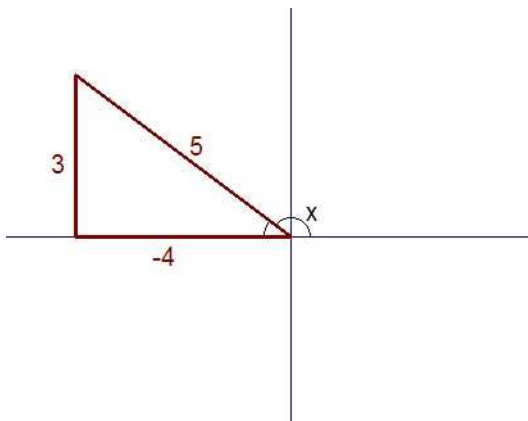


Ejercicio 1.

Si $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen} x > 0$, sin hallar el valor de x calcula: $\operatorname{sen} x$, $\cos(\pi + x)$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ y $\cos 2x$

Como $\operatorname{tg} x < 0$ y $\operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow$ el ángulo x está en el 2º cuadrante. Dibujamos la situación para calcular las razones trigonométricas del ángulo x .



$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4} \Rightarrow$ por el teorema de Pitágoras obtenemos la hipotenusa que es 5.

entonces tenemos que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ y $\cos x = -\frac{4}{5}$

- $\cos(\pi + x) = -\cos x = \frac{4}{5}$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

- $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}}} = \sqrt{9} = 3$

pues si $90^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow 45^\circ < \frac{x}{2} < 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} > 0$

Ejercicio 2.

Un pentágono regular, centrado en el origen de coordenadas, tiene uno de sus vértices en el punto $A = (2, 2\sqrt{3})$. Calcula los demás vértices, el área y el perímetro de dicho pentágono.

Un vértice es $A = (2, 2\sqrt{3})$. Vamos a expresar ese punto del plano (complejo) en forma polar.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = 60^\circ \\ r &= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 4_{60^\circ}$$

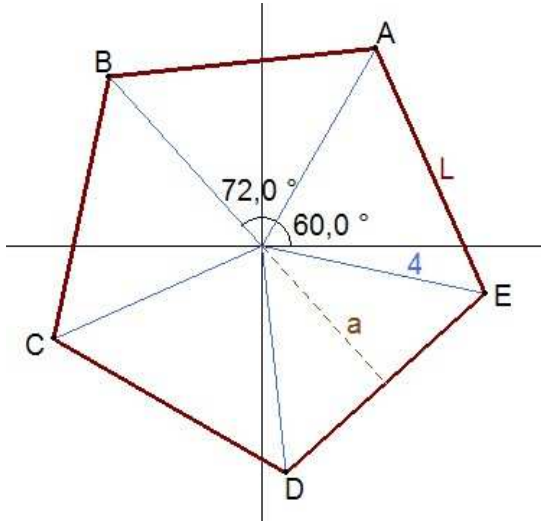
Como $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \Rightarrow$ los afijos de los números complejos que determinan los vértices del pentágono los obtenemos aplicando giros de 72° a partir de A . Entonces:

$$B = 4_{132^\circ} ; C = 4_{204^\circ} ; D = 4_{276^\circ} ; E = 4_{348^\circ}$$

Si tenemos tiempo y ganas, pasamos esos puntos de coordenadas polares a cartesianas.

p. ej. $B = 4_{132^\circ} \Rightarrow B = (4 \cdot \cos 132^\circ, 4 \cdot \sin 132^\circ) = (-2'68, 2'97)$

Ahora debemos calcular el perímetro y el área del pentágono, para ello calculamos L y a .



$$\sin 36^\circ = \frac{L/2}{4} \Rightarrow \frac{L}{2} = 4 \cdot \sin 36^\circ \Rightarrow L = 8 \cdot \sin 36^\circ \approx 4,7$$

También por el teorema del coseno

$$L = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 72^\circ} = \sqrt{32 - 32 \cdot \cos 72^\circ} \approx 4,7$$

