EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1 Calcula el valor numérico pedido para las siguientes expresiones algebraicas.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 4}$; $x = 2$

b) $g(a, b) = 3a^2 + 5ab$; $a = -1$, $b = 4$

c) $h(x, y) = x(y - 3) + xy^2$; $x = 2$, $y = 0$

a) $f(2) = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2^2 + 4} = \dfrac{3 \cdot 4}{4 + 4} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

b) $g(-1, 4) = 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = 3 - 20 = -17$

c) $h(2, 0) = 2 \cdot (0 - 3) + 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot (-3) + 0 = -6$

2.2 Identifica los coeficientes y los grados parciales y total de los siguientes monomios.

a) $-3x^3yz^2$

b) ab^2c^4

c) $\dfrac{4x^2yz^2}{5}$

d) $-\dfrac{1}{2}p^4q^2r$

a) Monomio: $-3x^3yz^2$

Coeficiente: -3

Grado respecto a x: 3

Grado respecto a y: 1

Grado respecto a z: 2

Grado total: 6

b) Monomio: ab^2c^4

Coeficiente: 1

Grado respecto a a: 1

Grado respecto a b: 2

Grado respecto a c: 4

Grado total: 7

c) Monomio: $\dfrac{4x^2yz^2}{5}$

Coeficiente: $\dfrac{4}{5}$

Grado respecto a x: 2

Grado respecto a y: 1

Grado respecto a z: 2

Grado total: 5

d) Monomio: $-\dfrac{1}{2}p^4q^2r$

Coeficiente: $-\dfrac{1}{2}$

Grado respecto a p: 4

Grado respecto a q: 2

Grado respecto a r: 1

Grado total: 7

2.3 Escribe las expresiones algebraicas que corresponden al volumen de un cono y de una esfera.

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

$V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

2.4 Realiza las siguientes operaciones.

a) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x) + (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x)$

b) $(-2x^3 + x - 6) - (x^3 + 3x^2 + 2x - 7)$

a) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x) + (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x) = 5x^4 + x^3 - 7x$

b) $(-2x^3 + x - 6) - (x^3 + 3x^2 + 2x - 7) = -2x^3 + x - 6 - x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = -3x^3 - 3x^2 - x + 1$

2.5 **Efectúa estos productos de polinomios.**

a) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2) \cdot (x^3 + 3)$

b) $(-5x^3 - 6x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

c) $2x \cdot (5x^2 + 2x - 1) \cdot (-x^3 + 4)$

a) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2) \cdot (x^3 + 3) = x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 3x - 6 = x^7 - 2x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 3x - 6$

b) $(-5x^3 - 6x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 1) = -5x^5 + 10x^4 - 5x^3 - 6x^3 + 12x^2 - 6x + 3x^2 - 6x + 3 = -5x^5 + 10x^4 - 11x^3 + 15x^2 - 12x + 3$

c) $2x \cdot (5x^2 + 2x - 1) \cdot (-x^3 + 4) = (10x^3 + 4x^2 - 2x) \cdot (-x^3 + 4) = -10x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 40x^3 + 16x^2 - 8x$

2.6 **Calcula el cociente y el resto de la división $(2x^5 + 7x^4 + x^2 - 4x + 1) : (x^2 + 3x - 2)$ y comprueba que $D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 + 7x^4 \qquad\quad + x^2 - 4x + 1 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^5 - 6x^4 + 4x^3 & 2x^3 + x^2 + x \\ \cline{1-1}
\qquad x^4 + 4x^3 & \\
\quad -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad x^3 + 3x^2 & \\
\qquad - x^3 - 3x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -2x + 1 &
\end{array}$$

Cociente: $2x^3 + x^2 + x$

Resto: $-2x + 1$

$$d(x) \cdot C(x) + R(x) = (x^2 + 3x - 2) \cdot (2x^3 + x^2 + x) + (-2x + 1) = 2x^5 + x^4 + x^3 + 6x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 2x + 1 =$$
$$= 2x^5 + 7x^4 + x^2 - 4x + 1 = D(x)$$

2.7 **Dados los polinomios $P(x) = (3x^3 + 3x^2 - 1)$, $Q(x) = (2x^4 - 5x^2)$ y $R(x) = (-x^3 + x - 2)$, efectúa estas operaciones.**

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$

b) $P(x) + Q(x) \cdot R(x)$

c) $[Q(x)]^3$

d) $Q(x) : R(x)$

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = 3x^3 + 3x^2 - 1 - 2x^4 + 5x^2 - x^3 + x - 2 = -2x^4 + 2x^3 + 8x^2 + x - 3$

b) $P(x) + Q(x) \cdot R(x) = 3x^3 + 3x^2 - 1 - 2x^7 + 2x^5 - 4x^4 + 5x^5 - 5x^3 + 10x^2 = -2x^7 + 7x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 1$

c) $[Q(x)]^3 = (2x^4 - 5x^2) \cdot (2x^4 - 5x^2) \cdot (2x^4 - 5x^2) = (4x^8 - 10x^6 - 10x^6 + 25x^4) \cdot (2x^4 - 5x^2) =$
$= (4x^8 - 20x^6 + 25x^4) \cdot (2x^4 - 5x^2) = 8x^{12} - 20x^{10} - 40x^{10} + 100x^8 + 50x^8 - 125x^6 = 8x^{12} - 60x^{10} + 150x^8 - 125x^6$

d)
$$\begin{array}{l|l}
2x^4 - 5x^2 & -x^3 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^4 + 2x^2 - 4x & -2x \\ \cline{1-1}
\qquad -3x^2 - 4x &
\end{array}$$

2.8 **Resuelve las siguientes operaciones.**

a) $(m + 2n)^2$

b) $(-5 - 9b)^2$

c) $(2a - 3b)^2$

d) $\left(-4x + \frac{2}{3}y\right)^2$

e) $(-3x + y)^3$

f) $(4a + 5)^3$

a) $(m + 2n)^2 = m^2 + 4n^2 + 4mn$

b) $(-5 - 9b)^2 = 25 + 81b^2 + 90b$

c) $(2a - 3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 - 12ab$

d) $\left(-4x + \frac{2}{3}y\right)^2 = 16x^2 + \frac{4}{9}y^2 - \frac{16}{3}xy$

e) $(-3x + y)^3 = -27x^3 + y^3 + 27x^2y - 9xy^2$

f) $(4a + 5)^3 = 64a^3 + 125 + 240a^2 + 300a$

2.9 Descompón en factores estas expresiones.

a) $y^2 - 16$

b) $9z^2 + 6zy + y^2$

c) $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2$

d) $27x^3 + 8 + 54x^2 + 36x$

a) $y^2 - 16 = (y + 4) \cdot (y - 4)$

b) $9z^2 + 6zy + y^2 = (3z + y)^2$

c) $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2 = (3x + 2 + 3x - 2) \cdot (3x + 2 - 3x + 2) = 6x \cdot 4 = 24x$

d) $27x^3 + 8 + 54x^2 + 36x = (3x + 2)^3$

2.10 Completa en tu cuaderno estas expresiones para que correspondan al cuadrado de un binomio.

a) $a^2 + 4ab + \square$

b) $x^2 + \frac{2}{3}xy + \square$

c) $4x^2 - \square + 9$

d) $\square - 6zyx^3 + 9z^2$

a) $a^2 + 4ab + 4b^2$	Desarrollo de $(a + 2b)^2$
b) $x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$	Desarrollo de $\left(x + \frac{1}{3}y\right)^2$
c) $4x^2 - 12x + 9$	Desarrollo de $(2x - 3)^2$
d) $y^2x^6 - 6zyx^3 + 9z^2$	Desarrollo de $(yx^3 - 3z)^2$

2.11 Utiliza la fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ para calcular mentalmente las siguientes operaciones.

a) $15^2 - 5^2$

b) $55^2 - 45^2$

c) $125^2 - 25^2$

d) $700^2 - 300^2$

a) $15^2 - 5^2 = (15 + 5) \cdot (15 - 5) = 20 \cdot 10 = 200$

b) $55^2 - 45^2 = (55 + 45) \cdot (55 - 45) = 100 \cdot 10 = 1000$

c) $125^2 - 25^2 = (125 + 25) \cdot (125 - 25) = 150 \cdot 100 = 15\,000$

d) $700^2 - 300^2 = (700 + 300) \cdot (700 - 300) = 1000 \cdot 400 = 400\,000$

2.12 Realiza estas divisiones.

a) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 10) : (x - 3)$

b) $(x^4 - 2x^2 + 6x + 7) : (x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & -10 \\ 3 & & 3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 5 \end{array}$$

Cociente: x^2+5

Resto: 5

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -2 & 6 & 7 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 & -7 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 7 & 0 \end{array}$$

Cociente: x^3-x^2-x+7

Resto: 0

2.13 Utiliza la regla de Ruffini para hallar el número k que hay que añadir al polinomio $x^3 + 2x^2$ para que, al dividirlo entre $x + 4$, el resto sea 0.

El polinomio será de la forma $x^3 + 2x^2 + k$, procedemos a dividir para calcular el resto.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 0 & k \\ -4 & & -4 & 8 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 8 & k - 32 \end{array}$$

El resto, $k - 32$, tiene que ser 0; entonces:

$$k - 32 = 0 \Rightarrow k = 32$$

2.14 Calcula el valor de k que hace que el resto de la división de $x^3 + 2x + 6k$ entre $x - 2$ sea 0.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 2 & 6k \\ 2 & & 2 & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 6k + 12 \end{array}$$

El resto: $6k + 12$ tiene que ser 0; entonces:

$$6k + 12 = 0 \Rightarrow k = -2$$

2.15 Indica en notación ordinaria el dividendo, el divisor, el cociente y el resto de esta división.

$$\begin{array}{c|cccccc} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}$$

$D(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ $\qquad$ $c(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$d(x) = x - 1$ $\qquad$ $R = 2$

2.16 Resuelve esta división usando la regla de Ruffini.

$(x^3 - 2x^2 - 7x + 14) : (x - 2)$

¿Cuánto vale el resto? ¿Coincide con el valor numérico del dividendo para $x = 2$?

