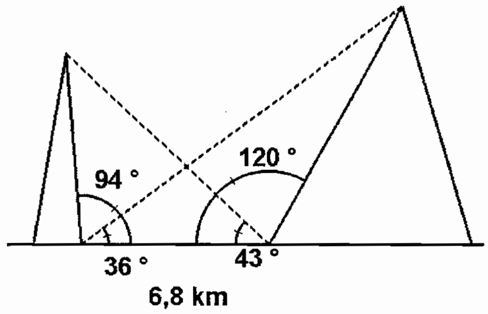
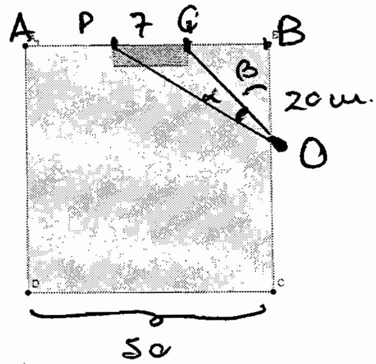
29. **Dos montañeros han ascendido en fines de semana sucesivos a dos picos, A y B, y querrían saber la distancia entre dichos picos. Para ello han medido desde las bases de las montañas los ángulos indicados en la figura. Sabiendo que la distancia entre las bases dichas es de 6800m, ¿qué distancia hay entre los picos?**



Idem anterior ---- (repetido)

30. **La anchura de un campo de futbol es 50 m y la de la portería 7 m. ¿Bajo qué ángulo ve la portería un jugador situado en un punto de la banda lateral que está a 20 m de la línea de fondo?**



es $\overline{QB} = \frac{50-7}{2} = \frac{43}{2} = 21'5$ m

$\widehat{QBO} \to$ y $tg\,\beta = \frac{\overline{QB}}{20} = \frac{21'5}{20}$

$\widehat{PBO} \to$ Ahora bien $tg(\alpha+\beta) = \frac{7+21'5}{20} = \frac{28'5}{20}$

pero, por otra parte $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$

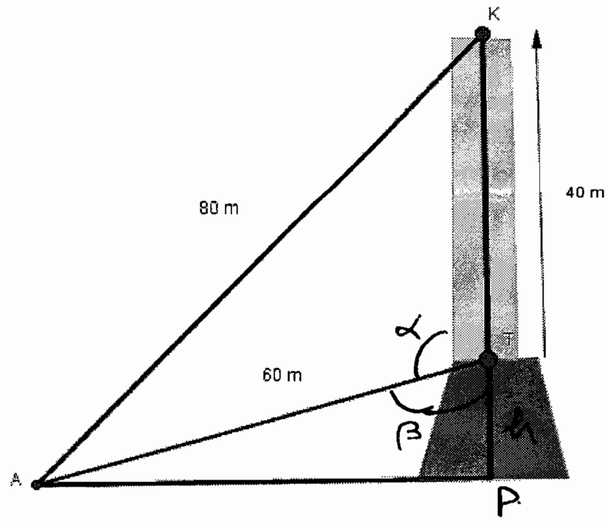
luego; $\frac{28'5}{20} = \frac{tg\,\alpha + \frac{21'5}{20}}{1 - tg\,\alpha \cdot \frac{21'5}{20}} \Rightarrow 28'5\left(1 - \frac{21'5}{20} tg\,\alpha\right) = 20\left(tg\,\alpha + \frac{21'5}{20}\right)$

$28'5 - \frac{28'5 \cdot 21'5}{20} tg\,\alpha = 20\,tg\,\alpha + 21'5 \Rightarrow$

$28'5 - 21'5 = \left(20 + \frac{28'5 \cdot 21'5}{20}\right) tg\,\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{7}{50'6375} = 0'1382$

$\alpha = arctg(0'1382) \approx$ $7'87^\circ$ es el ángulo pedido.

31. Un faro tiene 40 m de altura, hallándose situado sobre una roca. Situados en un punto A de la playa, hemos comprobado que la distancia que hay hasta la base del faro es 60 m, y la distancia que le separa de la cúpula del faro es 80 m. Hállese la altura de la roca sobre la que se encuentra el faro.



En $\widehat{AKT}$ aplicamos el teorema del coseno para calcular el ángulo α:

$80^2 = 40^2 + 60^2 - 2\cdot 40\cdot 60 \cos\alpha \Rightarrow$

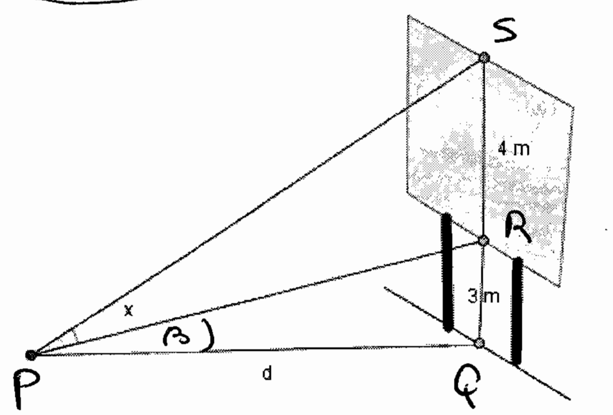
$$\cos\alpha = \frac{6400-1600-3600}{-4800} = \frac{1200}{-4800} = -0'25 \Rightarrow \alpha = \arccos(-0'25)$$

$\alpha \approx 104'48$ luego $\beta \approx 75'52$.

en $\widehat{APT}$ es $\cos\beta = \dfrac{h}{60} \Rightarrow h = 60\cos 75'52 \approx 15$ m.

h ≈ 15 m es la altura de la roca sobre la que se encuentra el faro

32. Expresa el ángulo x bajo el que se ve el anuncio de la figura en función de la distancia d que nos separa de la pared donde se halla.



