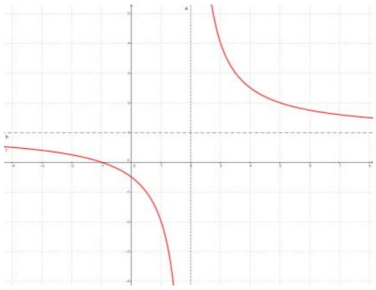
- *Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones siguientes:*



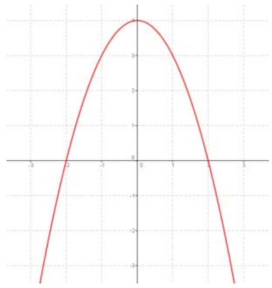
CRECIENTE siempre (monótona)



CONSTANTE siempre



DECRECIENTE hasta x = 2
DECRECIENTE desde x = 2



CRECIENTE hasta x = 0
DECRECIENTE desde x = 0

2.3. Tasa de variación

La **tasa de variación** es lo que aumenta o disminuye una función entre dos valores. Se define como:

TV = $f(x_2) - f(x_1)$, para $x_2 > x_1$.

Si la función es creciente en un intervalo, entonces la tasa de variación es positiva, y si es decreciente, negativa.

La tasa de variación media se define como: TVM = $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

La TVM es muy importante, porque no es lo mismo que una función varíe su valor una misma cantidad en un intervalo pequeño que en un intervalo grande. Por ejemplo, no es lo mismo pasar de 0 a 100 km/h en 5 segundos que en 20 segundos.

Ejemplo:

- En el desplazamiento de un vehículo en función del tiempo, la tasa de variación, es lo que se ha desplazado en un intervalo de tiempo, y la tasa de variación media indica la velocidad media en ese intervalo de tiempo.

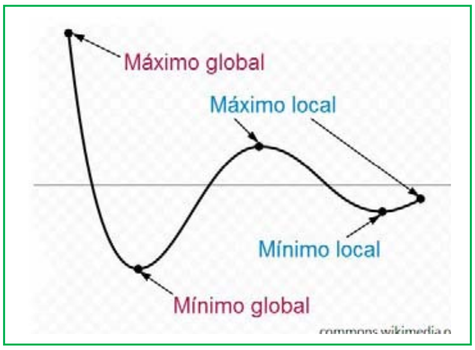
Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Extremos: máximos y mínimos

Una función presenta un **máximo relativo** (o máximo **local**) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es mayor que cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

$(a, f(a))$ es **máximo relativo** si $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo

Si, además, el valor es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** (o máximo global) en él.



$(a, f(a))$ es **máximo absoluto** si $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$

Una función presenta un **mínimo relativo** (o mínimo **local**) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

$(a, f(a))$ es **mínimo relativo** si $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo

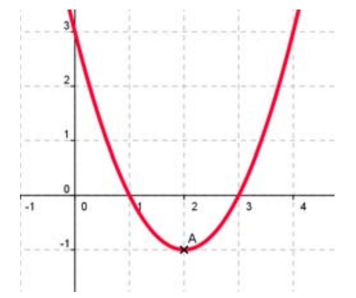
Si, además, el valor es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** (o mínimo **global**) en él.

$(a, f(a))$ es **mínimo absoluto** si $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

Actividades resueltas

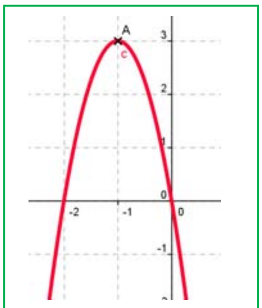
- *Estudia los máximos y mínimos de las funciones siguientes:*



$y = x^2 - 4x + 3$

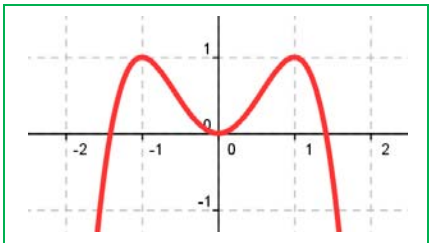
- La parábola $y = x^2 - 4x + 3$ tiene un mínimo absoluto en su vértice (2, –1). No tiene máximos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice es decreciente y después es creciente.

- La parábola $y = -3x^2 - 6x$ tiene un máximo absoluto en su vértice (–1, 3). No tiene mínimos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice, para $x < -1$, la función es creciente, y después, para $x > -1$, la función es decreciente.



$y = -3x^2 - 6x$

Todas las parábolas tienen un máximo o un mínimo absoluto en su vértice.



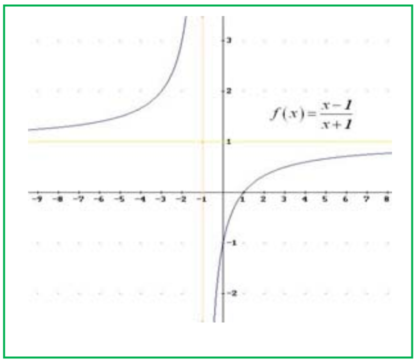
$y = -x^4 + 2x^2$

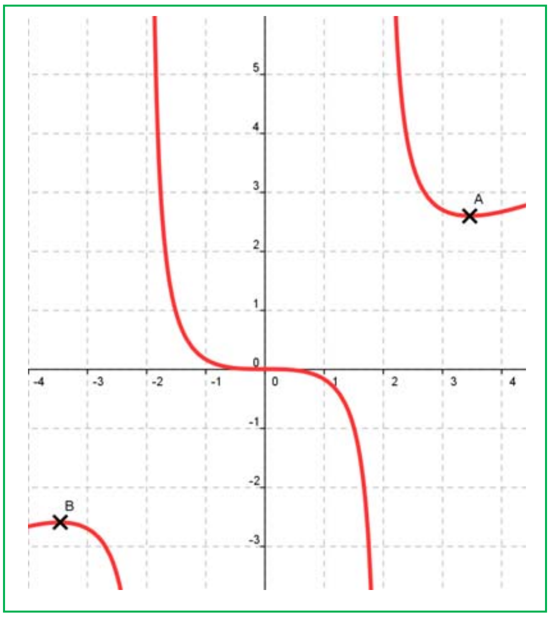
- La función $y = -x^4 + 2x^2$ tiene un mínimo absoluto en el origen (0, 0) y dos máximos en (1, 1) y en (–1, 1). Para $x < -1$ es una función creciente, para $-1 < x < 0$, es una función decreciente, para $0 < x < 1$ es creciente, y para $x > 1$ es decreciente.

Observa, en los **máximos** siempre la función pasa de ser **creciente** a ser **decreciente**, y el los **mínimos** de ser **decreciente** a ser **creciente**.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

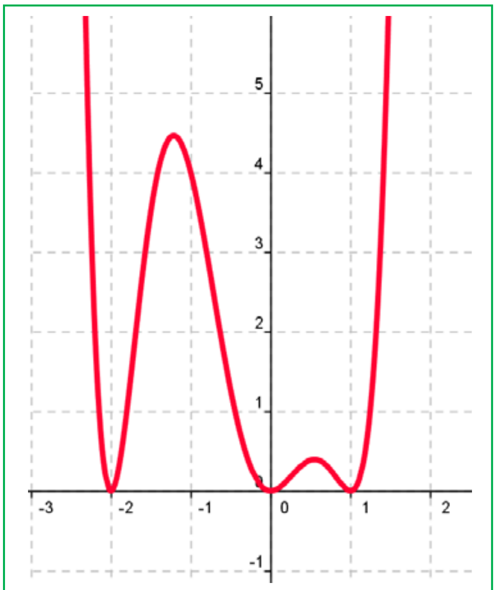
- La función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ no tiene ni máximos ni mínimos (ni relativos ni absolutos). Es una función siempre creciente.



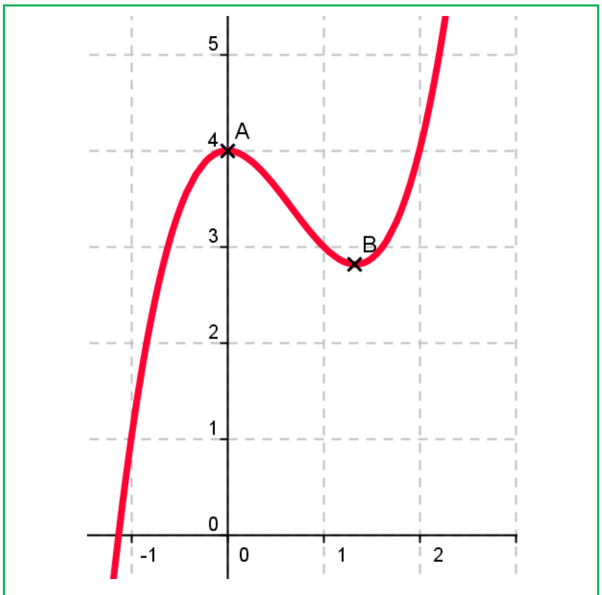


- La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$ no tiene máximo ni mínimo absoluto, pero tiene un mínimo relativo hacia x = 3, A(3'46, 2'6), y un máximo relativo hacia x = –3, B(–3'46, –2'6). Observa que el valor del mínimo relativo, 2'6, es mayor que la del máximo relativo, –2'6. Pero en valores próximos al mínimo si es el menor valor, por este motivo se denominan "*relativo*", "*local*". No son los valores menores (o mayores) que alcanza la función, pero si únicamente miramos en un entorno del punto si son valores máximos o mínimos.

- La función $f(x) = x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2$ no tiene ningún máximo absoluto, pero si tiene dos máximos relativos, uno en el intervalo (–2, –1) y el otro en el intervalo (0, 1). Tiene, sin embargo, tres mínimos absolutos en los puntos (–2, 0), (0, 0) y (1, 0). La función es siempre positiva y su valor mínimo absoluto es **0**.



$f(x) = x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2$



$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

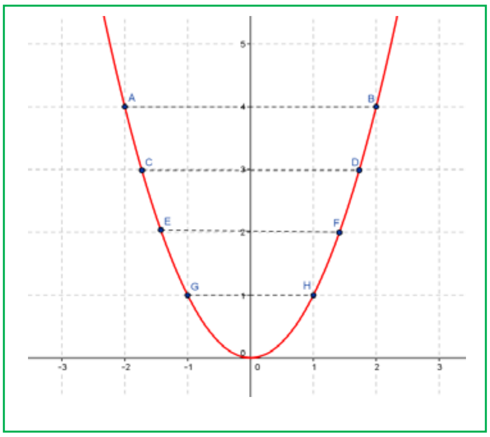
- La función $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ no tiene ni máximos ni mínimos absolutos, pero tiene un máximo relativo en el punto A(0, 4) y un mínimo relativo en el punto B(4/3, 2,8). Es creciente para $x < 0$, decreciente para $0 < x < 4/3$, y creciente para $x > 4/3$.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.5. Simetría

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número que su opuesto:

$$f(-x) = f(x)$$



Si una función es par entonces es **simétrica** respecto al **eje de ordenadas**, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

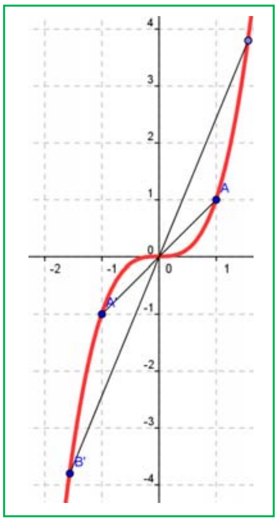
Ejemplo:

- La función cuadrática $f(x) = x^2$ es par:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número por su opuesto:

$$f(-x) = -f(x)$$



Si una función es impar entonces es **simétrica** respecto al **origen** de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:

La función $y = x^3$ es una función impar pues es simétrica respecto del origen.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

El segmento *AO* es igual al segmento *OA'*, y el segmento *BO* es igual al segmento *OB'*.

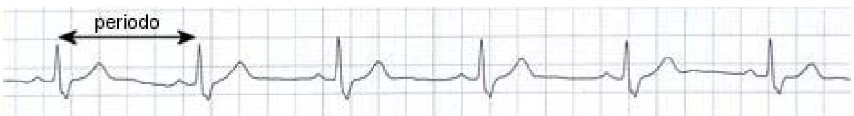
2.6. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que los valores de la función se repiten siempre que se le añade a la variable independiente una cantidad fija, ***T***, llamada ***periodo***. Las funciones periódicas verifican que:

$$f(x + T) = f(x).$$

Ejemplo:

- Un ejemplo de función periódica es el siguiente, que corresponde a un electrocardiograma:



Se observa claramente que la gráfica se repite a intervalos iguales, ya que los latidos del corazón son rítmicos.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

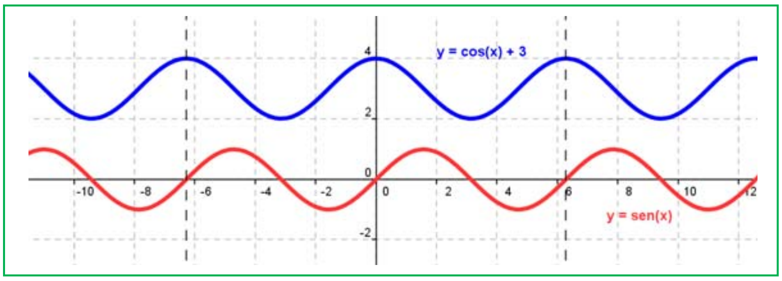
Actividad resuelta

- Las funciones:

$y = sen(x)$,

$y = cos(x) + 3$,

son funciones periódicas. Observa que su periodo es algo mayor que 6, es 2·π. En cada intervalo de longitud 2 · π se repite una oscilación. Verifican que.

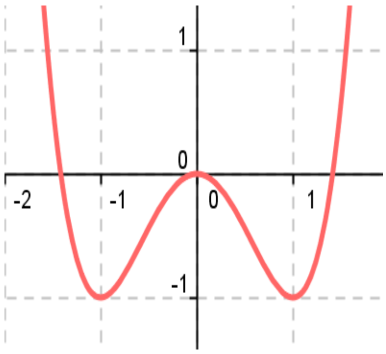


$sen(x + 2·\pi) = sen(x)$, y que: $cos(x + 2·\pi) + 3 = cos(x) + 3$.

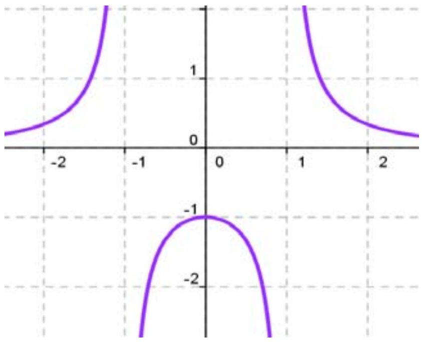
Actividades propuestas

13. Copia las siguientes gráficas en tu cuaderno y señala todas las características que puedas de las funciones representadas. Indica su dominio, si es continua (o puntos de discontinuidad si los hubiera), si es simétrica y tipo de simetría, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodo (si lo hubiera)…

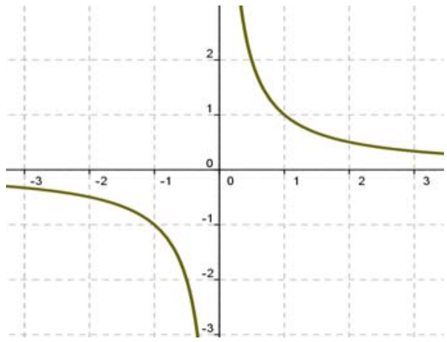
a)



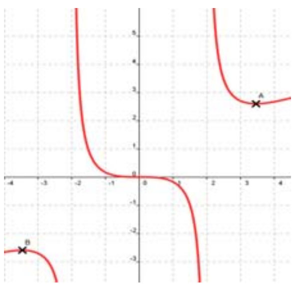
b)



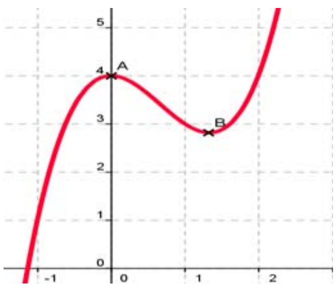
c)



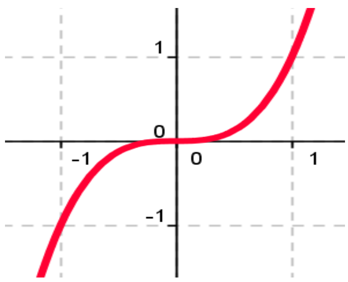
d)



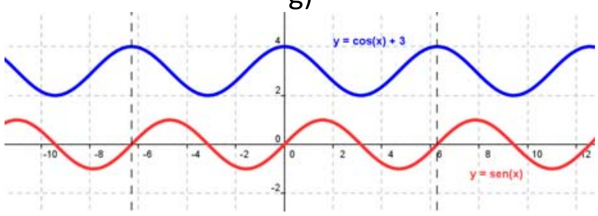
e)



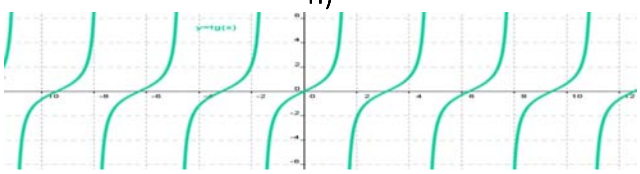
f)



g)



h)



Autores: José Gallegos y David Miranda

Revisor: Miguel Paz

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. TIPOS DE FUNCIONES

3.1. Funciones polinómicas de primer grado. La recta

Proporcionalidad directa

Recuerda que:

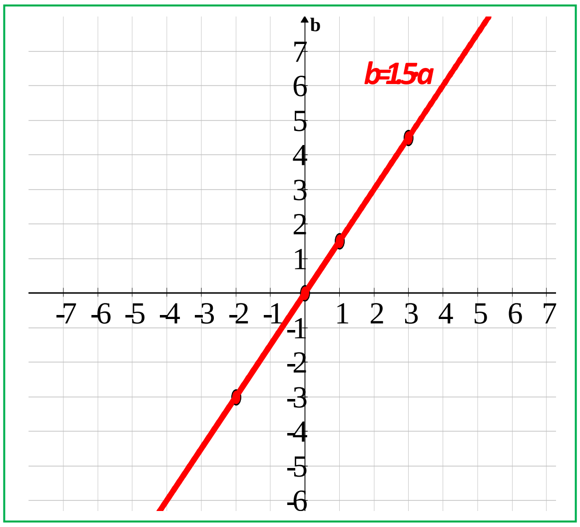
Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

Ejemplo:

- Representar gráficamente la relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:

Magnitud A (*x*)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (*y*)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$$k = \frac{-7{,}5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1{,}5}{1} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$$

La relación se define así: $y = 1{,}5 \cdot x$.

Recuerda que:

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Se puede escribir la relación entre la magnitud A (x) y la magnitud B (y) como $y = kx$ donde k es la **razón de proporcionalidad**.

Ejemplo:

- La relación entre el peso en kilogramos y el coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma $y = kx$, donde k es el precio de un kilo.
- Muchas de las relaciones en Física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad , fuerza – masa…

Actividades propuestas

14. El consumo medio de agua al día por habitante es de 150 litros. Representa gráficamente el consumo de agua de una persona a lo largo de una semana.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Función lineal. Rectas de la forma *y* = *m*·*x*.

Recuerda que:

Una **función lineal** es la que tiene la fórmula ***y* = *m*·*x***.

Es una función polinómica de primer grado a la que le falta el término independiente.

Una función lineal corresponde a una relación de proporcionalidad directa.

Por tanto, la relación de proporcionalidad directa es una **función lineal** de la forma ***y* = *m*·*x***.

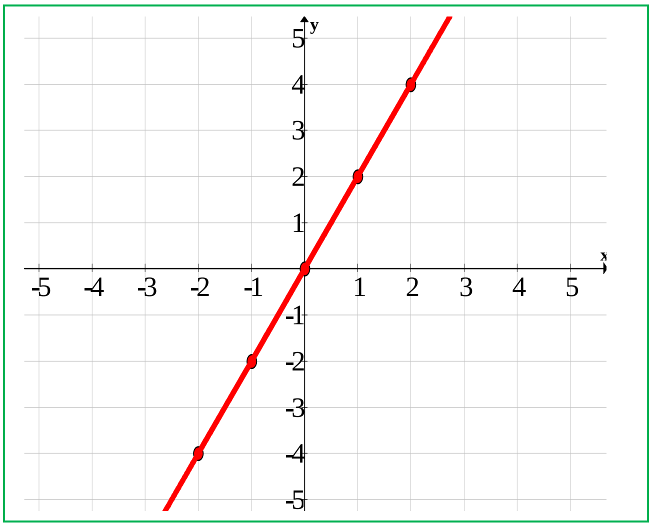
La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una **recta** que pasa por el origen.

Por lo que la gráfica de una **función lineal** es una recta.

Ejemplo

- Representa la recta *y* = 2·*x*

  Nota: para definir una recta es suficiente con conocer dos de sus puntos (1, 2), (0, 0).



Recuerda que:

Las rectas *y* = *m*·*x* tienen los siguientes componentes:

- *x* es la variable **independiente**.
- *y* es la variable **dependiente**.
- *m* es la **pendiente** de la recta.

Las características más importantes de las funciones lineales son:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0, 0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todo el conjunto de los números reales: tanto *x* como *y* aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Interpretación geométrica de la pendiente

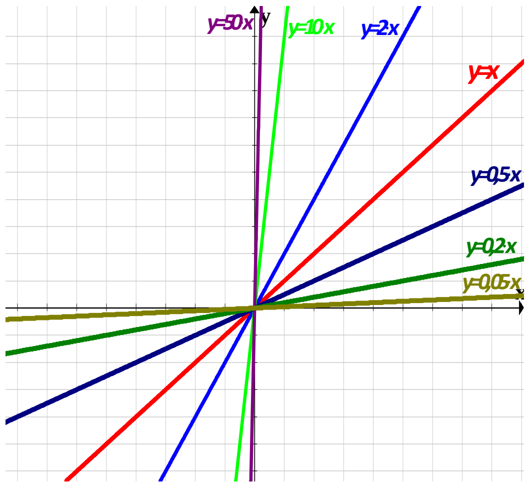
El coeficiente *m* (que es la razón de proporcionalidad) se llama **pendiente de la recta.** La pendiente *m* es lo que diferencia unas funciones lineales de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas y determina su crecimiento.

