

## CONICAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS ( problemas resueltos)

### Ejercicio n° 1.-

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto  $(2, -3)$  y que es tangente a la recta  $3x - 4y + 5 = 0$ .

#### **Solución:**

El radio,  $R$ , de la circunferencia es igual a la distancia del centro a la recta dada:

$$R = \text{dist}(C, r) = \frac{|6+12+5|}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}$$

La ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{529}{25} \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{204}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y - 204 = 0$$

### Ejercicio n° 2.-

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0$$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

#### **Solución:**

$$a) 2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = (2, 3)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{4+9-4} = \sqrt{9} = 3$$

b) La circunferencia tiene radio 5 y centro  $(2, 3)$ . Su ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

### Ejercicio nº 3.-

Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta  $4x + 3y - 25 = 0$  y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas  $3x - y - 7 = 0$  y  $2x + 3y - 1 = 0$ .

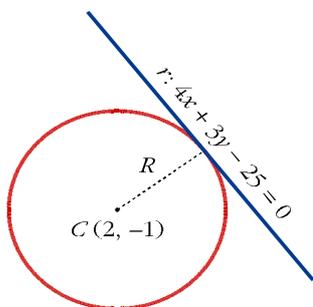
#### **Solución:**

Hallamos su centro:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) - 1 = 0 \end{array}$$

$$2x + 9x - 21 - 1 = 0 \rightarrow 11x = 22 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -1$$

El centro es  $C(2, -1)$ .



El radio,  $R$ , es igual a la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = \text{dist}(C, r) = \frac{|8 - 3 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

La ecuación será:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

### Ejercicio nº 4.-

Estudia la posición relativa de la recta  $r: 2x + y = 1$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ .

#### **Solución:**

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left( \frac{4}{2}, \frac{2}{2} \right) = (2, 1)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{4 + 1 - (-4)} = \sqrt{9} = 3$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,79 < 3 = \text{radio}$$

Por tanto, la circunferencia y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos.

### Ejercicio n° 5.-

**Halla la posición relativa de la recta  $3x + 4y - 25 = 0$  con respecto a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ . Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.**

### **Solución:**

Como tenemos que hallar los posibles puntos de corte, resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 3x + 4y - 25 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \frac{25 - 3x}{4} \\ x^2 + \left(\frac{25 - 3x}{4}\right)^2 - 25 = 0 \end{array}$$

$$x^2 + \frac{625 - 150x + 9x^2}{16} - 25 = 0 \rightarrow 16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 - 400 = 0 \rightarrow$$

Se cortan en el punto (3, 4). Por tanto, son tangentes.

### Ejercicio n° 6.-

**Obtén el valor de  $k$  para que la recta  $s: x + y + k = 0$  sea tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ .**

### **Solución:**

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$$

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{-6}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (-3, -1)$$

$$\text{Radio} = r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, s) = \frac{|-3 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k - 4|}{\sqrt{2}}$$

- Para que la recta sea tangente a la circunferencia, esta distancia ha de ser igual al radio:

$$\frac{|k-4|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow |k-4| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k-4 = 2\sqrt{2} \rightarrow k = 4 + 2\sqrt{2} \\ k-4 = -2\sqrt{2} \rightarrow k = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:  $k_1 = 4 + 2\sqrt{2}$ ;  $k_2 = 4 - 2\sqrt{2}$

### Ejercicio n° 7.-

Halla la posición relativa de la recta  $r: x + y = 2$  con respecto a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

#### *Solución:*

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left( \frac{-2}{2}, \frac{-4}{2} \right) = (-1, -2)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{1+4-1} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|-1-2-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,53 > 2 = \text{radio}$$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

### Ejercicio n° 8.-

Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:

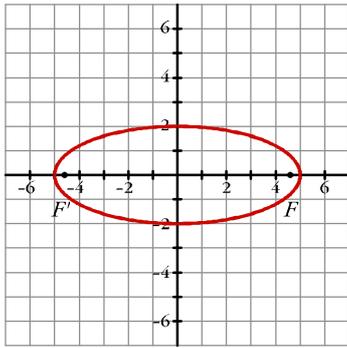
a)  $4x^2 + 25y^2 = 100$

b)  $4y^2 - x^2 = 4$

#### *Solución:*

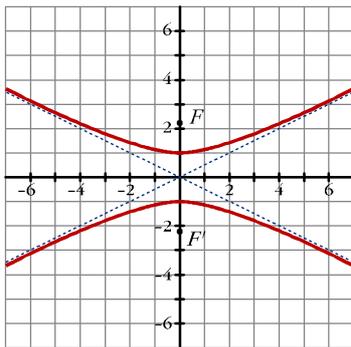
a)  $4x^2 + 25y^2 = 100 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

$$\text{Es una elipse: } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 5 \\ \text{Semieje menor: } 2 \\ \text{Focos: } F(\sqrt{21}, 0) \text{ y } F'(-\sqrt{21}, 0) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92 \end{cases}$$



b)  $4y^2 - x^2 = 4 \rightarrow y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

