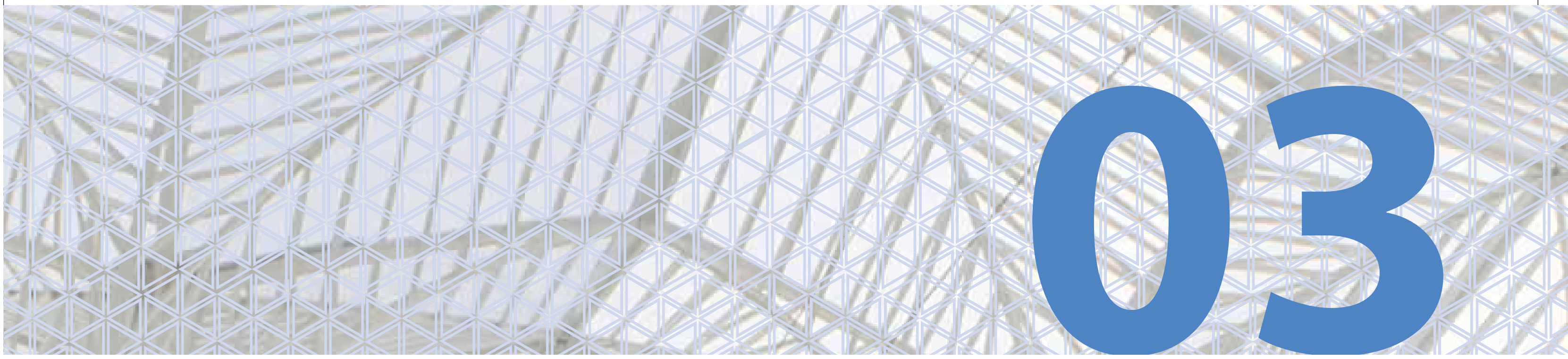


03

Polinomios y fracciones algebraicas

En esta Unidad aprenderás a:

- **Trabajar con expresiones polinómicas.**
- **Factorizar polinomios.**
- **Operar con fracciones algebraicas.**
- **Descomponer una fracción algebraica en fracciones simples.**
- **Trabajar con fracciones algebraicas con raíces.**

3.1 Expresiones algebraicas

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras ligados por operaciones.
A las letras se les llama **parte literal** de la expresión y suelen designar magnitudes variables.
Los números reciben el nombre de **coeficientes**.

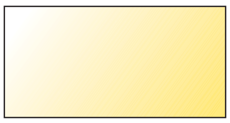


Fig. 3.1.

Algunos ejemplos son:

a) La expresión $P = 2a + 2b$ puede servir para designar de forma genérica el perímetro de un rectángulo de lados a y b. Para un valor de P determinado, digamos $P = 100$, la expresión será $100 = 2a + 2b$.

b) La expresión $D = 10\,000 - 2p$ puede dar la demanda de un producto en función de su precio p. Esta relación permite determinar la demanda para cada valor de p.

c) La fórmula $v = \dfrac{e}{t}$ expresa a velocidad de un objeto en función del espacio y el tiempo.

d) En física, la posición x de un móvil se expresa mediante una fórmula del tipo $x = f(t)$, donde t indica el tiempo transcurrido. Así, $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$ da la posición de un móvil que parte del punto x_0 a una velocidad inicial v_0 y está sujeto a una aceleración constante a.
Si se fijan $x_0 = 0$, $v_0 = 20$ m/s y $a = 9{,}8$ m/s^2, la expresión queda: $x = 20t + 4{,}9t^2$

e) La expresión $P(x) = 2x^5 - 4x^3 + 5x - 6$ es un polinomio de grado 5 en la indeterminada x.

f) A la expresión $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$ se le llama fracción algebraica.

g) $x^3 - 2\,x^2 + 1 = 0$ es una expresión algebraica que recibe el nombre de ecuación.

En el **CD** y en el **CEO (centro de enseñanza on-line)** creados para este proyecto podrás encontrar el siguiente material adicional:
Enlaces, bibliografía y actividades interactivas (polinomios y fracciones algebraicas).

A. Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que resulta cuando se sustituyen las letras por números.

Por ejemplo:

a) El valor numérico de $P(x) = 2x5^5 - 4x^3 + 5x - 6$ para $x = 2$ es: $P(2) = 64 - 32 + 10 - 6 = 36$.
Análogamente, $P(-2) = -48$; y $P(0) = -6$.

b) En la expresión de la demanda, $D = 10\,000 - 2p$, el valor numérico para $p = 100$ € es $D = 9\,800$. Este número indica que la demanda de un determinado producto será de 9 800 unidades cuando se vende a 100 €.

c) Si $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$, los valores numéricos para $x = -1$ y $x = 2$ son: $F(-1) = \dfrac{-1}{4}$ y $F(2) = 1$.

d) Para $t = 10$ s, la expresión $x = 20t + 4{,}9t^2$ toma el valor $x = 690$ m. Este resultado indica que el móvil se ha desplazado 690 metros al cabo de 10 segundos.

e) Los valores de x que cumplen la expresión $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ reciben el nombre de soluciones. Para este caso, puedes comprobar que una de esas soluciones es $x = 1$.

3.2 Polinomios: operaciones con polinomios

Un **polinomio de grado *n***, en una variable x, es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \ (a_n \neq 0)$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números llamados **coeficientes**. Todos lo exponentes deben ser enteros positivos y el mayor de ellos, n en este caso, indica el grado del polinomio.
A cada uno de los sumandos se les llama *términos*. Por ejemplo el **término de grado 2** es a_2X^2.
El **término principal** es $a_n x^n$ a, el de mayor grado. El número a_0 se llama **término independiente**. Dos **términos** son **semejantes** cuando sólo difieren en los coeficientes: $a_n x^n$ y $b_n x^n$ son semejantes. En particular, $5x^3$ y $-17x^3$ son semejantes; por el contrario, $10x^2$ y $10x$ no lo son.

A. Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se agrupan, sumando o restando, los términos semejantes.
a) La suma de monomios semejantes es inmediata. Así: $4x^3 - 3x^3 + 6x^3 = (4 - 3 + 6)x^3 = 7x^3$
b) Para sumar polinomios hay que agrupar los monomios semejantes. Así:

$$(4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) + (6x^3 + 4x^2 - x + 5) =$$
$$= 4x^3 + 5x - 6 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 6x^3 + 4x^2 - x + 5 =$$
$$= (4x^3 - 3x^3 + 6x^3) + (2x^2 + 4x^2) + (5x - 7x - x) + (-6 + 5) =$$
$$= 7x^3 + 6x^2 - 3x - 1$$

B. Multiplicación de polinomios

Se utiliza la propiedad distributiva del producto y las propiedades de la potenciación.
Por ejemplo:
a) $3\cdot(4x^2 + 5x - 6) = 12x^2 + 15x - 18$
b) $(2x^2 + 5x - 6)\cdot(3x^2 - 2x + 3) = 6x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 15x^3 - 10x^2 + 15x - 18x^2 + 12x - 18$
$= 6x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 27x - 18$
c) $\left(\frac{2}{3}x^2 - 3x\right)\cdot\left(-2x^2 + \frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{5}x^4 + \frac{6}{12}x^2 + 6x^3 - \frac{9}{4}x = -\frac{4}{5}x^4 + 6x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

Ejemplo 1

Calcula, agrupando los términos semejantes, las siguientes expresiones:

a) $\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\cdot\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 4\right)$; b) $4x - (x-2)^2$; c) $(x^2 - 1)\cdot(x^2 + 1) - (2 - x^2)^2$

a) $\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)\cdot\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 4\right) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x - 4 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x - 4$
b) $4x - (x-2)^2 = 4x - (x^2 - 4x + 4) = -x^2 + 8x - 4$
c) $(x^2 - 1)\cdot(x^2 + 1) - (2 - x^2)^2 = x^4 - 1 - (4 - 4x^2 + x^4) - 4x^2 - 5$

Actividades

1> Halla: a) $(2x - 4)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right)$; b) $(x+3)^2 - (x-3)^2$; c) $(x-1)\cdot(x^2+2)^2 - (1+2x)^2$

R: a) $\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 12x - 20$; b) $12x$; c) $x^5 - x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5$

Más datos...