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -7 & 14 \\ 2 & & 2 & 0 & -14 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & 0 \end{array}$$

Resto: 0

$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 14 = 8 - 8 - 14 + 14 = 0$

Coinciden $P(2)$ y el resto.

2.17 Halla el resto de estas divisiones sin efectuarlas.

a) $(x^{25} - 3x^2 - 4) : (x - 1)$ $\qquad$ **b) $(x^{33} - 1) : (x + 1)$**

Vamos a utilizar el teorema del resto, calculando $P(1)$ en el primer polinomio y $P(-1)$ en el segundo:

a) $P(1) = 1^{25} - 3 \cdot 1^2 - 4 = 1 - 3 - 4 = -6$ $\qquad$ Resto $= -6$

b) $P(-1) = (-1)^{33} - 1 = -1 - 1 = -2$ $\qquad$ Resto $= -2$

2.18 Indica, sin realizar las divisiones, si estas afirmaciones son ciertas.

a) $(x - 1)$ es un factor de $(x^5 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2)$.

b) $(2x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2)$ es divisible entre $(x - 2)$.

a) Vamos a utilizar el teorema del factor. Calculamos $P(1)$:

$P(1) = 1^5 + 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2 = 1 + 1 + 4 + 6 + 2 = 14 \neq 0$

Por tanto, deducimos que $(x - 1)$ no es un factor de $(x^5 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2)$.

b) Calculamos P(2):

$P(2) = 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 32 - 32 + 4 - 6 + 2 = 0$, por lo que deducimos que $(2x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2)$ es divisible entre $(x - 2)$.

2.19 Si se divide el polinomio $3x^3 - 2x^2 + kx + 1$ entre $x - 1$, el resto es 2. ¿Cuánto vale k?

Según el teorema del resto, el resto será: $P(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + 1 = 3 - 2 + k + 1 = 2 + k$

Igualamos el resto a dos como indica el enunciado: $2 + k = 2 \Rightarrow k = 0$

2.20 Dado el polinomio $x^3 - 4x^2 - 5x + 8$:

a) ¿Cuántas raíces reales puede tener como máximo?

b) ¿Pueden ser $x = 1$ y $x = 3$ raíces del polinomio? Escribe el conjunto de todos los enteros que podrían ser raíz de este polinomio.

c) ¿Es $x = -2$ raíz del polinomio?

a) El polinomio tiene grado 3; por tanto, como máximo puede tener 3 raíces.

b) $x = 1$ podría ser raíz del polinomio, ya que 1 es divisor de 8.

$x = 3$ no podría ser raíz del polinomio, ya que 3 no es divisor de 8.

El conjunto de todos los enteros que podrían ser raíz de este polinomio será: ±1, ±2, ±4, ±8.

c) Calculamos $P(-2)$:

$P(-2) = (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 8 = -8 - 16 + 10 + 8 = -6 \neq 0$

Como $P(-2) \neq 0 \Rightarrow -2$ no es raíz del polinomio.

2.21 Indica cuáles de los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$.

$$\mathbf{0 \qquad 1 \qquad \frac{1}{2} \qquad 3 \qquad \frac{-1}{2}}$$

Calculamos $P(x)$ para estos números:

$P(0) = 2 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow 0$ no es raíz de este polinomio.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de este polinomio.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{2}{16} + \frac{5}{8} - \frac{5}{4} - \frac{5}{2} + 3 = \frac{2 + 10 - 20 - 40 + 48}{16} = 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)$ es raíz de este polinomio.

$P(3) = 2 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = 2 \cdot 81 + 5 \cdot 27 - 5 \cdot 9 - 15 + 3 = 162 + 135 - 45 - 15 + 3 = 240 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3$ no es raíz de este polinomio.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{2}{16} - \frac{5}{8} - \frac{5}{4} + \frac{5}{2} + 3 = \frac{2 - 10 - 20 + 40 + 48}{16} =$$

$= \frac{60}{16} = \frac{15}{4} \neq 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)$ no es raíz de este polinomio.

2.22 Calcula las raíces enteras de estos polinomios.

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$ **b) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$**

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$. Posibles raíces enteras: ±1, ±3. Probamos con cada una de ellas:

$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz.

$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow -1$ es raíz.

$P(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 3 - 3 = 48 \Rightarrow 3$ no es raíz.

$P(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 3 - 3 = 0 \Rightarrow -3$ es raíz.

Por tanto, las raíces enteras de este polinomio son 1, -1 y -3.

b) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$. Posibles raíces enteras: ±1, ±2, ±4. Probamos con cada una de ellas:

$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = -3 \Rightarrow 1$ no es raíz.

$P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 4 = -9 \Rightarrow -1$ no es raíz.

$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 2$ es raíz.

$P(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 4 = -24 \Rightarrow -2$ no es raíz.

$P(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 4 = 64 - 32 + 8 - 4 = 36 \Rightarrow 4$ no es raíz.

$P(-4) = (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 4 = -64 - 32 - 8 - 4 = -108 \Rightarrow -4$ no es raíz.

Por tanto, la única raíz entera de este polinomio es 2.

2.23 Factoriza estos polinomios sabiendo que todas sus raíces son divisores del término independiente.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $2x^2 - 12x + 18$

a) Las posibles raíces enteras serán los divisores de 2; es decir, ±1 y ±2.

$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de este polinomio.

$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow -1$ es raíz de este polinomio.

$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 12 \neq 0 \Rightarrow 2$ no es raíz de este polinomio.

$P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow -2$ es raíz de este polinomio.

Por tanto, las raíces de este polinomio son 1, -1 y -2, y la factorización correspondiente es:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

b) El polinomio es de grado 2; por tanto, resolvemos la ecuación: $2x^2 - 12x + 18 = 0$.

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4} = \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el coeficiente director de este polinomio es 2 y que 3 es raíz doble, la factorización será:

$$2x^2 - 12x + 18 = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x - 3) = 2 \cdot (x - 3)^2$$

2.24 Halla el valor numérico de $P(x) = x^2 - 7x + 10$ para $x = 1, 2, 3, 5$.

a) ¿Para cuáles de estos valores se anula?

b) Factoriza el polinomio $P(x)$.

$P(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$

$P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$

$P(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = -2$

$P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

a) El polinomio se anula en 2 y 5.

b) Como el polinomio es de grado dos y hemos encontrado dos números que lo anulan, ya podemos factorizarlo:

$P(x) = (x - 2) \cdot (x - 5)$

2.25 Descompón en factores estos polinomios.

a) $x^3 - x^2 - 2x$

b) $x^3 + x^2 - 8x - 12$

c) $x^3 - x^2 + 5x - 5$

d) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

a) Sacamos factor común: $P(x) = x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (x^2 - x - 2)$

Resolvemos la ecuación de segundo grado: $x^2 - x - 2 = 0$ $\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Por tanto: $P(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$

b) $P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

Utilizamos Ruffini, vamos probando con los divisores de 12 hasta que obtengamos resto 0:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -8 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$D(x) = d(x) \cdot c(x) \Rightarrow P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 4x + 4)$

Para factorizar el cociente utilizamos las identidades notables: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Por tanto, la factorización queda: $P(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)^2$.

c) $P(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$

Empezamos por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 5 & -5 \\ 1 & & 1 & 0 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 5)$

Ahora resolvemos la ecuación $x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Rightarrow$ No posee raíces reales.

Por tanto, la factorización resulta: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 5)$

d) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

Utilizamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -10 \\ -2 & & -2 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 5)$

Para factorizar el cociente utilizamos las identidades notables: $x^2 - 5 = \left(x + \sqrt{5}\right) \cdot \left(x - \sqrt{5}\right)$

Por tanto, la factorización queda: $P(x) = (x + 2) \cdot \left(x + \sqrt{5}\right) \cdot \left(x - \sqrt{5}\right)$

2.26 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2 - 25$

b) $x^3 - x^5$

c) $x^3 - x$

d) $x^2 - x^4$

Factorizaremos los polinomios extrayendo factor común cuando sea posible y utilizando las identidades notables:

a) $x^2 - 25 = (x + 5) \cdot (x - 5)$

b) $x^3 - x^5 = x^3 \cdot (1 - x^2) = x^3 \cdot (1 + x) \cdot (1 - x)$

c) $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

d) $x^2 - x^4 = x^2 \cdot (1 - x^2) = x^2 \cdot (1 + x) \cdot (1 - x)$

2.27 El polinomio $P(x)$ se ha factorizado y se ha obtenido la expresión $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6)$. ¿Para qué valores de x se anula este polinomio?

Para $x = 1$, $x = 2$ y $x = -6$ que son los valores que anulan cada uno de los factores.

2.28 ¿Qué valor debe tener m para que $(x + 3)$ sea un factor del polinomio $P(x) = x^3 - 2x + 3m$?

Para que $(x + 3)$ sea factor de $P(x)$, $P(-3)$ tiene que ser 0.

$P(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 3m = -27 + 6 + 3m$. Igualamos a 0: $-21 + 3m = 0 \Rightarrow m = 7$

2.29 Escribe cuatro polinomios que sean irreducibles.

Respuesta libre.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.30 Calcula los valores enteros de n que hacen que $\dfrac{3n^3 - 10n^2 - 23n}{n + 1}$ sea un número entero.

Hacemos la división, obteniendo:

$$\frac{3n^3 - 10n^2 - 23n}{n + 1} = 3n^2 - 13n - 10 + \frac{10}{n + 1}$$

Buscamos los valores de n para los que $n + 1$ es divisor de 10.

$n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$	$n + 1 = -1 \Rightarrow n = -2$
$n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$	$n + 1 = -2 \Rightarrow n = -3$
$n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4$	$n + 1 = -5 \Rightarrow n = -6$
$n + 1 = 10 \Rightarrow n = 9$	$n + 1 = -10 \Rightarrow n = -11$

2.31 ¿Para qué valores enteros de x se cumple que $\dfrac{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x + 2}{x - 2}$ es un entero positivo?