Es una hipérbola :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje: } 1 \\ \text{Focos: } F(0, \sqrt{5}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{5}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{5}}{1} \approx 2,24 \\ \text{Asíntotas: } y = \frac{1}{2}x ; y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right.$



**Ejercicio n° 9.-**

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia al punto  $A(1, 0)$ , es el triple de su distancia a la recta  $x = 2$ . Identifica la figura que obtienes.

***Solución:***

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, A) = 3 dist(P, x = 2)$  , es decir :

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3|x-2|$  . Elevamos al cuadrado y operamos :

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36$$

$$8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0. \text{ Es una hipérbola.}$$

### Ejercicio n° 10.-

**Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos  $A(-4, 0)$  y  $B(4, 0)$  es 40. Identifica la figura resultante.**

#### **Solución:**

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$$[\text{dist}(P, A)]^2 + [\text{dist}(P, B)]^2 = 40; \text{ es decir :}$$

$$(x + 4)^2 + y^2 + (x - 4)^2 + y^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Obtenemos una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio 2.

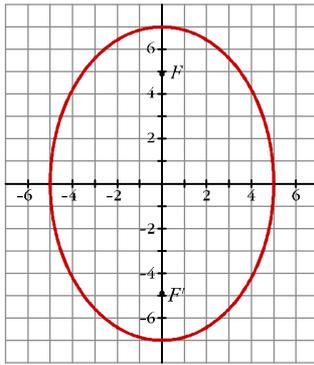
### Ejercicio n°11.-

**Identifica la siguiente cónica, dibújala y halla sus focos y su excentricidad:**

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

#### **Solución:**

$$\text{Es una elipse: } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 7 \\ \text{Semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F(0, \sqrt{24}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{24}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{24}}{7} \approx 0,7 \end{cases}$$



**Ejercicio nº 12.-**

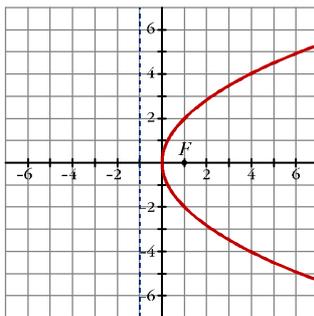
**Identifica esta cónica, halla sus elementos y dibújala:**

$$y^2 - 4x = 0$$

**Solución:**

$$y^2 - 4x = 0 \rightarrow y^2 = 4x$$

Es una parábola:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vértice: } (0, 0) \\ \text{Foco: } (1, 0) \\ \text{Directriz: } x = -1 \end{array} \right.$



**Ejercicio nº 13.-**

**Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:**

a)  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$       b)  $25x^2 + 100y^2 = 2500$

**Solución:**

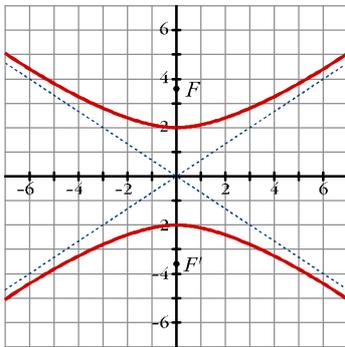
a) Es una hipérbola.

Semieje: 2

Focos:  $F(0, \sqrt{13})$  y  $F'(0, -\sqrt{13})$

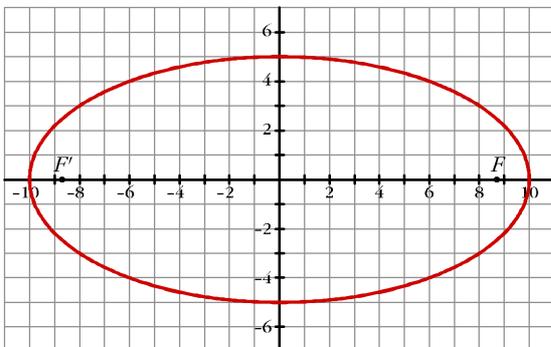
Excentricidad:  $\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$

Asíntotas:  $y = \frac{2}{3}x$ ;  $y = -\frac{2}{3}x$



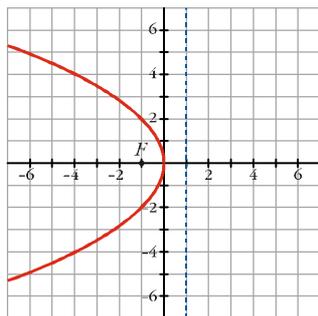
b)  $25x^2 + 100y^2 = 2500 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

Es una elipse:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje mayor: } 10; \text{ semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F(5\sqrt{3}, 0) \text{ y } F'(-5\sqrt{3}, 0) \\ \text{Excentricidad: } \frac{5\sqrt{3}}{10} \approx 0,87 \end{array} \right.$



**Ejercicio n° 14.-**

Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



**Solución:**

Directriz:  $x = 1$ . Foco  $(-1, 0)$ .