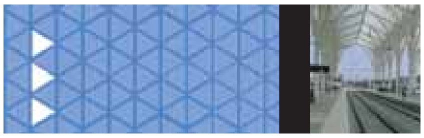
Los polinomios suelen darse ordenando los términos por grados, de mayor a menor, o al revés.
El coeficiente 1 no suele escribirse: $x^2 = 1\cdot x^2$; $-x^3 = -1\cdot x^3$.

OJO: $2x^5 - 4x^3$ no puede realizarse; debe dejarse así. Lo más que puede hacerse es sacar factor común:
$2x^5 - 4x^3 = 2x^3\ (x^2 - 2)$.

Más datos...

Para realizar algunos **productos notables** se emplean formulas. Así, por ejemplo:

- $(2 + 3x^2)^2 = 4 + 12x^2 + 9x^4$
- $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
- $\left(\sqrt{x-2} + 3\right)\left(\sqrt{x-2} - 3\right) =$
  $= \left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 3^2 = x - 2 - 9 = x - 11$



C. División de monomios

La **división de monomios** se realiza aplicando las leyes de la simplificación de fracciones y de las operaciones con potencias.

a) $\dfrac{12x^3}{2x}=\dfrac{12}{2}\cdot\dfrac{x^3}{x}=6x^2;$ b) $\dfrac{2x^2}{5x^3}=\dfrac{2}{5x};$ c) $\dfrac{3x^3}{-9x}=-\dfrac{1}{3}x^2$

D. División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio. Esto es una variante de la propiedad distributiva.

Así, por ejemplo:

a) $\dfrac{4x^3+x^2-8}{2x}=\dfrac{4x^3}{2x}+\dfrac{x^2}{2x}-\dfrac{8}{2x}=2x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{4}{x}$ b) $\dfrac{x^3-4x^2-x}{2x}=\dfrac{x(x^2-4x-1)}{2x}=\dfrac{x^2-4x+1}{2}$

E. División de polinomios

Para dividir polinomios hay que ordenarlos en grado decreciente. Recordamos el algoritmo con el siguiente ejemplo:

$$
\begin{array}{lr|ll}
 & 8x^4 \qquad\quad - 22x^2 + 27x - 18 & 2x^2+x & \\
\cline{3-3}
(2x^2+x)\cdot(4x^2) \longrightarrow & 8x^4 + 4x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & 4x^2-2x-10 & 8x^4/2x^2=4x^2 \\
\cline{2-2}
\textbf{Restamos} & -4x^3 - 22x^2 + 27x - 18 & & -4x^3/2x^2=-2x \\
(2x^2+x)\cdot(-2x) \longrightarrow & -4x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad & & -20x^2/2x^2=-10 \\
\cline{2-2}
\textbf{Restamos} & -20x^2 + 27x - 18 & & \\
(2x^2+x)\cdot(-10) \longrightarrow & -20x^2 - 10x \qquad\; & & \\
\cline{2-2}
\textbf{Restamos} & 37x - 18 & &
\end{array}
$$

El cociente de la división es $c(x)=4x^2-2x-10$. El resto, $r(x)=37x-18$, es de grado 1, que es menor que el grado del divisor.

Aplicación de la división

Como sabes, en toda división se cumple:

$$\text{Dividendo}=\text{divisor}\cdot\text{cociente}+\text{resto}\Leftrightarrow\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}}=\text{cociente}+\frac{\text{resto}}{\text{divisor}}.$$

En el caso de polinomios podemos escribir:

$$D(x)=d(x)\cdot c(x)+r(x)\Leftrightarrow\frac{D(x)}{d(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$$

La segunda igualdad se emplea con relativa frecuencia en Matemáticas, pues permite descomponer la primera fracción algebraica en suma de un polinomio y de otra fracción más sencilla que la inicial.

Por ejemplo:
En la división anterior se cumple que $(8x^4-22x^2+27x-18)=(2x^2+x)\cdot(4x^2-2x-10)+37x-18$.

Y también: $\dfrac{8x^4-22x^2+27x-18}{2x^2+x}=4x^2-2x-10+\dfrac{37x-18}{2x^2+x}$.

Errores frecuentes

Los errores en operaciones como la anterior son muy frecuentes. Te indicamos algunos:

Está MAL: $\dfrac{4x^3-2x}{x}=4x^3-2.$

Lo correcto es: $\dfrac{4x^3-2x}{x}=4x^2-2.$

Está MAL: $\dfrac{4x^3-2x+1}{x}=4x^2-2+1.$

Está BIEN: $\dfrac{4x^3-2x+1}{x}=4x^2-2+\dfrac{1}{x}.$

Comprueba

Comprueba que la división:
$(3x^5-7x^4+27x^2-22x):(x^2-3)$
da de cociente $c(x)=3x^3-7x^2+9x+6$ y de resto $r(x)=5x+18$.

F. Regla de Ruffini: división de $P(x)$ entre $(x - a)$

La *Regla de Ruffini* permite dividir rápidamente cualquier polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - a$.

Para aplicar la regla, los coeficientes del dividendo se colocan ordenados, de mayor a menor grado, incluido el término independiente. Si faltase alguno de ellos, se pone un 0.

La recordamos con un ejemplo.

a) Para dividir $(2x^3 - 3x) : (x - 2)$ se procede así:
Coeficientes del dividendo
Valor de a en $x - a$
Coeficientes del cociente

	2	0	−3	0	
2		4	8	10	
	2	4	5	10	← Resto

El cociente de la división es: $c(x) = 2x^2 + 4x + 5$. El resto, $r = 10$.

b) Análogamente, para realizar la siguiente división $(x^3 - 2x - 1):(x + 1)$ se disponen los números así:

	1	0	−2	−1
−1		−1	1	1
	1	−1	−1	0

El cociente de la división es $c(x) = x^2 - x - 1$. El resto, $r = 0$.
En este caso, el dividendo es múltiplo del divisor. Esto es:
$(x^3 - 2x - 1) = (x + 1)(x^2 - x - 1)$.

También se dice que $(x + 1)$ es un factor de $(x^3 - 2x - 1)$.

G. Divisibilidad de polinomios

Un **polinomio $D(x)$ es divisible** por otro, $d(x)$, cuando la división $D(x):d(x)$ es exacta. Es decir, el resto vale 0.

En este caso, se cumple que $D(x) = d(x) \cdot c(x)$. Por tanto, $D(x)$ puede escribirse como producto de dos factores, $d(x)$ y $c(x)$, de grado más pequeño. *A* $d(x)$ y $c(x)$ se les llama así: **factores** de $D(x)$.

Se dice que un **polinomio es irreducible** cuando no es divisible por otro polinomio de grado más pequeño.

Veamos algunos ejemplos:

a) El polinomio $P(x) = x^2 + 4x$ puede escribirse así: $P(x) = x(x + 4)$. Los factores de $P(x)$ son x y $x + 4$.

b) El polinomio $P(x) = x^2 + 1$ es irreducible. También son irreducibles los polinomios: $P(x) = x$, $P(x) = x + 4$ y $P(x) = 2x - 3$.
Todos los polinomios de primer grado son irreducibles.

c) Para determinar un polinomio que tenga por factores $x - 3$ y $x + 4$ basta con multiplicarlos. Obtendríamos $Q(x) = (x - 3)(x + 4) = x^2 + x - 12$.

d) Como con los números naturales, también puede hablarse de factores comunes a dos o más polinomios, de máximo común divisor y de mínimo común múltiplo. Así, los polinomios

$P(x) = x(x + 4)$ y $Q(x) = (x - 3)(x + 4)$ tienen un factor común, $x + 4$.