Hacemos la división, obteniendo:

$$\frac{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x + 2}{x - 2} = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x - 2}$$

A diferencia de los ejercicios anteriores, ahora nos dicen que el resultado debe ser entero y positivo. Por comodidad a la hora de sustituir, nos interesa descomponer totalmente el cociente:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x - 2} = (x^2 + 1)(x - 1)^2 + \frac{4}{x - 2}$$

La primera parte nunca puede ser negativa. Solo habrá que vigilar si para alguno de los valores que hacen que $\dfrac{4}{x - 2}$ sea entero el resultado total puede ser negativo.

Posibles valores de x:

$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$	$x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$
$x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$	$x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$
$x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$	$x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2$

Para $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$ y $x = -2$, el resultado total es positivo, luego son soluciones válidas.

Para $x = 1$ y $x = 0$, el total es negativo, por lo que no se cumple la condición pedida.

A C T I V I D A D E S

E J E R C I C I O S P A R A E N T R E N A R S E

Lenguaje algebraico. Operaciones con monomios

2.32 Expresa las siguientes cantidades en el lenguaje algebraico.

a) El espacio recorrido en un tiempo *t* por un móvil que lleva velocidad constante *v*.

b) El volumen de un cubo de arista *x*.

c) El volumen de un cilindro de radio de la base *r* y altura *h*.

d) El perímetro de un triángulo isósceles de lados iguales *x* y lado desigual *y*.

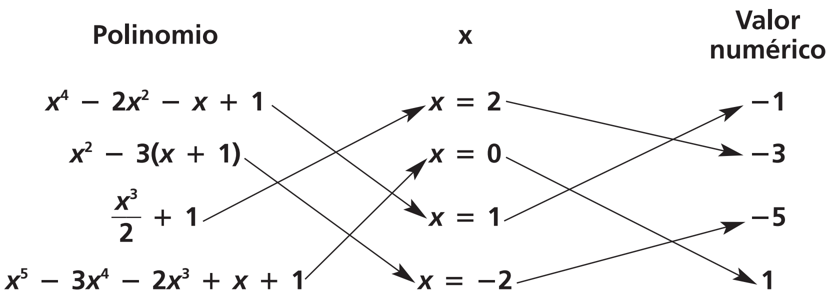
a) $E = v \cdot t$

b) $V = x^3$

c) $V = \pi r^2 h$

d) $p = 2x + y$

2.33 En estas columnas están, desordenados, cuatro polinomios y sus respectivos valores numéricos para ciertos valores de *x*.



Relaciona en tu cuaderno cada polinomio con su valor numérico para el valor de *x* correspondiente.

2.34 Dados los monomios $A = 6x^2$, $B = 3x^4$, $C = \frac{1}{2}x^4$ y $D = -2x$, realiza las siguientes operaciones.

a) $A + D$	**c) $A - B + C$**	**e) $B : C$**	**g) $A \cdot B \cdot C$**
b) $B - C$	**d) $A \cdot D$**	**f) $D \cdot B$**	**h) $A : D \cdot B$**

a) $A + D = 6x^2 + (-2x) = 6x^2 - 2x$

b) $B - C = 3x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{5}{2}x^4$

c) $A - B + C = 6x^2 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^4 = 6x^2 - \frac{5}{2}x^4$

d) $A \cdot D = 6x^2 \cdot (-2x) = -12x^3$

e) $B : C = 3x^4 : \frac{1}{2}x^4 = 6$

f) $D \cdot B = -2x \cdot 3x^4 = -6x^5$

g) $A \cdot B \cdot C = 6x^2 \cdot 3x^4 \cdot \frac{1}{2}x^4 = 9x^{10}$

h) $A : D \cdot B = 6x^2 : (-2x) \cdot 3x^4 = -3x \cdot 3x^4 = -9x^5$

2.35 Realiza las siguientes operaciones

a) $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2)$

b) $(x^3 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)$

c) $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x)$

d) $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2)$

a) $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2) = -6x^4 + 3x^3$

b) $(x^3 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x$

c) $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}$

d) $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

Operaciones con polinomios

2.36 **Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ y $R(x) = -4x^4 + x^2 - 4$, realiza las siguientes operaciones.**

a) $P(x) + Q(x)$

b) $Q(x) - R(x)$

c) $R(x) - Q(x) + P(x)$

d) $P(x) + Q(x) + R(x)$

a) $P(x) + Q(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 + 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2 = 2x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 3$

b) $Q(x) - R(x) = \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) - (-4x^4 + x^2 - 4) = 4x^4 + 3x^3 - \frac{2}{3}x + 6$

c) $R(x) - Q(x) + P(x) = -4x^4 + x^2 - 4 - \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$

$= -4x^4 + x^2 - 4 - 3x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - 2 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$

$= -4x^4 - 3x^3 + \frac{2}{3}x - 6 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = -2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{3}x - 5$

d) $P(x) + Q(x) + R(x) = \left(2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\right) + \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) + (-4x^4 + x^2 - 4) = -2x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - 1$

2.37 **Rellena en tu cuaderno cada recuadro con el coeficiente adecuado.**

a) $(2x^2 + \square x - 1) - (-3x^2 - 5x + \square) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(3x^4 - x + 2) - (\square x^4 + \square x + \square) = 4x^4 + 3x + 3$

c) $(5x^3 + \square x^2 + \square) + (\square x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

a) $(2x^2 + (-3)\,x - 1) - (-3x^2 - 5x + (-5)) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(3x^4 - x + 2) - ((-1)x^4 + (-4)\,x + (-1)) = 4x^4 + 3x + 3$

c) $(5x^3 + (-4)\,x^2 + (-1)) + ((-3)\,x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

2.38 **Realiza las siguientes operaciones con los polinomios**

$P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1$, $Q(x) = 3x^3 - 4x - 2$ y $R(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$ **b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$** **c) $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)]$**

¿Qué propiedad puedes aplicar para efectuarlas?

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot [(3x^3 - 4x - 2) + (4x^2 - 5x + 3)] = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot (3x^3 + 4x^2 - 9x + 1) =$

$= \frac{3}{2}x^7 + 2x^6 - \frac{9}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 6x^6 + 8x^5 - 18x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 4x^2 - 9x + 1 =$

$= \frac{3}{2}x^7 + 8x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9x + 1$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)] = (3x^3 - 4x - 2) \cdot \left[(4x^2 - 5x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right)\right] =$

$= (3x^3 - 4x - 2) \cdot (4x^2 - 5x + 3 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 1) =$

$= (3x^3 - 4x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2\right) =$

$= -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 12x^5 - 15x^4 + 6x^3 + 2x^5 + 8x^4 - 16x^3 + 20x^2 - 8x + x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 10x - 4 =$

$= -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 14x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 2x - 4$

c) $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)] = (4x^2 - 5x + 3) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) + (3x^3 - 4x - 2)\right] = (4x^2 - 5x + 3) \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 + 5x^3 - 4x - 1\right) =$

$= 2x^6 + 20x^5 - 16x^3 - 4x^2 - \frac{5}{2}x^5 - 25x^4 + 20x^2 + 5x + \frac{3}{2}x^4 + 15x^3 - 12x - 3 =$

$= 2x^6 + \frac{35}{2}x^5 - \frac{47}{2}x^4 - x^3 + 16x^2 - 7x - 3$

Podríamos haber utilizado la propiedad distributiva.

2.39 **Calcula estas potencias.**

a) $(x + y - 2z)^2$ **b)** $(3a - 2b + c)^2$

a) $(x + y - 2z)^2 = (x + y - 2z) \cdot (x + y - 2z) = x^2 + xy - 2zx + xy + y^2 - 2yz - 2xz - 2yz + 4z^2 =$
$= x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$

b) $(3a - 2b + c)^2 = (3a - 2b + c) \cdot (3a - 2b + c) = 9a^2 - 6ab + 3ac - 6ab + 4b^2 - 2bc + 3ac - 2bc + c^2 =$
$= 9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$

Identidades notables

2.40 **Efectúa estas operaciones.**

a) $(2x^2 - 3y)^2$

b) $(3x - 2y)^3$

c) $\left(3x^3 - \sqrt{x}\right)^2$

d) $\left(2x^4 + x^2\right)^2$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b)$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt)$

a) $(2x^2 - 3y)^2 = 4x^4 + 9y^2 - 12x^2y$

b) $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 8y^3 - 54x^2y + 36xy^2$

c) $\left(3x^3 - \sqrt{x}\right)^2 = 9x^6 + x - 6x^3\sqrt{x}$

d) $\left(2x^4 + x^2\right)^2 = 4x^8 + 4x^6 + x^4$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b) = 25a^2 - 9b^2$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt) = 4x^2y^2 - 16z^2t^2$

División de polinomios. Regla de Ruffini

2.41 **Realiza las siguientes divisiones de polinomios.**

a) $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$

b) $(-3x^4 + x^2 - 2x + 3) : (3x^2 - 2x + 1)$

c) $(x^6 - 2x^3 + 3x - 3) : (-2x^3 + x - 2)$

a)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -2x^2 & & -1 & x^2 + x + 2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & -6x^2 & -12x & & 6x - 8 \\ \cline{1-3}
 & -8x^2 & -12x & -1 & \\
 & 8x^2 & +8x & +16 & \\ \cline{2-4}
 & & -4x & +15 &
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
-3x^4 & & +x^2 & -2x & +3 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{6-6}
3x^4 & -2x^3 & +x^2 & & & -x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \\ \cline{1-3}
 & -2x^3 & +2x^2 & & & \\
 & 2x^3 & -\frac{4}{3}x^2 & +\frac{2}{3}x & & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{2}{3}x^2 & -\frac{4}{3}x & +3 & \\
 & & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{4}{9}x & -\frac{2}{9} & \\ \cline{3-5}
 & & & -\frac{8}{9}x & +\frac{25}{9} &
\end{array}
$$

c)
$$
\begin{array}{l|l}
x^6 \qquad\qquad -2x^3 + 3x - 3 & -2x^3 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-x^6 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 & -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ \cline{1-1}
\qquad \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 & \\
\qquad -\frac{1}{2}x^4 \qquad + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -3x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x & \\
\qquad\qquad 3x^3 \qquad - \frac{3}{2}x + 3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad \frac{1}{4}x^2 + x &
\end{array}
$$