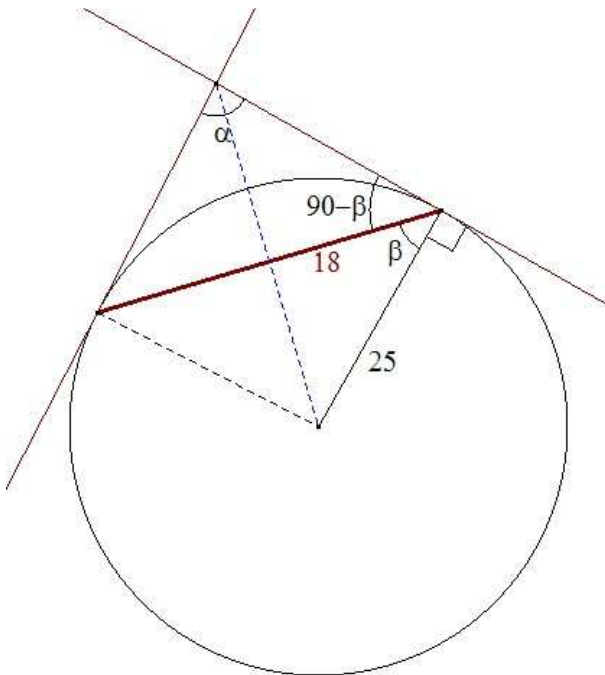
$$P = 5 \cdot (4,7) = 23,5$$

$$\cos 36^\circ = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4 \cdot \cos 36^\circ \approx 3,24$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(23,5) \cdot (3,24)}{2} = 38,07$$

Ejercicio 3.

El radio de una circunferencia mide 25 m. Calcula el ángulo que formarán las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud 36 m.



La cuerda con los radios de la circunferencia forma un triángulo isósceles, al igual que con los segmentos de tangente.

La recta que une el centro de la circunferencia con el corte de las tangentes es mediatriz de la cuerda.

Entonces :

$$\cos \beta = \frac{18}{25} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{18}{25}\right) \approx 43,95^\circ$$

$$90^\circ - \beta = 46,05^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 2 \cdot (46,05^\circ) \Rightarrow \alpha = 87,9^\circ$$

Ejercicio 4.

Resuelve la ecuación: $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x$

$$\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - 6\operatorname{sen}^3 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cdot (\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 180^\circ \\ \cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0 \end{cases}$$

$$\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow 1 - 4\operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 5.

Dado el vector $\vec{a} = (1, -2)$, encuentra los vectores $\vec{b} = (3, y)$ tales que $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Según la definición de producto escalar de dos vectores: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 45^\circ$

como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están expresados en coordenadas respecto de la base canónica,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 - 2y, \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + y^2}$$

$$3 - 2y = \sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (3 - 2y)^2 = 5 \cdot (9 + y^2) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 9 - 12y + 4y^2 = \frac{45 + 5y^2}{2} \Rightarrow$$

$$18 - 24y + 8y^2 = 45 + 5y^2 \Rightarrow 3y^2 - 24y - 27 = 0 \Rightarrow y^2 - 8y - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$$

Entonces los vectores $\vec{b} = (3, y)$ que cumplen la condición son $\begin{cases} \vec{b}_1 = (3, -1) \\ \vec{b}_2 = (3, 9) \end{cases}$

Ejercicio 6.

Resuelve la ecuación: $i \cdot z^5 + (i^{29} + \sqrt{3}) = 0$

$$i^{29} = i^{28} \cdot i = (i^4)^7 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i \cdot z^5 + (i^{29} + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow i \cdot z^5 + (i + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow i \cdot z^5 = -i - \sqrt{3} \Rightarrow z^5 = \frac{-i - \sqrt{3}}{i}$$

$$z^5 = \frac{(-i - \sqrt{3}) \cdot i}{i^2} \Rightarrow z^5 = \frac{-i^2 - i\sqrt{3}}{i^2} \Rightarrow z^5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow z^5 = -1 + i\sqrt{3} \Rightarrow z = \sqrt[5]{-1 + i\sqrt{3}}$$

$-1 + i\sqrt{3}$ en forma polar es el complejo 2_{120°

$$z = \sqrt[5]{2_{120^\circ}} \Rightarrow z = \sqrt[5]{2} \frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} \Rightarrow \begin{cases} k=0, z_1 = \sqrt[5]{2}_{24^\circ} \\ k=1, z_2 = \sqrt[5]{2}_{96^\circ} \\ k=2, z_3 = \sqrt[5]{2}_{168^\circ} \\ k=3, z_4 = \sqrt[5]{2}_{240^\circ} \\ k=4, z_5 = \sqrt[5]{2}_{312^\circ} \end{cases}$$

Ejercicio 7.