El m.c.d. $(P(x), Q(x)) = x + 4$.

El m.c.m. $(P(x), Q(x)) = x(x + 4)(x - 3)$

@

Que el divisor sea de la forma $x - a$ significa que se trata de un binomio de primer grado con coeficiente unidad: el coeficiente y el exponente de la x del divisor debe ser 1.

Para conocer algo de Paolo Ruffini busca en: http://www.divulgamat.net/weborriak/historia/MateOspetsuak/Ruffini.asp

En el **CD** y en el **CEO (centro de enseñanza on-line)** creados para este proyecto podrás encontrar actividades interactivas con polinomios y fracciones algebraicas.

!

Más datos...

El procedimiento para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos polinomios es similar al utilizado para números.

> **!** ***Más datos...***
>
> El polinomio $(x^2 - 2x)$ no está factorizado, pues puede escribirse como:
> $$(x^2 - 2x) = x \cdot (x - 2).$$
> El polinomio $(x^2 + 4)$ no puede factorizarse: es irreducible.

> **!**
>
> En páginas anteriores hemos visto:
>
> *a)* Para $P(x) = 2x^3 - 3x$ y para $x = 2$, se tiene que $P(2) = 10$.
> Observa que coincide con el resto de la división $(2x^3 - 3x) : (x - 2)$.
>
> *b)* El valor numérico de $P(x) = x^3 - 2x - 1$ para $x = -1$ es $P(-1) = 0$. También coincide con el resto de la división.
> $(x^3 - 2x - 1) : (x + 1)$
> En este caso, $x = -1$ es una raíz del polinomio.

> **!** ***Más datos...***
>
> Para demostrar una equivalencia, por ejemplo que $[A] \Leftrightarrow [B]$, hay que demostrar que si se cumple A entonces se cumple B; y que si se cumple B entonces se cumple A. Esto es, que $[A] \Rightarrow [B]$ y que $[B] \Rightarrow [A]$.

3.3 Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de factores irreducibles. El concepto es análogo al de descomposición de un número en factores primos. Por ejemplo, el número 462 puede descomponerse en factores así: $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Los *teoremas del resto* y *del factor* ayudan a descubrir los factores de un polinomio.

A. Teorema del resto

> El **teorema del resto** dice lo siguiente: El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$, esto es $P(a)$, es igual al resto de la división $P(x) : (x - a)$.

Demostración:
Si al dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ el cociente es $c(x)$ y el resto r (en este caso, el resto es un número), entonces: $P(x) = (x - a) \cdot c(x) + r$.
Dando a x el valor a, se tiene: $P(a) = (x - a) \cdot c(a) + r = 0 + r$.

Por ejemplo, dado $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$, su valor numérico para $x = -2$ es: $P(-2) = -6$.
Si dividimos por Ruffini $P(x) : (x + 2)$ se tiene:

	1	−2	−3	4
−2		−2	8	−10
	1	−4	5	−6

El resto es -6, que coincide con $P(-2)$.

B. Teorema del factor

> El **teorema del factor** dice: $(x - a)$ es un factor del polinomio $P(x) \Leftrightarrow x = a$ es una raíz de $P(x)$. (Esto es, $P(a) = 0$.)

Demostración:

- Si $(x - a)$ es un factor del polinomio $P(x) \Rightarrow P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, esto es, la división es exacta. En consecuencia, el resto es 0. Luego, por el teorema del resto, $P(a) = 0$. Por tanto, $x = a$ es una raíz de $P(x)$.
- Si $x = a$ es una raíz de $P(x) \Rightarrow P(a) = 0$, y, por lo mismo (por el teorema del resto), la división $P(x) : (x - a)$ es exacta. Por tanto, $(x - a)$ es un factor de $P(x)$.

Las **raíces de un polinomio** son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.
Si sabemos que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $P(x)$, entonces el polinomio es de la forma:
$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, siendo c una constante.

Por ejemplo:
Un polinomio de tercer grado cuyas raíces son $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$ es:
$P(x) = (x + 1)\ (x - 2)\ (x - 3) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.
También puede ser $Q(x) = -\ 5(x + 1)(x - 2)(x - 3)$. Hay infinitos: basta multiplicar por una constante diferente.
Las raíces de $P(x) = x^3 - 4x$ son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$. Por tanto, $P(x) = x(x - 2)(x + 2)$.

> **Resumiendo:**
> $x = a$ es una **raíz** de $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a)$ es un **factor** de $P(x) \Leftrightarrow$
> $\Leftrightarrow P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, siendo $Q(x)$ de un grado menor que $P(x)$.

C. Esquema para factorizar un polinomio

El teorema del factor nos permite escribir un polinomio como producto de factores de menor grado. Para conseguirlo puede seguirse el siguiente esquema:

1. Se saca factor común x, si se puede.
2. Se buscan las raíces del factor de mayor grado utilizando los métodos de resolución de ecuaciones. Para cada raíz, $x = a$, se tiene el factor $x - a$.
3. Se divide por el factor $x - a$ para obtener factores de menor grado, y por tanto, más cómodos a la hora de buscar las demás raíces.
4. Conviene saber que un polinomio tiene tantas raíces como indica su grado. Esas raíces pueden ser simples, múltiples (repetidas) o complejas. En este último caso no se hallan. En consecuencia, un polinomio de grado n tiene un máximo de n factores irreducibles.

Por ejemplo:

a) Si $P(x) = x^3 - 4x$, se puede sacar factor común x ($x = 0$ es una raíz).
Luego: $P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$.
Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación
$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2; x = 2$.
Por tanto, $P(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$.

b) Para $P(x) = x^3 + 4x$, se tiene que $P(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$.
Como en este caso la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, no es posible hacer una descomponiendo más simple.

> ***Más datos...***
>
> Las raíces o soluciones de una ecuación polinómica de grado superior a dos pueden calcularse, cuando son enteras, por tanto, pues son divisores del término independiente.

> ***Más datos...***
>
> En la próxima unidad estudiaremos con detalle la resolución de ecuaciones. Aquí no plantearemos situaciones difíciles, pues utilizaremos sólo lo imprescindible para asimilar el concepto de factorización.

Ejemplo 2

Descompón en factores los polinomios:
a) $P(x) = x^2 - 3x - 4$ b) $P(x) = 2x^2 + 8x + 8$ c) $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$.

a) Las soluciones de $x^2 - 3x - 4 = 0$ son $x = -1$ y $x = 4$. En consecuencia: $P(x) = x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$
b) $P(x) = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x^2 + 4x + 4)$
Como la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$ tiene una única solución doble, $x = -2$, se tendrá: $P(x) = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x + 2)^2$
c) $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$, es un polinomio de tercer grado. No se puede sacar factor común x.
Buscamos alguna raíz entera. Si existe debe ser uno de los divisores de 6, que es el término independiente. Estos divisores son: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6.
Probamos con -1.
Sustituyendo: $P(-1) = -2 - 10 - 14 - 6 \neq 0 \Rightarrow -1$ no es raíz $\Rightarrow x + 1$ no es factor.
Probamos con 1 $\rightarrow P(1) = 2 - 10 + 14 - 6 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $P(x) \Rightarrow (x - 1)$ es un factor $\Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - 1)$.
Se divide por Ruffini y se tiene: $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = (x - 1)(2x^2 - 8x + 6) = 2(x - 1)(x^2 - 4x + 3)$
Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación: $x^2 - 4x + 3 = 0$. Sus soluciones son $x = 1$ y $x = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)$ y $(x - 3)$ son los factores.
En consecuencia: $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 2(x - 1)(x - 1)(x - 3) = 2(x - 1)^2 (x - 3)$.
En este caso, la solución $x = 1$ es doble, pues el factor $(x - 1)$ se repite dos veces.