2.42 Expresa las siguientes divisiones de la forma $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$.

a) $\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1}$

b) $\frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x + 3}$

c) $\frac{4x^2 - 1}{x^2 + 3}$

d) $\frac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

Resolvemos realizando las divisiones:

a) $\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1} = 3 + \frac{-9x + 4}{x^2 + 2x - 1}$

b) $\frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x + 3} = x - 1 + \frac{-3x + 1}{x^2 - x + 3}$

c) $\frac{4x^2 - 1}{x^2 + 3} = 4 + \frac{-13}{x^2 + 3}$

d) $\frac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x^3 + 2x - 1} = 2 + \frac{x^2 - 5x + 5}{x^3 + 2x - 1}$

2.43 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, e indica el cociente y el resto.

a) $(3x^4 - 2x^2 + x - 3) : (x + 1)$ b) $(x^5 - 2x^3 - x + 1) : (x - 1)$ c) $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$

a)
$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 0 & -2 & 1 & -3 \\
-1 & & -3 & 3 & -1 & 0 \\ \hline
 & 3 & -3 & 1 & 0 & -3
\end{array}
$$

Cociente: $3x^3 - 3x^2 + x$
Resto: -3

b)
$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
1 & & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline
 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1
\end{array}
$$

Cociente: $x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$
Resto: -1

c)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & 3 & -1 \\
-2 & & -4 & 10 & -26 \\ \hline
 & 2 & -5 & 13 & -27
\end{array}
$$

Cociente: $2x^2 - 5x + 13$
Resto: -27

2.44 Calcula el resto de las siguientes divisiones sin necesidad de realizarlas.

a) $(x^7 - 3x^2 + 1) : (x - 1)$ b) $(x^{101} - 2) : (x + 1)$ c) $(x^5 - 2x^3 + 3) : (x - 3)$

¿Qué teorema has utilizado?

a) $P(1) = 1^7 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1$ Resto $= -1$

b) $P(-1) = (-1)^{101} - 2 = -1 - 2 = -3$ Resto $= -3$

c) $P(3) = 3^5 - 2 \cdot 3^3 + 3 = 243 - 54 + 3 = 192$ Resto $= 192$

He utilizado el teorema del resto.

2.45 Halla el valor de k en los siguientes polinomios teniendo en cuenta los datos indicados.

a) $x^3 + (k + 2)x + 1$ es divisible entre $(x + 1)$.

b) $(x^4 + kx^2 + 2x + 1) : (x - 1)$ tiene -4 de resto.

c) $x^4 + 3x^3 + kx^2 + x - 6$ tiene por factor $(x + 3)$.

a) Igualamos el valor del polinomio en -1 a cero:

$P(-1) = (-1)^3 + (k + 2) \cdot (-1) + 1 = -1 - k - 2 + 1 = -k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2$

b) Igualamos el valor del polinomio en 1 a -4:

$P(1) = 1^4 + k \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + k + 2 + 1 = 4 + k = -4 \Rightarrow k = -8$

c) Igualamos el valor del polinomio en -3 a 0:

$P(-3) = (-3)^4 + 3 \cdot (-3)^3 + k \cdot (-3)^2 + (-3) - 6 = 81 - 81 + 9k - 3 - 6 = 9k - 9 = 0 \Rightarrow k = 1$

Factorización de polinomios

2.46 Calcula las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$

b) $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

c) $R(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$

a) Posibles raíces enteras: ±1, ±2, ±3 y ±6

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 6 = 2 + 6 - 2 - 6 = 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 6 = -2 + 6 + 2 - 6 = 0$

$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 6 = -54 + 54 + 6 - 6 = 0$

Raíces enteras de $P(x)$: 1, -1 y -3

b) Posibles raíces enteras: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 y ±12

$Q(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 12 = 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$

$Q(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = 16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 0$

$Q(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 12 = 16 + 16 - 28 - 16 + 12 = 0$

$Q(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 12 = 81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$

Raíces enteras de $Q(x)$: -1, 2, -2 y 3

c) Posibles raíces enteras: ±1, ±3 y ±9

$R(3) = 3^4 + 3^3 - 8 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 9 = 81 + 27 - 72 - 27 - 9 = 0$

$R(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 8 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 9 = 81 - 27 - 72 + 27 - 9 = 0$

Raíces enteras de $R(x)$: 3 y -3

2.47 Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $x_1 = -1$, $x_1 = 2$ y $x_1 = -4$. ¿Existen más polinomios que verifiquen esas condiciones? ¿Por qué?

Se tiene que anular en los tres puntos, por ejemplo:

$P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) = (x^2 - x - 2) \cdot (x + 4) = x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x - 2x - 8 = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

Tendrá las mismas soluciones cualquier polinomio que sea el resultado de multiplicar este por una constante.

2.48 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$

d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$

e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{1 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^3 - x^2 - x - 2) = x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{1 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

No tiene solución, el polinomio $x^2 + x + 1$ es irreducible.

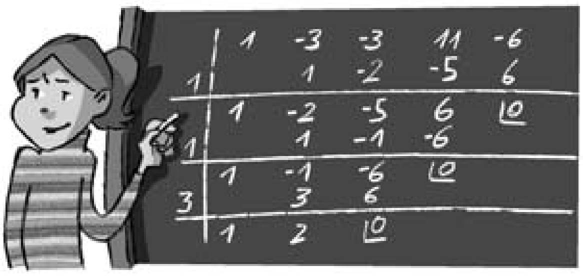
d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = (x + 1) \cdot (6x^2 - x - 2) = 6(x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & & -6 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & -1 & -2 & 0 \end{array} \qquad 6x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \left\langle \begin{array}{l} \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x = x \cdot (2x^3 + 7x^2 + 8x + 3) = x \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + 5x + 3) = 2x \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = 2x \cdot (x + 1)^2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 8 & 3 \\ -1 & & -2 & -5 & -3 \\ \hline & 2 & 5 & 3 & 0 \end{array} \qquad 2x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4} \left\langle \begin{array}{l} \frac{-4}{4} = -1 \\ \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \end{array} \right.$$

2.49 Observa el siguiente esquema y escribe el polinomio inicial y su expresión factorizada.



Al dividir el polinomio entre $(x - 1)$, el resto es 0. Dividimos el nuevo cociente otra vez entre $(x - 1)$ y el resto vuelve a ser 0. El cociente resultante lo dividimos entre $(x - 3)$ y la división es exacta, quedando como cociente $(x + 2)$. Por tanto, la factorización será:

$$(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) = (x - 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$$

2.50 Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 18$ sabiendo que verifica las siguientes condiciones. $P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, $P(-2) = 0$ y $P(-3) = 0$

Como conocemos las raíces del polinomio, por el teorema del factor sólo nos falta conocer el coeficiente:

$$P(x) = k \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9\right) = k \cdot x^3 + \frac{7}{2}k \cdot x^2 - \frac{3}{2}k \cdot x - 9k$$

Igualando coeficientes resulta $k = 2$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

2.51 ¿Cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio?

a) $\sqrt{12}\,x$ **b)** $\frac{4}{x}$ **c)** $3x^{-2}$ **d)** $x^2\sqrt{3}$

Para ser un monomio, el exponente debe ser natural. Vamos a ver el exponente de cada expresión:

a) Exponente 1 b) Exponente -1 c) Exponente -2 d) Exponente 2

Por tanto, los únicos monomios son los del apartado a y d.

2.52 ¿Puedes realizar la división $(x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$ utilizando la regla de Ruffini?

Para poder dividir un polinomio entre un binomio usando Ruffini, el divisor ha de tener grado 1, y en este caso tiene grado 2; por tanto, no podremos usar Ruffini directamente.

2.53 Un polinomio es de grado 7, y otro, de grado 6. Indica el grado de los polinomios que resultan de estas operaciones entre ellos.

a) La suma

b) El producto

c) El cociente

d) El cubo del segundo

a) La suma tendrá grado 7, ya que es el mayor de los grados de los dos polinomios.

b) El producto tendrá grado $7 + 6 = 13$.

c) El cociente tendrá grado $7 - 6 = 1$.

d) El cubo del segundo tendrá grado $3 \cdot 6 = 18$.

2.54 Tenemos dos polinomios de grado 3. ¿Puede el polinomio suma ser de grado 2? Pon un ejemplo.

La suma será de grado 2 si los coeficientes de los términos de grado 3 son opuestos y los de grado dos no lo son.

Ejemplo: $(-4x^3 + 2x^2 + 3x - 1) + (4x^3 + 5x - 3) = 2x^2 + 8x - 4$

2.55 Si $P(0) = -7$, ¿puede ser $P(x) = ax^2 + bx + 8$? Razona la respuesta.

Si $P(x) = ax^2 + bx + 8$ entonces $P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 8 = 8$ para cualquier valor de a y b por lo tanto $P(0) \neq -7$

2.56 Indica razonadamente cuáles son las raíces del polinomio $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

Este polinomio lo anulan los valores 1, -2 y 3.

2.57 Si $P(8) = 0$, ¿puede $P(x)$ ser irreducible? ¿Por qué?

Si $P(8) = 0$, por el teorema del factor sabemos que $P(x) = (x - 8) \cdot Q(x)$, donde $Q(x)$ es otro polinomio de un grado menor que $P(x)$. Por tanto, $P(x)$ no será irreducible.

2.58 El polinomio $Q(x)$ es de grado 3 y sabemos que $Q(-1) = Q(2) = Q(0) = 0$. ¿Cuál es la posible expresión del polinomio $Q(x)$?

Y si además sabemos que $Q(-2) = 16$, ¿cuál es entonces su expresión exacta?