- Si *m* > 0. la función es **creciente**.
- Si *m* < 0, la función es **decreciente**.
- Si *m* = 0, la función es **constante**, ni crece ni decrece.

En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad *k*.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas



- *Representa gráficamente las funciones:*

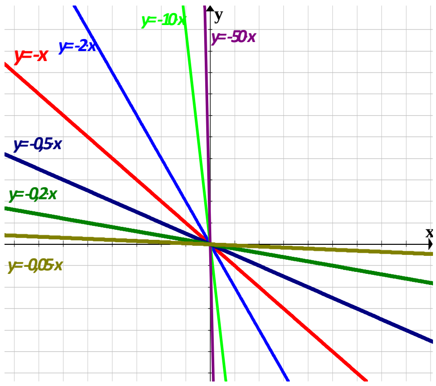
y = *x*; *y* = 2*x*; *y* = 10*x*; *y* = 50*x*; *y* = 0,5*x*; *y* = 0,2*x*; *y* = 0,05*x*.

Analiza el resultado.

- La recta *y* = *x*, tiene de pendiente *m* = 1.

- Si aumenta *m*, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje *y*.

- Si disminuye *m*, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta convertirse en el eje *x* cuando *m* = 0.



- *Representa gráficamente las funciones:*

y = –*x*; *y* = –2*x*; *y* = –10*x*; *y* = –50*x*; *y* = –0,5*x*; *y* = –0,2*x*; *y* = –0,05*x*.

Analiza el resultado.

- Si aumenta *m* (es decir, disminuye en valor absoluto pues es negativo), entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje *x*: *y* = 0.

- Si disminuye *m* (es decir, aumenta en valor absoluto pues es negativo), entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje *y*.

La **pendiente** de la recta *y* = *mx* es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

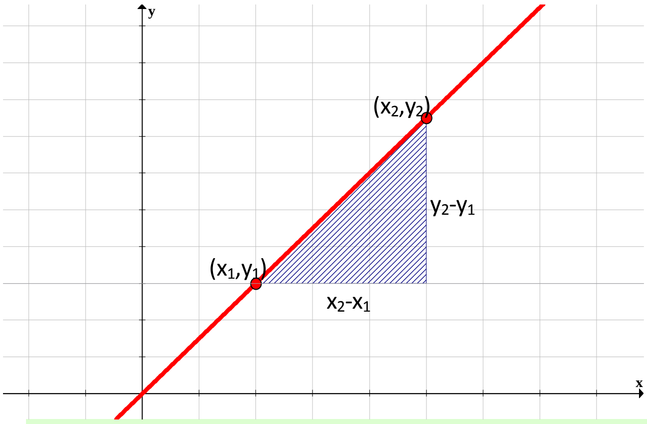
- Si $m > 0$, la recta es creciente.

- Si $m < 0$, la recta es decreciente.

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza. Hemos observado que:

- Si *m* > 0:
  - Para valores altos de *m* la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta “sube” mucho y avanza poco.
  - Para valores pequeños de *m* la recta crece con menos rapidez, es decir, “sube” poco y avanza mucho.
- Si *m* < 0:
  - Para valores altos de *m* la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
  - Para valores pequeños de *m* la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta “baja” mucho y “avanza” poco.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

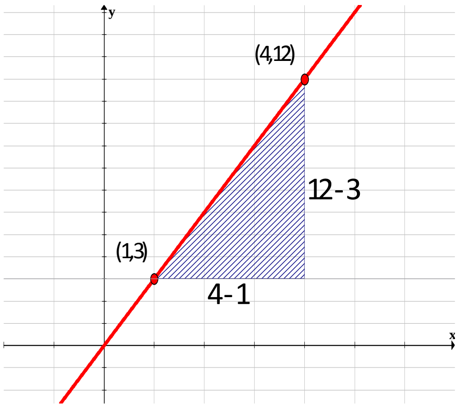


Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:

Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la **pendiente** se calcula de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

es decir, $m = \dfrac{\textit{lo que sube}}{\textit{lo que avanza}}$

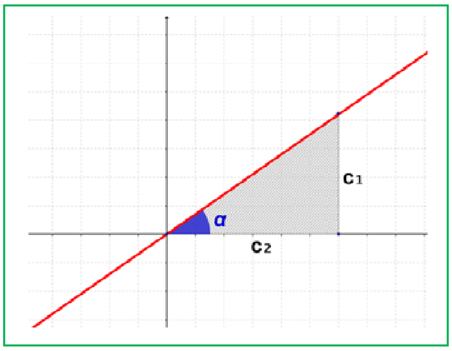


La **tasa de crecimiento media** de una función lineal coincide con su pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ejemplo:

La recta que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 12) sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$



Para hallar la pendiente se toma como referencia la base y la altura del triángulo rectángulo que forman los vértices de los puntos de la recta.

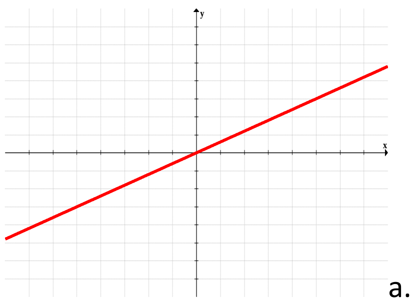
El cociente entre la altura y la base es la pendiente. Como el triángulo construido es un triángulo rectángulo, la pendiente es el cociente entre sus dos catetos.

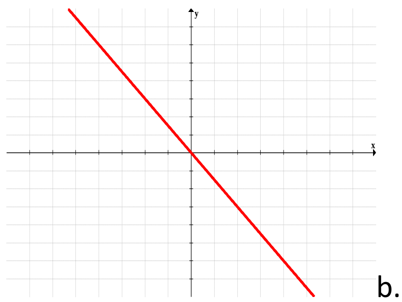
Actividades propuestas

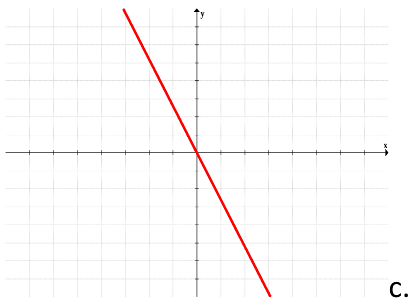
15. Representa en tu cuaderno, estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales siguientes:

a) $y = 1{,}25 \cdot x$; b) $y = (3/5) \cdot x$; c) $y = 3 \cdot x$; d) $y = 0{,}5 \cdot x$;

16. Halla la pendiente y la expresión algebraica (fórmula) de las siguientes rectas:







Función lineal. Rectas de la forma *y* = *m*·*x* + *n*.

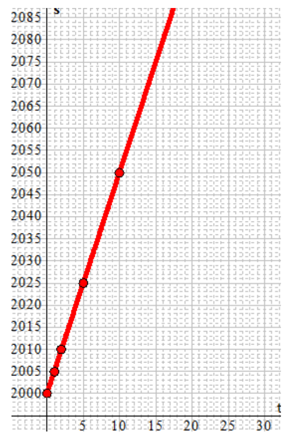
Ya sabes que:

Las funciones polinómicas de primer grado, o **funciones afines**, se describen algebraicamente de la forma $y = m \cdot x + n$ y se representan mediante **rectas**.

Ejemplo:

- *U*n ciclista que se ha trasladado 2 Km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s. Su tabla de valores y su representación gráfica son:

Tiempo (*t*)	Espacio (*s*)
0	2000
1	2007
2	2012
5	2027



La fórmula es $s = s_0 + v \cdot t$

La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica:

$$y = 5 \cdot x + 2.000,$$

donde *x* corresponde al tiempo *t* e *y* al espacio *s*, siendo 2.000 es el espacio inicial s_0.

La **pendiente** es 5 pero la recta no pasa por el punto (0, 0), sino que corta al eje de ordenadas en el punto (2000, 0). Se dice que la **ordenada en el origen** es 2000.

Las rectas de la forma ***y = mx + n*** tienen la misma pendiente que las rectas *y* = *mx* pero están desplazadas en el eje de ordenadas (eje *y*) *n* posiciones (hacia arriba si *n* es positiva, y hacia abajo si es negativa). Por esta razón, a *n* se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando *x* = 0.

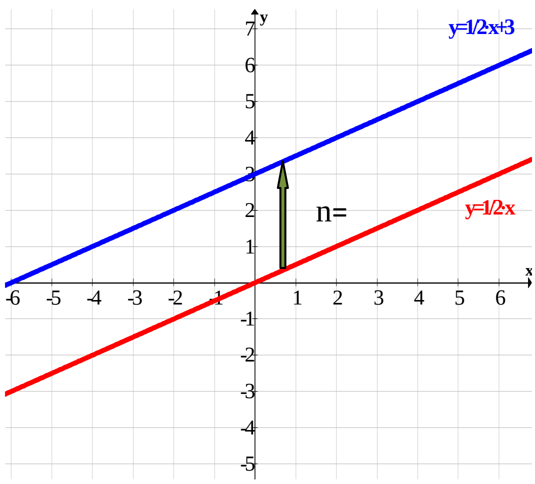
Actividades resueltas

- *Compara la recta y* = (1/2)·*x con la recta y* = (1/2)·*x* + 3.

Las dos rectas tienen la misma pendiente. En ambos casos *m* = 1/2. Son dos rectas paralelas.

La diferencia está en el valor de la ordenada en el origen *n*: la recta *y* = (1/2)·*x* (donde *n* = 0) se ha desplazado 3 posiciones en el eje *y* para convertirse en la recta *y* = (1/2)·*x* + 3 (donde *n* = 3).

La recta *y* = *mx* + *n* es paralela a la recta *y* = *mx* (tienen la misma pendiente, *m*) desplazada verticalmente *n* posiciones.

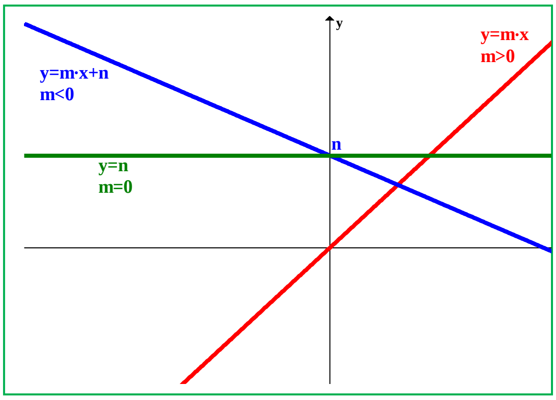


Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Las funciones ***y = mx + n*** se llaman **funciones afines**, y son también funciones lineales.

En cuanto a su pendiente, tiene el mismo significado:

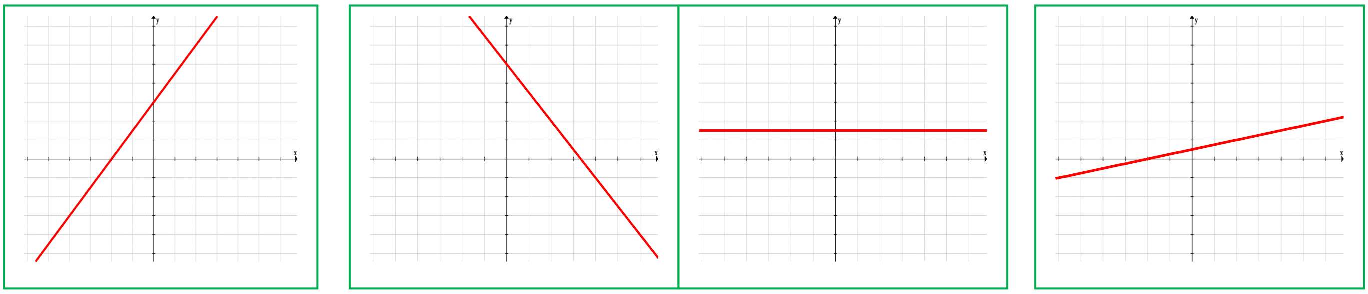
- Si $m > 0$. la función es **creciente**.
- Si $m < 0$, la función es **decreciente**.
- Si $m = 0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Pasa por el punto (n, 0) y es paralela al eje x.



La **tasa de crecimiento media** de una función afín también coincide con su pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y es constante a lo largo de toda la recta.

Actividades propuestas

17. Halla la expresión algebraica de las siguientes rectas:



18. Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 5, –4, y 1/3 respectivamente.

19. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta y = x? ¿Y la recta y = –x?

20. ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

21. Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\dfrac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $x = 3$

22. Un metro de cierta tela cuesta 2,05 €, ¿cuánto cuestan 7 metros? ¿Y 20 m? ¿Y 15,2 m? ¿Cuánto cuestan “x” metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Funciones polinómicas de segundo grado. Función cuadrática

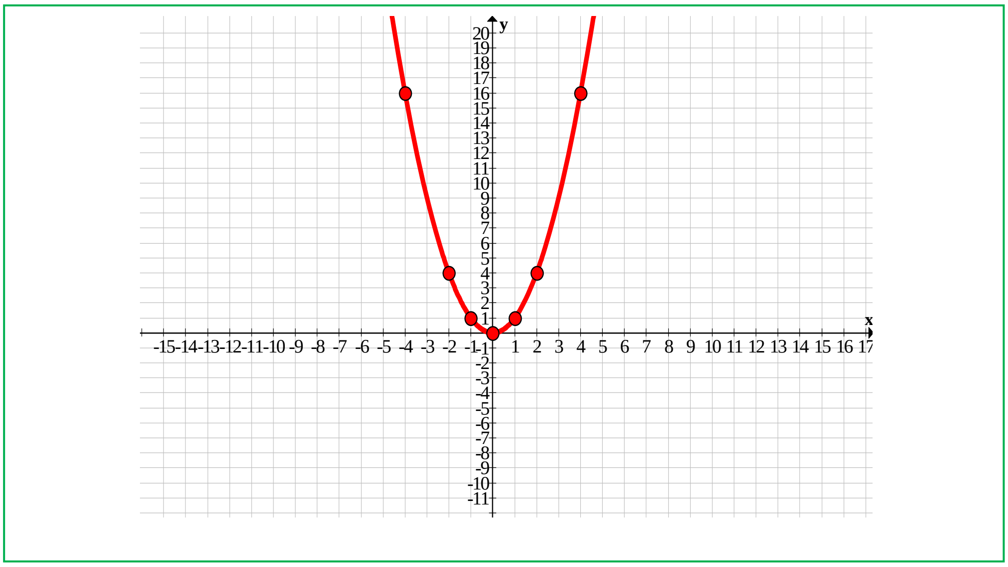
Las **funciones cuadráticas** son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de segundo grado, es decir, son de la forma $y = a\cdot x^2 + bx + c$. La curva que aparece al representar gráficamente una función cuadrática se llama **parábola**.

En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a\cdot x^2$

Para representar la parábola $y = x^2$ construimos una tabla de valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.

x	y
-10	100
-5	25
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
5	25

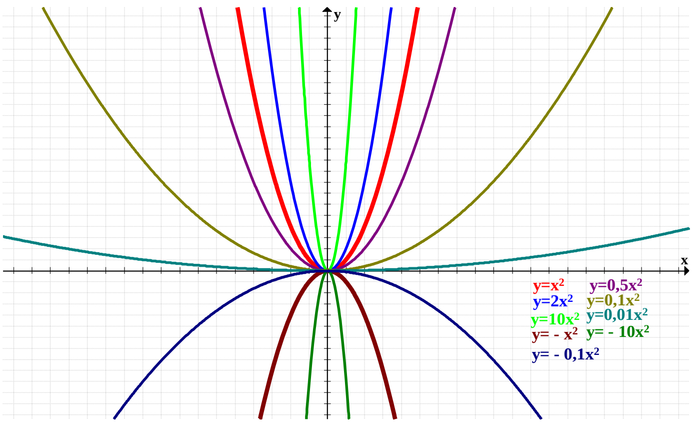


Observamos que es **decreciente** hasta el 0, y después **creciente**, luego tiene un **mínimo** absoluto en el (0, 0). Si $a = -1$, $y = -x^2$, la parábola tiene la misma forma pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Actividades resueltas

- *Representa gráficamente en unos mismos ejes coordenados:*

$$y = x^2,\ y = 0{,}5x^2,\ y = 2x^2,\ y = 0{,}1x^2,\ y = 10x^2,\ y = 0{,}01x^2,\ y = -10x^2,\ y = -0{,}01x^2.$$



Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Se observa que:

La parábola cuya expresión algebraica es $y = a{\cdot}x^2$, tiene las siguientes características:

- El dominio y el recorrido son todos los reales.
- La función es **continua**, porque no presenta saltos.
- Es **simétrica** respecto al eje ***y***, es decir, es una función **par**: $y = f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- Si $a > 0$ tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0):
    - al aumentar a, la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
    - al disminuir a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
- Si $a < 0$ tiene un **máximo absoluto** en el punto (0, 0):
    - al aumentar a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
    - al disminuir a, la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.

Al punto (0, 0) se le llama **vértice** de la parábola $y = a{\cdot}x^2$.

La **tasa de crecimiento media** de una parábola:

$$\text{TCM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

Varía al movernos por la parábola, y es mayor cuanto mayor es el coeficiente a, como se observa en las gráficas de estas parábolas.

Actividades propuestas

23. Dibuja en papel cuadriculado la gráfica de la función $y = x^2$.

a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
b) Tomando valores de abscisa negativa.
c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "x"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.

24. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

25. Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??
b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??
c) Si $a < -1$ entonces ¿¿??
d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??

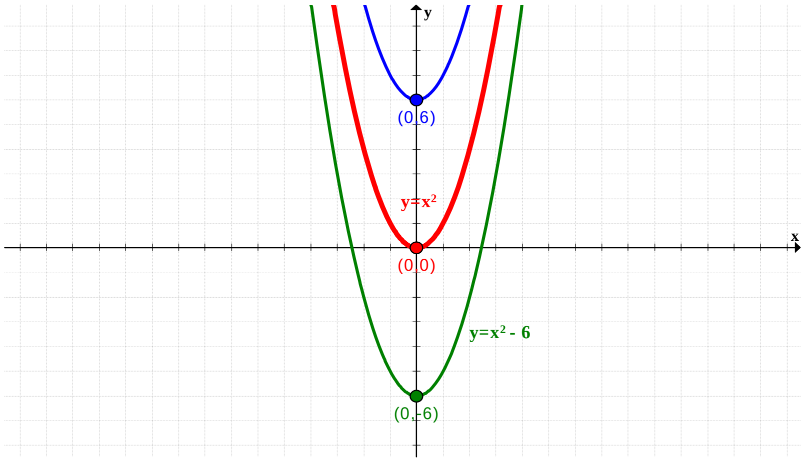
Desplazamientos verticales: Traslaciones en la dirección del eje *y*: $y = x^2 + k$.

Utilizando como plantilla la gráfica de $y = x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Ejemplo:

- Comparemos las parábolas $y = x^2 + 6$ y $y = x^2 - 6$ con nuestra plantilla de $y = x^2$.

Comprueba que en este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo.



Al sumar 6 a la parábola $y = x^2$, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje *y*, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a $y = x^2$, En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0, –6), es decir, baja 6 unidades.

La parábola $y = x^2 + k$ tiene la misma forma que $y = x^2$ pero trasladada *k* unidades verticalmente en el eje *y*. Si *k* es positivo, la traslación es hacia arriba y si *k* es negativo, hacia abajo. El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (0, *k*).

Actividades propuestas

26. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 - 3$. La parábola $y = -x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos *q* unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

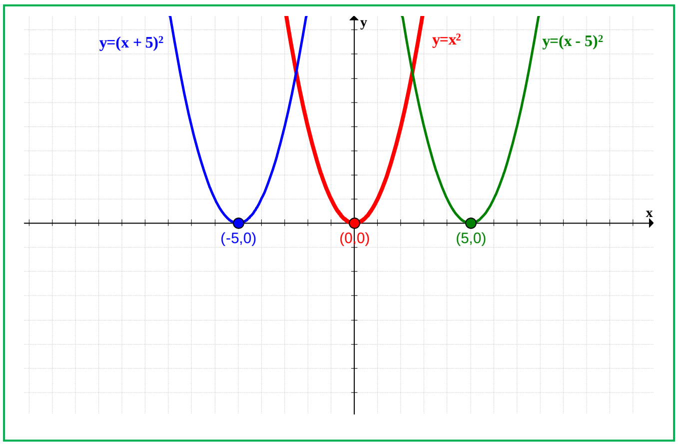
Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Desplazamientos horizontales: Traslaciones en la dirección del eje *x*:

$$y = (x - q)^2.$$

Ejemplo:

- Compara las parábolas $y = (x + 5)^2$ e $y = (x - 5)^2$ con la plantilla de $y = x^2$.



Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda.

En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (–5, 0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

La parábola $y = (x - q)^2$ tiene la misma gráfica que $y = x^2$ trasladada q unidades en el eje x hacia la derecha si $q > 0$ y hacia la izquierda si $q < 0$. El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(q, 0)$**.**

Actividades propuestas

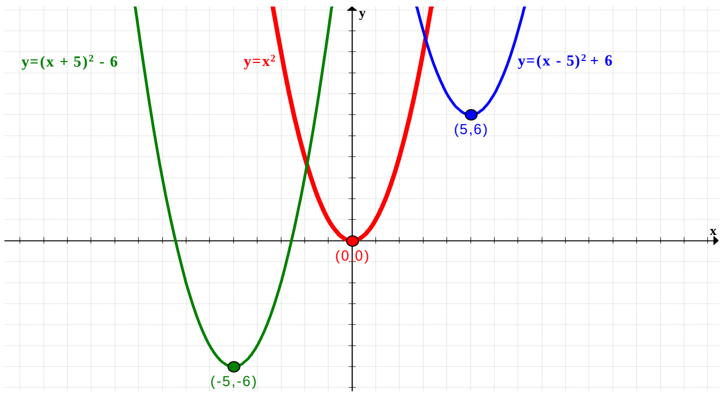
27. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 2)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 3)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - q)^2$.

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $y = (x - q)^2 + k$.

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, trasladamos la plantilla de $y = x^2$, k posiciones de manera vertical y q posiciones de manera horizontal, resultando una traslación oblicua en el plano.

Ejemplo:

- Comparamos la parábola $y = (x + 5)^2 - 6$ y $y = (x - 5)^2 + 6$ con la plantilla de $y = x^2$.



Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La parábola $y = (x - 5)^2 + 6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y = (x + 5)^2 - 6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo. Es decir, es la composición de los dos movimientos anteriores.