Actividades

2> Descompón en factores los siguientes polinomios:
a) $P(x) = x^2 + 4x - 21$;   b) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$;   c) $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + x$

a) $(x - 3)(x + 7)$;   b) $x(x + 1)(x - 3)$;   c) $6x(x - 1)(x - 1/2)(x + 1/3)$

3.4 Fracciones algebraicas

! Nota:

Puede ser conveniente, como con las fracciones ordinarias, hallar el m.c.m. de los denominadores; ello simplifica los cálculos.

Las **fracciones algebraicas** son aquellas en las que el numerador y el denominador son polinomios. Se operan del mismo modo que las fracciones ordinarias. Son frecuentes los errores de signos y los errores en el uso incorrecto de paréntesis.

A. Suma

La suma de fracciones algebraicas se hace igual que la suma de fracciones numéricas. Por tanto:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)\cdot D(x) \pm C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}; \qquad \frac{A(x)}{B(x)} \pm C(x) = \frac{A(x) \pm C(x)\cdot B(x)}{B(x)}$$

Así, por ejemplo:

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{1-2x^2}{2x+3} = \frac{x^2(2x+3)+(1-2x^2)(x+1)}{(x+1)(2x+3)} = \frac{2x^3+3x^2+x+1-2x^3-2x^2}{(x+1)(2x+3)} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)(2x+3)}$$

Ejemplo 3

Halla las siguientes sumas y restas de fracciones:

a) $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x}{x^2-1}$; b) $\dfrac{2x^2-4}{x+1} - 2x$

a) El mínimo común múltiplo de los denominadores es x^2-1, pues: $(x+1)\cdot(x-1) = x^2-1$.

Por tanto: $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x^2(x-1)}{x^2-1} - \dfrac{x+1}{x^2-1} + \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ (1)

b) $\dfrac{2x^2-4}{x+1} - 2x = \dfrac{2x^2-4-2x(x+1)}{x+1} = \dfrac{2x^2-4-2x^2-2x}{x+1} = -\dfrac{2x+4}{x+1}$

Actividades

3> Halla las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{1-x}{x+2} - \dfrac{2x-1}{x-2} + \dfrac{2x}{x^2-4}$ b) $x-2-\dfrac{x-1}{x^2+1}$ c) $\dfrac{2x^2-4}{x+1} - \dfrac{2x}{x+3}$

a) $\dfrac{-3x^2+2x}{x^2-4}$; b) $\dfrac{x^3-2x^2-1}{x^2+1}$ c) $\dfrac{2x^3+4x^2-6x-12}{x^2+4x+3}$

B. Producto y división

El producto y la división de fracciones algebraicas se hace igual que con fracciones numéricas.

Por tanto: $\dfrac{A(x)}{B(x)} \cdot \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}$; $\dfrac{A(x)}{B(x)} : \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$

Por ejemplo:

a) $\dfrac{2x-2}{x^2+1} \cdot \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{(2x-2)x^2}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{2x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1}$ (2)

b) $\dfrac{x^2-9}{2x+1} : \dfrac{x+3}{3-x} = \dfrac{(x^2-9)\cdot(3-x)}{(2x+1)(x+3)} = \dfrac{(x+3)(x-3)(3-x)}{(2x+1)(x+3)} = -\dfrac{(x-3)^2}{2x+1}$

Ejemplo 4

Halla las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{1-2x}{x-2}$; b) $\frac{x^2}{x-5}:\frac{2x}{x^2-25}$

a) $\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{1-2x}{x-2}=\frac{x^2(1-2x)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x^2-2x^3}{x^2-x-2}$ b) $\frac{x^2}{x-5}:\frac{2x}{x^2-25}=\frac{x^2(x^2-25)}{2x(x-5)}=\frac{x(x-5)(x+5)}{2(x-5)}=\frac{x^2+5x}{2}$

Actividades

4> Halla las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-1}{x-3}\cdot\frac{x+3}{5}$ b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3x-2}{5x}$ c) $\frac{2x-1}{\frac{x^2-3}{2x+1}}$ d) $\frac{x^2+3}{2}:\frac{x+3}{6}$

a) $\frac{x^3+3x^2-x-3}{5x-15}$ b) $\frac{6x-4}{15x}$ c) $\frac{4x^2-1}{x^2-3}$ d) $\frac{3(x^2+3)}{x+3}$

Errores frecuentes

Está MAL:
$\frac{2x^5-x^3}{x^4}=\frac{2x-x^3}{1}$;
sigue MAL:
$\frac{2x^5-x^3}{x^4}=\frac{2x^5-1}{x}$
Está BIEN:
$\frac{2x^5-x^3}{x^4}=\frac{x^3(2x^2-1)}{x^4}=\frac{2x^2-1}{x}$

C. Simplificación de fracciones algebraicas

La *simplificación de fracciones* algebraicas es objeto de frecuentes errores, pero se simplifican igual que las fracciones ordinarias: dividiendo el numerador y el denominador por factores comunes. La clave está en el factor común. Para simplificar al máximo habrá que factorizar los polinomios numerador y denominador.
Por ejemplo, las expresiones (1) y (2) obtenidas antes se deberían haber simplificado. Así:

(1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{x+1}$. (2) $\frac{2x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{2(x-1)x^2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{2x^2}{x^2+1}$.

Ejemplo 5

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^4-4x^2}{2x^3}$; b) $\frac{x^3+3x}{x+3}$; c) $\frac{(x-1)(x+1)^2-(x^2-x)\cdot(x+1)}{2x^2-2}$

a) $\frac{2x^4-4x^2}{2x^3}=\frac{2x^2(x^2-2)}{2x\cdot x^2}=\frac{x^2-2}{x}$ b) $\frac{x^3+3x}{x+3}$ es irreducible.

c) $\frac{(x-1)(x+1)^2-(x^2-x)\cdot(x+1)}{2x^2-2}=\frac{(x-1)(x+1)^2-x(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)(x+1)\left[(x+1)-x\right]}{2(x-1)(x+1)}=\frac{x+1-x}{2}=\frac{1}{2}$

Actividades

5> Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{4-4x^2+4x^4}{1-x}$; b) $\frac{2x^3-6x+4}{2x+4}$; c) $\frac{2x(x-3)^2-2x^2(x-3)}{(x-3)^4}$

R: a) Irreducible; b) $(x-1)^2$; c) $\frac{-6x}{(x-3)^3}$

3.5 Descomposición de una fracción racional en fracciones simples

Cuando el denominador de una fracción algebraica puede descomponerse en factores, la fracción se puede escribir como suma o diferencia de otras fracciones más sencillas. Este proceso se conoce con el nombre de **descomposición en fracciones** simples. Estudiaremos los casos más fáciles y frecuentes. En concreto, la fracción $F(x)=\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$.

Caso 1: El denominador es un polinomio de 2º grado con dos raíces reales simples. Esto es, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones distintas, $x=x_1$, $x=x_2$.
La descomposición que se hace es:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{a(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)},$$

los valores de A y B, que son números, se determinan por el llamado *método de identificación de coeficientes*. Lo vemos con un ejemplo:

$$F(x)=\frac{2x+3}{x^2+x-2}.$$

Como las soluciones de $x^2+x-2=0$ son $x=1$ y $x=-2$, la descomposición que se hace es:

$$\frac{2x+3}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

La fracción dada y la obtenida al sumar las dos fracciones simples son iguales. Como sus denominadores son iguales, también deben serlo sus numeradores; en consecuencia:
$2x+3=A(x+2)+B(x-1)$
Si en esta igualdad damos a x dos valores se obtiene un sistema que nos permite calcular A y B. Los valores más cómodos son $x=1$ y $x=2$ (las raíces halladas). Se tiene:
si $x=1$: $5=3A \Rightarrow A=5/3$ si $x=-2$: $-1=-3B \Rightarrow B=1/3$

Por tanto: $\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}=\dfrac{5/3}{x-1}+\dfrac{1/3}{x+2}$

Más datos...