Conociendo las raíces podemos expresar el polinomio como: $Q(x) = k \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot x = kx^3 - kx^2 - 2kx$.

Calculamos $Q(-2)$ y lo igualamos a 16:

$Q(-2) = k \cdot (-2 + 1) \cdot (-2 - 2) \cdot (-2) = k \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-2) = -8k \Rightarrow -8k = 16 \Rightarrow k = -2$

$Q(x) = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot x = -2x^3 + 2x^2 + 4x$

2.59 Calcula el resto de la división $M(x) : (x - 6)$ sabiendo que $M(6) = 3$.

Si $M(6) = 3$, aplicando el teorema del resto sabemos que el resto será 3.

2.60 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces 6 es una raíz de $L(x)$.

b) Si $G(-5) = 0$, $(x + 5)$ es un factor de $G(x)$.

c) Si $B(x)$ es irreducible, existe al menos un valor $x = a$ para el que $B(a) = 0$.

d) Un polinomio de grado 5 no puede disponer de 6 raíces.

e) Un polinomio con término independiente 0 posee al menos una raíz.

f) $x^n + 1$ es irreducible o tiene como única raíz -1.

a) Falso, ya que si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces -6 es una raíz de $L(x)$.

b) Verdadero, por el teorema del factor.

c) Falso, ya que si existiese un valor tal que $B(a) = 0$, entonces $(x - a)$ dividiría a $B(x)$, y este no sería irreducible.

d) Verdadero, el teorema fundamental del álgebra nos indica que como mucho tendrá 5 raíces.

e) Verdadero, ya que $x = 0$ será una raíz.

f) Verdadero, ya que:

Si n es par, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = -1$ no tiene solución; por tanto, el polinomio será irreducible.

Si n es impar, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = -1 \Rightarrow x = -1$.

2.61 ¿Es divisible entre $(x + 3)$ el polinomio $x^9 + 3^9$?

Calculemos $P(-3)$: $P(-3) = (-3)^9 + 3^9 = -3^9 + 3^9 = 0$, por lo que el polinomio es divisible entre $(x + 3)$.

2.62 Indica cuál de estos polinomios tiene -8 como raíz y 24 de término independiente.

a) $3x - 24$ **b) $3x + 24$** **c) $24x + 8$** **d) $24(x + 8)$**

El b), porque $3 \cdot (-8) + 24 = 0 \Rightarrow -8$ es raíz, y 24, el término independiente.

2.63 ¿Qué polinomio podría expresarse como el cociente $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$?

$$\begin{array}{rl|l} x^2 - 4x + 3 & & x - 1 \\ \cline{3-3} -x^2 + x & & x - 3 \\ \cline{1-1} -3x + 3 & & \\ 3x - 3 & & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = x - 3$$

2.64 Si el polinomio $P(x) = x^2 - kx + t$ tiene una raíz doble en $x = 2$, ¿cuánto valen k y t?

Raíz doble en $x = 2 \Rightarrow P(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Igualamos al polinomio: $x^2 - kx + t = x^2 - 4x + 4$

Igualamos coeficientes: $k = 4$, $t = 4$

2.65 Calcula el resto de esta división: $(x^{157} - 49x^{38} + 17) : (x + 1)$

Aplicando el teorema del resto:

$P(-1) = (-1)^{157} - 49 \cdot (-1)^{38} + 17 = -1 - 49 + 17 = -33$

Por tanto, el resto será -33.

2.66 $Q(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros cuyo término independiente es un número primo, a. Si además se cumple que:

$$Q(\pm a) \neq 0 \text{ y } Q(\pm 1) \neq 0$$

Indica razonadamente si $Q(x)$ puede tener raíces enteras.

Si el término independiente de $Q(x)$ es a, las raíces enteras de $Q(x)$ serán los divisores de a.

Como a es primo, sus únicos divisores serán ± 1 y $\pm a$.

$Q(\pm a)$ y $Q(\pm 1)$ son distintos de cero; por tanto, $Q(x)$ no tiene raíces enteras.

PROBLEMAS PARA APLICAR

2.67 Relaciona en tu cuaderno las magnitudes indicadas correspondientes a un triángulo equilátero de lado x con los monomios de la columna de la derecha.

Perímetro: $3x$ Área: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ Altura: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

2.68 Escribe el polinomio que expresa el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son números consecutivos, siendo el mayor de ellos x.

Las dimensiones serán x, $x - 1$ y $x - 2$. Por tanto, el volumen queda:

$\text{Vol} = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = x \cdot (x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

2.69 Utiliza la notación polinómica para demostrar que la suma de un múltiplo de 12, un múltiplo de 8 y un múltiplo de 20 es múltiplo de 4.

Sean p, q y r números naturales.

Un múltiplo de 12 será de la forma $12 \cdot p$.

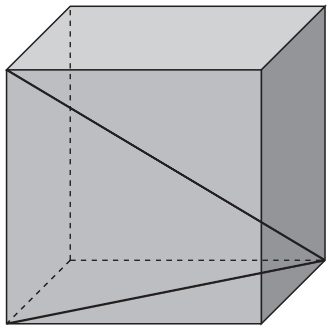
Un múltiplo de 8 será de la forma $8 \cdot q$.

Un múltiplo de 20 será de la forma $20 \cdot r$.

Su suma será: $12p + 8q + 20r$.

Sacando factor común: $12p + 8q + 20r = 4 \cdot (3p + 2q + 5r)$, obteniendo claramente un múltiplo de 4.

2.70 **¿Qué monomio expresa la diagonal de un cubo de lado x?**



Calculamos primero la diagonal de la base usando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 2x^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}\,x$

Esta diagonal, una arista y la diagonal del cubo forman un triángulo rectángulo, por lo que podemos volver a utilizar el teorema de Pitágoras:

$D^2 = \left(\sqrt{2}\,x\right)^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 2x^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 3x^2 \Rightarrow D = \sqrt{3}\,x$

Por tanto, el monomio que expresa la diagonal del cubo es $\sqrt{3}\,x$.

2.71 **Sean los polinomios $E(x) = 4\pi x^2$, $F(x) = \frac{5}{3}\pi x^2$ y $G(x) = 2\pi x^2 + 10\pi x$, asociados a distintas figuras geométricas. Relaciona en tu cuaderno las cantidades de estas tres columnas.**

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5.	**$G(3)$**	**36π**
Área de un cilindro de altura 5 y radio 3.	**$E(3)$**	**15π**
Volumen de una esfera de radio 3.	**$F(3)$**	**48π**

Calculamos el valor de los tres polinomios en $x = 3$.

$E(3) = 4\pi 3^2 = 36\pi$

$F(3) = \frac{5}{3}\pi 3^2 = 15\pi$

$G(3) = 2\pi 3^2 + 10\pi 3 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$

Calculamos las áreas y los volúmenes:

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5 $= \frac{1}{3}\pi\, r^2 h = \frac{1}{3}\pi\, 3^2 \cdot 5 = 15\pi$

Área de un cilindro de altura 5 y radio 3 $= 2 \cdot \pi r^2 + 2\,\pi r h = 2 \cdot \pi 3^2 + 2\,\pi 3 \cdot 5 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$

Volumen de una esfera de radio 3 $= \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{4}{3}\pi\, 3^3 = 36\,\pi$

Por tanto, la relación queda:

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5.	$F(3)$	15π
Área de un cilindro de altura 5 y radio 3.	$G(3)$	48π
Volumen de una esfera de radio 3.	$E(3)$	36π

2.72 **Calcula a, b y c sabiendo que $x^3 - 6x^2 + ax + b$ es el cubo del binomio $x + c$.**

$(x + c)^3 = x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$

Igualamos los coeficientes correspondientes a los términos de igual grado:

$-6 = 3c \Rightarrow c = -2$

$a = 3c^2 \Rightarrow a = 3 \cdot (-2)^2 \Rightarrow a = 12$

$b = c^3 \Rightarrow b = (-2)^3 \Rightarrow b = -8$

2.73 Halla los valores de a y b para que los restos de las divisiones del producto $(ax^2 + bx) \cdot (x - 3)$ entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$ sean, respectivamente, -6 y -2.

Utilizamos el teorema del resto, calculando el valor del polinomio en 1 y -1 e igualándolos a los valores del resto que nos da el enunciado.

$P(1) = (a \cdot 1^2 + b \cdot 1) \cdot (1 - 3) = (-2) \cdot (a + b) = -6 \Rightarrow a + b = 3$ Sumando $2a = 3 + \frac{1}{2}$ $2a = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{4}$

$P(-1) = [a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1)] \cdot (-1 - 3) = (-4) \cdot (a - b) = -2 \Rightarrow a - b = \frac{1}{2}$ Restando $2b = 3 - \frac{1}{2}$ $2b = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{4}$

2.74 Simplifica los siguientes polinomios.

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3$

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4 = x^2 - 4 - x^2 + 9 - 2x^2 - x - 4 = -2x^2 - x + 1$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3 = x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x + x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1 - x^6 + 2x^3 =$
$= 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

2.75 Calcula los valores de a y b necesarios para que se cumplan estas igualdades.

a) $x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1)$

b) $x^6 - x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 4x + 8 = (x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4)$

Multiplicamos e igualamos los coeficientes:

a) $(x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1) = x^5 + ax^4 + bx^3 + 2x^2 + x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx^2 - 4x - 2 = x^5 + (a - 2)x^4 + (b - 2a)x^3 +$
$+ (2 - 2b)x^2 - 3x - 2$

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$b - 2a = -5 \Rightarrow b - 2 \cdot 2 = -5 \Rightarrow b = -1$

$2 - 2b = 4$. Vemos que es correcta con los valores que habíamos obtenido.

b) $(x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4) = x^6 + ax^5 + bx^3 - 4x^2 - x^5 - ax^4 - bx^2 + 4x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx + 8 = x^6 + (a - 1)x^5 -$
$- (a + 2)x^4 + (b - 2a)x^3 - (4 + b)x^2 + (4 - 2b)x + 8$

$a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$

$-a - 2 = -2$ sirve de comprobación.

