

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Racionalizar un denominador con raíces consiste en hallar una expresión equivalente que no tenga ninguna raíz en el denominador.

Caso 1

El denominador es un radical cuadrático.

Se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por la raíz cuadrada del denominador.

- 1) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{5}{3\sqrt{2}}$.

$$\frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{6}$$

- 2) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{15}{4\sqrt{3}}$.

$$\frac{15}{4\sqrt{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{4(\sqrt{3})^2} = \frac{15\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

- 3) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Observa que en este caso también podríamos haber procedido así,

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Caso 2

El denominador es un radical no cuadrático.

Se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por una raíz del mismo índice con las potencias de la misma base y de exponentes la diferencia entre el índice de la raíz y los exponentes de las potencias, es decir, se completa con los factores que le falten para que los exponentes igualen al índice de la raíz.

- 1) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{3}{2\sqrt[5]{7^2}}$.

$$\frac{3}{2\sqrt[5]{7^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{2\sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}} = \frac{3\sqrt[5]{7^3}}{2\sqrt[5]{7^5}} = \frac{3\sqrt[5]{7^3}}{2 \cdot 7} = \frac{3\sqrt[5]{7^3}}{14}$$

- 2) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{12}{\sqrt[7]{2^3}}$.

$$\frac{12}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{12 \cdot \sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3} \cdot \sqrt[7]{2^4}} = \frac{12\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{12\sqrt[7]{2^4}}{2} = 6\sqrt[7]{2^4}$$

- 3) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{a}{2\sqrt[5]{a^2b}}$.

$$\frac{a}{2\sqrt[5]{a^2b}} = \frac{a \cdot \sqrt[5]{a^3b^4}}{2\sqrt[5]{a^2b} \cdot \sqrt[5]{a^3b^4}} = \frac{a\sqrt[5]{a^3b^4}}{2\sqrt[5]{a^5b^5}} = \frac{a\sqrt[5]{a^3b^4}}{2ab} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^4}}{2b}$$

Caso 3

El denominador es un binomio irracional cuadrático.

$$a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$$

Para racionalizarlo utilizaremos uno de los productos notables.

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados, es decir, la suma por la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$$

A los binomios $p+q$ y $p-q$ se les llaman binomios conjugados.

Para racionalizar un denominador que sea un binomio irracional cuadrático, se multiplican el numerador y el denominador de la expresión por el binomio conjugado del denominador.

- 1) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{5+4\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}\frac{5+4\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}} &= \frac{(5+4\sqrt{2}) \cdot (2-3\sqrt{2})}{(2+3\sqrt{2}) \cdot (2-3\sqrt{2})} = \frac{10-15\sqrt{2}+8\sqrt{2}-12(\sqrt{2})^2}{2^2-(3\sqrt{2})^2} = \frac{10-15\sqrt{2}+8\sqrt{2}-24}{4-18} = \frac{-14-7\sqrt{2}}{-14} = \\ &= \frac{14+7\sqrt{2}}{14} = \frac{7(2+\sqrt{2})}{14} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Recuerda

$$12(\sqrt{2})^2 = 12 \cdot 2 = 24 \quad \text{y} \quad (3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

Hemos terminado multiplicando por -1 el numerador y el denominador de la expresión resultante para dejar el denominador positivo y simplificando la expresión entre 7.

- 2) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{5+\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}\frac{5+\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} &= \frac{(5+\sqrt{3}) \cdot (4+2\sqrt{3})}{(4-2\sqrt{3}) \cdot (4+2\sqrt{3})} = \frac{20+10\sqrt{3}+4\sqrt{3}+2(\sqrt{3})^2}{4^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{20+10\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6}{16-12} = \\ &= \frac{26+14\sqrt{3}}{4} = \frac{13+7\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

EJERCICIOS

Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones:

- a) $\frac{\sqrt{5}+18}{3\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{6}+18}{2\sqrt{3}}$ c) $\frac{9}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\frac{4\sqrt{5}-7}{3-\sqrt{5}}$ e) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$

Soluciones

- a) $\frac{\sqrt{10}+18\sqrt{2}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt[5]{3^4}$ d) $\frac{-1+5\sqrt{5}}{4}$ e) $\frac{-5-10\sqrt{6}}{23}$