Si transformamos el segundo miembro de la igualdad:
$2x+3=A(x+2)+B(x-1) \Leftrightarrow$
$2x+3=(A+B)x+(2A-B)$ e igualamos los coeficientes semejantes, se obtiene el sistema
$\begin{cases}2=A+B\\3=2A-B\end{cases}$
cuya solución es la misma:
$A=5/3$, $B=1/3$

Caso 2: El denominador es un polinomio de 2º grado con una raíz real doble. Esto es, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene una solución doble: $x=x_1$.
La descomposición que se hace es:

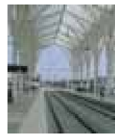
$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{a(x-x_1)^2}+\frac{B}{(x-x_1)}.$$

Los valores de A y B, que son números, se determinan como en el ejemplo anterior.
Por ejemplo, para descomponer la fracción algebraica $F(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-6x+9}$.
Como la ecuación $x^2-6x+9=0$ tiene la solución doble $x=3$, la descomposición que se hace es: $\dfrac{3x-5}{x^2-6x+9}=\dfrac{A}{(x-3)^2}+\dfrac{B}{x-3}=\dfrac{A+B(x-3)}{(x-3)^2}$

Como antes, la fracción dada y la obtenida al sumar las dos fracciones simples son iguales. En consecuencia: $3x-5=A+B(x-3)$
Si en esta igualdad damos a x dos valores se obtiene un sistema que nos permite calcular A y B. Los valores más cómodos son $x=3$ y $x=0$ (uno de ellos es la raíz del denominador).
Si en esta igualdad damos a x dos valores se obtiene un sistema que nos permite calcular A y B. Los valores más cómodos son $x = 3$ y $x = 0$ (uno de ellos es la raíz del denominador). Se tiene:
si $x = 3$: $4 = A \Rightarrow A = 4$
si $x = 0$: $-5 = A - 3B \Rightarrow B = 3$
Por tanto: $\dfrac{3x-5}{x^2-6x+9}=\dfrac{4}{(x-3)^2}+\dfrac{3}{x-3}$

Más datos...

Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene raíces reales, la fracción $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ no se puede descomponer.



3.6 Expresiones algebraicas con raíces

Para operar con estas expresiones se siguen los métodos ya estudiados con radicales, pudiendo plantearse la necesidad de extraer o introducir factores dentro de la raíz o la conveniencia de la racionalización de la expresión en cuestión. Veamos algunos ejemplos.

a) Dada la expresión $E(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+1}$, podemos plantearnos hallar su valor numérico para $x=4$ y $x=9$, obteniéndose:

$$E(4)=\frac{4-\sqrt{4}}{4+1}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5}\ ;\ E(9)=\frac{9-\sqrt{9}}{9+1}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

b) Si $F(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$, las operaciones $E(x)+F(x)$ o $E(x)\cdot F(x)$ valdrían:

$$E(x)+F(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x+1}+\frac{2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})+(2-\sqrt{x})(x+1)}{(x+1)(x+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{x^2-(\sqrt{x})^2+2x-x\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{(x+1)(x+\sqrt{x})}=\frac{x^2+x-x\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{(x+1)(x+\sqrt{x})}$$

$$E(x)\cdot F(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x+1}\cdot\frac{2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\frac{(x-\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}{(x+1)(x+\sqrt{x})}=\frac{2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+x}{x^2+x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{3x-(x+2)\sqrt{x}}{x^2+x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}$$

Ejemplo 6

Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$; b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$;

a) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{-1-x+2\sqrt{x}}{x-1}$

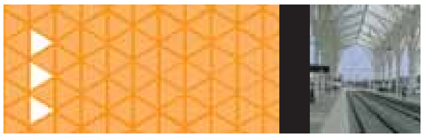
b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}=\dfrac{x+\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{1}=x+\sqrt{x^2-x}$

Actividades

6> Expresa como una sola raíz:

a) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$; b) $\dfrac{x}{2\sqrt{x}}$; c) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$; d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

R: a) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$; b $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$; c) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}$; d) $\sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{x}}$



Problemas resueltos

Tipo I: Operaciones con polinomios

1> Calcula, simplificando:

$$4\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(\frac{x}{2}+3\right)-\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2(x+2)$$

R: $4\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(\frac{x}{2}+3\right)-\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2(x+2)=$

$$=4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-3^2\right]-\left[\left(\frac{3}{4}x\right)^2-2\cdot\frac{3}{4}x\cdot 1+1^2\right](x+2)=$$

$$=4\left(\frac{x^2}{4}-9\right)-\left(\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{2}x+1\right)\cdot(x+2)=$$

$$=x^2-36-\left(\frac{9}{16}x^3+\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}x^2-3x+x+2\right)=$$

$$=x^2-36-\frac{9}{16}x^3-\frac{9}{8}x^2+\frac{3}{2}x^2+3x-x-2=$$

$$=-\frac{9}{16}x^3+\frac{11}{8}x^2+2x-38$$

2> Divide $3x^3+x+5-2x^2$ entre $2x+3$.

R: Ordenamos los términos del dividendo. El proceso es el siguiente:

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -2x^2 & +x & +5 & 2x+3 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & -\frac{9}{2}x^2 & & & \frac{3}{2}x^2-\frac{13}{4}x+\frac{43}{8} \\ \cline{1-2}
 & -\frac{13}{2}x^2 & +x & & \\
 & +\frac{13}{2}x^2 & +\frac{39}{4}x & & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{43}{4}x & +5 & \\
 & & -\frac{43}{4}x & -\frac{129}{8} & \\ \cline{3-4}
 & & & -\frac{89}{8} &
\end{array}$$

Cociente: $\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{4}x+\frac{43}{8}$. Resto: $-\frac{89}{8}$.

Puedes comprobar que:
$(3x^3-2x^2+x+5)=$

$$=(2x+3)\cdot\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{4}x+\frac{43}{8}\right)+\left(-\frac{89}{8}\right).$$

Tipo II: Regla de Ruffini. Teoremas del resto y del factor

3> El resto de la división de x^3+px+2 entre $x-3$ vale 2. ¿Cuánto vale p? ¿Cuál es el cociente?

R: Dividiendo se tiene:

	1	0	p	2
3		3	9	$3p+27$
	1	3	$p+9$	$3p+29$

Como el resto es $3p+29=2 \Rightarrow p=-9$.
El cociente será: $c(x)=x^2+3x$.

4> Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $x=2$, y que $P(4)=22$.

R: Sea $P(x)=x^2+bx+c$ el polinomio buscado.
Sabemos que $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$, siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2+bx+c=0$.
Una de las raíces es conocida, $x=2$, por tanto: $P(x)=(x-2)(x-x_2)$
Como $P(4)=22 \Rightarrow P(4)=(4-2)(4-x_2)=22 \Rightarrow 2(4-x_2)=22 \Rightarrow 8-2x_2=22 \Rightarrow 2x_2=-14 \Rightarrow x_2=-7$.
Por tanto, $P(x)=(x-2)(x+7)=x^2+5x-14$.

5> Halla la expresión de todos los polinomios de segundo grado cuyas raíces sean 2 y -3. Determina aquel cuyo valor numérico para $x=1$ es -8.

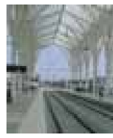
R: Si $x=2$ y $x=-3$ son raíces, entonces $(x-2)$ y $(x+3)$ son factores del polinomio. Como se desean de 2º grado, los polinomios serán:

$$P(x)=a(x-2)(x+3)=a(x^2+x-6).$$

Hay infinitos polinomios; uno para cada valor de $a\neq 0$.
Si $P(1)=-8 \Rightarrow -4a=-8 \Rightarrow a=2$.
El polinomio pedido es: $P(x)=2x^2+2x-12$

6> Factoriza los siguientes polinomios:
a) $P(x)=x^3-4x^2+3x$;
b) $Q(x)=2x^3-28x^2+98x$; c) $R(x)=x^4+4x^2$

R: a) Sacando factor común x, se tiene:
$P(x)=x^3-4x^2+3x=x(x^2-4x+3)=$
$=x(x-1)(x-3)$
Pues las soluciones de la ecuación $x^2-4x+3=0$ son $x=1$ y $x=3$.
b) Sacando factor común $2x$,
$Q(x)=2x^3-28x^2+98x=2x(x^2-14x+49)$.



