RECORDAR:

- <u>Para que exista límite</u> de una f(x) en un punto <u>han de coincidir los límites laterales</u> en dicho punto.
- A efectos del $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe f(a) pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite).
- El límite de la suma es la suma de los límites, y algo parecido ocurre con el producto, cociente, potencia, raíz, logaritmo, etc. Esto es muy útil a la hora de calcular límites.
- **Límites infinitos e indeterminaciones** (*completar, con ayuda del profesor*):

SUMA Y RESTA: $\infty+\infty=$ $\quad \infty+k=$

$\infty-\infty=$ $\quad -\infty-\infty=$

PRODUCTO: $\infty\cdot\infty=$ $\quad \infty\cdot(-\infty)=$ $\quad -\infty\cdot(-\infty)=$ $\quad \infty\cdot k=\begin{cases} & \text{si } k>0 \\ & \text{si } k=0 \\ & \text{si } k<0 \end{cases}$

COCIENTE: $\dfrac{\infty}{k}=\begin{cases} & \text{si } k>0 \\ & \text{si } k=0 \\ & \text{si } k<0 \end{cases}$ $\quad \dfrac{k}{\infty}=$ $\quad \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}=$ $\quad \dfrac{0}{0}=$ $\quad \dfrac{k}{0}=$

POTENCIA: $a^{\infty}=\begin{cases} & \text{si } a>1 \\ & \text{si } a=1 \\ & \text{si } a<1 \end{cases}$ $\quad \infty^{n}=\begin{cases} & \text{si } n<0 \\ & \text{si } n=0 \\ & \text{si } n>0 \end{cases}$ $\quad 0^{0}=$ $\quad (0^{+})^{\infty}=$

LOGARITMOS: $\log 0^{+}=$ $\quad \log_a 1=$ $\quad \log_a a=$ $\quad \log \infty=$

$\ln 0^{+}=$ $\quad \ln 1=$ $\quad \ln e=$ $\quad \ln \infty=$

con lo cual los 7 tipos de indeterminación son:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\pm\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}}$$

1. Hallar los siguientes límites (en el 2º miembro figura la solución):

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2+x-4}{x-1} = 8$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = 4$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3-x}{x^2-x} = 1$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-5x^2+8x-4} = 4$

f) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1} = 0$

g) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9} = \pm\infty$

h) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \pm\infty$

i) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = 4$

j) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^3-2x^2-5x+10} = -4$

k) $\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^5} = \pm\infty$

l) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^4} = \infty$

m) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-2x-21}{x\,(x-3)} = \frac{25}{3}$

n) $\lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x-1} = \pm\infty$

o) $\lim_{x \to 2} \frac{4x^2-4x-8}{x^2-3x+2} = 12$

p) $\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{a^3}} = \frac{2}{3}a$

q) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$

r) $\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x^2-5x+6}$

s) $\lim_{x \to 1} \frac{\frac{2}{x}-2}{x-1} = -2$

2. Ídem:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-x+1}{4x^2+2} = \frac{3}{4}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1}{x-2} = \infty$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x^2+x+2} = 0$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4-1}{x^3+2} = \infty$

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2-2x}{x+1} = -\infty$

f) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+3}{x} = \infty$

g) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3-x}{2x^3+2x} = 2$

h) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x =$

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{3^x}{2^x} =$

j) $\lim_{x \to \infty} \frac{8^x}{2^{2x}} = \infty$

k) $\lim_{x \to 2} \frac{8^x}{2^{2x}} =$

l) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x+2}{x^5+7x^2+3} = 0$

m) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^6} = 0$

n) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1}\right) = -2$

o) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

p) $\lim_{x \to \infty} 5^{-x} = 0$

q) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-2x}{5x^2+x} = \frac{3}{5}$

r) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3-3x^2+5}{3x^3+2x^2-3x-1} = \frac{5}{3}$

s) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x}{x^2-1} = 1$

t) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4+x^2+x}{3x^4+2} = \frac{1}{3}$

u) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^7+6x^2-2x}{3x^2+4x^4+1} = \infty$

v) $\lim_{x \to \infty} \left[\mathrm{Ln}(2x+3) - \mathrm{Ln}(2x-1)\right] = 0$

3. **a)** $\lim_{x \to \infty} \sqrt{2x^2-3x+5}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-2x^3+3x^2-5}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{3x^3-2x+5}$

d) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{-2x^3+3x-7}$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{4}$

f) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+\sqrt{x+7}}{x^2+3x} = 3$

g) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 0$

h) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{1}{2}$

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{\sqrt{x^4-3}} = \infty$

j) $\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2-x}\right) = \frac{1}{2}$

k) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{1}{24}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+2x}+x}{2x-3} = \nexists$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x}{2x-3} = 0$

n) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}} = 0$

(Ayuda: Reducir a índice común)

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right) = \dfrac{3}{2}$

p) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-4}} = \infty$

q) $\lim\limits_{x \to \infty} (4x+2)\sqrt{2x^2-3} = \infty$

r) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = \infty$

s) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = 1$

t) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2-6x}} = \dfrac{3}{2}$

u) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{5x^3-2x}}{2x+5} = \infty$

v) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right) = \infty$

w) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^4-3x^2}-\dfrac{x^2}{x+2}\right) = \infty$

x) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+3} = 1$

y) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-3} = \infty$

z) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \infty$

α) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) = \dfrac{a}{2}$

β) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = -1$

γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x+\sqrt{x^2+x}\right) = -\infty$