La parábola $y = (x - q)^2 + k$ tiene la misma forma que $y = x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia la derecha si } q > 0 \\ \text{hacia la izquierda si } q > 0 \end{cases} \quad ; \quad k \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia arriba si } k > 0 \\ \text{hacia abajo si } k < 0 \end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q, k). El eje de simetría en $x = q$.

Representación de parábolas de la forma $y = x^2 + r\cdot x + s$.

Sabemos representar las parábolas de la forma $y = (x - q)^2 + k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos representar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y = x^2 + r\cdot x + s$?

Actividades resueltas

- *Representa la gráfica de la función polinómica* $y = x^2 + 6\cdot x - 4$

  La función viene dada de la forma $y = x^2 + r\cdot x + s$, y queremos convertirla en $y = (x - q)^2 + k$.

$$y = x^2 + r\cdot x + s \Leftrightarrow y = (x - q)^2 + k$$

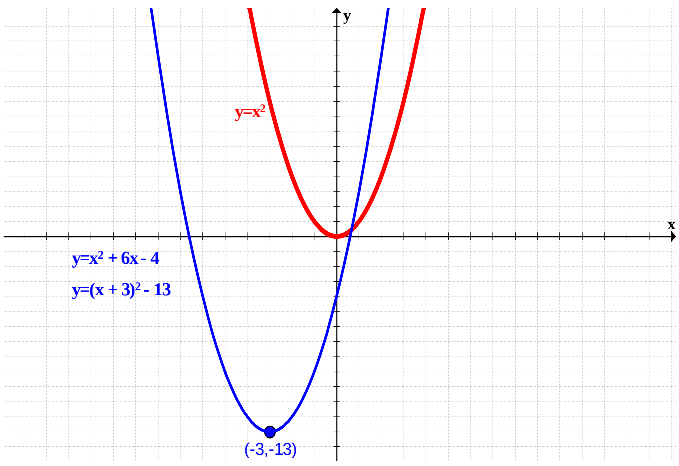
  Sabemos que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, donde ya nos aparece $x^2 + 6x$. Ahora tenemos que ajustar el resto:

$$y = x^2 + 6x - 4 = (x + 3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x + 3)^2 - 13}$$

  Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y = x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto $(-3, -13)$.

  Como $r = 6$ observa que la primera coordenada del vértice es $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Sustituyendo el valor de $x = -3$ en la expresión $y = x^2 + 6\cdot x - 4$ se obtiene:

$$y = (-3)^2 + 6\cdot(-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$$



Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

El vértice de la parábola $y = x^2 + r·x + s$ se encuentra en el punto $x = \frac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo x en la expresión de la función.

Actividades propuestas

28. Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal a la derecha y 4 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

29. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y=(x+4)^2-5$ b. $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$ c. $y=x^2-5$

d. $y=x^2-6x+16$ e. $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$ f. $y=-x^2+12x-26$

g. $y=x^2-10x+17$ h. $y=-x^2+2x-4$ i. $y=-x^2+\frac{4}{3}x-1$

Función cuadrática. Parábolas de la forma $y = a·x^2 + b·x + c$.

Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y = x^2 + r·x + s$, que es una parábola con la misma forma que $y = x^2$ abierta hacia arriba, o $y = -x^2 + r·x + s$, abierta hacia abajo.

También sabemos cómo afecta el valor del coeficiente *"a"* en la gráfica de la parábola $y = a·x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y = a·x^2 + b·x + c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar completando cuadrados:

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=y=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$$

Actividades resueltas

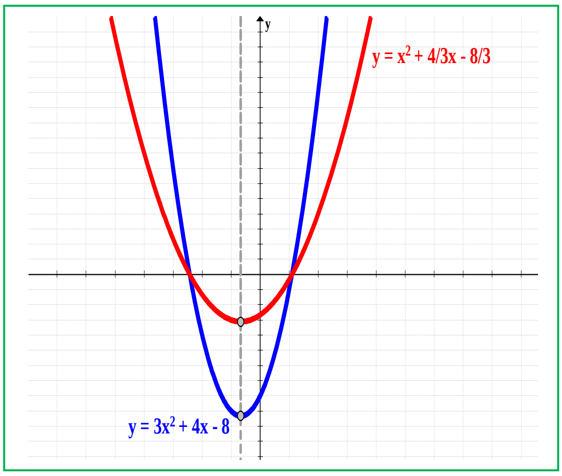
- *Representa la parábola* $y=3x^2+4x-8$:

Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

$$y=3x^2+4x-8=3\cdot(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3})$$

y la comparamos con $x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$.

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=(x+\frac{4}{6})^2-\frac{20}{9}$$



Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda multiplicada por 3.

En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha, como se estudió anteriormente.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La parábola en el caso general es:

$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}) = a\cdot(x^2 + r\cdot x + s)$, es decir, $r = \frac{b}{a}$, entonces la primera coordenada del vértice es $\frac{-r}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x = \frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

En resumen:

La función cuadrática *y* = *a*·*x*^{2} + *b*·*x* + *c* tiene su vértice en el punto de abscisa $x = \frac{-b}{2a}$, su ordenada en lo que resulta de sustituir ese valor en la ecuación: $y = a\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + b\left(\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. La forma dependerá del valor absoluto del coeficiente *"a"*, siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a > 0$
- hacia abajo si $a < 0$

Actividades propuestas

30. Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola *y* = *x*^{2} al punto (3, 1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

b) Traslada el vértice de la parábola *y* = *x*^{2} al punto (–4, –2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica.

Coeficiente *a*:

Si $a > 0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a < 0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Vértice:

El **vértice** de la parábola está en el punto $(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a})$:

Puntos de corte con el eje OX:

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y=0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa. Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punto de corte con el eje OY:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x=0$. Cuando $x=0$ la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto (0, c).

Eje de simetría:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el **eje de simetría** de la parábola es la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

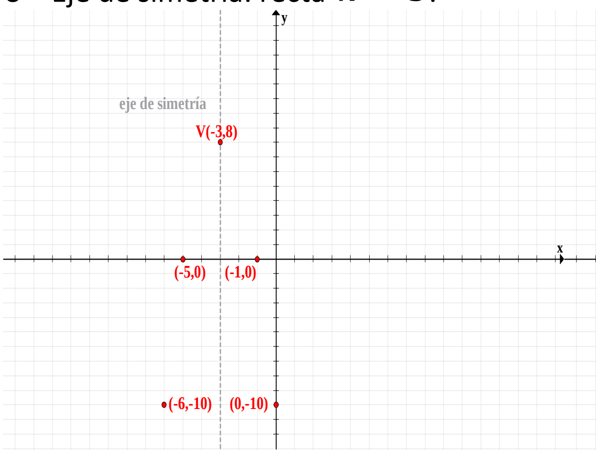
A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

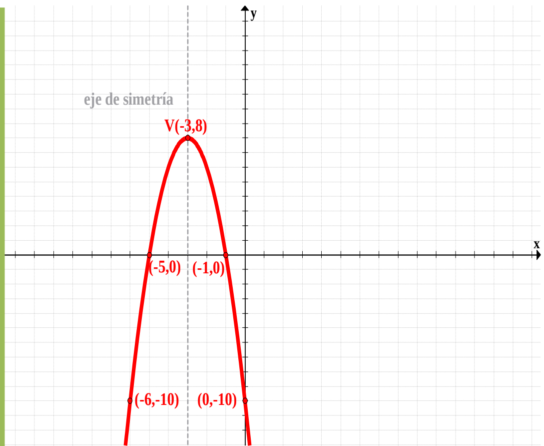
Actividades resueltas

- *Determina los elementos de la parábola* $y=-2x^2-12x-10$
  - $a=-2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.
  - Vértice: $\begin{cases} x=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{2\cdot(-2)}=\frac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{cases} \Rightarrow \textit{Vértice}: V(-3,8)$
  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5\Rightarrow(-5,0) \\ x_2=-1\Rightarrow(-1,0)\end{cases}$

      $y=-2x^2-12x-10 = -2\cdot(x+5)\cdot(x+1)$
    - Eje OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10\Rightarrow(0,-10)$

      La parábola también pasa por su simétrico: (–6, –10).
  - Eje de simetría: recta $x=-3$.





Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

31. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

d. $y = 2x^2 + 5x - 12$ e. $y = 3x^2 + 6x - 9$ f. $y = -2x^2 + 7x + 3$

g. $y = 7x^2 + 21x - 28$ h. $y = 5x^2 - 9x + 4$ i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

3.3. Ajustes a otras funciones polinómicas

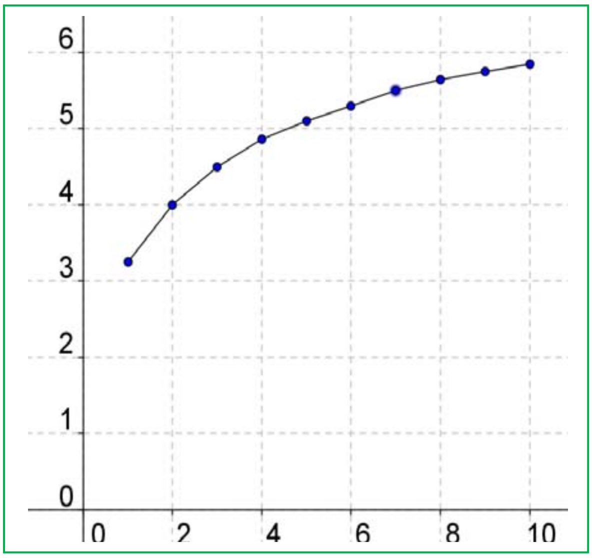
Hemos visto que las rectas, $y = mx + b$, y que las parábolas, $y = ax^2 + bx + c$, sirven de modelo para situaciones muy diversas. Pero estas situaciones no son más que una pequeña parte de la gran variedad de situaciones que existen. Debemos por tanto ampliar el arsenal de nuestras funciones. Si tenemos unos datos en una tabla de valores, queremos analizar si somos capaces de encontrar una fórmula matemática que se ajuste a esos datos, es decir, que nos permita hacer predicciones respecto a valores de la variable no considerados.

Actividad resuelta

- *Para el tratamiento de una enfermedad se está probando un nuevo medicamento con distintas dosis, anotando, para cada dosis el porcentaje de curaciones. Los resultados se recogen en la tabla:*

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Representamos gráficamente los puntos indicados en la tabla:



La gráfica de los puntos unidos mediante segmentos nos da una idea del modelo, pero no podemos todavía descubrir la ley. No existe una única forma de unir los datos. Conocer el mejor modelo está relacionado con el problema en estudio aunque esta primera aproximación gráfica ya nos da bastante información. Parece que, según se aumenta la dosis, crece el porcentaje de curaciones. No parece plausible que para una dosis intermedia, por ejemplo, 4,5 mg, el porcentaje de curaciones crezca a 10 o disminuya a 3 %, quizás podemos asegurar que estará entre 4,86 y 5,1. Podríamos estimarlo mediante una interpolación lineal y decir que el porcentaje de curaciones para una dosis de 4,5 mg se podría estimar en va a ser 4,98.

Las funciones polinómicas, de las que acabas de estudiar las rectas y las parábolas, pero que son todas aquellas de ecuación $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx + e$, tienen una interesante propiedad.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si los valores de la *x* están en progresión aritmética, y calculamos las diferencias entre los valores de la "*y*", a los que llamamos **diferencias primeras**, e indicamos $\Delta_1 y$, cuando estas diferencias son constantes, entonces los puntos están en una recta.

Si de nuevo calculamos las diferencias, ahora de las diferencias primeras, y las llamamos **diferencias segundas**, y las indicamos $\Delta_2 y$, cuando estas diferencias son constantes, entonces los puntos están en una parábola.

En general, los valores de la abscisa están en progresión aritmética y si las diferencias *n*-ésimas, $\boldsymbol{\Delta_n y}$ son **constantes** los puntos se ajustan a una **función polinómica de grado *n***.

Ejemplo:

- Vamos a calcular las diferencias sucesivas de la actividad resuelta anterior:

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85
$\boldsymbol{\Delta_1 y}$		0,75	0,5	0,36	0,24	0,2	0,2	0,14	0,11	0,1
$\boldsymbol{\Delta_2 y}$			–0,25	–0,14	–0,12	–0,04	0	–0,06	–0,03	–0,01
$\boldsymbol{\Delta_3 y}$				0,11	0,02	0,08	0,04	–0,06	0,03	0,02

Lo primero en que nos fijamos es que los valores de *x* están en progresión aritmética: 1, 2, 3…

Repasa las operaciones para comprobar que estas diferencias están bien calculadas. Por ejemplo, la primera diferencia es: 4,0 – 3,25 = 0,75. El primer valor de las segundas diferencias es: 0,5 – 0,75=–0,25. El primer valor de las terceras diferencias es: –0,14 –(– 0,25) = +0,11.

Las diferencias primeras no son constantes, luego los datos no se ajustan a una recta, lo que ya se observaba en la gráfica. Las diferencias segundas no son tampoco constantes, luego no existe una parábola que se ajuste a esos datos. Tampoco son constantes las diferencias terceras, luego tampoco existe una función polinómica de tercer grado que se ajuste a esos datos.

Actividad resuelta

- *Comprueba que los datos de la tabla siguiente se ajustan a una recta y escribe su fórmula.*

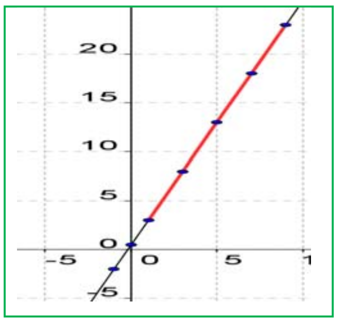
x:	1	3	5	7	9
y:	3	8	13	18	23
$\boldsymbol{\Delta_1 y}$		5	5	5	5

Lo primero en que nos fijamos es que los valores de *x* están en progresión aritmética: 1, 3, 5, 7, 9…

Las diferencias primeras son constantes, por lo que las diferencias segundas son todas cero. Los datos se ajustan a una recta.

Representamos los datos.

Buscamos la ecuación de la recta *y* = *mx* + *b* imponiendo que pase por dos de los puntos, 3 = *m*·*1* + *b*; 8 = 3*m* + *b*. Restamos: 5 = 2*m*, por lo que la pendiente es: *m* = 2,5; y al sustituir en la primera ecuación se obtiene que la ordenada en el origen es *b* = 0,5. La ecuación de la recta es: *y* = 2,5 *x* + 0,5.



- *Los datos de la tabla indican los metros recorridos por un móvil en el tiempo t segundos. Se ajustan a una parábola. Represéntalos gráficamente y escribe su fórmula. ¿Qué distancia habrá recorrido a los 6 segundos? ¿Y a los 12 segundos?*

***t* (s):**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
***d* (m):**	15	24	35		63	80	99		143	
$\Delta_1 y$		9	11			17	19			
$\Delta_2 y$		2				2				

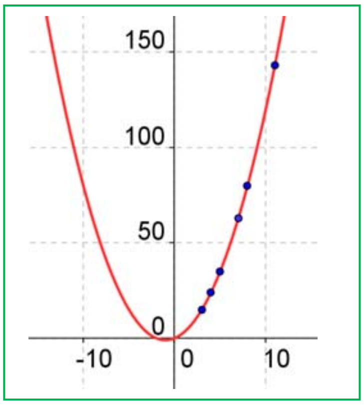
Faltan datos, pero las dos únicas diferencias segundas son iguales, luego como el enunciado dice que se ajustan a una parábola, vamos a imponer que todas las diferencias segundas sean iguales a 2, y con esa información completamos la tabla.

***t* (s):**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
***d* (m):**	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168
$\Delta_1 y$		9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\Delta_2 y$		2	2	2	2	2	2	2	2	

Primero hemos completado todas las diferencias segundas iguales a 2. Después las diferencias primeras que faltaban. Y por último los metros. A los 6 segundos ha recorrido una distancia de 48 metros, y a los 12 segundos de 168 metros.

Buscamos la función polinómica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos:

(3, 15), (4, 24) y (5, 35):



$15 = a9 + b3 + c$

$24 = a16 + b4 + c$

$35 = a25 + b5 + c$

Restamos: $9 = 7a + b$; $11 = 9a + b$. Volvemos a restar: $2 = 2a$. Luego $a = 1$; $b = 11 - 9·1 = 2$; $c = 15 - 9·1 - 3·2 = 0$. La parábola es $y = x^2 + 2x$.

Comprobamos que, en efecto pasa por los otros puntos de la tabla:

$$143 = 11^2 + 2·11 = 121 + 22.$$

Actividades propuestas

32. Halla la función cuadrática determinada por los puntos: (1, 5); (2, 8); (3, 20). Represéntala gráficamente.

33. Halla la función polinómica que pasa por los puntos: (0, 5); (1, 9); (2, 4) y (3, 10).

34. Halla la función polinómica determinada por los puntos: (0, 3); (1, 6); (2, 9); (3, 12); (4, 15). Calcula las diferencias sucesivas y dibuja la gráfica.

35. Se hacen pruebas midiendo la distancia que recorre un avión desde que toca tierra en una pista de aterrizaje. Los datos están en la tabla adjunta. Existe alguna función polinómica que se ajusta a esos datos. Si la hay, escribe su fórmula.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Tiempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. En una fábrica los precios de los cables de acero dependen de los diámetros y viene dado el precio década metros en euros en la tabla siguiente. ¿Existe alguna función polinómica que se ajuste perfectamente a esos datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Precio (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

37. Dada la tabla siguiente, ¿se puede ajustar exactamente una recta? Considera si algún dato es erróneo y si es así, corrígelo.

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

Al realizar un experimento es muy raro encontrar situaciones en las que una recta, una función cuadrática, una cúbica… se ajusten a los datos a la perfección.

En la actividad resuelta de las dosis de medicamento y porcentaje de curaciones, si hubiéramos seguido calculando las diferencias sucesivas nunca nos hubieran llegado a ser ninguna de ellas iguales y hubiéramos llegado a las diferencia de orden 9m, que ya sólo sería una, y nos daría: $\Delta_9 y = -0{,}67$. ¡Tendríamos que escribir una función polinómica de grado 9!

Una función polinómica de grado *n* se conoce si sabemos que pasa por *n* + 1 puntos.

Así, una recta queda determinada por 2 puntos. Una parábola queda determinada por 3 puntos. Y la función polinómica de grado 9 por 10 puntos. Hay otras funciones. Los datos del medicamento se ajustan a una hipérbola: $y = 7 - \dfrac{15}{x+3}$, un tipo de función que vamos a estudiar a continuación.

3.4. Funciones de proporcionalidad inversa. La hipérbola *y = k/x*

Recuerda que:

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** *k* es el producto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

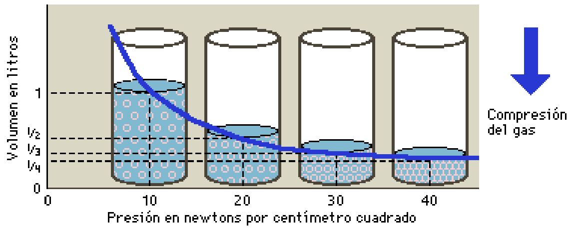
Ejemplo

- En Física encontramos muchos ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales: La velocidad de un vehículo y el tiempo que tarda en recorrer un trayecto son magnitudes inversamente proporcionales. En este caso, el espacio recorrido se mantiene constante, siendo él, la razón de proporcionalidad inversa $s = v \cdot t$. Otros ejemplos son: la densidad y el volumen, la potencia y el tiempo, la presión y la superficie,…

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Representa en el plano la ley de Boyle-Mariotte: "a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que este ejerce".*



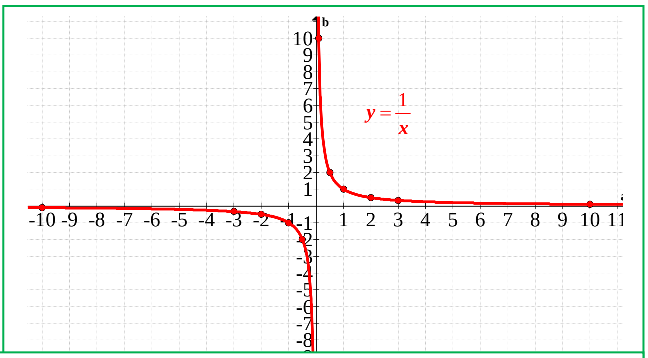
La fórmula que describe esta ley es $P \cdot V = k$.

Si despejamos el volumen final *V*, obtenemos la siguiente expresión: $V = \dfrac{k}{P}$.

La gráfica describe una curva que a medida que aumenta la presión inicial, disminuye el volumen y se va aproximando al eje x, y al contrario, si disminuye la presión, el volumen aumenta.

La **función de proporcionalidad inversa** se define mediante la expresión $y = \dfrac{k}{x}$, donde k es la **razón de proporcionalidad inversa** y las variables *x* e *y* son los distintos valores que tienen las dos magnitudes.

Su representación gráfica en el plano cartesiano es una curva llamada **hipérbola**.



Ejemplo

- Representa la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$

x	–10	–3	–2	–1	–1/2	1/2	1	2	3	10
y	–1/10	–1/3	–1/2	–1	–2	2	1	1/2	1/3	1/10

Completamos una tabla de valores y representamos los puntos en un sistema de coordenadas.

Se puede observar que la gráfica nunca corta a los ejes de coordenadas, ya que ni la *x* ni la *y* pueden valer 0. El 0 no está en el dominio y tampoco en el recorrido de la función (no se puede dividir por 0). Su dominio es $\Re - \{0\}$.

Como se ve en la gráfica, y es fácil comprobar, la función es continua en todo el dominio y simétrica respecto del origen (función impar).