$b - 2a = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow b = 0$

$-4 - b = -4$ sirve de comprobación.

$4 - 2b = 4$ sirve de comprobación.

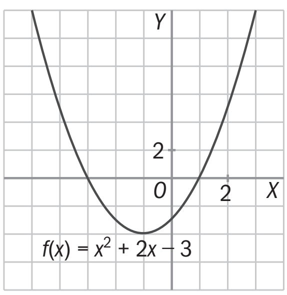
2.76 Halla un polinomio de segundo grado, $R(x)$, que cumpla $R(1) = 5$, $R(-1) = 9$ y $R(0) = 4$.

$R(x)$ será de la forma $R(x) = ax^2 + bx + c$; veamos qué valores toma en cada punto:

$$\left.\begin{array}{l} R(1) = a1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 5 \\ R(-1) = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c = 9 \\ R(0) = a0^2 + b \cdot 0 + c = c = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumamos } 2a + 2c = 14 \Rightarrow 2a + 2 \cdot 4 = 14 \Rightarrow 2a = 14 - 8 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \\ \text{Resto: } 2b = -4 \Rightarrow b = -2 \\ \qquad c = 4 \end{array}$$

El polinomio resultante es: $R(x) = 3x^2 - 2x + 4$

2.77 Observa la gráfica de $y = f(x)$ y halla las raíces del polinomio $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



Las raíces de este polinomio coinciden con los puntos de corte de la gráfica con el eje OX, es decir, $x = 1$ y $x = -3$.

2.78 Estudia el signo de este polinomio por el procedimiento que se indica a continuación.

$$Q(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

a) Encuentra sus ceros.

b) Divide la recta real en los intervalos que tienen por extremos esos ceros.

c) Elige un punto en cada uno de esos intervalos y calcula el valor numérico de $Q(x)$ en ese punto. El signo de este valor numérico es el signo de $Q(x)$ en todo el intervalo.

a) Ceros en $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$

b) Intervalos $x \leq -2$, $-2 < x \leq 1$, $1 < x \leq 3$, $x > 3$ (la respuesta no es única, ya que el valor "=" se puede considerar en un intervalo o en el siguiente)

c) Aunque el punto elegido y el valor obtenido en cada intervalo no tienen por qué coincidir, el signo sí.

$x = -3$ $\quad Q(-3) = (-3 + 2)(-3 - 1)(-3 - 3) = (-1) \cdot (-4) \cdot (-6) < 0 \Rightarrow$ para $x \leq -2$ $Q(x)$ es negativo.

$x = 0$ $\quad Q(0) = (0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) > 0 \Rightarrow$ para $-2 < x \leq 1$ $Q(x)$ es positivo.

$x = 2$ $\quad Q(2) = (2 + 2)(2 - 1)(2 - 3) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow$ para $1 < x \leq 3$ $Q(x)$ es negativo.

$x = 4$ $\quad Q(4) = (4 + 2)(4 - 1)(4 - 3) = 6 \cdot 3 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ para $x > 3$ $Q(x)$ es positivo.

2.79 La expresión que nos da la posición, s, de un objeto que sigue un movimiento uniformemente acelerado es: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

Donde a es la aceleración; v_0, la velocidad inicial; s_0, la posición inicial, y t, el tiempo.

a) ¿Puede el polinomio $M(t) = 5t^2 + 6t + 3$ describir un movimiento uniformemente acelerado? Identifica en, caso afirmativo, los valores de a, v_0 y s_0.

b) ¿Puede el monomio $T(t) = 4{,}9t^2$ corresponder a un cuerpo que se deja caer en el vacío? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de a en este caso?

a) $M(t)$ puede identificar un movimiento uniformemente acelerado donde

$\frac{1}{2}a = 5 \Rightarrow a = 10$; $v_0 = 6$; $s_0 = 3$

b) Vamos a identificar los valores.

$\frac{1}{2}a = 4{,}9 \Rightarrow a = 9{,}8$ (valor correspondiente a la gravedad)

$v_0 = 0$ (parte de velocidad inicial nula)

$s_0 = 0$ (cuando comienza a caer no ha recorrido ningún espacio)

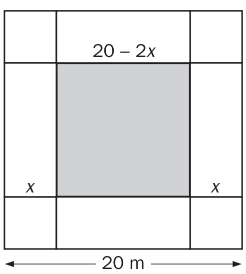
2.80 Un Ayuntamiento quiere construir un depósito metálico de agua.

Disponen de una pieza cuadrada de metal de 20 x 20 metros de la que cortan cuatro cuadrados de lado x en las cuatro esquinas, y levantan los cuatro rectángulos resultantes para formar los laterales del depósito, soldando las esquinas.

a) ¿Qué polinomio $V(x)$ expresa el volumen que puede acumular el depósito?

b) Halla los valores numéricos de V en $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6, y después dibuja los puntos $[x, V(x)]$.

c) ¿Podrías averiguar para qué valor de x el depósito tiene el máximo volumen?



a) Área de la base: $(20 - 2x) \cdot (20 - 2x)$; altura: $x \Rightarrow V(x) = (20 - 2x)^2 \cdot x$

b) $x = 0 \Rightarrow V(0) = (20 - 2 \cdot 0)^2 \cdot 0 = 0$

$x = 1 \Rightarrow V(1) = (20 - 2 \cdot 1)^2 \cdot 1 = 324$

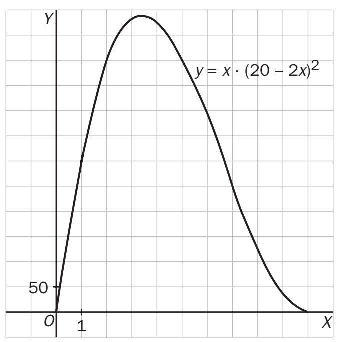
$x = 2 \Rightarrow V(2) = (20 - 2 \cdot 2)^2 \cdot 2 = 512$

$x = 3 \Rightarrow V(3) = (20 - 2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 588$

$x = 4 \Rightarrow V(4) = (20 - 2 \cdot 4)^2 \cdot 4 = 576$

$x = 5 \Rightarrow V(5) = (20 - 2 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 500$

$x = 6 \Rightarrow V(6) = (20 - 2 \cdot 6)^2 \cdot 6 = 384$



c) En la gráfica podemos apreciar que cerca de $x = 3$ el volumen del depósito es máximo.

Operaciones con polinomios

2.81 Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 10x - 5$, $Q(x) = 6x^4 - 5x^3 + 8x - 5$ y $R(x) = -x^2 - 3x + 8$, aplica la propiedad distributiva y calcula estos productos.

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x) = (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) \cdot (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) + (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) \cdot (-x^2 - 3x + 8) =$
$= 18x^7 - 15x^6 + 24x^4 - 15x^3 - 24x^6 + 20x^5 - 32x^3 + 20 + 60x^5 - 50x^4 + 80x^2 - 50x - 30x^4 + 25x^3 - 40x + 25 - 3x^5 - 9x^4 + 24x^3 +$
$+ 4x^4 + 12x^3 - 32x^2 - 10x^3 - 30x^2 + 80x + 5x^2 + 15x - 40 = 18x^7 - 39x^6 + 77x^5 - 61x^4 + 4x^3 + 43x^2 + 5x - 15$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)] = Q(x) \cdot R(x) - Q(x) \cdot P(x) = (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) \cdot (-x^2 - 3x + 8) - (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) \cdot (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) =$
$= (-6x^6 - 18x^5 + 48x^4 + 5x^5 + 15x^4 - 40x^3 - 8x^3 - 24x^2 + 64x + 5x^2 + 15x - 40) - (18x^7 - 24x^6 + 60x^5 - 30x^4 - 15x^6 + 20x^5 -$
$- 50x^4 + 25x^3 + 24x^4 - 32x^3 + 80x^2 - 40x - 15x^3 + 20x^2 - 50x + 25) = (-6x^6 - 13x^5 + 63x^4 - 48x^3 - 19x^2 + 79x - 40) - (18x^7 -$
$- 39x^6 + 80x^5 - 56x^4 - 22x^3 + 100x^2 - 90x + 25) = -6x^6 - 13x^5 + 63x^4 - 48x^3 - 19x^2 + 79x - 40 - 18x^7 + 39x^6 - 80x^5 + 56x^4 +$
$+ 22x^3 - 100x^2 + 90x - 25 = -18x^7 + 33x^6 - 93x^5 + 119x^4 - 26x^3 - 119x^2 + 169x - 65$

2.82 Completa la siguiente división de polinomios en tu cuaderno rellenando los coeficientes que faltan.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & + \square x^3 & + \square x^2 & - 4x & + 1 & x^2 - x + 2 \\ \cline{6-6}
-\square x^4 & + \square x^3 & + \square x^2 & & & \square x^2 + \square x \\ \cline{1-5}
 & x^3 & - x^2 & - 4x & + 1 & \\
 & -\square x^3 & + \square x^2 & + \square x & & \\ \cline{2-5}
 & & + \square x^2 & + \square x & + 1 &
\end{array}$$

Aplica la prueba de la división para comprobar que la has realizado correctamente.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & + (-1)x^3 & + 3x^2 & - 4x & + 1 & x^2 - x + 2 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & + 2x^3 & - 4x^2 & & & 2x^2 + x \\ \cline{1-5}
 & + x^3 & - x^2 & - 4x & + 1 & \\
 & - x^3 & + x^2 & - 2x & & \\ \cline{2-5}
 & & & - 6x & + 1 &
\end{array}$$

$d(x) \cdot c(x) + r(x) = (x^2 - x + 2) \cdot (2x^2 + x) + (-6x + 1) = 2x^4 + x^3 - 2x^3 - x^2 + 4x^2 + 2x - 6x + 1 = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = D(x)$

2.83 Utilizando la regla de Ruffini, averigua si $(x - 3)$ es factor del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$. ¿Tiene más factores dicho polinomio? ¿Por qué?