Conocidos los vectores $\vec{u} = (-2, 5)$, $\vec{v} = (3, 4)$, obtén el vector $\vec{w} = (6, -1)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Si tomamos $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ como base de V_2 , cuáles serán las coordenadas de $\vec{w}$ en B .

Hay que encontrar dos números reales α y β tales que $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$

$$(6, -1) = \alpha \cdot (-2, 5) + \beta \cdot (3, 4) \Rightarrow (6, -1) = (-2\alpha, 5\alpha) + (3\beta, 4\beta) \Rightarrow (6, -1) = (-2\alpha + 3\beta, 5\alpha + 4\beta)$$

$$\begin{cases} 6 = -2\alpha + 3\beta \\ -1 = 5\alpha + 4\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30 = -10\alpha + 15\beta \\ -2 = 10\alpha + 8\beta \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{28}{23} \text{ entonces } \alpha = \frac{-27}{23}$$

$$\text{por tanto } \vec{w} = \frac{-27}{23} \cdot \vec{u} + \frac{28}{23} \cdot \vec{v}$$

Si tomamos $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ como base de V_2 , las coordenadas de $\vec{w}$ en la base B serán $\vec{w} = \left(-\frac{27}{23}, \frac{28}{23}\right)$

Ejercicio 8.

Si $\cos(a+b)=0$, y a, b son ángulos del primer cuadrante, demuestra que $\sin(a+2b)=\sin a$.

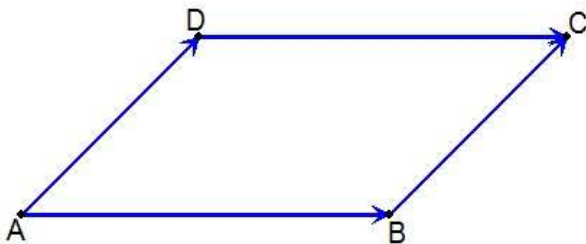
$$\text{Si } \cos(a+b)=0 \text{ y } a, b \in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante} \Rightarrow a+b=90^\circ \Rightarrow \sin(a+b)=1$$

$$\sin(a+2b) = \sin((a+b)+b) = \underset{\uparrow=1}{\sin(a+b)} \cdot \cos b + \underset{\uparrow=0}{\cos(a+b)} \cdot \sin b = \cos b \overset{\substack{\uparrow \\ a \text{ y } b \text{ son} \\ \text{complementarios}}}{=} \sin a$$

Ejercicio 9.

De un paralelogramo de vértices $ABCD$ se conocen $A=(-1,-3)$, $B=(6,-1)$ y $C=(3,4)$. Se pide:

- Calcula las coordenadas del cuarto vértice D .
- Si unimos los puntos medios de los lados del paralelogramo, ¿obtenemos un nuevo paralelogramo?



Para que $ABCD$ sea un paralelogramo

debe cumplirse: $\vec{AB} = \vec{DC}$ y $\vec{AD} = \vec{BC}$

Si $D=(x,y) \Rightarrow \vec{AB}=(7,2)$, $\vec{DC}=(3-x,4-y)$

$$(7,2)=(3-x,4-y) \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow D=(-4,2)$$

Para que $MNPQ$ sea un paralelogramo

debe cumplirse: $\vec{MN} = \vec{QP}$ y $\vec{MQ} = \vec{NP}$

$$\left. \begin{aligned} M &= \left(\frac{5}{2}, -2\right) \\ N &= \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ P &= \left(-\frac{1}{2}, 3\right) \\ Q &= \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{MN} &= \left(2, \frac{7}{2}\right) \\ \vec{QP} &= \left(2, \frac{7}{2}\right) \\ \vec{MQ} &= \left(-5, \frac{3}{2}\right) \\ \vec{NP} &= \left(-5, \frac{3}{2}\right) \end{aligned} \right.$$

Entonces $MNPQ$ es un paralelogramo.