Se observa que $x^2 - 14x + 49$ es el producto notable $(x-7)^2$.
Luego, $Q(x) = 2x^3 - 28x^2 + 98x = 2x(x-7)^2$

c) $R(x) = x^4 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4)$.
No es posible seguir descomponiendo, pues el factor $x^2 + 4$ es irreducible.

Tipo III: Fracciones algebraicas

7> Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{d^2-36}{12-2d}$; b) $\dfrac{x^2(x-1)-x(x^2-1)}{x^2(x-1)^2}$

R: a) Factorizando numerador y denominador queda:

$$\frac{d^2-36}{12-2d} = \frac{(d+6)\cdot(d-6)}{2(6-d)} =$$

$$= \frac{(d+6)\cdot(d-6)}{-2(-6+d)} = \frac{(d+6)\cdot(d-6)}{-2(d-6)} = -\frac{d+6}{2}$$

b) En ambos miembros de la fracción está el factor $x(x-1)$, luego:

$$\frac{x^2(x-1)-x(x^2-1)}{x^2(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x(x-1)(x-(x+1))}{x^2(x-1)^2} = \frac{x-(x+1)}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}.$$

8> Halla:

a) $\dfrac{2x+3}{x-1} - \dfrac{3-x^2}{2x+1} + 4x$; b) $\dfrac{\dfrac{3x-1}{x-1}}{\dfrac{x+1}{2-x}}$;

R: a) Se multiplican el numerador y el denominador de cada fracción por los denominadores de las demás; el denominador de la tercera *fracción* es 1.

$$\frac{2x+3}{x-1} - \frac{3-x^2}{2x+1} + 4x =$$

$$= \frac{(2x+3)(2x+1)}{(x-1)(2x+1)} - \frac{(3-x^2)(x-1)}{(x-1)(2x+1)} + \frac{4x(x-1)(2x+1)}{(x-1)(2x+1)} =$$

$$= \frac{4x^2+2x+6x+3-(3x-3-x^3+x^2)+8x^3-4x^2-4x}{(x-1)(2x+1)} =$$

$$= \frac{9x^3-x^2+x+6}{(x-1)(2x+1)}$$

b) $$\frac{\dfrac{3x-1}{x-1}}{\dfrac{x+1}{2-x}} = \frac{(3x-1)(2-x)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+7x-2}{x^2-1}$$

9> Descompón en fracciones simples:

a) $\dfrac{2}{1-x^2}$; b) $\dfrac{2x}{x^2+x-2}$

R: a) El denominador se puede escribir como $(1-x)\,(1+x)$, luego:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} =$$

$$= \frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2}$$

Como la primera y la última fracción son iguales, se tendrá que: $2 = A(1+x) + B(1-x)$.
Luego:
si $x = 1$: $2 = 2A \Rightarrow A = 1$
si $x = -1$: $2 = 2B \Rightarrow B = 1$
Con esto:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

b) Las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = 2$, luego puede escribirse:

$$\frac{2x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Igualando los numeradores:
$2x = A(x+2) + B(x-1)$
si $x = 1{:}\ 2 = 3A \Rightarrow A = 2/3$
si $x = -2{:}\ -4 = -3B \Rightarrow B = 4/3$

Por tanto: $\dfrac{2x}{x^2+x-2} = \dfrac{2/3}{x-1} + \dfrac{4/3}{x+2}$.

Tipo IV: Operaciones con otras expresiones algebraicas

10> Si $P(x) = x^2 - 3x + 1$, halla la expresión correspondiente a:

a) $P(x/2)$; b) $P(2x)$; c) $P(x+1)$

R: a) $P(x/2) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - 3\dfrac{x}{2} + 1 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3}{2}x + 1$

b) $P(2x) = (2x)^2 - 3\cdot 2x + 1 = 4x^2 - 6x + 1$

c) $P(x+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 1 =$
$= x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 1 = x^2 - x - 1$

11> Calcula: a) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+2}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}$ b) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

R: a) $$\frac{x-\sqrt{x}}{x+2}\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{x^2-(\sqrt{x})^2}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2-x}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x+2}$$

b) $$\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} =$$
$$= \frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} =$$
$$= \frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{x+1-(x-1)} = \frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2}$$

Tipo V. Aplicaciones

12> Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadrado en cada esquina y se doblará. Halla, en función del lado x del cuadrado cortado, la función que da el volumen de la caja resultante.

R: En esquema, lo que se pretende hacer es lo que indicamos en la Fig. 3.2.

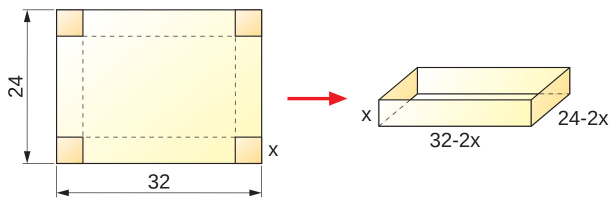


Fig. 3.2.

La caja es un prisma rectangular cuyo volumen = área de la base por la altura. Si se corta un cuadrado de lado x, la base será un rectángulo de dimensiones $32-2x$ y $24-2x$; su altura valdrá x. Por tanto, el volumen de la caja obtenida será:
$V = (32-2x)(24-2x)\,x \Rightarrow V = 4x^3 - 112x^2 + 768x$

13> El perímetro de una ventana simétrica, como la que se muestra en la figura adjunta, vale 6 m. Determina la expresión que da su superficie en función del lado x. (El ángulo superior es recto.) ¿Cuánto valdrá esa superficie si $x = 2$ m?

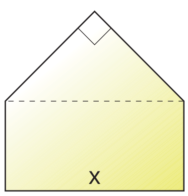


Fig. 3.3.

R: Hallamos en primer lugar el valor del lado inclinado. Si vale z, por Pitágoras, se tendrá:

$$z^2 + z^2 = x^2 \Rightarrow z = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Si el lado vertical vale y, como el perímetro es 6, se cumplirá:

$$x + 2y + 2z = 6 \Rightarrow x + 2y + \frac{2x}{\sqrt{2}} = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{6 - x(1+\sqrt{2})}{2}$$

El área de la ventana es la suma del área de la sección rectangular más la de la sección triangular:

$$A = xy + \frac{x^2}{2} = x\cdot\frac{6 - x(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = \frac{6x - \sqrt{2}x^2}{2}$$

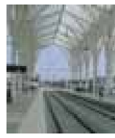
Se obtiene la expresión polinómica

$$A(x) = 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$$

Para $x = 2$, $A(2) = 3\cdot 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2^2 = 6 - 2\sqrt{2}$

14> Dado $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$, halla su valor numérico para $x = 0$, $x = 1$ y $x = -2$. Descompón $P(x)$ en factores.

R: $P(0) = 2\cdot 0^2 - 3\cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$
$P(1) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$
$P(-2) = 2\cdot(-2)^2 - 3\cdot(-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$
Como $P(1) = 0$, 1 es raíz de $P(x)$ y $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Dividiendo $P(x)$ entre $x - 1$ se obtiene $2x - 1$, que es el otro factor. Luego:
$P(x) = (x-1)(2x-1)$
También podría escribirse así:
$P(x) = 2(x-1)(x-1/2)$
(Para ello se saca factor común 2 en el segundo factor; así sabemos que la otra raíz es 1/2.)