Actividades propuestas

38. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a. $y = \dfrac{-1}{x}$ b. $y = \dfrac{5}{x}$ c. $y = \dfrac{1}{2x}$

d. $y = \dfrac{3}{8x}$ e. $y = \dfrac{-5}{3x}$ f. $y = \dfrac{-12}{5x}$

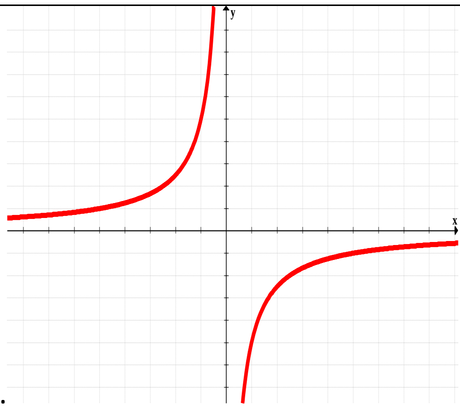
Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

39. Describe lo que sucede cuando varía el valor de *k*. Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

40. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a. (5, 3)	b. (2, –1)	c. (1/2, 6)
d. (10, 4)	e. (*a*, 1)	f. (1, *b*)

41. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

<table>
<tr><td>
a.</td><td colspan="2">
b.</td></tr>
<tr><td>c. $y=\frac{9}{2x}$</td><td>d. $y=\frac{-5}{3x}$</td><td>e. $y=\frac{-0,3}{x}$</td></tr>
<tr><td>f. $(-5,2)$</td><td>g. $(4,-9)$</td><td>h. $(1,1/2)$</td></tr>
</table>

En general, las hipérbolas cuya expresión es $y=\frac{k}{x}$ tienen las siguientes propiedades:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  - o Si el valor absoluto de k aumenta, la curva se aleja del origen de coordenadas.
  - o Si el valor absoluto de k disminuye, la curva se aproxima al origen de coordenadas.
- **Dominio:** Son todos los reales menos el 0: *Dom* = $\Re$ – {0}.
- **Recorrido:** Su recorrido son todos los reales menos el 0: $\Re$ – {0}.
- **Continuidad:** La función de proporcionalidad inversa es continua en todo su dominio, pero discontinua en la recta real, ya que el 0 no está en el dominio, y por tanto, en 0 hay un salto infinito.
- **Simetría:** Son funciones impares, esto es, son simétricas respecto al origen de coordenadas.
- **Asíntotas:** Son las rectas cuya distancia a la gráfica es muy pequeña, cuando la curva se aleja del origen.

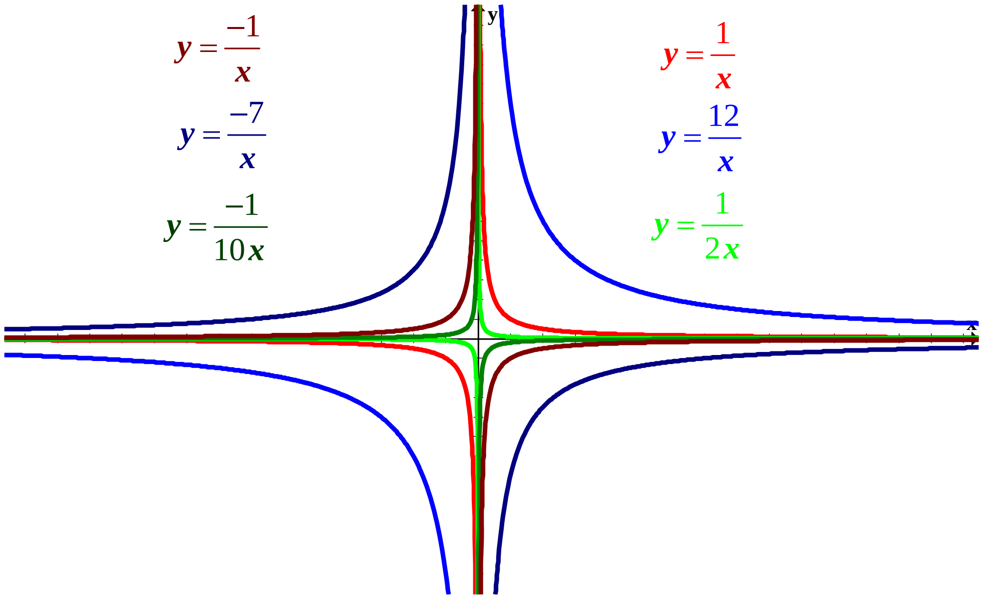
  Hemos visto que no está definida en 0, pero cuando el valor de *x* se acerca a cero, el valor de *y* se hace muy grande en valor absoluto. Por eso se dice que la recta *x* = 0 es una asíntota vertical de *y* = *k*/*x*.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Del mismo modo, si nos fijamos en las gráficas, se observa que cuando los valores de *y* crecen en valor absoluto, los valores de *x* se acercan a 0 (sin tocarlo). Se dice que la recta *y* = 0 es una asíntota horizontal.

- **Crecimiento:** depende del signo de k:
  - Si $k>0$: la función es **decreciente** en el intervalo $(-\infty, 0)$ y **creciente** en el intervalo $(0, +\infty)$.
  - Si $k<0$: la función es **creciente** en el intervalo $(-\infty, 0)$ y **decreciente** en el intervalo $(0, +\infty)$.

Las asíntotas dividen a la hipérbola en dos trozos que reciben el nombre de **ramas de la hipérbola**.



La hipérbola $y=\frac{k}{x-a}+b$

A partir de la representación de la función $y=\frac{k}{x}$, ¿es posible representar otro tipo de hipérbolas? Al igual que ocurre con las parábolas, podemos trasladar las hipérbolas en el plano en dirección horizontal o vertical, según los valores que tomen los parámetros a y b.

Actividades propuestas

42. Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

$y=\frac{5}{x}$	$y=\frac{5}{x}+3$	$y=\frac{5}{x}-3$
$y=\frac{-12}{x}$	$y=\frac{-12}{x-3}$	$y=\frac{-12}{x+3}$
$y=\frac{3}{x}$	$y=\frac{3}{x-1}+5$	$y=\frac{5x-2}{x-1}$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

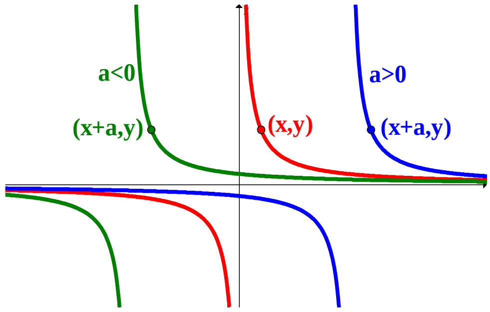
43. Describe lo que sucede cuando varían los parámetros *a* y *b* en las hipérbolas del ejercicio anterior.

En general, la representación gráfica de las hipérbolas cuya expresión algebraica es $y = \frac{k}{x-b} + a$ es una traslación el plano dependiendo de los valores de a y b.

Desplazamientos horizontales

Al variar el valor de $\boldsymbol{a}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza horizontalmente a unidades:

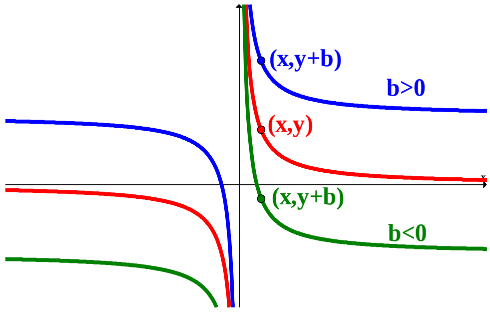
- Si $\boldsymbol{a>0}$: la hipérbola se desplaza hacia la derecha.
- Si $\boldsymbol{a<0}$: la hipérbola se desplaza hacia la izquierda.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y)$:
  $$(x, y) \to (x+a, y)$$
- El vector de traslación es el vector $(a, 0)$



Desplazamientos verticales

Al variar el valor de $\boldsymbol{b}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza verticalmente b unidades:

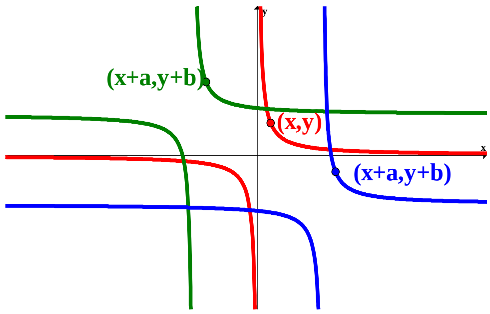
- Si $\boldsymbol{b>0}$: la hipérbola se desplaza hacia arriba.
- Si $\boldsymbol{b<0}$: la hipérbola se desplaza hacia abajo.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x, y+b)$:
  $$(x, y) \to (x, y+b)$$
- El vector de traslación es el vector $(0, b)$



Desplazamientos oblicuos

Al variar tanto el valor $\boldsymbol{a}$ cómo el valor de $\boldsymbol{b}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza diagonalmente tantas unidades como sea el valor de los parámetros:

- Las direcciones hacia donde se traslada dependerá de los signos de a y b.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y+b)$:
  $$(x, y) \to (x+a, y+b)$$
- El vector de traslación es el vector (a, b).
- El origen de coordenadas (0, 0) se traslada al punto (*a, b*).



Actividades propuestas

44. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y = \frac{5}{x}$:

a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \frac{4}{x}$ f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

45. Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

46. Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b.

Hipérbola $y = \dfrac{mx+n}{px+q}$

Las funciones que se definen mediante esta expresión también se representan mediante hipérbolas. Para ello, necesitamos hacer una modificación en una expresión como la estudiada en el apartado anterior que nos resulte más fácil de manejar y representar:

$$y=\frac{mx+n}{px+q} \rightarrow \text{Dividiendo } (mx+n):(px+q) \rightarrow y=\frac{k}{x-a}+b$$

Actividades resueltas

- *Convertir la función* $y=\dfrac{3x+2}{x-7}$ *en una función cuya expresión sea más sencilla de representar.*

  Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

  $$(3x+2)=3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)}=\frac{3(x-7)}{(x-7)}+\frac{23}{(x-7)}=\frac{23}{(x-7)}+3$$

  Esta última expresión es fácil de representar.

Actividades propuestas

47. Representa las siguientes hipérbolas:

a.	$y=\dfrac{2x-4}{x+5}$	b.	$y=\dfrac{3-5x}{x+2}$	c.	$y=\dfrac{4x-12}{x-3}$
d.	$y=\dfrac{6x+8}{1-x}$	e.	$y=\dfrac{7x+5}{x-4}$	f.	$y=\dfrac{6x+10}{2x-1}$

48. Representa la gráfica de la función: $y=7-\dfrac{15}{x+3}$. A) ¿Cuando x crece, "*y*" tiende a 7? ¿Tiene una asíntota horizontal *y* = 7? B) ¿Si *x* se acerca a –3, la *y* crece? ¿Tiene una asíntota vertical, *x* = –3? C) Analiza si esta hipérbola se ajusta a los valores de la actividad resuelta de la tabla:

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.5. Funciones exponenciales

Hemos estudiado funciones polinómicas, de proporcionalidad inversa… Ahora vamos a estudiar otro tipo de funciones.

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

Son funciones exponenciales: $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^{3x}$, $y = 5^{-x}$.

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

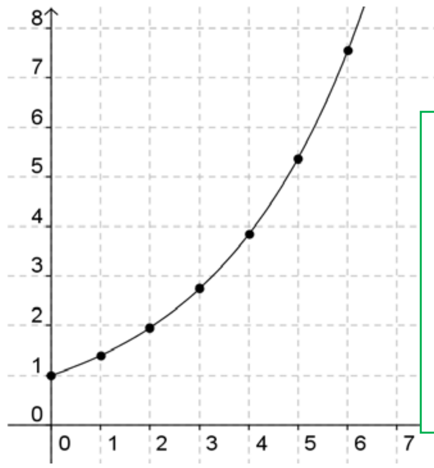
Actividad resuelta

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1,4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número *"y"* de bacterias que habrá al cabo de "*x*" horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1{,}4^x$.

Número de bacterias en cada hora (**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	**Núm. bacterias (*y*)**
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gráfica de la función



Actividades propuestas

49. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1,4.

Observa que los valores de *"y"* aumentan mucho más deprisa: mientras que los valores de *"x"* aumentan de 1 en 1 los valores de *y* se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

50. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base "b". Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

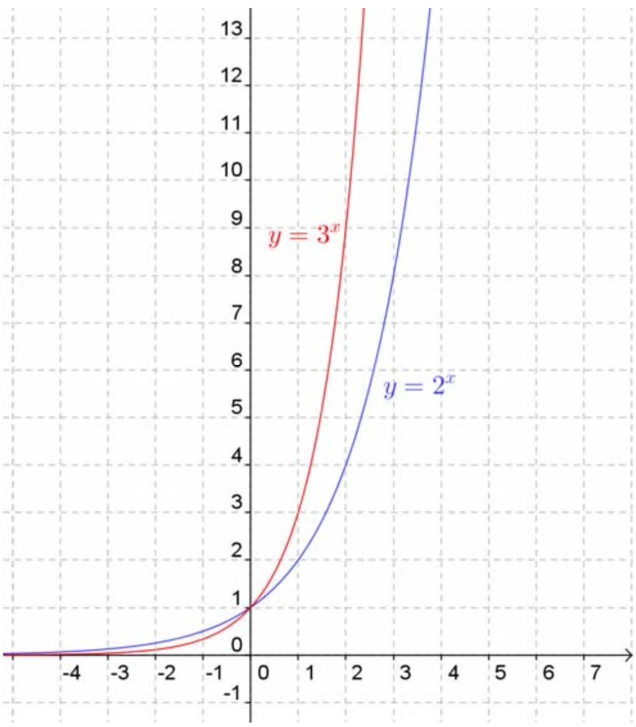
En el caso en el que $b = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Actividades resueltas

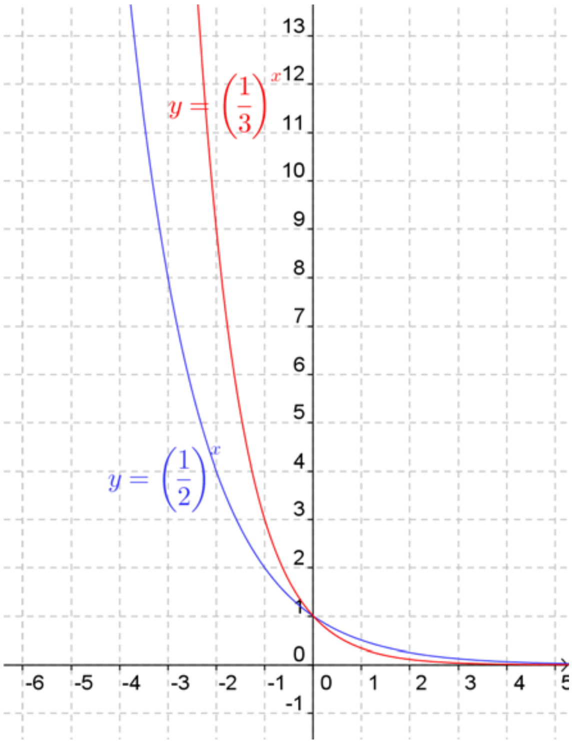
- *Representa las gráficas de* $y = 2^x$ *y de* $y = 3^x$. *También las gráficas de* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *y de* $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

  Analiza las similitudes y las diferencias.

Funciones $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es $(0, +\infty)$. Es decir, "y" nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos (0, 1), (1, b) y (–1, 1/b).
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Autores: José Gallegos y David Miranda

Revisor: Miguel Paz

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cuando la base es $b > 1$

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
Cuando $x \to -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

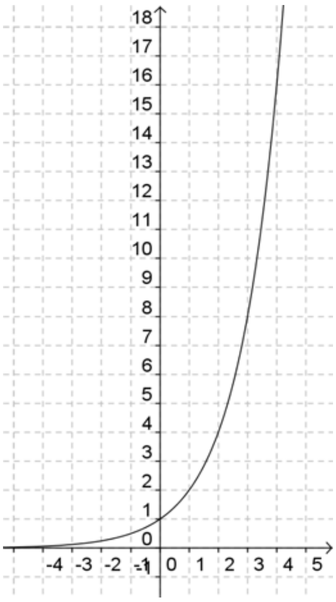
Cuando la base es $0 < b < 1$

Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
Cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

- *Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales* $y = 2^x$ *e* $y = 2^{-x}$.

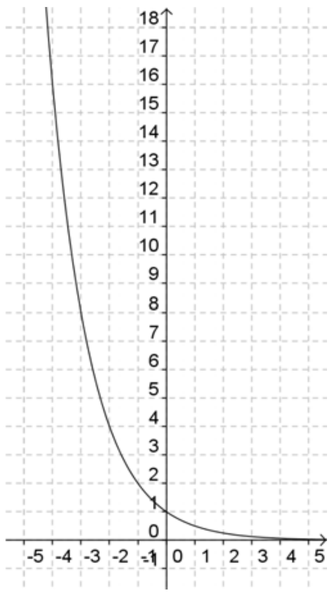
Función $y = 2^x$

x	*y*
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



Función $y = 2^{-x}$

x	*y*
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…



El número *e*. La función *y* = *e*^{x}

El número *e* tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Para comprender su importancia hay que acceder a contenidos de cursos superiores. Su valor aproximado es *e* = 2,71828182846... Se trata de un número irracional (aunque al verlo puede parecer periódico). Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de *e* con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta *e* pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La función $y = e^x$ comparte las características descritas más arriba para funciones exponenciales de base mayor que 1.

Actividades propuestas

51. Utilizando la calculadora, haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

52. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

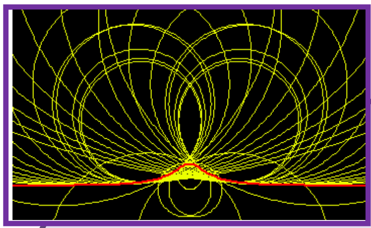
Cultivo de la bacteria *Salmonella*

53. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también “hacia atrás”), y (b) representa gráficamente estos datos.

54. Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

55. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.



CURIOSIDADES. REVISTA

María Gaetana Agnesi

Foto de M. G. Agnesi. RSM

María Gaetana Agnesi es una matemática italiana cuya obra más importante, *Instituciones Analíticas*, fue traducida a varios idiomas y utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa. En ella trataba con sencillez y claridad temas, tan novedosos entonces, como el Cálculo Diferencial e Integral. Al final de su vida era famosa en toda Europa como una de las mujeres de ciencia más capaces del siglo XVIII. Un cráter de Venús lleva su nombre en su honor. En la Biblioteca Ambrosiana de Milán se guardan sus obras inéditas que ocupan veinticinco volúmenes.

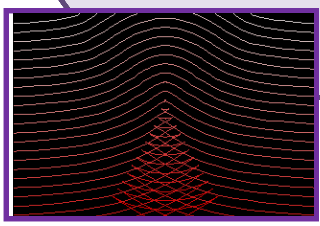
Nació en Milán en el siglo XVIII y fue una niña dotada, que con nueve años hablaba siete idiomas.

Su padre tuvo 21 hijos e hijas, siendo María, la mayor y les proporcionó a todos una buena formación, incluso científica. Le gustaba mostrar el talento de sus hijos en las reuniones que organizaba en sus salones. Muy pronto los sabios y eruditos y los intelectuales locales, empezaron a asistir al salón de los Agnesi para oír las disertaciones de María sobre temas filosóficos, científicos y matemáticos. A la edad de nueve años María estuvo durante una hora, ante una asamblea culta hablando en latín sobre el derecho de la mujer a estudiar ciencias y sobre cómo las artes liberales no eran contrarias al sexo femenino.

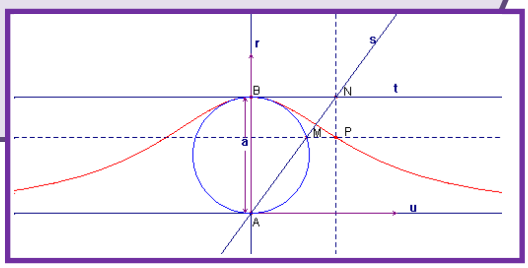
Parece ser que María era sonámbula, y en ocasiones, después de trabajar intensamente, exhausta, se iba a dormir dejando un problema sin resolver sobre el escritorio. A la mañana siguiente, al despertar, veía que lo había resuelto mientras dormía. Había escrito la solución completa y había vuelto a la cama.

Su libro, que escribió para que sus hermanos pudieran estudiar, se convirtió en una obra importante, donde trataba las Matemáticas más actuales de su época de forma clara, y tuvo una acogida espectacular. Fue traducido a muchos idiomas y se utilizó como libro de texto en muchas universidades.

Pero… Pero su reputación histórica fue distorsionada por el hecho de que, en sus *Instituzioni Analitiche,* trabajara con la “curva de Agnesi” o curva sinusoidal versa, “versiera” que se tradujo al inglés, por un error del traductor, John Colson, como la “bruja de Agnesi” confundiendo el término “versiera” por "aversiera" que significa bruja, hechicera, (“witch”).



$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$



Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

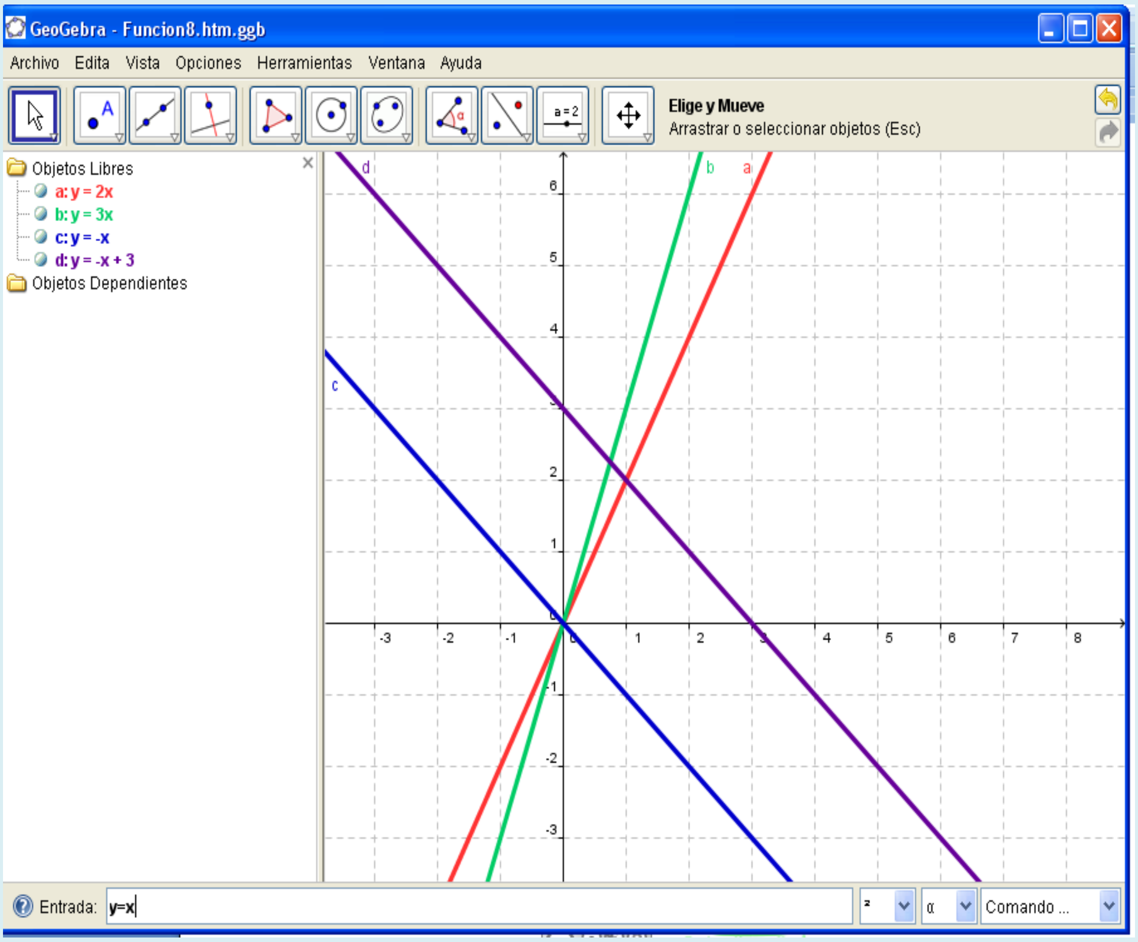
Utiliza el ordenador

Puedes utilizar el ordenador para dibujar funciones. Para ello necesitas un programa adecuado como *Derive*, *Cabri*, *Mathematica*, *Geogebra*…

Unos son más sencillos de utilizar que otros, pero utilizando la ayuda, pronto dominarás cualquiera de ellos.