δ) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = \infty$

ε) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} = 16$

ζ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$

η) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = 0$

θ) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

ι) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1+\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{2}$

κ) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^4+2x}-\sqrt{x}}{2} = \infty$

λ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}} = \nexists$

μ) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2} = \dfrac{2}{3}$

(Ayuda: Aplicar el conjugado dos veces)

ν) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+x+1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{3}{x}\right) = \infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right) = \pm\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \left[\dfrac{(x+1)^3}{(x-3)^2}-\dfrac{(x+2)^2}{x-3}\right] = \infty$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{2x-1}{x^2-1}\right) = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right) = 1$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^x$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^x$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = 0$

l) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(e^x-x^3\right)$

m) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^5-2^x\right)$

n) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x-1} = \dfrac{1}{e^4}$

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x+3} = e^2$

p) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x} = e^{-3}$

q) $\lim\limits_{x \to 6} \left(\dfrac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}} = e^{7/2}$

r) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x}{x^2-3}$

s) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

t) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{x}$

u) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x}{\ln x}$

v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2^x}{\ln x}$

w) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4^n}{3^{n-1}} = \infty$

x) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2^x-\sqrt{x^2+1}\right)$

y) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\ln x - x\right)$

z) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$

α) $\lim\limits_{x \to \infty} (\log x)^{1-3x} = 0$

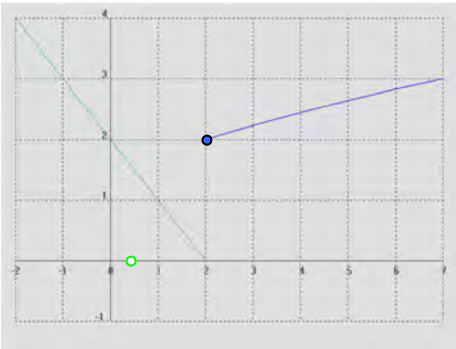
β) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

γ) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$

5. Dadas las siguientes funciones, obtener: **i)** Los límites que se indican. **ii)** La ecuación de las posibles asíntotas. **iii)** Dom(f) e Im(f):

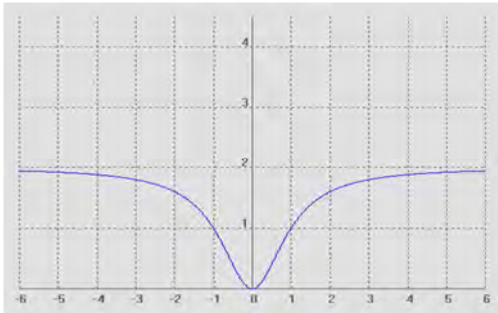
a) $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x<2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)$



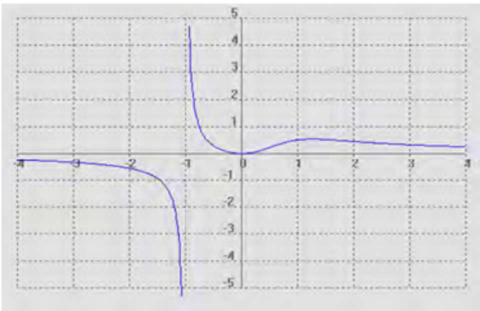
b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$



c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to -1} f(x);\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$



d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x);\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

6. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x^2+3x}{5-x} & \text{si } x\in(0,3) \\ \dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x\in(3,5] \\ x & \text{si } x\in(5,7) \\ 3 & \text{si } x\geq 7 \end{cases}$$

se pide (por este orden): **a)** f(0), f(3), f(5) y f(7)

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x);\ \lim\limits_{x\to 3} f(x);\ \lim\limits_{x\to 5} f(x);\ \lim\limits_{x\to 7} f(x);\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

c) Representación gráfica

d) Dom(f) e Im(f)

7. Calcular los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Representarlas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } x\le 0\\ x & \text{si } x>0\end{cases}$ en x=0

b) $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x\le 0\\ 1-2x & \text{si } 0<x\le 1\\ x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$ en x=0 y x=1

c) f(x)=|x–5| en x=5

d) $f(x)=|x|-\dfrac{x}{x+1}$ en x=0 y x=–1

(Soluc: a) ∄; b) 1 y ∄; c) 0; d) 0)

8. Calcular los valores del parámetro **a** para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3ax^3-5x+1}{10x^3+5}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax+1}-x=2$

(Soluc: a=–10/3; a=4)

9. Comprobar los siguientes límites construyendo una tabla apropiada mediante calculadora:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(x-2)^2}=0$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3x+2}=\dfrac{1}{3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } x}{x}=1$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\text{sen } x}{x}=0$

(S) 10. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x\le 1\\ ax+3 & \text{si } 1<x\le 2\\ bx^3-2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en x=1 y x=2

(Soluc: a=–1, b=3/8)

(S) 11. Dar un ejemplo de una función f(x) definida para todo x que no tenga límite cuando x→2

(S) 12. Discutir $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{ax}\right)$ en función de los valores del parámetro **a**

(Soluc: 0 si a=3; –∞ si a>3; ∞ si a<3)