Problemas propuestos

Tipo I: Operaciones con polinomios

1> Calcula:

a) $(31x - 6x^2 + 5x^3) - (12x^3 - 6x^2 + x)$
b) $(8x^4 - 9x^3 + 1) - (2x + 3x^3 - 5x^4)$
c) $\left(2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3\right) - \left(\frac{3}{4}x^2 + 5x - \frac{1}{3}\right)$

R: a) $-7x^3 + 30x$; b) $13x^4 - 12x^3 - 2x + 1$;
c) $2x^3 - \frac{5}{4}x^2 - 5x + \frac{10}{3}$

2> Calcula:

a) $(4x + 5) - (2 + x)^2 + (2x)^2$
b) $(2 - 3x)^2 - 5[(3x - 1)\cdot(3x + 1) - 2x]$
c) $3x^6 \cdot 4x^5 - (-2x^5)(-14x^3) + (2x^5)(-3x^4) - x^6(-4x^2)$

R: a) $1 + 3x^2$ b) $-36x^2 - 2x + 9$ c) $12x^{11} - 6x^9 - 24x^8$

3> Halla:

a) $(x - 6)^2$ b) $(4 + x^2)^2$
c) $(3x + 1)^2$ d) $(2x - 1)^2$
e) $\left(\frac{1}{2}x + 5\right)\left(\frac{1}{2}x - 5\right)$ f) $(4x - 1)(4x + 1)$

R: a) $x^2 - 12x + 36$ d) $4x^2 - 4x + 1$
b) $16 + 8x^2 + x^4$ e) $\frac{1}{4}x^2 - 25$
c) $9x^2 + 6x + 1$ f) $16x^2 - 1$

4> Haz las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $(5x^2 + 3x - 5)(7x^3 - 6x + 3)$
b) $\left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right)\left(x^2 - 5x - 14\right)$
c) $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{4}{5}\right)$

R: a) $x^5 + 21x^4 - 65x^3 - 3x^2 + 39x - 15$;
b) $x^4 - \frac{21}{4}x^3 - \frac{105}{8}x^2 + \frac{43}{8}x + \frac{21}{4}$;
c) $-x^5 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{47}{60}x^3 - \frac{11}{20}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$

5> Divide:

a) $(5x^4 - 14 + 5x + x^3) : (3 - x^2)$
b) $(20x^3 + 12x^4 + 29 - 39x^2 - 28x) : (4x^2 - 5)$
c) $(2x^3 - 3x + 2):(2x - 1)$

R: a) $C(x) = -5x^2 - x - 15$; $R(x) = 8x + 31$;
b) $3x^2 + 5x - 6$; $-3x - 1$ c) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$; $\frac{3}{4}$

Tipo II: Regla de Ruffini. Teoremas del resto y del factorización

6> Utiliza la regla de Ruffini para hacer las siguientes divisiones:

a) $(x^7 - x)$ entre $(x + 2)$; b) $(x^5 + x - 2x^3):(x - 1)$
c) $(2x^3 - x^5 - 3x)$; d) $(3x^4 - 6):(x + 1)$

R: a) $C(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 63$;
$R(x) = -126$;
b) $x^4 + x^3 - x^2 - x$; 0;
c) $-x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 21x - 66$; -198;
d) $3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$; -3

7> Descompón en factores el polinomio
$P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$,
sabiendo que $x = 1$ es una de sus raíces.

R: $2(x - 1)^2 (x - 3)$

8> Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $x = -5$ y que $P(2) = -7$.

R: $x^2 + 2x - 15$

9> Escribe un polinomio de cuarto grado que tenga por raíces:

a) 1, 2, 3 y 4. b) 1, 2 y 3 doble.
c) 1 y 2, las dos dobles.

R: a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$
b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)^2$ c) $(x - 1)^2(x - 2)^2$

10> Halla el polinomio de segundo grado sabiendo que tiene por raíces $x = 1$ y $x = -6$ y que $P(0) = -12$.

R: $2x^2 + 10x - 12$

11> Factoriza las siguientes expresiones polinómicas:

a) $3x^2 + 14x - 5$ b) $4x^5 + 2x^4 - 2x^3$
c) $x^3 + 5x^2 + 8x$

R: a) $3(x - 1/3)(x + 5)$ b) $4x^3(x - 1/2)(x + 1)$
c) $x(x^2 + 5x + 8)$

12> Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = -5x^2 - x$;
b) $P(x) = 4x^4 + 10x^2$
c) $P(x) = 10x^3 - 250x$
d) $P(x) = 8x^4 + 80x^3 + 200x^2$

R: a) $-x\,(5x+1)$ b) $2x^2\,(2x^2+5)$
c) $10x(x+5)(x-5)$ d) $8x^2(x+5)^2$

13> Halla el valor de b y factoriza $P(x) = x^3 + bx^2 - 12\,x$, sabiendo que $x = -2$ es una de sus raíces.

R: -4

Tipo III: Fracciones algebraicas

14> Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{21x^2}{7x-14x^2}$ b) $\dfrac{4-x}{3x-12}$ c) $\dfrac{3x^2-4x}{x^3}$

d) $\dfrac{4x-8}{2x}$ e) $\dfrac{3x^2-12}{x+2}$ f) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$

R: a) $\dfrac{3x}{1-2x}$ b) $-\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{3x^2-4}{x^2}$

d) $\dfrac{2(x-2)}{x}$ e) $3(x-2)$ f) $\dfrac{x-1}{x+1}$

15> Simplifica:

a) $\dfrac{x^2+6x-7}{2x-2}$ b) $\dfrac{4x^2-40x+100}{4x^2-100}$

c) $\dfrac{3x^3-6x^2}{3x^4+24x^3-60x^2}$

R: a) $\dfrac{x+7}{2}$; b) $\dfrac{x-5}{x+5}$; c) $\dfrac{1}{x+10}$

16> Halla, simplificando el resultado:

a) $x-1+\dfrac{2}{x+1}$ b) $2x-\dfrac{x-1}{x^2}$

c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{8}{x^4}$ d) $\dfrac{3x-2}{x}-\dfrac{3x-3}{x+2}$

e) $\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2+x}-\dfrac{3}{x+1}$ f) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2+1$

g) $\dfrac{x+1}{x+5}+\dfrac{8x}{x^2-25}$ h) $\dfrac{x}{3x+9}+\dfrac{x-2}{3x-9}-\dfrac{2x^2}{3x^2-27}$

R: a) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ b) $\dfrac{2x^3-x+1}{x^2}$

c) $\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^4}$ d) $\dfrac{7x-4}{x(x+2)}$

e) $\dfrac{5}{x^2}$ f) $\dfrac{2x^2+2}{(x+1)^2}$

g) $\dfrac{x-1}{x-5}$ h) $\dfrac{-2}{3(x-3)}$

17> Calcula el resultado, factorizando si conviene:

a) $\dfrac{2x-1}{3x-3}-\dfrac{2x^2-6x+4}{3x^2-6x+3}$

b) $\dfrac{3x^2-12x+12}{x^2-5x+6}:\dfrac{6x^3-54x}{x^3-6x^2+9x}$

R: a) $\dfrac{1}{x-1}$ b) $\dfrac{x-2}{2\left(x+3\right)}$

18> Halla, simplificando el resultado:

a) $(2x-1):\dfrac{3x}{x+1}$ b) $\dfrac{x+3}{\dfrac{3x-2}{x+1}}$

c) $\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x+1}{x+2}$; d) $\dfrac{x+3}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-9}$

e) $\dfrac{3x^4-15x^3+18x^2}{x^2-8x+15}:\dfrac{3x^2+15x}{x^2-25}$

f) $\dfrac{5x^2-4}{x^2-4}+\dfrac{x-2}{5x+15}\cdot\dfrac{5x^2+20x+15}{x+2}$

R: a) $\dfrac{2x^2+x-1}{3x}$ b) $\dfrac{x^2+4x+3}{3x-2}$ c) $\dfrac{x^2+x-2}{x}$;

d) $\dfrac{x-2}{x-3}$; e) x^2-2x; f) $\dfrac{x^2}{x-2}$

19> Transforma, sin hacer la división, la expresión $\dfrac{D(x)}{d(x)}$ en su equivalente de la forma $C(x)+\dfrac{r(x)}{d(x)}$, en los casos:

a) $\dfrac{2x^2-3x+5}{x}$ b) $\dfrac{x^2+3x-5}{x^2}$

c) $\dfrac{x^2-3x+5}{x-3}$ d) $\dfrac{x^2}{x-1}$

R: a) $2x-3+\dfrac{5}{x}$ b) $1+\dfrac{3x-5}{x^2}$

c) $x+\dfrac{5}{x-3}$ d) $x+1+\dfrac{1}{x-1}$

20> Descompón en fracciones simples:

a) $\dfrac{1}{x^2-4}$ b) $\dfrac{2x-1}{x^2+3x-4}$ c) $\dfrac{3x+2}{x^2+3x}$

R: a) $\dfrac{1/4}{x-2}-\dfrac{1/4}{x+2}$ b) $\dfrac{1/5}{x-1}+\dfrac{9/5}{x+4}$ c) $\dfrac{2/3}{x}+\dfrac{7/3}{x+3}$