En $\widehat{PQR} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \dfrac{3}{d}$

En $\widehat{PQS} \Rightarrow \operatorname{tg}(x+\beta) = SQ = 7$

Luego $\operatorname{tg}(x+\beta) = 7$

$$\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\beta} = 7 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}x + \frac{3}{d}}{1 - \frac{3}{d}\operatorname{tg}x} = 7 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}x + \frac{3}{d} = 7 - \frac{21}{d}\operatorname{tg}x \Rightarrow \left(1+\frac{21}{d}\right)\operatorname{tg}x = 7 - \frac{3}{d}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}x = \frac{7-\frac{3}{d}}{1+\frac{21}{d}} = \frac{\frac{7d-3}{\cancel{d}}}{\frac{d+21}{\cancel{d}}} = \frac{7d-3}{d+21} \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{arctg}\left(\frac{7d-3}{d+21}\right)}$$

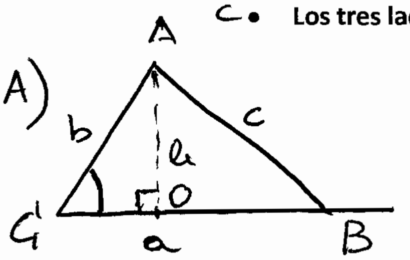
33. Calcula el área de un triángulo ABC, cuando se conocen:

A • **Dos lados y el ángulo comprendido.**

B • **Dos ángulos y un lado.**

C • **Los tres lados.**

A)

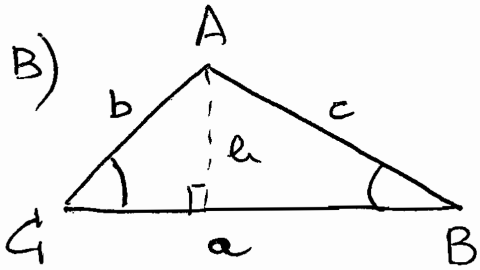


Conocemos a, b y $\hat{C}$, entonces:

$$\hat{A}rea = \frac{a \cdot h}{2} = \boxed{\frac{a\, b \operatorname{sen} C}{2}}$$

ya que en $\widehat{CCA}$ es $\operatorname{sen} C = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \operatorname{sen} C$

B)



Conocemos el lado a y $\hat{C}$ y $\hat{B}$

$$\hat{A}rea = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a\, b \operatorname{sen} C}{2} = (*)$$

calculamos b en función de a, $\hat{C}$, $\hat{B}$:

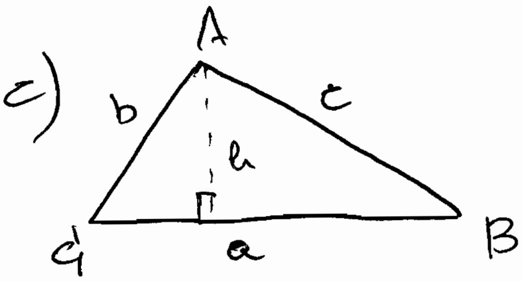
aplicamos el teorema del seno en $\widehat{CAB}$:

es $\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C})$ $\qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(180 - (B+C))} = \underline{\frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B+C)}}$$

$$(*) \text{ luego } \hat{A}rea = \frac{a \cdot \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B+C)} \cdot \operatorname{sen} C}{2} = \boxed{\frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen}(B+C)}}$$

C)



Conocemos los lados a, b, c.

$$\hat{A}rea = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a\, b \operatorname{sen} C}{2}$$

Calculamos $\operatorname{sen} C$ en función de a, b y c:

aplicando el teorema del coseno en $\widehat{CAB}$:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\hat{C} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

entonces $\operatorname{sen}^2\hat{C} = 1-\cos^2\hat{C} = 1 - \dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}$

y $\operatorname{sen}\hat{C} = \sqrt{1 - \dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}}$ vamos a poner esta expresión un poco "más bonita":

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \sqrt{\frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}} = \sqrt{\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{(2ab)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)}}{2ab} =$$ (tenemos muchas "diferencias de cuadrados" = suma x diferencia)

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}}{2ab} = (*)$$

Llamamos $p = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b+c = 2p \\ a+b+c-2c = 2p-2c \\ a+b-c = 2(p-c) \\ a+b+c-2b = 2p-2b \\ a+c-b = 2(p-b) \\ a+b+c-2a = 2p-2a \\ b+c-a = 2(p-a) \end{cases}$$

$$(*) = \frac{\sqrt{2p\,2(p-c)\,2(p-b)\,2(p-a)}}{2ab} = \frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2ab} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\cancel{2}ab}$$

Por lo tanto:

$$\text{Área} = \frac{ab\operatorname{sen}\hat{C}}{2} = \frac{\cancel{ab}\cdot\cancel{2}\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\cancel{ab}}}{\cancel{2}}.$$

$$\boxed{\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$ con $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

FÓRMULA FAMOSA DE HERÓN