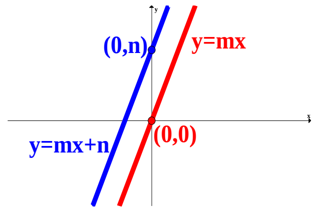
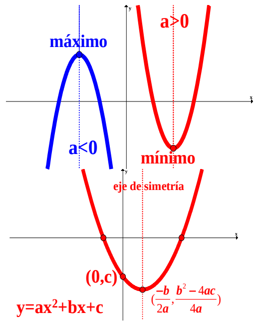
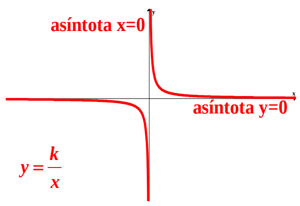
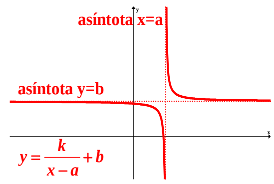
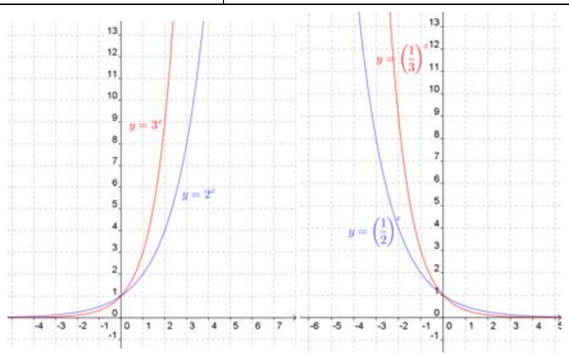
Muchas de las gráficas que has visto en este capítulo los han utilizado.

Por ejemplo, utilizando *Geogebra*, podemos dibujar rectas:



Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Función	Relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra.	$y = 2x + 3$
Características de las funciones	Continuidad. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Simetría. Periodicidad.	La recta $y = 2x + 3$ es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, ni es simétrica, ni periódica.
Función polinómica de primer grado: Rectas: ***y = mx*** ***y = mx + n***	Se representan mediante **rectas**: Hay dos tipos: - **Funciones lineales o de proporcionalidad directa**: $y = m \cdot x$, pasan por el origen de coordenadas. - **Funciones afines**: $y = m \cdot x + n$, son traslaciones en el eje y, n unidades. Pasan por el punto $(0, n)$.	
Función polinómica de segundo grado: Parábolas ***y = ax² + bx + c***	Se representan mediante **parábolas**: **Vértice:** $(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a})$ **Puntos de corte con el eje OX:** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. **Punto de corte con el eje OY:** $x = 0$, es el punto $(0, c)$ **Eje de simetría**: es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas *y = k/x*	$\lvert k \rvert$: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. **Dominio y recorrido:** $\Re - \{0\}$ **Continuidad:** Discontinua en $x = 0$. **Simetría:** Función impar. **Asíntotas:** Las rectas $x = 0$ e $y = 0$.	
Hipérbolas $y = \frac{k}{x - a} + b$	Traslación de la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ por el vector (*a*, *b*). Dominio: $\Re - \{a\}$ Recorrido: $\Re - \{b\}$ - Asíntotas: *x = a; y = b*.	
Función exponencial	$y = b^x$. Si $b > 1$ es creciente Si $0 < b < 1$ es decreciente	

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Funciones

1. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y en él, los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda. Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está: $A(2, 4)$; $B(0, 1)$; $C(-3, 0)$; $D(2, -1'5)$; $E(1'5, 0)$; $F(0, 0)$; $G(-1, -2/3)$.

2. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.

3. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:

$A(0, 3)$; $B(0, 1'7)$; $C(0, -1)$; $D(0, -4)$. ¿Qué tienen en común todos ellos?

4. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de abscisas. ¿Qué tienen en común?

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.

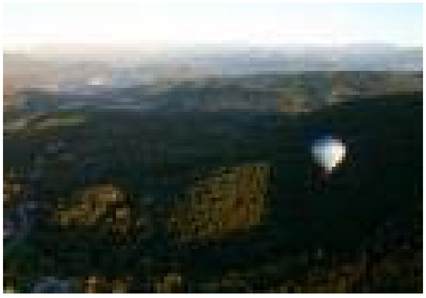
6. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:

a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.
b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.
c) A cada circunferencia del plano se le asocia un diámetro.

7. La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.

a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.
b) Dibuja la gráfica.
c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3,14).
d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

8. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:



a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?
b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?
c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?
d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?

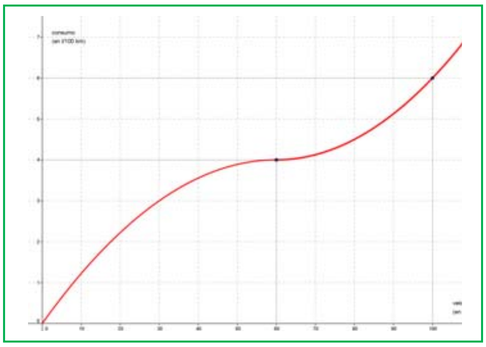
9. Dibuja la gráfica de la función *parte entera*: $y = E(x)$, que indica el número entero menor, más próximo a *x*, así, por ejemplo, $E(2'3) = 2$.

10. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama *x* a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de *x*. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?

11. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.

12. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es *x*? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.

13. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura "*a*" de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.



56. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica. Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche. ¿Cuál es la variable dependiente?

a) ¿Y la independiente?
b) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 50 km/h?
c) ¿A qué velocidad el consumo es de 5 l/100 km?

14. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.

Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):

a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 · tiempo
b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo
c) A partir del día 45: altura = 135.

Características de una función.

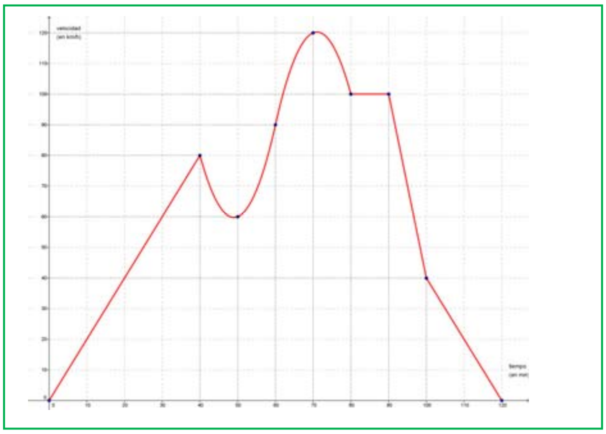
15. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado *n* años.

16. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1'20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:

a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?

c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

17. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

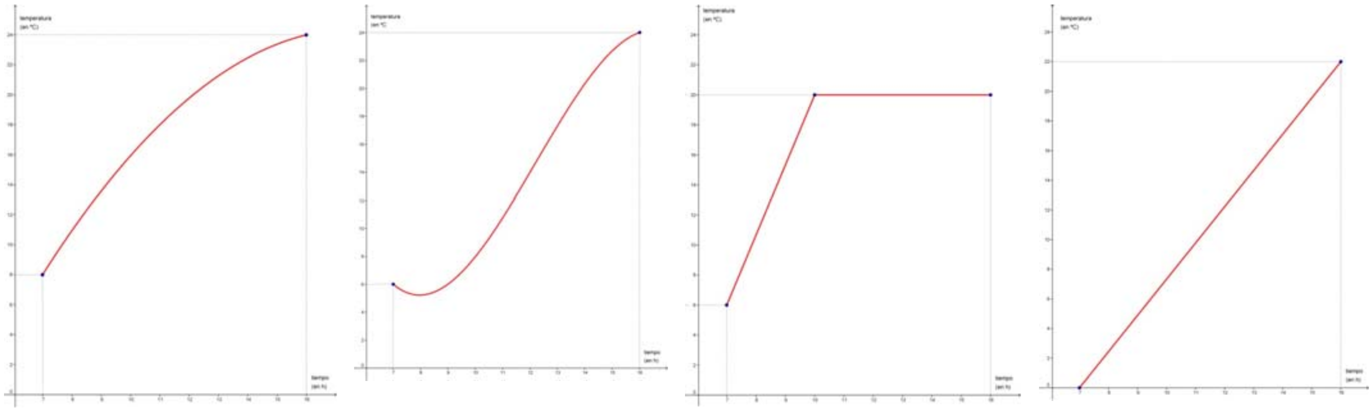
c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?

d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?

e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?

f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?

18. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):



a) Explica la monotonía de todas las gráficas.

b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?

c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?

d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h y en Valladolid a partir del medio día la temperatura bajó, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

19. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma: Durante las dos primeras horas, la distancia “*d*” (en kilómetros) al punto de partida es: $2 \cdot t + 1$, donde “*t*” es el tiempo (en horas) de duración del trayecto. Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia

Autores: José Gallegos y David Miranda

Revisor: Miguel Paz

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

viene dada por $-t + 7$. Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$. Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.

a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).
b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.
c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?
d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?
e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?
f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.
g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.

20. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el capítulo: continuidad, monotonía, extremos, simetría y periodicidad.

a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, si\ x > 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$.

b) Opuesto e inverso del número *x*: $f(x) = \dfrac{-1}{x}$.

Tipos de funciones

21. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada en el origen 6.
22. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ y $C(12, 15)$.
23. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$; $y = -3x$.
24. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x - 2$; $y = 2x - 3$. ¿Cómo son?
25. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.

26. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:

a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es 5.
b) Pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(0, 9)$.
c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

d) Pasa por los puntos $C(-2, 7)$ y $D(-3, 10)$.
e) Pasa por el punto (a, b) y tiene de pendiente m.

27. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:

a) De pendiente 2 y ordenada en el origen 0.
b) Pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 1)$.
c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).

28. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

29. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

30. Ajusta una función polinómica a los datos de la tabla:

x:	0	1	2	3	4	5	6
y:	1	5	11	19	29	41	55

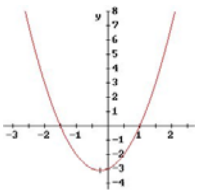
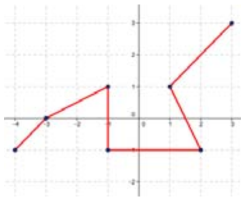
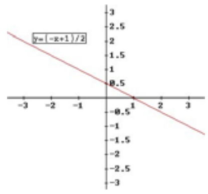
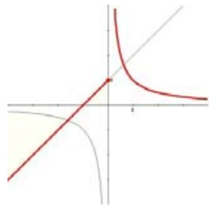
31. Dibuja las gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso los puntos de discontinuidad y las asíntotas.

32. Dibuja las gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Revisor: Miguel Paz
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a)  b)  c)  d) 

2. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

a)

x	*y*
0	5
1	7
2	32
3	41

b)

x	*y*
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2

c)

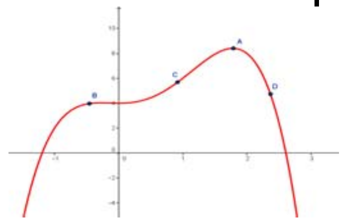
x	*y*
–3	1
–1	2
0	3
2	4

d)

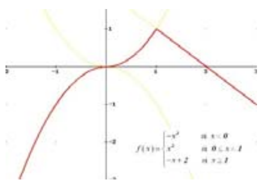
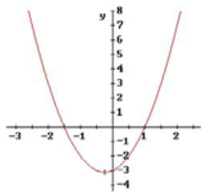
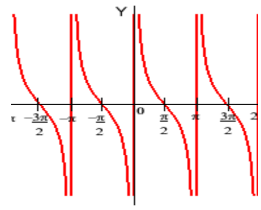
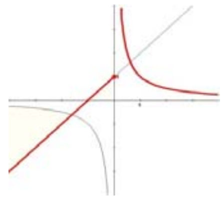
x	*y*
0	1
1	2
4	3
0	4

3. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:

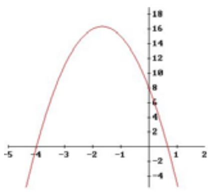
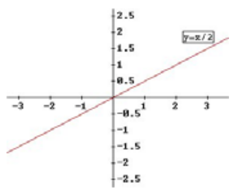
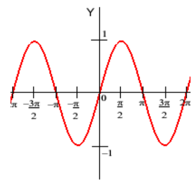
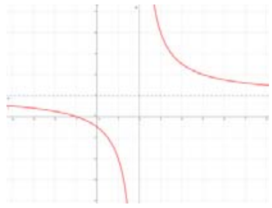
a) b) c) d



4. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

a)  b)  c)  d) 

5. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente es:

a)  b)  c)  d) 

6. La única función afín que, además, es lineal es:

a) $y = -7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -6x - 9$

7. La única función cuadrática es:

a) $y = -8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -2x^3 - 3x$

8. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (2, 0) es:

a) $y = -2x^2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = -2x^2 + 4x$ d) $y = -x^2 + 4x - 2$

9. La hipérbola de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ es:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$ b) $y = 3 + 6/(x - 5)$ c) $y = -5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. La única función exponencial es:

a) $y = x^7 + x^6$ **b)** $y = 3^x$ **c)** $y = 3^x + x^2$ **d)** $y = 1/3^x + x^2$

MATEMÁTICAS: 4ºA ESO
Capítulo 7: Estadística. Azar y probabilidad

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Rodrigo y María Molero

Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

La Estadística se ocupa de interpretar gran número de datos. El Instituto Nacional de Estadística recoge estudios de todo tipo sobre la población española. Entra en Internet escribiendo INE y tendrás un montón de información a tu alcance sobre: a) Entorno físico y medio ambiente; b) Demografía y población; c) Sociedad; d) Economía…

En un estudio estadístico confluyen distintas partes de la Estadística, la Teoría de Muestras que indica sobre la forma de seleccionar una muestra para que sea representativa de la población, la Estadística Descriptiva que utiliza tablas, gráficos y parámetros estadísticos como la media y la desviación típica para describir los datos, y la Inferencia Estadística que utiliza la Teoría de Probabilidades para obtener conclusiones.

Como sabrás, en tiempo de Jesucristo ya el emperador Augusto hizo censos para conocer la población del Imperio Romano.

La Teoría de la Probabilidad tuvo sus inicios muy ligados a los juegos de azar, y es sorprendente que con ese inicio haya resultado de tanta utilidad en la Ciencia. Se preguntaban qué es más probable al tirar dos dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10. Analizando juegos como éste fue avanzando la Ciencia.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. ESTADÍSTICA

1.1. Muestras. Estudios estadísticos

Si queremos hacer un estudio estadístico tenemos que:

a) Recoger los datos
b) Describir esos datos con tablas y gráficas, cálculo de parámetros estadísticos….
c) Extraer conclusiones.

Para recoger los datos y determinar los valores de la variable se puede utilizar a toda la población, todo el universo sobre el que se realiza el estudio, o hacer una muestra. En muchas ocasiones no es conveniente recoger valores de toda la población, porque es complicado o demasiado costoso, o incluso porque es imposible como en el caso de un control de calidad en que se destruya el objeto a analizar. La parte de la Estadística que se ocupa de cómo seleccionar adecuadamente las muestras se denomina **Teoría de Muestras**.

Población o universo es todo el conjunto de individuos sobre el que se realiza el estudio. Una **muestra** es un subconjunto representativo de esa población. Cada uno de los elementos de la población es un **individuo**.

Las características de la población que se estudian se denominan **variables estadísticas**, que se clasifican en **cuantitativas** y **cualitativas** según que los valores que tomen sean o no numéricos. Las variables cuantitativas que toman valores aislados se denominan **variables discretas** y las que pueden tomar cualquier valor de un intervalo de la recta real, **variables continuas**.

La parte de la Estadística que ordena, analiza y representa un conjunto de datos para describir sus características se denomina **Estadística Descriptiva**.

Para extraer conclusiones se utilizan las probabilidades y la parte de la Estadística que se ocupa de ello es la **Inferencia Estadística**.

Ejemplos:

- Si queremos conocer las preferencias en deportes del alumnado de 4º, es posible preguntar a toda la población (alumnado de 4º), aunque es adecuado elegir una muestra representativa, seleccionando a algunos estudiantes.
- En este estudio sobre preferencias deportivas, la variable utilizada es cualitativa.
- Para conocer la intención de voto ante unas elecciones europeas, municipales, autonómicas… se utilizan muestras, pues preguntar a toda la población sería muy costoso (y eso ya se hace en las elecciones). La variable en este caso también es cualitativa.
- Para estudiar lo que más preocupa a una población: paro, terrorismo, corrupción… también se utilizan muestras. En este caso sería muy costoso preguntar a toda la población, aunque sería factible. La variable en este caso también es cualitativa.
- Pero si una fábrica quiere conocer las horas de vida útil de una bombilla, una nevera, un camión… no puede poner a funcionar a toda la población, (todas las bombillas o neveras o camiones…) hasta que se estropeen pues se queda sin producción. En este caso es imprescindible seleccionar una muestra. La variable en este caso es cuantitativa, y el tiempo toma cualquier valor, es una variable cuantitativa continua.

- Si preguntamos por el número de hermanos es una variable cuantitativa

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

discreta.

- En *control de calidad* se hacen estudios estadísticos y se toman muestras.

Actividades propuestas

1. Queremos realizar un estudio estadístico sobre el tiempo dedicado al estudio por el alumnado de ESO de Madrid. Para ello se seleccionan adecuadamente 100 alumnos. Indica cuál es la población, cuál la muestra, qué tamaño tiene la muestra y quién sería un individuo.
2. Quieres pasar una encuesta para conocer, lo mismo que en el problema anterior, el tiempo dedicado al estudio, en este caso el de los compañeros y compañeras de tu centro escolar. ¿Se la pasarías sólo a las chicas? ¿Sólo a los chicos? ¿Preguntarías a los mejores de la clase? ¿A los de peores notas? Indica el criterio que seguirías para seleccionar la muestra a la que preguntar.

1.2. Variable discreta. Tablas y gráficos

Tablas

Al hacer un estudio estadístico o realizar un experimento aleatorio la información obtenida se resume en una tabla o distribución de frecuencias.

Ejemplo:

- Preguntamos a 40 estudiantes de 4º si les gusta, o no, el fútbol. En la tabla del margen reflejamos los resultados.

Posibles resultados	**Frecuencia absoluta**
Les gusta	28
No les gusta	12
Total	40

Es una tabla de frecuencias absolutas. Al dividir la frecuencia absoluta entre el número total tenemos la frecuencia relativa, así la frecuencia relativa de los que les gusta el fútbol es 28/40 = 0,7, y la de los que no les gusta el futbol es 12/40 = 3/10 = 0,3.

La **frecuencia absoluta** es el número de veces que se ha obtenido ese resultado.

La **frecuencia relativa** se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el número total de datos.

La suma de las frecuencias relativas es siempre igual a 1.

Multiplicando por 100 se obtienen los porcentajes.

Posibles resultados	**Frecuencias relativas**	**Porcentaje**
Les gusta	0,7	70
No les gusta	0,3	30
Suma total	1	100

Actividad resuelta

- *Se han obtenido los datos sobre el número de visitas que se han hecho de los Textos Marea Verde de Matemáticas en los meses indicados, y se han reflejado en una tabla. Haz una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentajes, de frecuencias acumuladas absolutas y de frecuencias relativas acumuladas.*

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Marea verde	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Porcentajes	Frecuencias acumuladas absolutas	Frecuencias acumuladas relativas
Septiembre	1834	0,51	51	1834	0,52
Octubre	956	0,26	26	2790	0,77
Noviembre	432	0,12	12	3222	0,89
Diciembre	389	0,11	11	3611	1
TOTAL	3611	1	100		

Observa que las **frecuencias acumuladas** se obtienen sumando la frecuencia anterior e indica, en este ejemplo, el número de visitas hasta ese momento.

Actividades propuestas

3. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de frecuencias absolutas de los valores obtenidos al tirar un dado con las frecuencias relativas y porcentajes, y con frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Resultados	Frecuencias absolutas
1	17
2	12
3	17
4	15
5	21
6	14

Gráficos estadísticos

Las representaciones gráficas ayudan a comprender el significado de los datos.

Dada una tabla de frecuencias (absolutas, relativas, porcentajes, acumuladas absolutas o acumuladas relativas) para representar un **diagrama de rectángulos o de barras** se traza para cada valor de la variable un rectángulo o barra de altura proporcional a la frecuencia que se esté representando.

Si se unen los puntos medios de los extremos superiores de las barras tenemos un **polígono de frecuencias o diagrama de líneas**.