Tipo IV: Operaciones con otras expresiones algebraicas

21> Sea $P(x) = x^2 - 1$ y $Q(x) = -x^2 - x + 2$, halla:

a) $P(x) - 2Q(x)$ b) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ c) $\dfrac{Q(x)-2}{P(x)}$

R: a) $3x^2 + 2x - 5$; b) $-\dfrac{x+1}{x+2}$; c) $\dfrac{x}{1-x}$

22> Para los mismos $P(x)$ y $Q(x)$, halla:
a) $(P(x) + Q(x))^2$; b) $(P(x))^2 + x^2\,Q(x)$;
c) $(P(x) - Q(x)(P(x) + Q(x))$

R: a) $(x-1)^2$ b) $1 - x^3$ c) $-2x^3 + x^2 + 4x - 3$

23> Halla:

a) $(2x - \sqrt{x})^2$; b) $2(4x - 3\sqrt{x}) - (\sqrt{x} - 3)^2$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1-\sqrt{x}}{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$

R: a) $4x^2 - 4x\sqrt{x} + x$ b) $7x - 9$ c) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2}$

24> Dadas las expresiones $E(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+1}$ y $F(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}$, halla:
a) $E(1)$, $F(1)$, $E(4)$ y $F(4)$ b) $E(x) \cdot F(x)$

R: a) 0; no definido; 2/5; 2 b) $\dfrac{x}{x+1}$

25> Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ c) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

R: a) $\dfrac{(x+1)\sqrt{x}}{x}$ d) $\dfrac{-x-1+2\sqrt{x}}{x-1}$ f) $x + \sqrt{x(x-1)}$

Tipo V: Aplicaciones

26> Expresa algebraicamente:
a) Cuatro veces x menos su décima parte.
b) El producto de dos números consecutivos vale 462.
c) El precio de una entrada de cine es x más el 6 por 100 de IVA aplicado sobre x.
d) El cuadrado de la diferencia entre x e y, más el doble del cuadrado de x.

R: a) $4x - \dfrac{x}{10}$ b) $x \cdot (x + 1) = 462$

c) $P = x + \dfrac{6}{100}x$; d) $(x - y)^2 + 2x^2$

27> La altura de un cohete viene dada por la expresión $h(t) = 50t - 5t^2$, donde t viene dado en segundos y $h(t)$ en metros.
a) ¿Qué altura alcanza el cohete al cabo de 1, 2 y 5 s?
b) ¿Y al cabo de 10 s? ¿Cómo interpretas este último resultado?

R: a) 45; 80; 125; b) 0; cae.

28> El coste total, en euros, de la producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la expresión $C(x) = 100\sqrt{x} + 1000$. Halla:
a) El coste de producir 16, 100, y 400 unidades. ¿A cuánto sale la unidad en cada caso?
b) Determina la expresión que da el coste por unidad cuando se fabrican x unidades.

R: a) 87,5; 20; 7,5 €; b) $c(x) = \dfrac{100\sqrt{x} + 1000}{x}$

29> Halla la expresión que da la superficie de un triángulo isósceles de perímetro 8 cm en función de la base x. Calcula el valor de esa área cuando $x = 3$.

R: $A(x) = \sqrt{4x^2 - x^3}$; 3 cm^2

30> Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo enlosado de 1,5 m de ancho. Si la piscina es 10 m más larga que ancha, halla:
a) La expresión que da el área del rectángulo que delimita la piscina.
b) La expresión que da el área del pasillo enlosado.

R: a) $x^2 + 16x + 39$; b) $6x + 39$

32> Expresa (en función del primero de ellos) el producto de tres números positivos cuya suma es 60 y tal que el segundo sea doble del primero.

R: $-6x^3 + 120x^2$

33> En la pared lateral de una buhardilla, se quiere poner un panel rectangular como el que se muestra en la Figura 3.4. Determina la superficie de dicho panel en función del lado x de la base.

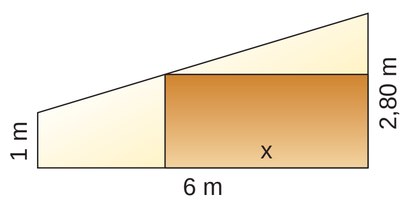


Fig. 3.4.

R: $2{,}8x - 0{,}3x^2$

10 cuestiones básicas

Las 10 cuestiones que siguen debes contestarlas, aproximadamente, en 10 minutos. Si fallas más de dos, te recomendamos que estudies un poco más.

1> Expresa algebraicamente:
a) La mitad de x más el cuadrado de y.
b) La velocidad es el espacio partido por el tiempo.
c) La mitad de la suma de B y b, por h. (Área de un trapecio.)

2> Halla: $(2x-3)^2-(2x+4)\cdot(2x-4)=4x^2-12x+9-(4x^2-9)=-12x+18$.

3> Simplifica: $\dfrac{2x^2+6x}{2x}=\dfrac{2x\left(x+3\right)}{2x}=x+3$.

4> Halla: $\left(\dfrac{2}{3}x+1\right)\cdot\left(-2x+\dfrac{1}{2}\right)$.

5> Halla el resto y el cociente de la división: $(x^3-2x+1):(x-3)$.

6> Calcula el valor numérico de $P(x)=2x^3-9x+2$ par $x=-1$ y $x=2$. ¿Puedes dar un factor de $P(x)$ de la forma $x-a$?

7> Sin resolver la ecuación de segundo grado asociada al polinomio $Q(x)=x^2+7x$, halla sus raíces.

8> La expresión $c(x)=\dfrac{10x+100\sqrt{x}+1000}{x}$ da el coste en euros por unidad fabricada de un determinado producto, cuando se fabrican x unidades de él. ¿A cuánto sale la unidad cuando se fabrican 10 000 unidades?

9> Halla la expresión que da la superficie de un triángulo equilátero en función del lado x.

10> Halla un polinomio de segundo grado que tenga por raíces $x=-1$ y $x=-2$.

R: **1.** *a)* $\dfrac{x}{2}+y^2$ *b)* $v=\dfrac{e}{t}$ *c)* $\dfrac{B+b}{2}\cdot h$ **2.** $-12x+25$ **3.** $x+3$ **4.** $-\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{1}{2}$ **5.** x^2+3x+7; 22 **6.** 9; 0; $(x-2)$ **7.** 0 y -7 **8.** 11,1 € **9.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ **10.** x^2+3x+2.

2 cuestiones para investigar

1> Algo de historia del Álgebra.
En la página web http://riie.com.es/?a=32226 puedes encontrar una breve historia de la evolución de la notación algebraica.
Si quieres ampliar un poco más entra en http://www.euclides.org/menu/articles/article7.htm#3.1.

2> Aplicando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de la división $(2x^3-4x^2+x-5):(2x-3)$.
En la página www.ing.unlp.edu.ar/decanato/ingreso/archivos/contenidos/17_EA_Division_polinomios_c.pdf puedes encontrar una generalización de la regla de Ruffini.