Ecuación:  $y^2 = -4x$

**Ejercicio n° 15.-**

Dada la siguiente cónica, identificala, obtén sus elementos característicos y represéntala gráficamente:

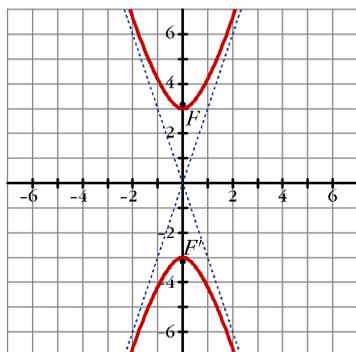
$$y^2 - 9x^2 = 9$$

**Solución:**

$$y^2 - 9x^2 = 9 \rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$$

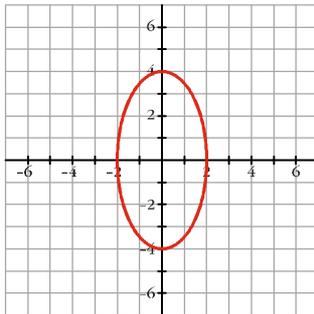
Es una hipérbola

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje: } 3 \\ \text{Focos: } F(0, \sqrt{10}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{10}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1,05 \\ \text{Asíntotas: } y = 3x ; \quad y = -3x \end{array} \right.$$



**Ejercicio nº 16.-**

**Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:**



***Solución:***

Semieje mayor: 4; semieje menor: 2

Focos:  $F(0, \sqrt{12})$  y  $F'(0, -\sqrt{12})$

Excentricidad:  $\frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$

Ecuación:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

**Ejercicio nº 17.-**

**Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas  $r_1: x + 3y - 1 = 0$  y  $r_2: 3x - y + 4 = 0$ .**

***Solución:***

Los puntos  $P(x, y)$  de las bisectrices cumplen que:

$dist(P, r_1) = dist(P, r_2)$ , es decir:

$$\frac{|x + 3y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y + 4|}{\sqrt{10}}$$

$$|x + 3y - 1| = |3x - y + 4| \begin{cases} \rightarrow x + 3y - 1 = 3x - y + 4 \rightarrow 2x - 4y + 5 = 0 \\ \rightarrow x + 3y - 1 = -3x + y - 4 \rightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que  $r_1$  y  $r_2$ .

**Ejercicio n° 18.-**

Halla el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia a  $Q(2, 4)$  sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

***Solución:***

Es una circunferencia de centro  $(2, 4)$  y radio 3. Hallamos su ecuación:  
Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, Q) = 3$ , es decir:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 3. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos :}$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

**Ejercicio n° 19.-**

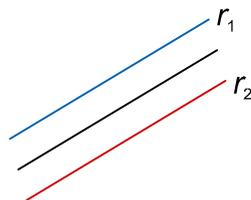
Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia a la recta  $r_1: x + y + 1 = 0$  sea igual que su distancia a la recta  $r_2: 2x + 2y + 4 = 0$ .

***Solución:***

Las dos rectas dadas,

$$r_1: x + y + 1 = 0 \text{ y } r_2: x + y + 2 = 0,$$

son rectas paralelas. Por tanto, el lugar geométrico pedido será otra recta, paralela a las dos, a igual distancia de ellas:



Hallamos su ecuación:

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, r_1) = dist(P, r_2)$ , es decir:

$$\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$$

$$|x+y+1|=|x+y+2| \begin{cases} \rightarrow x+y+1=x+y+2 \rightarrow 1=2 \rightarrow \text{Imposible} \\ \rightarrow x+y+1=-x-y-2 \rightarrow 2x+2y+3=0 \end{cases}$$

Observamos que la recta obtenida es paralela a  $r_1$  y  $r_2$ .

### Ejercicio n° 20.-

**Halla el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano cuya distancia a  $A(2, 0)$  sea el doble de la distancia a  $B(-1, 0)$ . Identifica la figura resultante.**

#### **Solución:**

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\text{dist}(P, A) = 2 \cdot \text{dist}(P, B), \text{ es decir:}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4. \text{ Es una circunferencia de centro } (-2, 0) \text{ y radio } 2.$$