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 8 & -15 \\
3 & & 3 & -3 & 15 \\ \hline
 & 1 & -1 & 5 & 0
\end{array}$$

Obtenemos resto 0, es decir, $(x - 3)$ es factor de $P(x)$

El cociente queda: $x^2 - x + 5$.

Resolvemos: $x^2 - x + 5 = 0$.

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-19}}{2}$. No existe solución; por tanto, $P(x)$ solo tiene un factor de primer grado.

Identidades notables

2.84 Desarrolla estas expresiones.

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2$

b) $(-3 + 6b^3c^4)^2$

c) $(2x - 3y)^3$

d) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t)$

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2 = 16x^4y^6 + 25y^4t^2 - 40x^2y^5t$

b) $(-3 + 6b^3c^4)^2 = 9 + 36b^6c^8 - 36b^3c^4$

c) $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

d) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t) = 25x^6z^2 - 49y^4t^2$

Raíces y factorización de polinomios

2.85 Indica si los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ son raíces del polinomio $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + 7x - 6$.

$P(2) = 2^5 + 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 - 6 = 32 + 16 - 56 + 14 - 6 = 0$; $x_1 = 2$ es raíz de este polinomio.

$P(1) = 1^5 + 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 - 6 = 1 + 1 - 7 + 7 - 6 = -4$; $x_2 = 1$ no es raíz de este polinomio.

2.86 Halla el polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es 3 y que tiene por raíces $x_1 = 1$ (raíz doble), $x_2 = -2$ y $x_3 = 4$. Desarróllalo.

$$3(x-1)^2(x+2)(x-4) = 3(x^2-2x+1)(x^2-2x-8) = 3(x^4-2x^3-8x^2-2x^3+4x^2+16x+x^2-2x-8) =$$
$$= 3(x^4-4x^3-3x^2+14x-8) = 3x^4-12x^3-9x^2+42x-24$$

2.87 Factoriza los siguientes polinomios.
a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
b) $3x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 23x - 12$

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-3) = (x+1)^2 \cdot (x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \qquad x^2-2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot(-3)\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{2+\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

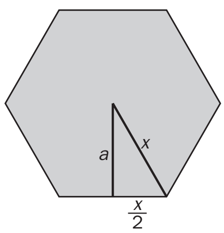
b) $Q(x) = 3x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 23x - 12 = (x+3) \cdot (3x^3 - 14x^2 + 9x - 4) = (x+3) \cdot (x-4) \cdot (3x^2 - 2x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -5 & -33 & 23 & -12 \\ -3 & & -9 & 42 & -27 & 12 \\ \hline & 3 & -14 & 9 & -4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -14 & 9 & -4 \\ 4 & & 12 & -8 & 4 \\ \hline & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$3x^2-2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{2\pm\sqrt{-8}}{6} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

AMPLIACIÓN

2.88 En un hexágono regular de lado x, ¿qué polinomio determina la expresión de su área?



En un hexágono regular, el radio y el lado coinciden. Con estos dos datos y sabiendo que la apotema corta el lado en su punto medio, podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$A = \frac{6x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

2.89 Halla el polinomio de tercer grado que cumple estas tres condiciones.
- **Su coeficiente principal es 8.**
- **Es divisible por $2x^2 + 1$.**
- **El resto de su división entre $(x + 2)$ es 56.**

En este polinomio, un factor es $(2x^2 + 1)$; para que su coeficiente principal sea 8, multiplicamos el factor por 4. Por último, para que tenga grado 3 deberemos multiplicarlo por un binomio de grado 1 de la forma $(x + b)$, quedando:

$$P(x) = 4(2x^2 + 1)(x + b).$$

Aplicamos por último el teorema del resto para calcular b:

$$P(-2) = 4(2\cdot(-2)^2+1)(-2+b) = 4\cdot 9(-2+b) = 36(-2+b) = 56 \Rightarrow -2+b = \frac{56}{36} = \frac{14}{9} \Rightarrow b = \frac{14}{9}+2 \Rightarrow b = \frac{32}{9}$$

Entonces, $P(x) = 4(2x^2+1)\left(x + \frac{32}{9}\right)$

2.90 Demuestra que el polinomio $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ no toma valores numéricos negativos para ningún valor de x.

Factorizamos el polinomio usando Ruffini y observando que aparece el cubo de un binomio:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ -1 & & -1 & -3 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1) \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x + 1) \cdot (x + 1)^3 = (x + 1)^4$$

Un número elevado a cuatro nunca puede ser negativo.

2.91 Si $N(x) = 8x^3 + ax^2 + 54x + b$, calcula a y b para que $N(x)$ sea un cubo perfecto. En ese caso, ¿qué polinomio al cubo da como resultado $N(x)$?

$$8x^3 + ax^2 + 54x + b = (2x + c)^3;\ (2x + c)^3 = 8x^3 + 12cx^2 + 6c^2x + c^3$$

Igualando coeficientes:

$6c^2 = 54 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = \pm 3$

$12c = a \Rightarrow 12 \cdot 3 = a \Rightarrow a = 36$ ó $12 \cdot (-3) = a \Rightarrow a = -36$

$b = c^3 \Rightarrow b = 27$ ó $b = -27$

$$N(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3 \qquad \text{o} \qquad N(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x - 3)^3$$

2.92 Demuestra que la suma de la unidad más la suma de los cuadrados de tres números consecutivos es divisible entre tres.

$$1 + x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x + 6 = 3(x^2 + 2x + 2) \Rightarrow \text{Es múltiplo de 3.}$$

2.93 Halla a y b para que $T(x)$ sea divisible entre $A(x)$ en estos dos casos.

a) $T(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 9$ y $A(x) = x^2 - 9$

b) $T(x) = 2x^4 + ax^3 - x^2 + bx - 1$ y $A(x) = x^2 - 1$

a) $A(x) = x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$; tendrá que ser divisible entre $(x + 3)$ y entre $(x - 3)$.

$$\left.\begin{array}{l} T(3) = 3 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 9 = 81 + 9a + 3b + 9 = 9a + 3b + 90 = 0 \\ T(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 9 = -81 + 9a - 3b + 9 = 9a - 3b - 72 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Sumamos } 18a + 18 = 0;\ a = -1 \\ \text{Resto: } 6b + 162 = 0;\ b = -27 \end{array}$$

b) $A(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; tendrá que ser divisible entre $(x + 1)$ y entre $(x - 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} T(1) = 2 \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 - 1^2 + b \cdot 1 - 1 = 2 + a - 1 + b - 1 = a + b = 0 \\ T(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + b \cdot (-1) - 1 = 2 - a - 1 - b - 1 = -a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Tiene infinitas soluciones, la} \\ \text{única condición será: } a = -b \end{array}$$

2.94 Completa en tu cuaderno esta división.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{-1} & \square & \mathbf{1} & \square \\ \square & & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-4} \end{array}$$

Llamamos $(x - a)$ al divisor y completaremos las cantidades que nos sea posible.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & \square & 1 & \square \\ a & & -a & 2a & -3a \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

Obtenemos la ecuación

$1 + 2a = -3$

Entonces, $a = -2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 - 2 & 1 & -4 - 6 \\ -2 & & 2 & -4 & 6 \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 1 & -10 \\ -2 & & 2 & -4 & 6 \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

2.95 Factoriza el numerador y el denominador para encontrar una expresión simplificada de la fracción algebraica $\frac{L(x)}{R(x)}$, si $L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4$ y $R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12$.

$L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4 = 3(x - 1)(x - 4)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -16 & 17 & -4 \\ 1 & & 3 & -13 & 4 \\ \hline & 3 & -13 & 4 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 13x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{6} = \frac{13 \pm 11}{6} \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12 = 2(x - 1)(x - 4)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -13 & 23 & -12 \\ 1 & & 2 & -11 & 12 \\ \hline & 2 & -11 & 12 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4} \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{L(x)}{R(x)} = \frac{3(x - 1)(x - 4)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2(x - 1)(x - 4)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3x - 1}{2x - 3}$$

2.96 Estudia el signo del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ según el proceso de la actividad número 78.

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x = x(x^2 + 3x - 10) = x(x - 2)(x + 5)$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -5 \end{array} \right.$$

Si $x < -5 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = -6 \Rightarrow P(-6) = (-6) \cdot (-6 - 2) \cdot (-6 + 5) = (-6) \cdot (-8) \cdot (-1) < 0 \Rightarrow P(x)$ es negativo.

Si $-5 \leq x < 0 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = -1 \Rightarrow P(-1) = (-1) \cdot (-1 - 2) \cdot (-1 + 5) = (-1) \cdot (-3) \cdot (4) > 0 \Rightarrow$ P(x) es positivo.

Si $0 \leq x < 2 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = 1 \Rightarrow P(1) = (1) \cdot (1 - 2) \cdot (1 + 5) = (1) \cdot (-1) \cdot (6) < 0 \Rightarrow P(x)$ es negativo.

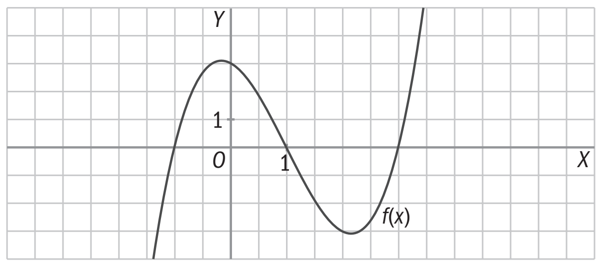
Si $x \geq 2 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = 3 \Rightarrow P(3) = (3) \cdot (3 - 2) \cdot (3 + 5) = (3) \cdot (1) \cdot (8) > 0 \Rightarrow P(x)$ es positivo.

2.97 La gráfica de la función polinómica $y = f(x)$ es la siguiente.
¿Cuál de los siguientes puede ser $f(x)$?

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$



La gráfica corta el eje *OX* en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

a) $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$.
No corresponde.

b) $f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) = -1 + 4 \neq 0$. No corresponde.

c) $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 1 + 3 = -1 - 3 + 1 + 3 = 0$
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$
$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0$
Corresponde con la gráfica.