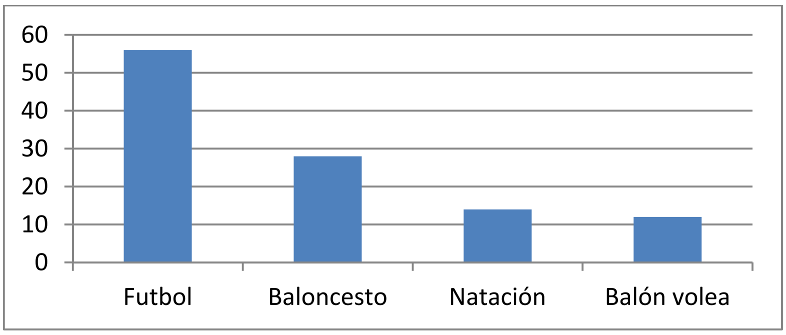
En un **diagrama de sectores** se dibuja un círculo que se divide en sectores de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

Actividad resuelta

- *Tenemos un estudio estadístico sobre las preferencias deportivas del alumnado de 4º de un determinado centro escolar. Represéntalos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un polígono de frecuencias relativas y en un diagrama de sectores.*

Deportes	Frecuencia Absoluta
Futbol	56
Baloncesto	28
Natación	14
Balón volea	12

Diagrama de barras de frecuencias absolutas



Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Polígono de frecuencias relativas o diagrama de líneas

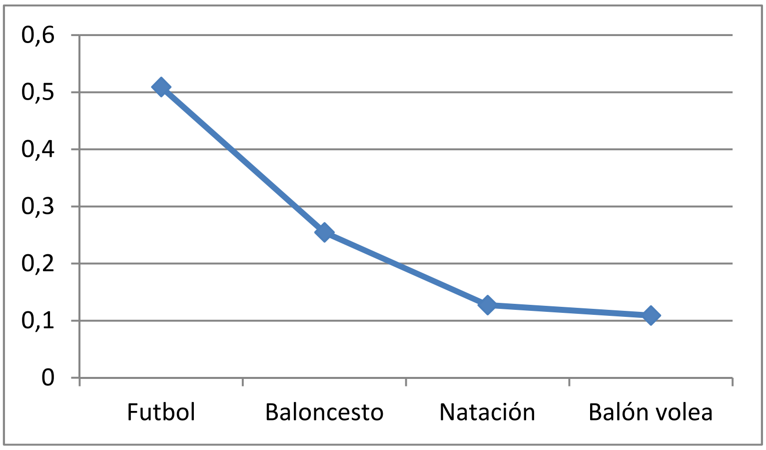
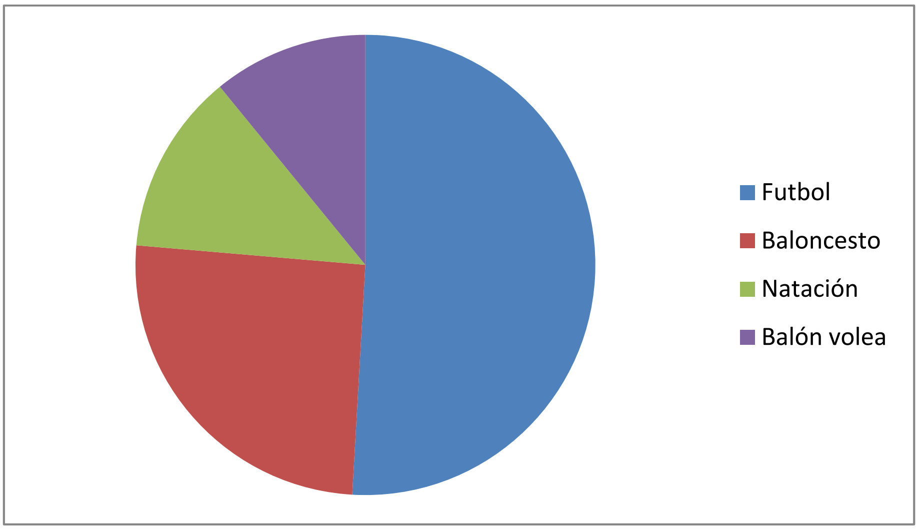


Diagrama de sectores



Actividades propuestas

4. Con la tabla de valores del ejercicio anterior, dibuja en tu cuaderno el diagrama de frecuencias relativas, el polígono de frecuencias absolutas acumuladas y el diagrama de sectores.

5. Haz un estudio estadístico preguntando a tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y represéntala en un diagrama de rectángulos, un polígono de frecuencias y un diagrama de sectores.

6. Selecciona una muestra entre tus compañeros y compañeras y realiza un estudio estadístico sobre el deporte que más le gusta a cada uno. Haz la representación que sea más sencilla de interpretar.

Utiliza el ordenador

Las hojas de cálculo son una herramienta muy útil para trabajar la Estadística. Suman, multiplican, y dibujan los gráficos con gran facilidad. Para la actividad resuelta anterior, copiamos la tabla con los datos en la hoja de cálculo a partir de la casilla A1. Calculamos la suma total en la casilla B6, simplemente apretando la tecla: $\sum$, o bien escribiendo =SUMA(B2:B5) que significa que queremos sumar lo que hay desde la casilla B2 a la B5.

Para calcular las frecuencias relativas escribimos en C1: Frecuencia relativa, y en C2, escribimos el signo igual, (con lo que estamos diciendo a la hoja que vamos a calcular algo), pinchamos en la casilla B2, escribimos: /, y pinchamos en B6: =B2/B6, nos sale 0,50909… La casilla B2 va a ir variando cuando calculemos C3, C4…, pero queremos que la casilla B6 se quede fija. Para decir eso, ponemos el símbolo $: =B2/$B$6. Y ahora arrastramos hasta la casilla C5. (Si arrastramos antes de poner el $ nos sale un error, pues está dividiendo por cero al ir modificando la casilla). Tenemos las frecuencias relativas calculadas.

	A	B	C
1	Deportes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2	Futbol	56	0,509090909
3	Baloncesto	28	0,254545455
4	Natación	14	0,127272727
5	Balón volea	12	0,109090909
6	SUMA	110	
7			

Para dibujar los gráficos sólo tenemos que seleccionar las filas y columnas que nos interesen y en el menú de "Insertar" seleccionar el tipo de gráfico deseado: Columna, Línea, Circular…

1.3. Parámetros de centralización y dispersión

Parámetros de centralización

Ya sabes que los parámetros de centralización nos dan información sobre el "*centro*" de un conjunto de datos. Estudiamos la media aritmética, la moda y la mediana.

Actividad resuelta

- *Nieves ha tenido en Matemáticas las siguientes notas: 8, 4, 6, 10 y 10. Calcula su media, su moda y su mediana.*

Su nota media se calcula sumando todas las notas: 8 + 4 + 6 + 10 + 10 = 38, y dividiendo la suma entre el número total de notas que es 5: 38/5 = 7,6.

La moda es 10 pues es el valor más frecuente.

Una forma de calcular la mediana es ordenar los valores de menor a mayor, y si el número de datos es impar, el valor central es la mediana. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos datos centrales.

En nuestro caso: $4 \leq 6 \leq \mathbf{8} \leq 10 \leq 10$, por lo que la mediana es 8.

Para calcular la **media** (**m**) de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se suman todos y se divide por el número total de datos (n).

$$\textbf{Media} = \mathbf{m} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$$

¿Qué es lo que está de moda? Lo que más se lleva.

La **moda** (**mo**) de una distribución de frecuencias es el valor más frecuente.

La **mediana** (**me**) es el valor central que deja por debajo el mismo número de valores de la variable que por encima.

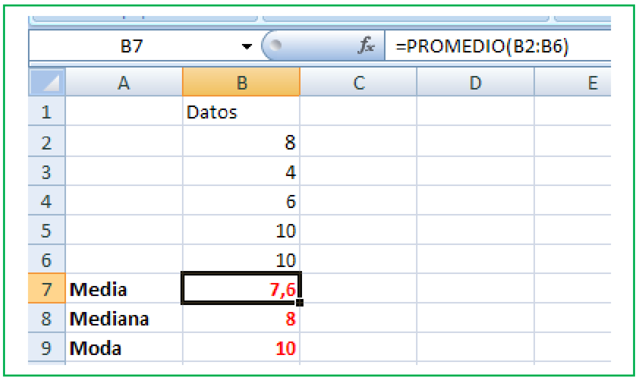
Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Utiliza el ordenador

Para calcular la media, la mediana y la moda con la hoja de cálculo, copiamos en la casilla B2, B3… los datos: 8, 4, 6, 10 y 10. Escribimos en la casilla A7, Media, y para calcular la media escribimos un signo igual en B7. Buscamos, desplegando las posibles funciones, la función PROMEDIO, y escribimos

=PROMEDIO(B2:B6),

que significa que calcule la media de los valores que hay en las casillas desde B2 hasta B6.



B7 | =PROMEDIO(B2:B6)

	A	B	C	D	E
1		Datos			
2		8			
3		4			
4		6			
5		10			
6		10			
7	Media	7,6			
8	Mediana	8			
9	Moda	10			

Del mismo modo calculamos la mediana buscando en las funciones o escribiendo =MEDIANA(B2:B6) y la moda buscando en las funciones o escribiendo =MODA(B2,B6).

Actividades propuestas

7. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

Calcula la temperatura media, la moda y la mediana.

Utiliza el ordenador para comprobar el resultado.

8. Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos. ¿Influyen en la moda? ¿Y en la mediana? ¿Y en la media?

Actividad resuelta

- *En una clase de 40 alumnos las calificaciones han sido:*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Suma**
f_i	1	2	0	1	2	8	7	6	6	4	3	**40**

A cada nota la llamamos x_i y a la frecuencia absoluta de esa nota: f_i. Esto significa que ha habido un cero, dos unos, ningún 2… y 3 dieces.

Para calcular la media aritmética añadimos a la tabla una fila con los productos $x_i \cdot f_i$ y sumamos esa fila:

$x_i \cdot f_i$	0	2	0	3	8	40	42	42	48	36	30	**251**

Al ser 40 el número total de estudiantes la media es: **Media** = m = 251 / 40 = 6,275.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La **moda** es la nota más frecuente, que es *mo* = 5 pues es la de mayor frecuencia.

Para calcular la **mediana** añadimos una nueva fila, la de las frecuencias acumuladas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencias acumuladas	1	3	3	4	6	14	21	27	33	37	40

La mitad de los datos es 40/2 = 20, y como 14 < 20 < 21, la mediana es 6.

Si la variable toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con una frecuencia absoluta $f_1, f_2, \ldots, f_n$, para calcular la **media** se multiplica cada valor por su frecuencia absoluta, se suman dichos productos y se divide por n el total de valores de la variable:

$$m = \textbf{Media} = (x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n) / (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$$

La **moda** es la frecuencia más alta.

Puede ocurrir que una distribución de frecuencias tenga más de una moda. Por ejemplo, la distribución:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	10	9	10	8	7	10

tiene 3 modas, 1, 3 y 6, ya que el valor más alto de la frecuencia absoluta es 10 en los tres casos.

La moda permite clasificar los conjuntos de datos en *unimodales*, *bimodales* o *plurimodales*, según el número de modas que tengan.

Para obtener la **mediana** se calculan las frecuencias acumuladas y se busca el valor de la variable que ocupa el lugar central: $n/2$.

Utiliza el ordenador

Copiamos los datos de la actividad resuelta en una hoja de cálculo, escribiendo xi en la casilla B1, fi en la C1. En B2 escribimos 0, y en B3, 1. Seleccionamos estas dos casillas y arrastramos hasta la casilla B12. Copiamos las frecuencias en la columna C. En A13 escribimos SUMA. Calculamos la suma de las frecuencias con la tecla: $\sum$ y se obtiene 40 en la casilla C13. En la columna D1 escribimos $x_i \cdot f_i$. En D2 escribimos = y pinchamos en B2, escribimos * y pinchamos en C2 (=B2*C2). Seleccionamos D2 y arrastramos hasta D12. Calculamos la suma (251) y dividimos el valor de la casilla D12 entre el de la casilla C12.

MAX =E2+C3

	A	B	C	D	E
1		xi	fi	xi * fi	Fr. Ac.
2		0	1	0	1
3		1	2	2	=E2+C3
4		2	0	0	3
5		3	1	3	4
6		4	2	8	6
7		5	8	40	14
8		6	7	42	21
9		7	6	42	27
10		8	6	48	33
11		9	4	36	37
12		10	3	30	40
13	SUMA		40	251	
14	Máximo		8		
15					

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Podemos calcular el valor máximo de las frecuencias, que en este caso se ve a ojo, pero si hubiera muchos más valores, muchas más filas, se puede utilizar la función MAX.

Para calcular las frecuencias acumuladas utilizamos la columna E. En E2 escribimos =C2. En E3 escribimos =E2+C3. ¿Por qué? Y seleccionando E3 arrastramos hasta E12.

Actividades propuestas

9. Se ha lanzado un dado 100 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

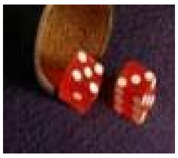
x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	18	16	14	16	16	20

Calcula la media, moda y mediana.

Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

10. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 1000 veces y obtenemos las siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	24	65	73	81	158	204	148	79	68	59	41



a) Calcula la media, la mediana y la moda.

b) Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

c) Repite tú los lanzamientos, ahora sólo diez veces, y calcula de nuevo la media, mediana y moda.

11. Utiliza el ordenador para calcular la media, la mediana y la moda de la siguiente tabla de frecuencias absolutas, que indica el número de hijos que tienen 200 familias entrevistadas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	14	65	73	27	9	6	2	1	0	2	1

Parámetros de dispersión

Nos dan una medida de lo "*dispersos*" que están los datos.

La primera medida nos la da el **recorrido**, o el valor máximo menos el valor mínimo.

Las más utilizadas son la varianza y la desviación típica (o desviación estándar) que mide la distancia de los datos respecto de la media.

Ya sabes que la mediana nos indica el valor de la variable que ocupa el lugar central. Se denomina **primer cuartil (Q1)** al valor de la variable que deja menores o iguales que él a la cuarta parte de los datos, (o un 25 %), (siendo por tanto las tres cuartas partes mayores o iguales que él). La mediana es el segundo cuartil, que deja por debajo la mitad de los datos o un 50 %. El **tercer cuartil (Q3)** es el valor de la variable que deja menores o iguales que él las tres cuartas partes de los datos o un 75 % (y mayores o iguales la cuarta parte). Se llama **intervalo intercuartil** (o recorrido intercuartílico) a la distancia entre el tercer y el primer cuartil (**Q3 – Q1**). Por lo que hemos dicho, en ese intervalo están la mitad de los datos.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividad resuelta

Seguimos con la misma actividad anterior.

- *Nieves ha tenido en Matemáticas las siguientes notas: 8, 4, 6, 10 y 10. Calcula su recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil.*

La mayor calificación ha sido un 10 y la menor un 6, luego el **recorrido** es 10 – 6 = 4.

Recorrido = Máximo – Mínimo.

La media ya la hemos calculado y es 7,6. Queremos analizar cómo las observaciones se separan de la media. Si a cada valor le restamos la media, unos salen positivos y otros negativos, y si sumamos todos, se compensan, por lo que sale 0. Es posible superar esa dificultad calculando esas diferencias en valor absoluto, o elevándolas al cuadrado. Si las elevamos al cuadrado, sumamos todo y dividimos por el número total de valores de la variable menos 1, obtenemos la varianza.

Se divide por n – 1 para mejorar las propiedades del estadístico: Varianza.

Si después calculamos la raíz cuadrada, se obtiene la desviación típica. Estamos evaluando la distancia de los valores de la variable a la media.

	x_i	x_i – media	(x_i – media)^2
1	8	0,4	0,16
2	4	-3,6	12,96
3	6	-1,6	2,56
4	10	2,4	5,76
5	10	2,4	5,76
Media = 7,6			Suma = 27,2

Si dividimos 27,2 entre 5 (n) se obtiene 5,44 que es la varianza.

Calculamos la raíz cuadrada: 2,33 que es la desviación típica.

Varianza = ((x_1 – media)^2 + (x_2 – media)^2 + … + (x_n – media)^2)/n = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}$

S = Desviación típica = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}}$

Se puede demostrar, haciendo operaciones una fórmula más cómoda para calcular la varianza y la desviación típica:

Varianza = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2}}{n} - m^2$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^{2} - 2x_i \cdot m + m^2) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} - 2m\sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot m^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} - 2m(n \cdot m) + n \cdot m^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} - n \cdot m^2$$

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - m^2}$$

	x_i	x_i^2
	8	64
	4	16
	6	36
	10	100
	10	100
m = 7,6	Suma = 38	Suma = 316

Varianza = (316/5) – $(7,6)^2$ = 63,2 – 57,76 = 5,44.

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza, es decir, s = 2,33.

Para calcular los cuartiles debemos ordenar los datos; 4 ≤ 6 ≤ 8 ≤ 10 ≤ 10.

1	2	3	4	5
4	**6**	8	**10**	10

El primer cuartil deja por debajo la cuarta parte o el 25 % de los datos. Hay 5 datos y 5/4 = 1,25, como 1 < 1,25 < 2, el primer cuartil es 6. Q1 = 6. El tercer cuartil deja por debajo las tres cuartas partes o el 75 % de los datos: 3(5/4) = 3,75. Como 3 < 3,75 < 4, entonces Q3 = 10.

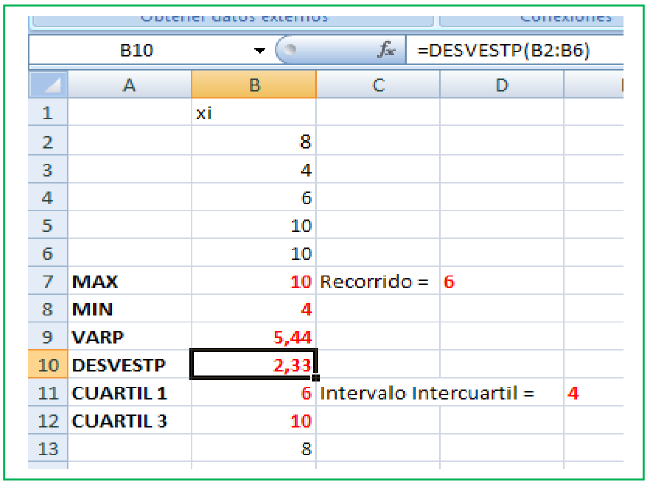
Intervalo intercuartil = Q3 – Q1.

En el ejemplo, el intervalo intercuartil = Q3 – Q1 = 10 – 6 = 4.

Utiliza el ordenador

Igual que hemos calculado la media, la mediana y la moda, la hoja de cálculo se puede utilizar para obtener:

- El recorrido calculando MAX – MIN.
- La varianza utilizando VARP.
- La desviación típica usando DESVESTP.
- Los cuartiles, (CUARTIL), siendo el cuartil 0 el mínimo; el cuartil 1, Q1; el cuartil 2, la mediana; el cuartil 3, Q3; y el cuartil 4, el máximo.



B10 =DESVESTP(B2:B6)

	A	B	C	D
1		xi		
2		8		
3		4		
4		6		
5		10		
6		10		
7	MAX	10	Recorrido =	6
8	MIN	4		
9	VARP	5,44		
10	DESVESTP	2,33		
11	CUARTIL 1	6	Intervalo Intercuartil =	4
12	CUARTIL 3	10		
13		8		

Actividades propuestas

12. Dadas las temperatura en una ciudad de un ejercicio anterior:

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

Calcula el recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil.

Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

13. Calcula el recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil. de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

1.4. Diagrama de cajas

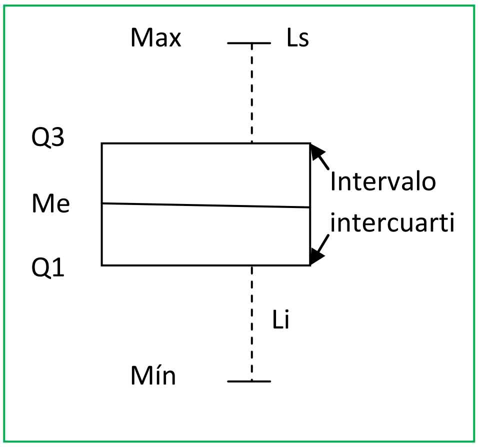
El diagrama de cajas es una representación gráfica en la que se utilizan los cuartiles, la mediana, los valores máximos y mínimos… intentando visualizar todo el conjunto de datos.

Se forma un rectángulo (o caja) cuyos lados son los cuartiles y donde se señala en el centro, la mediana. Se añaden dos brazos (o bigotes) donde se señalan los valores máximo y mínimo.

Se pueden calcular, además, unos límites superior e inferior. El inferior, L1; es Q1 menos 1,5 por el intervalo intercuartil, y el superior Ls es Q3 + 1,5 por el intervalo intercuartil.

El diagrama de caja es el de la figura del margen.

En el ejemplo anterior, una vez ordenados los datos: 4 ≤ 6 ≤ 8 ≤ 10 ≤ 10, hemos calculado que:



Mediana = Me = 8.

Q1 = 6.

Q3 = 10.

Intervalo intercuartil = 4.

Los bigotes nos indican:

Máx = 10.

Mín = 4.

Ls = Q3 + 4*1,5 = 16.

Li = Q1 – 4*1,5 = 0.

En este ejemplo el máximo es igual a 10, que es menor que el posible extremo superior, igual a 16. El mínimo es 4, mayor que el extremo inferior, luego no hay valores *atípicos* que sean mayores que el límite superior o menores que el límite inferior. Los extremos de los bigotes, en nuestro ejemplo son 10 y 4.

1.5. Variable continua: intervalos y marcas de clase. Histogramas

Recuerda que las variables pueden ser cualitativas, si no son numéricas, o cuantitativas, que a su vez pueden ser discretas o continuas.

Por ejemplo: Si se hace un estudio estadístico sobre la población de estudiantes, se puede preguntar sobre la profesión de sus padres y madres, que es una variable cualitativa, sobre el número de hermanos, que es una variable cuantitativa discreta (nadie tiene 3,7 hermanos), o sobre la edad, la estatura, la calificación media… que son variables cuantitativas continuas.

Con las variables cuantitativas continuas tiene sentido agrupar los valores en intervalos.

Al valor central del intervalo se le denomina **marca de clase**.

La representación gráfica más adecuada es el **histograma** que es un diagrama de rectángulos en el que el área de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia. Tiene la ventaja de que de esa forma la frecuencia de cada suceso viene representada por el área.