2.98 La suma de las raíces de un polinomio de grado 2 es 2, y su producto, −3. ¿Cuál es el polinomio sabiendo que su coeficiente de grado 2 es 1?

Será de la forma $(x - a) \cdot (x - b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a + b)x + ab$.
Sabemos que $a + b = 2$, y $a \cdot b = -3$.
Sustituimos: $x^2 - 2x - 3$.

2.99 Si $M(-1) = 5$, $M\left(\frac{1}{2}\right) = 5$, $M(-4) = 5$ y $M(12) = 5$, y el grado de $M(x)$ cuatro, ¿cuál es su expresión?

Buscamos un polinomio de grado 4, que se anule en -1, $\frac{1}{2}$, -4, 12, y le sumamos 5 para que en esos valores su valor sea 5:

$$M(x) = (x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4)(x - 12) + 5$$

2.100 Transformaciones en una fracción

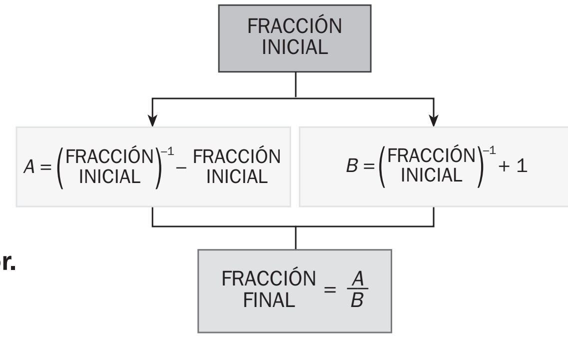
Dada una fracción inicial cualquiera, realizamos las siguientes transformaciones sucesivas.

a) Aplica las transformaciones a las fracciones:

$$\frac{1}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \frac{7}{10}$$

b) ¿Qué relación verifican las fracciones inicial y final?

Demuestra, a partir de una fracción genérica $\frac{a}{b}$, la conjetura que has obtenido en el apartado anterior.



$$\frac{1}{3}:\quad A = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \qquad B = 3 + 1 = 4$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3}$$

Relación: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$\frac{7}{10}:\quad A = \frac{10}{7} - \frac{7}{10} = \frac{51}{70} \qquad B = \frac{10}{7} + 1 = \frac{17}{7}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{51}{70}}{\frac{17}{7}} = \frac{51 \cdot 7}{70 \cdot 17} = \frac{3}{10}$$

Relación: $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

$$\frac{4}{5}:\quad A = \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{9}{20} \qquad B = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Relación: $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$$x:\quad A = \frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x} \qquad B = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x + 1}{x}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1 - x^2}{x}}{\frac{x + 1}{x}} = \frac{1 - x^2}{x + 1} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 + x} = 1 - x$$

Vemos que se cumple la relación.

2.101 Cambio de dimensiones

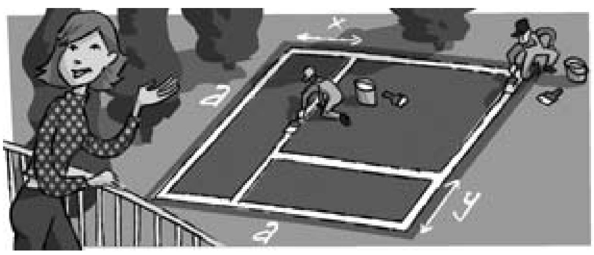
Esther, Elvira y Emilia han heredado de su abuelo el terreno que aparece en la figura, que tiene forma cuadrada de lado *a*.

A Esther le corresponde la franja vertical de *x* metros; a Elvira, la franja horizontal de y metros, y a Emilia, el resto.

Escribe mediante polinomios las siguientes medidas.

a) La superficie de terreno correspondiente a Emilia.

b) El área que heredan Esther y Elvira. Calcula la relación entre estas dos áreas si el terreno inicial tiene de lado 100 metros, y las anchuras de las franjas son de 30 y 40 metros, respectivamente.



a) Esther: ax
Elvira: $y \cdot (a - x)$
Emilia: $(a - x) \cdot (a - y)$

b) Esther $= 100 \cdot 30 = 3000$ m^2
Elvira $= 40 \cdot (100 - 30) = 2800$ m^2
Emilia $= (100 - 30) \cdot (100 - 40) = 4200$ m^2

2.A1 **Transcribe las dos siguientes expresiones verbales al lenguaje algebraico.**
a) La multiplicación de tres números consecutivos.
b) El perímetro de un rectángulo de base b y altura h.

a) $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

b) $2b + 2h$

2.A2 **Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$. $P(x) = \frac{x^3}{2} - 2(x^2 - 1)$**

$P(2) = \frac{2^3}{2} - 2(2^2 - 1) = 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$P(-1) = \frac{(-1)^3}{2} - 2((-1)^2 - 1) = \frac{-1}{2}$

2.A3 **Si $P(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $Q(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$ y $R(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2$, calcula estas operaciones.**
a) $P(x) - Q(x) + R(x)$
b) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$
¿Qué grado tienen los polinomios resultantes?

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = (3x^2 - 2x + 4) - (-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 2x + 4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 1 + x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = x^4 + x^3 + 8x^2 - 4x + 3 \Rightarrow$ Grado 4

b) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = (3x^2 - 2x + 4) \cdot [(-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2)] = (3x^2 - 2x + 4) \cdot (x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 3) = 3x^6 - 9x^5 + 9x^4 + 24x^3 - 9x^2 - 2x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 6x + 4x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 32x - 12 = 3x^6 - 11x^5 + 19x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 38x - 12 \Rightarrow$ Grado 6

2.A4 **Realiza las siguientes divisiones de polinomios.**
a) $(5x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x^3 - x - 1)$
b) $(4x^3 - 2x + 2) : (x^2 + x + 1)$
¿Podrías aplicar la regla de Ruffini? ¿Por qué?

a)
$$\begin{array}{rl|l} & 5x^4 - 3x^2 + x - 1 & x^3 - x - 1 \\ \cline{3-3} & -5x^4 + 5x^2 + 5x & 5x \\ \cline{2-2} & 2x^2 + 6x - 1 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl|l} & 4x^3 \qquad - 2x + 2 & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3} & -4x^3 - 4x^2 - 4x & 4x - 4 \\ \cline{2-2} & - 4x^2 - 6x + 2 & \\ & 4x^2 + 4x + 4 & \\ \cline{2-2} & - 2x + 6 & \end{array}$$

No se puede aplicar Ruffini porque los divisores no tienen grado 1.

2.A5 **Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.**
a) $(2x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$
b) $(x^4 - 3x^2 + 4x - 2) : (x + 3)$
Indica los polinomios cociente y resto.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 4 & -5 & -3 \\ 2 & & 4 & 16 & 22 \\ \hline & 2 & 8 & 11 & 19 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 8x + 11$

Resto: 19

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ -3 & & -3 & 9 & -18 & 42 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -14 & 40 \end{array}$$

Cociente: $x^3 - 3x^2 + 6x - 14$

Resto: 40

2.A6 El desarrollo del cuadrado del binomio $(3ab - c)^2$ corresponde con:

a) $9a^2b^2 - c^2$ **b)** $9a^2b^2 - 6abc + c^2$ **c)** $9a^2b^2 + 6abc + c^2$

Solución: apartado b)

2.A7 Indica a cuál de las siguientes expresiones corresponde el desarrollo de la suma por diferencia $(2x^2y + 3y^2z)(2x^2y - 3y^2z)$.

a) $4x^4y^2 + 9y^4z^2$ **b)** $4x^2y - 9y^2z$ **c)** $4x^4y^2 - 9y^4z^2$

Solución: apartado c)

2.A8 Calcula el valor que debe tener k para que el polinomio $P(x) = x^5 + kx^4 + x^3 - 4x^2 + x - 4$ sea divisible entre $(x - 4)$.

$P(4) = 4^5 + k4^4 + 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 1024 + 256k + 64 - 64 + 4 - 4 = 1024 + 256k = 0 \Rightarrow 1024 = -256k \Rightarrow k = -4$

2.A9 ¿Es $(x + 1)$ un factor del polinomio $x^{71} - 1$? Razona tu respuesta.

$P(-1) = (-1)^{71} - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$; por tanto, no es factor.

2.A10 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 13x - 20$ **b)** $Q(x) = x^5 + x^4 - 5x^2 - 11x - 6$

a) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 13x - 20 = (x + 1)(6x^2 + 7x - 20) = 6(x + 1)\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & -13 & -20 \\ -1 & & -6 & -7 & 20 \\ \hline & 6 & 7 & -20 & 0 \end{array}$$

$6x^2 + 7x - 20 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6 \cdot 20}}{2 \cdot 6} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{12} = \frac{-7 \pm 23}{12} \begin{cases} \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \\ \frac{-30}{12} = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

b) $Q(x) = (x + 1)(x^4 - 5x - 6) = (x + 1)(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 6) = (x + 1)^2(x - 2)(x^2 + x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & 0 & -5 & -11 & -6 \\ -1 & & -1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

No tiene solución.

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

¿La calculadora se equivoca?

Fíjate en esta operación: $123\,987\,456^2 - (123\,987\,455 \cdot 123\,987\,457)$

Comprueba que si utilizas tu calculadora para resolverla directamente obtienes una solución y si la simplificas previamente obtienes otra distinta. ¿Por qué ocurre esto?

En una calculadora convencional no podremos introducir cifras tan grandes, por lo tanto tendremos que redondear, o redondeará la propia calculadora según el modelo, y de este redondeo vendrán los errores.

Para resolverlo se tiene que tener en cuenta que si:

$123{\cdot}987{\cdot}456 = a$

$123{\cdot}987{\cdot}455 = a - 1$

$123{\cdot}987{\cdot}457 = a + 1$

Haciendo operaciones algebraicas:

$$A = a^2 - (a - 1)(a + 1) = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$$

Luego $A = 1$ independiente del valor de a.