Actividad resuelta

- Realiza un estudio estadístico sabiendo que la tabla de frecuencias absolutas, con intervalos, de los pesos de 40 estudiantes de un centro escolar, es:

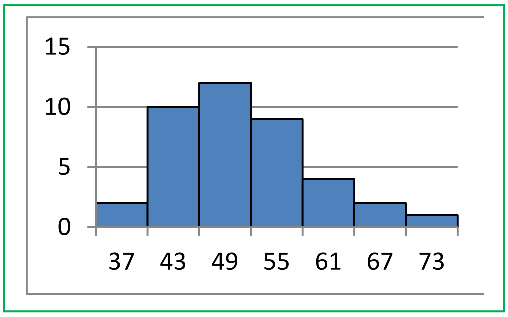
Peso	[34, 40)	[40, 46)	[46, 52)	[52, 58)	[58, 64)	[64, 70)	[70, 76)
Estudiantes	2	10	12	9	4	2	1

La tabla nos dice que hay 2 estudiantes cuyo peso es mayor o igual a 34 y es menor que 40.

Calculamos las marcas de clase, buscando el punto medio de cada intervalo: (40 – 34)/2 = 3 y 34+3 =37. Todos los intervalos en este ejemplo tienen una longitud de 6. Reescribimos la tabla con las marcas de clase y las frecuencias absolutas:

x_i	37	43	49	55	61	67	73
f_i	2	10	12	9	4	2	1

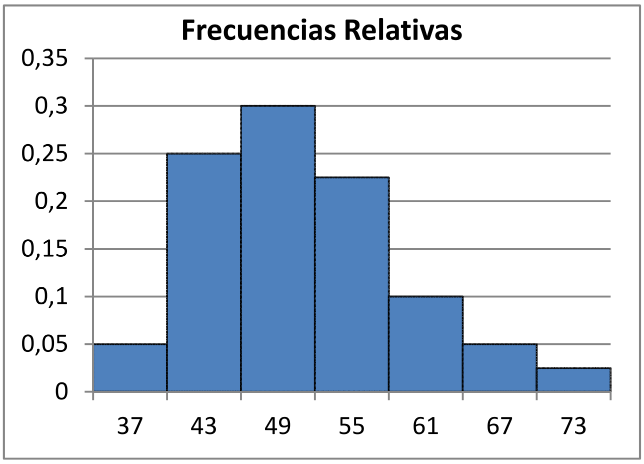
En este caso el histograma de las frecuencias absolutas es muy sencillo pues todos los intervalos tienen igual longitud. Si no fuera así, habría que calcular con cuidado las alturas de los rectángulos para que las áreas fueran proporcionales a las frecuencias.

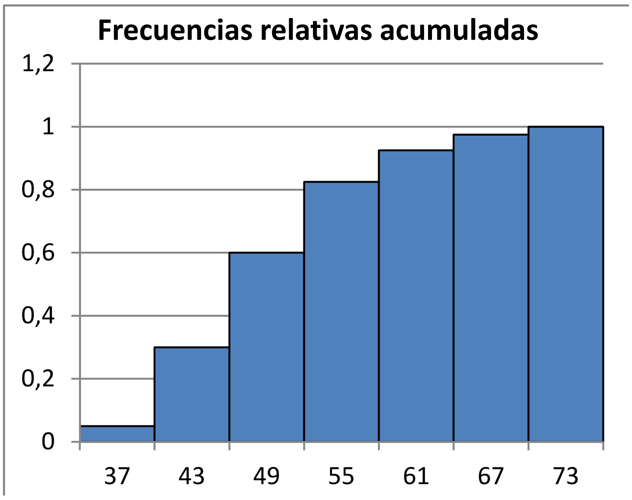


Vamos a representar también el histograma de las frecuencias relativas y de las frecuencias relativas acumuladas:

x_i	37	43	49	55	61	67	73
Frecuencias relativas	0,05	0,25	0,3	0,225	0,1	0,05	0,025
Frecuencias relativas acumuladas	0,05	0,3	0,6	0,825	0,925	0,975	1

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF





Cálculo de la media y la desviación típica:

Procedemos de la forma que ya conocemos, calculando el producto de las marcas de clase por las frecuencias:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	**Suma**
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$x_i \cdot f_i$	74	430	588	495	244	134	73	2038

La **media** es igual a 2038/40 = 50,95

Para calcular la **desviación típica** restamos a cada marca de clase, la media, elevamos al cuadrado y multiplicamos por la frecuencia relativa:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	**Suma**
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$x_i - m$	−13,95	−7,95	−1,95	4,05	10,05	16,05	22,05	
$(x_i - m)^2$	194,60	63,2025	3,8025	16,4025	101,0025	257,6025	486,2025	1122,8175
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$(x_i - m)^2 \cdot f_i$	389,20	632,025	45,63	147,62	404,01	515,205	486,2025	2619,9

La suma de las diferencias de la media al cuadrado por las frecuencias relativas es 2619,9. Ahora dividimos entre *n* que en nuestro caso es 40, y se obtiene 65,5 que es la varianza. Calculamos la raíz cuadrada. La desviación típica es 8,09.

Actividad resuelta

- Utilizamos la otra fórmula: *Varianza* = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2$

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

x_i	37	43	49	55	61	67	73	**Suma**
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
x_i^2	1369	1849	2401	3025	3721	4489	5329	22183
$x_i^2 \cdot f_i$	2738	18490	28812	27225	14884	8978	5329	106456

Varianza = (106456/40) –(50,95)^2 = 2661,4 – 2595,9 = 65,5 y *desviación típica* = *s* = 8,09.

- *Veamos otro ejemplo de cálculo de la media y la desviación típica utilizando la otra fórmula:*

$$\textit{Varianza} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2$$

x_i	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	**Suma**
f_i	1	0	2	5	9	22	16	12	8	3	1	1	80
$x_i \cdot f_i$	64	0	132	335	612	1518	1120	852	576	219	74	75	5577
x_i^2	4096	4225	4356	4489	4624	4761	4900	5041	5184	5329	5476	5625	
$x_i^2 \cdot f_i$	4096	0	8712	22445	41616	104742	78400	60492	41472	15987	5476	5625	389063

n = 80.

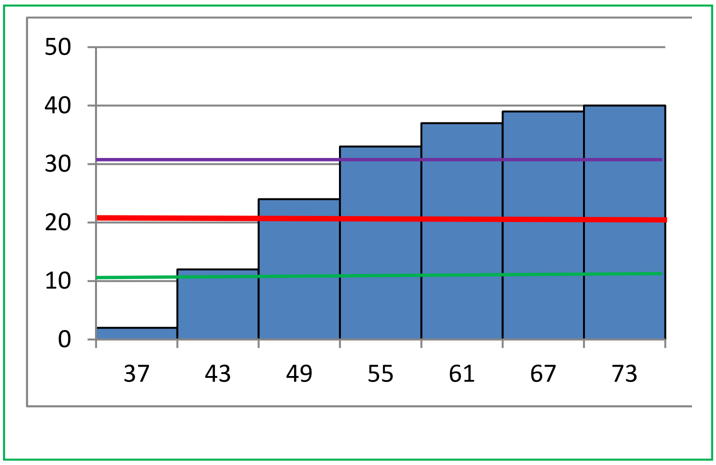
La **media** es igual a *m* = 5577/80 = 69,7.

La **varianza** es igual a $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2 = \frac{389063}{80} - 69{,}7^2$ = 4863,2875 – 4858,09 = 5,1975

La *desviación típica* es igual a la raíz cuadrada de la varianza, *s* = 2,28.

Cálculo de la mediana y los cuartiles.

Representamos el histograma de frecuencias absolutas acumuladas, y cortamos por las líneas *n*/2 para la mediana, *n*/4 para el primer cuartil, y 3*n*/4 para el segundo. En nuestro caso por 20, 10 y 30.



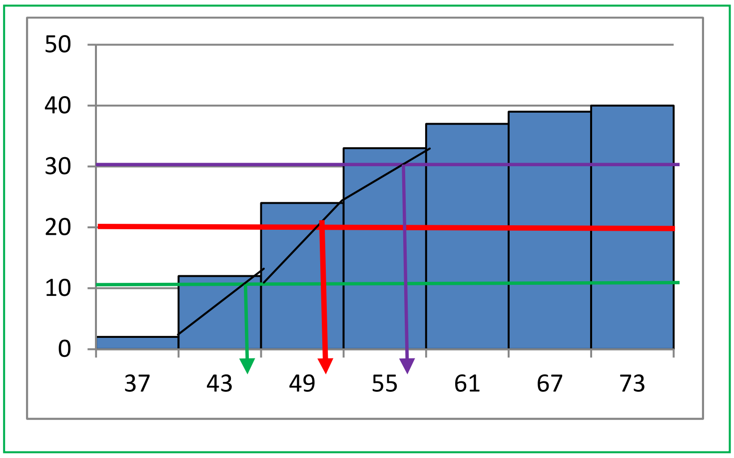
Observamos, viendo donde las rectas horizontales, *y* = 20, *y* = 10 e *y* = 30 cortan al histograma, que la mediana está en el intervalo [46, 52) cuya marca de clase es 49, el primer cuartil en el intervalo [40, 46) cuya marca de clase es 43, y el tercer cuartil en [52, 58) cuya marca de clase es 55.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

x_i	[34, 40)	[40, 46)	[46, 52)	[52, 58)	[58, 64)	[64, 70)	[70, 76)
f_i	2	10	12	9	4	2	1
F_i	2	12	24	33	37	39	40

Podemos ajustarlo más haciendo una interpolación lineal, es decir, aproximando con una recta.

Para la mediana trazamos la recta que pasa por los puntos (46, 12) y (52, 24) ($y = 2x - 80$) y calculamos dónde corta a la recta $y = 20$. Corta en $x = 50$. Por tanto la mediana es Me = 50.



El tercer cuartil está en el intervalo [52, 58). Calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (52, 24) y (58, 33), que es $y = (3/2)x - 54$. Calculamos dónde corta a y = 30, que es en $x = 56$. Por tanto Q3 = 56.

El primer cuartil está en el intervalo [40, 46). La recta que pasa por los puntos:

(40, 2) y (46, 12)

tiene por ecuación $y = (5/3)x - 64{,}6666$, que corta a $y = 10$ en $x = 44{,}79999...$. Q1 = 44,8.

Utiliza el ordenador

Para dibujar histogramas con el ordenador utilizando una hoja de cálculo nos encontramos con la dificultad de que éste dibuja los rectángulos separados. Dibuja un diagrama de rectángulos. Para arreglarlo en el caso de que la longitud de todos los intervalos sea la misma, debes señalar uno de los rectángulos, entrar en "*dar formato a la serie de datos*" y, en "*Opciones de serie*" seleccionar en "*Ancho del intervalo*" un ancho del 0 %, es decir, "*sin intervalo*". Si las longitudes son distintas se debe calcular previamente las alturas de los rectángulos.

Actividades propuestas

14. Utiliza el ordenador para dibujar histogramas y repetir los cálculos de la actividad resuelta anterior.

15. Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización: 23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24. Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas con cuatro intervalos: [20, 25), [25, 30), [30, 35) y [35, 40). Calcula las marcas de clase. Dibuja el histograma de frecuencias absolutas. Calcula la media y la desviación típica. Calcula gráficamente la mediana y los cuartiles.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. AZAR Y PROBABILIDAD

2.1. Experimento aleatorio y suceso

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

- Son experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.
b) Lanzar un dado y anotar el número de la cara superior.
c) Lanzar dos dados o dos monedas.
d) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.
e) Sacar una carta de una baraja.
f) Sacar, sin reemplazamiento, dos cartas de la baraja.
g) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

- No son experimentos aleatorios

a) Salir a la calle sin paraguas cuando llueve y ver si te mojas.
b) El precio de medio kilo de rosquillas si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.
c) Soltar un objeto y ver si cae.

Actividades propuestas

16. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) La superficie de las comunidades autónomas españolas.
b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**.

Al realizar un experimento aleatorio siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral**.

Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral.

Actividad resuelta

- ***Por ejemplo*** los posibles resultados al tirar una moneda son que salga *cara* o salga *cruz*. El conjunto de sucesos elementales es {cara, cruz}.
- *El conjunto de posibles resultados de los experimentos aleatorios siguientes:*

a) Extraer una bola de una bolsa con 9 bolas blancas y 7 negras es {*blanca*, *negra*}.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

b) Sacar una carta de una baraja española es {AO, 2O, 3O, …, SO, CO, RO, AC, …, RC, AB, …, RB, AE, …, RE }.

c) Tirar dos monedas es: {(*cara*, *cara*), (*cara*, *cruz*), (*cruz*, *cara*), (*cruz*, *cruz*)}.

- *Al lanzar un dado,* el conjunto de posibles resultados es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el suceso obtener par es {2, 4, 6}, el suceso obtener impar es {1, 3, 5}, el suceso obtener múltiplo de 3 es {3, 6}, sacar un número menor que 3 es {1, 2}.
- *Al lanzar dos monedas* el conjunto de posibles resultados es {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. El suceso *sacar cero caras* es {(+, +)}, *sacar una cara* es {(C, +), (+, C)} y *sacar dos caras* {(C, C)}.

Actividades propuestas

17. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

18. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

19. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

20. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

21. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

2.2. Frecuencia y probabilidad

No vamos a definir "probabilidad", pues existen varias definiciones posibles. Existe una axiomática debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya se había sido usado este concepto por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto. Por tanto:

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una experimental, analizando las frecuencias relativas de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** es decir, que **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles.**

Esto último, cuando se puede usar, simplifica la forma de asignar probabilidades y se conoce como **Regla de *Laplace*** que dice que: *"Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles"*.

Actividad resuelta

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*}, un único caso favorable, *cara*, y suponemos que la moneda no está trucada. Si sospecháramos que la moneda estuviera trucada para asignar esa probabilidad habría que tirar la moneda un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener cara.

- La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es 1/6 pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 5, y suponemos que el dado no está trucado, luego todos ellos son equiprobables.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- La probabilidad de sacar una bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0,5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0,49.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas y elegimos una carta, algunos de los sucesos que pueden ocurrir son "*sacar un oro*", o "*sacar un as*", o "*sacar el caballo de copas*"… Como de antemano no sabemos lo que va a ocurrir decimos que estos sucesos son *aleatorios* o de *azar*. Antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad, de por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar un oro* es 10/40, y la de un *as* es 4/40.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar el rey de copas? ¿Y de sacar un rey? ¿Y una copa?

La probabilidad de sacar el *as de copas* es 1/40. Pero el suceso *sacar un as* se cumple si sale el as de oros, o de copas, o de bastos o de espadas. Es decir, no es un suceso simple, está formado, en este caso por 4 sucesos elementales, luego su probabilidad es 4/40 = 1/10. Lo mismo le ocurre a *sacar una copa*. Es un suceso compuesto, y como hay 10 copas su probabilidad es 10/40 = 1/4.

Actividades propuestas

22. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

23. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

2.3. Asignación de probabilidades

Suceso contrario

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar un as en la baraja de 40 cartas? ¿Y de* ***no*** *sacar un as? ¿Y de sacar una copa? ¿Y de* ***no*** *sacar una copa?*

El suceso *no sacar un as* es el suceso **contrario** al de *sacar un as*. Cartas que no son ases hay 36, luego la probabilidad de no sacar as es 36/40 = 9/10. Observa que se obtiene que p(as) + p(no as) = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.

La probabilidad de *sacar copa* es 10/40, y hay 30 cartas que no son copas, luego la probabilidad de ***no*** *sacar copa* es 30/40, y 10/40 + 30/40 = 1.

Si designamos por p(X) a la probabilidad de un suceso X y por p(noX) a la probabilidad de su **suceso contrario** resulta que:

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

p(X) + p(noX) = 1.

La probabilidad de un suceso más la probabilidad de su suceso contrario es igual a 1.

Actividades propuestas

24. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

25. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

La probabilidad de sacar una bola roja es 3/5. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende!

Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera.

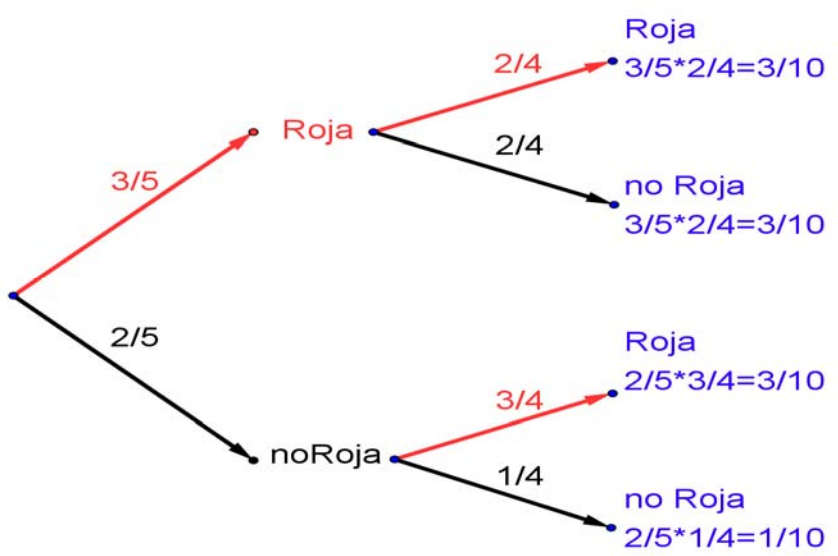
En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 3/5, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 3/5 · 3/5 = 9/25. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes: p(A y B) = p(A) · p(B)**.

Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 4 bolas y de ellas sólo quedan 2 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 2/4, y está condicionada por lo que antes hayamos sacado. Se escribe: p(Roja/Roja) y se lee *"probabilidad de roja condicionado a haber sacado roja"*. La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

Observa el diagrama de árbol y comprueba que la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego



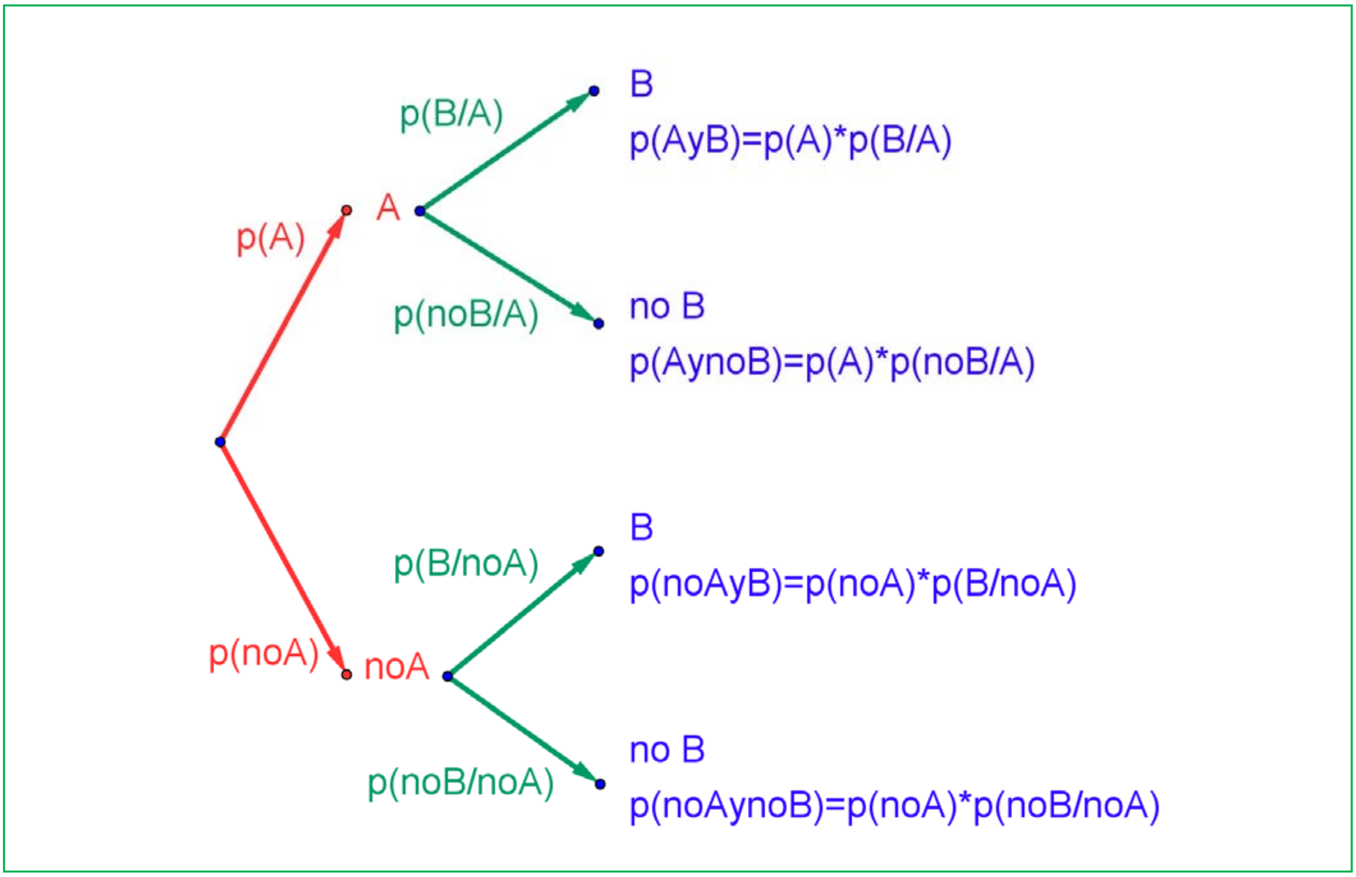
Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

una bola negra (no roja) es 3/5 · 2/4 = 3/10 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra y luego bola roja es 2/5·3/4 = 6/20 = 3/10, y la de sacar dos bolas negras es: 2/5·1/4 = 2/20 = 1/10. Pero observa más cosas.

Por ejemplo, 3/5 + 2/5 = 1; 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.

Los sucesos no son independientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.

Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces: **p(A y B) = p(A) · p(B/A)**



Actividades resueltas

- *Sacamos dos cartas de una baraja de 40 cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?*

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 4/40 · 4/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo *as* viene condicionada por que hayamos sacado un as previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 4 ases sino sólo 3, luego la probabilidad es:

4/40 · 3/39 = 1/130.

Observa que:

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: **p(B/A) ≠ p(B)**.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: **p(B/A) = p(B/noA) = p(B)**.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

26. En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción (noA = no sacarlo), y B = *sacar un as* en la segunda extracción (no B = no sacarlo). ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Y la de no sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

27. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen 2 ases*" y la de "*no sale ningún as*".

28. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

29. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

30. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

Sucesos compatibles e incompatibles

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar una copa o un oro?

Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar un as o un oro?

Hay 4 ases y hay 10 oros, pero hay el *as de oros*, luego las cartas que son o bien un as o bien un oro son 13, luego la probabilidad es 13/40.

Llamamos sucesos incompatibles a los que, como copa y oro, no pueden realizarse a la vez, y sucesos compatibles a los que, como as y oro, pueden realizarse a la vez.

Designamos p(A o B) a la probabilidad del suceso "*se verifica A o bien se verifica B*". Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades.

P(A o B) = p(A) + p(B), si A y B son incompatibles.

Pero si A y B si pueden verificarse a la vez habrá que restar esos casos, esas veces en que se verifican A y B a la vez.

P(A o B) = p(A) + p(B) – p(A y B), si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces p(A y B) = 0.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes: a) Sacar un rey o una figura; b) No sale un rey o sale un rey; c) Sacar un basto o una figura.*

a) Hay 4 reyes y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero los cuatro reyes son figuras, por tanto p(Rey o Figura) = 4/40 + 16/40 – 4/40 = 16/40 = 0,4.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son reyes, y hay 4 reyes, luego p(no rey o rey) = 36/40 + 4/40 = 1. Esta conclusión es más general. Siempre:

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

p(noA o A) = 1,

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que p(A) + p(noA) = 1.

c) Hay 10 bastos y hay 12 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez bastos (as, sota, caballo y rey), luego p(Basto o Figura) = 10/40 + 16/40 – 4/40 = 22/40 = 11/20.

Resumen:

Suceso **contrario**: **p(X) + p(noX) = 1.**

Sucesos **dependientes: p(A y B) = p(A) · p(B/A).**

Sucesos **compatibles: P(A o B) = p(A) + p(B) – p(A y B).**

Actividades propuestas

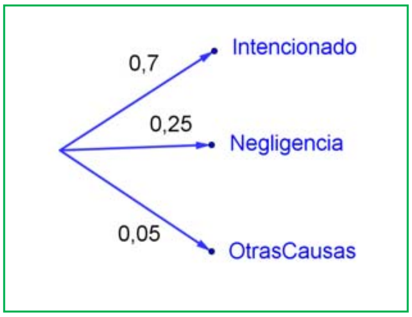
31. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que p(A) = 5/36 (2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que p(B) = 8/36 ((1,3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: p(A y B); p(A o B); p(A y noB); p(noA y B); p(noA y noB). c) Calcula p(A/B); p(A/noB); p(noA/B).

2.4. Experiencias compuestas: tablas de contingencia y diagramas de árbol

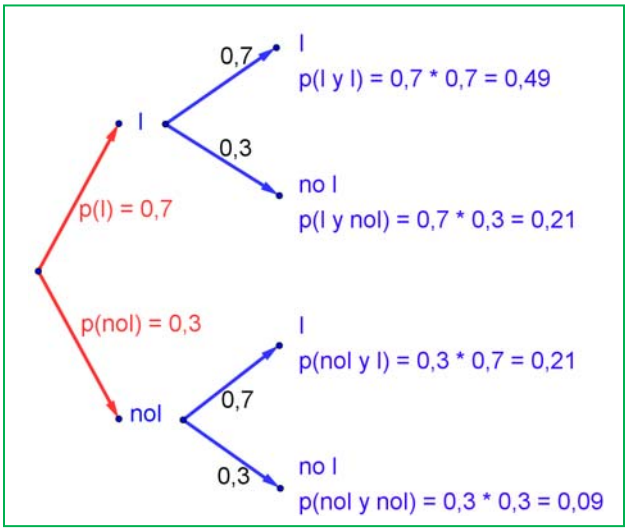
Diagramas de árbol

Ejemplo:

- Se hace un estudio sobre los incendios y se comprueba que en una determinada zona el 70 % de los incendios son intencionados, un 25 % se deben a negligencias y 5 % a causas naturales como rayos o a otras causas. Representa esta situación con un diagrama de árbol.



Actividades resueltas



- Si consideramos que la probabilidad de que un incendio sea intencionado es 0,7, ¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?

Llamamos I al suceso “ser intencionado” y noI al suceso “no ser intencionado”. Representamos la situación en un diagrama de árbol. Como el que un incendio sea intencionado es independiente de cómo sea el segundo, tenemos que:

P(I y I) = 0,7 · 0,7 = 0,49

P(I y noI) = 0,7 · 0,3 = 0,21

ya que es la probabilidad de que el primer incendio sea intencionado y el segundo no.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

P(noI y I) = 0,3 · 0,7 = 0,21

P(noI y noI) = 0,3 · 0,3 = 0,09

La probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado la podemos calcular sumando las probabilidades de (I y I), (I y noI), y (noI y I) que es 0,49 + 0,21 + 0,21 = 0,91. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario p(noI y noI) = 0,09 y restarla de 1:

p(al menos uno intencionado) = 1 – 0,09 = 0,91.

Actividades propuestas

32. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo p(I) = 0,7.

33. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: p(A) = 0,95; p(B) = 0,97 y p(C) = 0,98. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

34. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0,5 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

35. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Tablas de contingencia

Ejemplo:

- Se han estudiado 500 enfermos del hígado analizando por un procedimiento nuevo si las lesiones son benignas o malignas. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	Diagnóstico incorrecto	Totales
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Totales	474	26	500

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	Diagnóstico incorrecto (I)	Totales
Lesión maligna (M)	0,412	0,024	0,436
Lesión benigna (B)	0,536	0,028	0,564
Totales	0,948	0,052	1

Actividades resueltas

- *Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpretamos entonces el significado de cada uno de estos valores.*

0,412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: p(M y C).

0,024 = p(M y I); 0,536 = p(B y C); 0,028 = p(B y I).

¿Y 0,436? El número de lesiones malignas es 218, luego 0,436 = p(M).

Del mismo modo: 0,564 = p(B); 0,948 = p(C); 0,052 = p(I).

Observa que p(M) + p(B) = 1 y que p(C) + p(I) = 1. Son sucesos contrarios.

- *¿Son dependientes o independientes los sucesos M y C?*

Recuerda que p(M y C) = p(M) · p(C/M), por tanto: 0,412 = 0,436 · p(C/M), de donde p(C/M) = 0,412/0,436 = 0,945 que es distinto de 0,948 que es la probabilidad de C. Se puede afirmar que M y C son dependientes ya que p(C/M) ≠ p(C).

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	**No A**	
B	P(A y B)	P(noA y B)	P(B)
No B	P(A y noB)	P(noA y noB)	P(noB)
	P(A)	P(noA)	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que, como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

p(A) + p(noA) = 1 y p(B) + p(noB) = 1.

Observa también que:

p(A) = p(A y B) + p(A y no B), del mismo modo que p(B) = p(A y B) + p(noA y B)

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También:

p(noA) = p(noA y B) + p(noA y no B) y p(noB) = p(A y noB) + p(noA y noB).

Actividades propuestas

36. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0,27		0,56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0,58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: p(V y C); p(V y U); p(M y C); p(M y U); p(V); p(M); p(C) y p(U).

c) Calcula p(U/V); p(C/V); p(V/U); p(V/C). ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

37. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener la tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Actividades resueltas

- Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y noA.

	A	No A	
B	2/9	5/9	7/9
No B	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Conocemos la p(A) = 3/9 = 1/3, p(noA) = 6/9 = 2/3, p(B) = 7/9 y p(noB) = 2/9.

También conocemos p(A y B) = 2/9; p(A y noB) =1/9; p(noA y B) = 5/9 y p(noA y no B) = 1/9.

Nos falta conocer p(B/A) que podemos obtener dividiendo p(A y B) entre p(A):

p(B/A) = p(A y B)/p(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.

Del mismo modo calculamos:

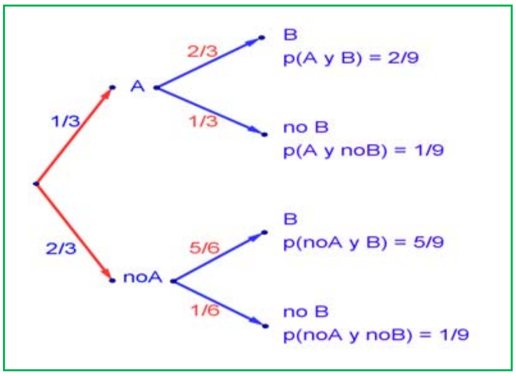
p(noB/A) = p(A y noB)/p(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3

p(B/noA) = p(noA y B)/p(noA) = 5/9 : 6/9 = 5/6

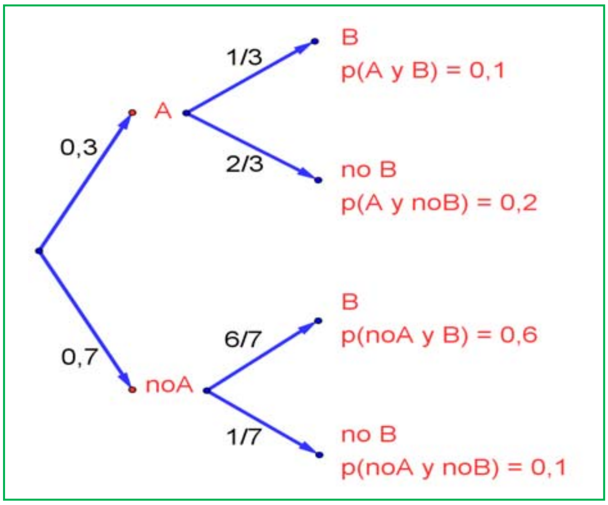
p(noB/noA) = p(noA y noB)/p(noA) = 1/9 : 6/9 = 1/6.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

El árbol es:



Actividades resueltas



- Recíprocamente, dado el diagrama de árbol obtener el diagrama de contingencia:

Ahora conocemos p(A) = 0,3 y p(noA) = 0,7. Además conocemos p(B/A) = 1/3; p(B/noA) = 6/7; p(noB/A) = 2/3 y p(noB/noA) = 1/7.

Calculamos, multiplicando: p(A y B) = 0,3·(1/3) = 0,1; p(A y noB) = 0,3·(2/3) = 0,2; p(noA y B) = 0,7·(6/7) = 0,6 y p(noA y noB) = 0,7·(1/7) = 0,1 que ponemos también en el árbol.

Rellenamos con estos datos, una tabla de contingencia:

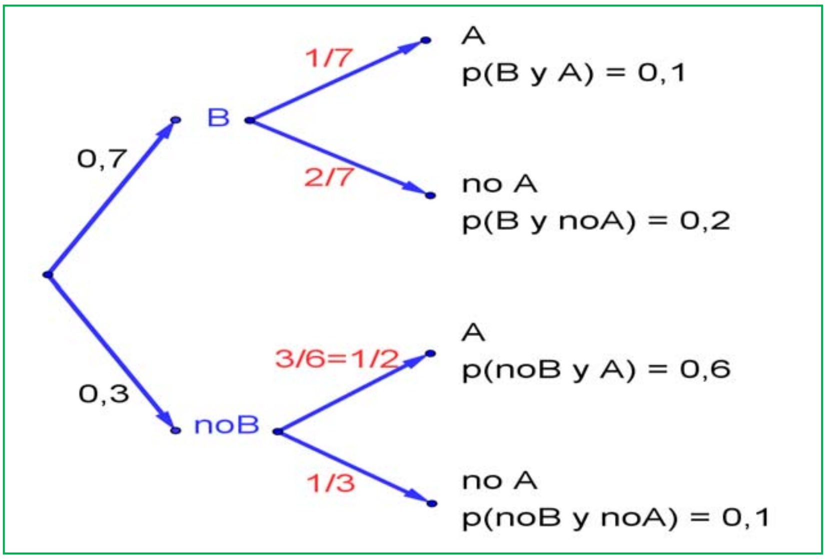
	A	**No A**	
B	0,1	0,6	
No B	0,2	0,1	
	0,3	0,7	1

Calculamos, sumando, las casillas que nos faltan, p(B) = 0,1 + 0,6 = 0,7 y p(noB) = 0,2 + 0,1 = 0,3.

	A	**No A**	
B	0,1	0,6	0,7
No B	0,2	0,1	0,3
	0,3	0,7	1

Puede ser muy interesante pasar de un diagrama de árbol a la tabla de contingencia y de ésta, al otro diagrama de árbol, con el que podemos conocer p(A/B) = 0,1/0,7 = 1/7; p(noA/B) = 0,2/0,7 = 2/7; p(A/noB) = 0,3/0,6 = 3/6 = 1/2 y p(noA/noB) = 0,1/0,3 = 1/3.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

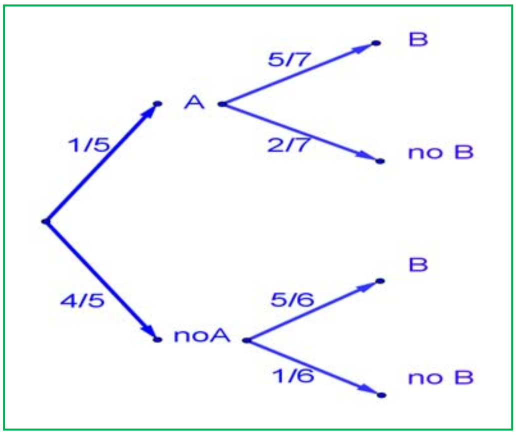


Actividades propuestas

38. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A	
B	0,4	0,2	0,6
No B	0,15	0,25	0,4
	0,55	0,45	1

39. Dado el diagrama de árbol, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



40. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

41. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: p(M/C)

La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: p(noM/C).

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Estadística

El nombre de Estadística proviene del s. XIX, sin embargo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para controlar el número de personas, animales o ciertas mercancías desde la Prehistoria. Los babilonios usaban ya envases de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia 600 aC.

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tu ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177 > 0,5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914 < 0,5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Galileo,

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

- Calcula las probabilidades de cada una de las sumas y la de sacar 10 y de sacar 9.

Si quieres saber más, busca:

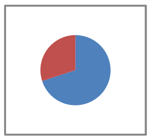
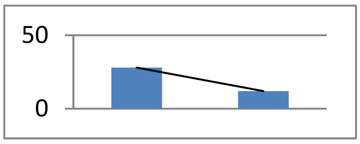
http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

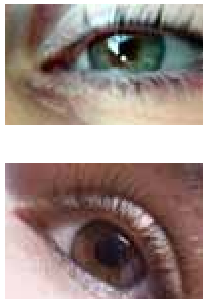
RESUMEN

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>Población y muestra</td><td>Población: Todo el conjunto de individuos sobre el que se hace el estudio. Muestra: Una parte de esa población.</td><td>Para conocer la intención de voto, la población es todo el país, y se selecciona una muestra</td></tr>
<tr><td>Frecuencia absoluta, relativa y acumulada</td><td>Frecuencia absoluta: Número de veces que se ha obtenido ese resultado. Frecuencia relativa: Se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total. Frecuencia acumulada: Se obtiene sumando las frecuencias anteriores.</td><td><table><tr><th></th><th>Fr. Absoluta</th><th>Fr. Relativa</th><th>Fr. Acumulada Absoluta</th></tr><tr><td>A</td><td>28</td><td>0,7</td><td>28</td></tr><tr><td>B</td><td>12</td><td>0,3</td><td>40</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráficos estadísticos</td><td>Diagrama de barras
Diagrama de líneas
Diagrama de sectores
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Media</td><td>Media = m = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$</td><td>Con: 8, 4, 6, 10 y 10
Media = 38/5 = 7,6</td></tr>
<tr><td>Moda</td><td>Es el valor más frecuente</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Mediana</td><td>Deja por debajo la mitad</td><td>4 < 6 < 8 < 10 = 10. Me = 8.</td></tr>
<tr><td>Varianza y Desviación típica</td><td>Varianza = $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2$. s = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2}$</td><td>Varianza = 5,4.
s = 2,33.</td></tr>
<tr><td>Cuartiles</td><td>Q1 deja por debajo la cuarta parte. Q3 deja por debajo las tres cuartas partes. Intervalo intercuartil = Q3 – Q1.</td><td>Q1 = 6; Q3 = 10; Intervalo intercuartil = Q3 – Q1 = 4.</td></tr>
<tr><td>Histograma</td><td>El área de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia .</td><td></td></tr>
<tr><td>Suceso</td><td>Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o sucesos posibles.
Un suceso es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.</td><td>Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso obtener múltiplo de 3 = {3, 6}</td></tr>
<tr><td>Probabilidad</td><td>Límite al que tienden las frecuencias relativas.
Si los sucesos elementales son equiprobables entonces:
p = casos favorables / casos posibles.</td><td>P(5) = 1/6.
P(sacar múltiplo de 3) = 2/6</td></tr>
<tr><td>Asignación de probabilidades</td><td>Suceso contrario: p(X) + p(noX) = 1.
Sucesos dependientes: p(A y B) = p(A) · p(B/A).
Sucesos compatibles: P(A o B) = p(A) + p(B) – p(A y B).</td><td>P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6.
P(5 o múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6
P sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 =2/36</td></tr>
</table>

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Estadística



1. En una clase se mira el color de los ojos de cada alumno y alumna y se obtiene lo siguiente:

N := negro; A := azul y V := verde.

N, N, A, V, N, V, A, N, A, N, V, A, A, N, N, N, V, A, N, N, A, N, V, N, N, A, N, A, N, N.

Haz una tabla de frecuencias absolutas, representa los valores en un diagrama de sectores y calcula la moda.

2. Las notas de un conjunto de alumnos de 4º son:

2, 10, 7, 8, 1, 0, 3, 5, 6, 9, 2, 4, 1, 6, 9, 10, 5, 6, 7, 8, 3, 1, 0, 1, 5, 9, 10, 9, 8, 7.

a) Haz una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.
b) Calcula la media, la mediana y la moda.
c) Calcula la desviación típica y los cuartiles.

3. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.
b) Calcula la media, la mediana y la moda.

4. Se han lanzado cuatro monedas 100 veces y anotado el número de veces que ha salido cara. Los resultados están reflejados en la tabla siguiente:

Número de caras	0	1	2	3	4
Número de veces	7	25	36	26	6

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.
b) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas acumuladas, un diagrama de líneas de frecuencias relativas y un diagrama de sectores de frecuencias absolutas.
c) Calcula la media y la desviación típica.
d) Calcula la mediana y los cuartiles.

5. Para conocer la distribución de un cierto país de las personas según su edad se ha recogido una muestra de diez mil personas y los valores obtenidos vienen reflejados en la tabla siguiente:

Edades	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65,100)
Número de personas	900	1000	900	1500	1300	1200	1300	900	1000

a) Utiliza las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

b) Representa un histograma de frecuencias absolutas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales. *Recuerda:* El área de los rectángulos debe ser proporcional a las frecuencias.
c) Calcula la media y la desviación típica.
d) Calcula la mediana y los cuartiles de forma gráfica usando un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

6. Con los datos del problema anterior calcula el intervalo [media – desviación típica, media + desviación típica]. ¿Cuántas personas están en dicho intervalo? ¿Qué porcentaje? Calcula también el intervalo [media – 2*desviación típica, media + 2*desviación típica] y [media – 3*desviación típica, media + 3*desviación típica]. Si la distribución fuera normal habría en el primer intervalo un 68 % de la muestra, en el segundo un 95 % y en el tercero más de un 99’7 %. Compara tus resultados con éstos.

7. Con los mismos datos calcula el intervalo intercuartil, e indica cuántas personas están en dicho intervalo y qué porcentaje.

8. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 200 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	40	30	20	40	50	20

a) Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.
b) Representa un histograma de frecuencias relativas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales.
c) Calcula la media y la desviación típica.
d) Calcula la mediana y los cuartiles de forma gráfica usando un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

9. Dos fabricantes de baterías de coches ofrecen su producto a una fábrica al mismo precio. La fábrica quiere elegir la mejor. Para ello escoge una muestra de 60 baterías de cada marca y obtiene de cada una los meses que ha funcionado sin estropearse. Obtiene la siguiente tabla:

Vida de la batería en meses	20	22	24	26	28	30	32
Marca A	2	7	13	16	12	8	2
Marca B	1	4	17	20	15	3	0

¿Qué marca crees que elegirá?

Para tomar la decisión, calcula la media, la moda y la mediana para cada marca.

Si aún no te decides, calcula el recorrido, la desviación típica, el intervalo [m – s, m + s] y el intervalo intercuartil.

10. Haz un trabajo. Pasa una encuesta a tus compañeros y compañeras de clase. Hazles una pregunta con datos numéricos, como por ejemplo, cuánto mide su mano, qué número de zapato calzan, el número de libros que lee en un

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

mes, el número de horas que ve la televisión a la semana, dinero que gasta al mes en comprar música… Representa los datos obtenidos en una tabla. Y haz un estudio completo. Puedes utilizar el ordenador:

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.
b) Dibuja un diagrama de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.
c) Calcula la media, la mediana y la moda
d) Calcula la varianza y la desviación típica
e) Calcula los cuartiles y el intervalo intercuartil.
f) Reflexiona sobre los resultados y escribe un informe.

Probabilidad

11. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

12. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

13. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

14. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

15. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

16. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

17. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

18. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

19. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso “Salga cara y un número par”. B al suceso “Salga cruz y un número primo” y C al suceso “salga un número primo”. Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

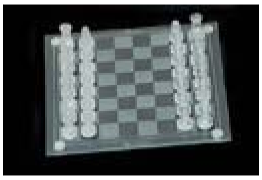
20. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

21. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

22. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.



23. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

24. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

25. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

26. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

27. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

28. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

29. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

30. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

31. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

32. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

Con los datos siguientes, 1, 5, 2, 8, 9, 4, 7, 7, 5, 7, calcula:

1. La media:

a) 5 b) 5’5 c) 6 d) 7

2. La mediana:

a) 5 b) 5’5 c) 6 d) 7

3. La moda:

a) 5 b) 5’5 c) 6 d) 7

4. La desviación típica:

a) 2 b) 2,27 c) 2,46 d) 2,65

5. El intervalo intercuartil

a) 3 b) 2,75 c) 4 d) 2

6. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

7. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

8. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

9. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

10. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) P(A) + P(noA) = 1

b) P(A y B) = P(A) · P(B)

c) P(A o B) = P(A) + P(B)

Autores: Javier Rodrigo y María Molero
Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF