CAPÍTULO

10

Optimización

[1]

10.1 Problemas de optimización

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable.
Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema.
En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar.
En este tipo de problemas se debe contestar correctamente las siguientes preguntas:

- ¿Qué se solicita en el problema?

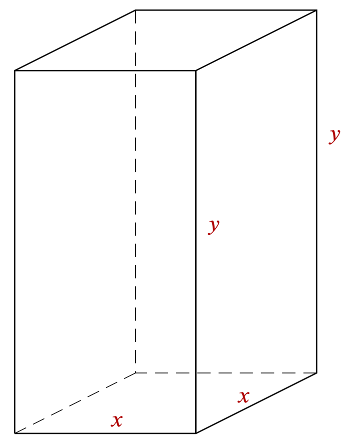
- ¿Qué restricciones aparecen en el problema?

La respuesta correcta a la primera pregunta nos lleva a definir la función que deberá ser minimizada o maximizada.
La respuesta correcta a la segunda pregunta dará origen a (al menos) una ecuación que será auxiliar para lograr expresar a la función deseada precisamente como una función de una variable.

Ejemplo 10.1.1 *Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de* $50\ cm^3$. *Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que va a ser usado.*

▼ La siguiente figura representa la caja:

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Volumen de la caja, según la figura:

$$V = x^2 y \;\&\; V = 50 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 50 = x^2 y; \text{ esta igualdad relaciona las variables del problema.}$$

De esta ecuación podemos obtener y como función de x o viceversa, despejando la variable elegida.

El área de la caja sin tapa:

$$A = x^2 + 4xy\,.$$

Ésta es la cantidad de material que deseamos que sea mínima; vemos que es una función de dos variables.

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen:

$$y = \frac{50}{x^2}\,.$$

Sustituimos en el área y obtenemos una función de una sola variable:

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) = x^2 + \frac{200}{x} = x^2 + 200x^{-1}\,.$$

Derivando:

$$A'(x) = 2x - 200x^{-2} = 2x - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^3 - 200}{x^2}\,;$$
$$A''(x) = 2 + 200\left(\frac{2}{x^3}\right) = 2 + \frac{400}{x^3} > 0\,.$$

Calculamos puntos críticos:

$$A'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x^3 - 200 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 100 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{100}\,\text{cm}\,.$$

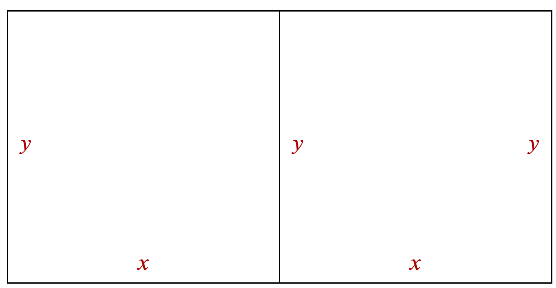
Es un mínimo absoluto pues $A''(x) > 0$ para cualquier $x > 0$. El valor correspondiente de la otra variable es

$$y = \frac{50}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\frac{100}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}100^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100} = \frac{1}{2}x\ \text{cm}\,.$$

□

Ejemplo 10.1.2 *Un ranchero tiene* 300 *m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.*

▼ La siguiente figura representa los corrales contiguos:



Tenemos que el perímetro y el área de los corrales son, respectivamente:

$$P = 4x + 3y = 300 \quad \& \quad A = 2xy\,.$$

Pero como $y = \dfrac{300 - 4x}{3}$:

$$A(x) = \frac{2x(300 - 4x)}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2\,.$$

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{16}{3}x = 200 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3\cdot 200}{16} = \frac{75}{2}\ \text{es el punto crítico}$$

y como

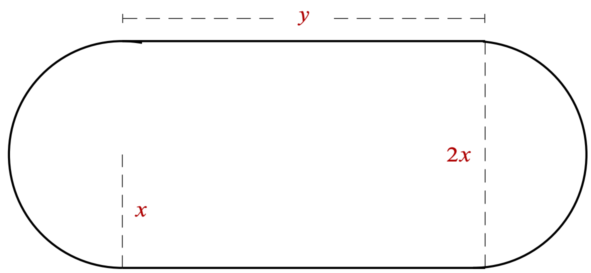
$$A''(x) = -\frac{16}{3} < 0, \text{entonces se trata de un máximo.}$$

El área máxima ocurre para $x = \dfrac{75}{2}$ m & $y = \dfrac{300 - 150}{3} = 50$ m, que son las dimensiones pedidas.

□

Ejemplo 10.1.3 *Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de* 50 *m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.*

▼ El terreno lo representamos por la siguiente figura:



El área del terreno es

$$A = 2xy + \pi x^2 .$$

El perímetro, $P = 50$ m, está dado por $P = 2y + 2\pi x$, por lo que

$$2y + 2\pi x = 50 \Rightarrow y = \frac{50 - 2\pi x}{2} = 25 - \pi x.$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del área, la tendremos expresada como función de una variable x:

$$A(x) = 2x(25 - \pi x) + \pi x^2 = 50x + x^2(\pi - 2\pi) = 50x - \pi x^2.$$

Su punto crítico se obtiene cuando $A'(x) = 0$. Esto es:

$$A'(x) = \left(50x - \pi x^2\right)' = 50 - 2\pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}.$$

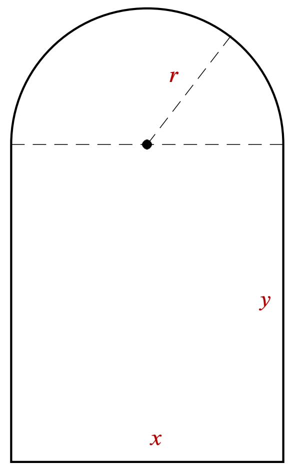
Como $A''(x) = -2\pi < 0$, se trata en efecto de un máximo; además $y = 25 - \pi\dfrac{25}{\pi} = 0$, es decir, el área máxima se obtiene cuando el terreno tiene la forma circular.

Éste fue un típico problema isoperimétrico, en el que se pide hallar una figura de área máxima teniendo el perímetro fijo, como se cuenta que se construyó la ciudad de Cartago sobre el máximo terreno que se pudiese abarcar con una cuerda hecha a partir de una piel de vaca.

□

Ejemplo 10.1.4 *Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de* 10 *m.*

▼ Un croquis de la ventana es el siguiente:



Si A es el área que deseamos que sea máxima y P es el perímetro de la ventana, entonces

$$A = xy + \frac{1}{2}\pi r^2 \ \& \ P = x + 2y + \pi r.$$

Pero debido a que $r = \dfrac{x}{2}$ y a que $P = 10$:

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \ \& \ 10 = x + 2y + \pi\left(\frac{x}{2}\right);$$
$$A = xy + \frac{\pi}{8}x^2 \ \& \ 10 = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y.$$

Es decir, tenemos una función de dos variables $\left(A = xy + \dfrac{\pi}{8}x^2\right)$ y una ecuación $\left[x\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2y = 10\right]$. De la ecuación despejamos la variable y para luego sustituirla en la función A.

$$\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + 2y = 10 \ \Rightarrow \ 2y = 10 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{2}\left[10 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x\right] =$$
$$= \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2+\pi}{2}\right)x \ \Rightarrow \ y = 5 - \frac{2+\pi}{4}x;$$

sustituyendo ahora en A:

$$A(x) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 = x\left(5 - \frac{2+\pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = 5x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 =$$
$$= \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{2+\pi}{4}x^2 + 5x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2+\pi}{4}\right)x^2 + 5x =$$
$$= \frac{\pi - 2(2+\pi)}{8}x^2 + 5x = \frac{\pi - 4 - 2\pi}{8}x^2 + 5x =$$
$$= \frac{-\pi - 4}{8}x^2 + 5x \ \Rightarrow \ A(x) = -\frac{\pi + 4}{8}x^2 + 5x;$$

$A(x)$ es la función de la variable x que queremos maximizar. Derivando y calculando puntos críticos:

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{8}(2x) + 5 = -\frac{\pi+4}{4}x + 5;$$
$$A'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{\pi+4}{4}x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi+4}{4}x = 5 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{20}{\pi+4}.$$

Entonces, $A(x)$ tiene un punto crítico en $x_1 = \dfrac{20}{\pi+4}$.

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{4}x + 5 \;\Rightarrow\; A''(x) = -\frac{\pi+4}{4} \text{ para cada } x \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; A''(x_1) = -\frac{\pi+4}{4} \;\Rightarrow\; A''(x_1) < 0.$$

$A(x)$ tiene un máximo local estricto en $x_1 = \dfrac{20}{\pi+4}$.

Entonces el área A de la ventana es máxima cuando $x = \dfrac{20}{\pi+4}$ m, para la cual

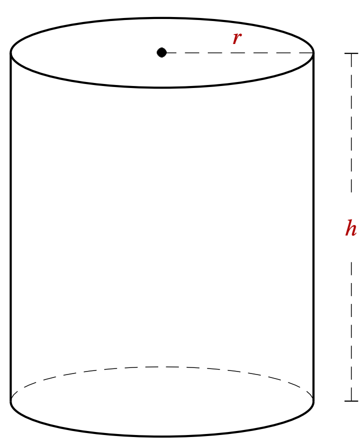
$$y = 5 - \frac{2+\pi}{4}x = 5 - \left(\frac{\pi+2}{4}\right)\left(\frac{20}{\pi+4}\right) = 5 - \frac{5(\pi+2)}{\pi+4} =$$
$$= 5\left(1 - \frac{\pi+2}{\pi+4}\right) = 5\left(\frac{\pi+4-\pi-2}{\pi+4}\right) = 5\left(\frac{2}{\pi+4}\right) = \frac{10}{\pi+4};$$

es decir, cuando $x = \dfrac{20}{\pi+4}$ m y cuando $y = \dfrac{10}{\pi+4}$ m. Vemos que $y = \dfrac{x}{2}$.

□

Ejemplo 10.1.5 *Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal con tapa que tenga una superficie total de 80 cm^2. Determine sus dimensiones de modo que tenga el mayor volumen posible.*

▼ La figura del cilindro es la siguiente:



Se desea maximizar el volumen $V = \pi r^2 h$ que depende de dos variables r & h.
Se sabe que el área total $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ debe ser igual a 80 cm^2.
Es decir, se sabe que $2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$.
Tenemos entonces:

Una función $V = \pi r^2 h$;

Una ecuación $2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$.

De la ecuación despejamos una de las variables (la que nos convenga) para sustituirla en la función. Conviene despejar h ya que para r se obtiene una ecuación cuadrática.

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 80 \Rightarrow \pi r^2 + \pi r h = 40 \Rightarrow \pi r h = 40 - \pi r^2 \Rightarrow h = \frac{40 - \pi r^2}{\pi r}.$$

Sustituyendo en V obtendremos el volumen V como función de una única variable: r

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\dfrac{40 - \pi r^2}{\pi r}\right) = r(40 - \pi r^2) \Rightarrow V(r) = 40r - \pi r^3$ que es la función a maximizar.

Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$\begin{aligned} V'(r) &= 40 - 3\pi r^2; \\ V'(r) &= 0 \Leftrightarrow 40 - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{40}{3\pi} \approx 4.2441 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = \pm\sqrt{4.2441} \approx \pm 2.0601. \end{aligned}$$

En el contexto del problema se ignora el valor negativo de r y sólo nos importa $r_1 \approx 2.0601$;

$$V'(r) = 40 - 3\pi r^2 \Rightarrow V''(r) = -6\pi r;$$
$$V''(r_1) = -6\pi r_1 \approx -6\pi(2.0601) < 0.$$

Por lo anterior, la función $V(r)$ tiene un máximo cuando $r = 2.0601$.

La altura h del cilindro entonces es

$$h_1 = \frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} \approx \frac{40 - \pi(2.0601)^2}{\pi(2.0601)} \approx 4.1203.$$

Por lo tanto, las dimensiones del cilindro con volumen máximo son

$$r_1 \approx 2.0601 \text{ cm } \ \& \ h_1 \approx 4.1203 \text{ cm}.$$

Observamos que $h_1 = 2r_1$, pues

$$\frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} = 2r_1 \Leftrightarrow 40 - \pi r_1^2 = 2\pi r_1^2 \Leftrightarrow 40 = 3\pi r_1^2 \Leftrightarrow r_1^2 = \frac{40}{3\pi}, \text{ que es el caso.}$$

□

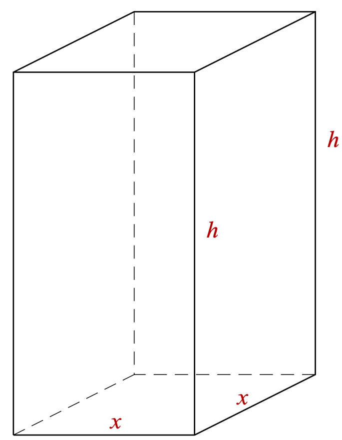
Ejemplo 10.1.6 *Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar* $12\,000$ $pies^3$ *de agua. Si el concreto para construir la base y los lados tiene un costo de* \$100 *por* pie^2 *y el material para construir la tapa cuesta* \$200 *por* pie^2 *¿cuáles son las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción?*

▼ ¿Qué se quiere en el problema?

Determinar las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción.

Suponiendo que las dimensiones de la cisterna son: x pies el lado de la base cuadrada y h pies su altura. ¿Cuál es el costo de su construcción?

La siguiente figura representa a la cisterna:



Para encontrar las dimensiones (x & h) que minimizan el costo de su construcción se necesita la expresión del costo de la cisterna. Usamos la tabla siguiente:

	Costo unitario (\$) por pie^2	*Área (pie*^{2}*)*	*Costo total* (\$)
Base	100	x^2	$100x^2$
Tapa	200	x^2	$200x^2$
Caras laterales	100	$4xh$	$400xh$
	Costo de la cisterna: $300x^2 + 400xh$		

El costo total de la contrucción de la cisterna es:

$$C = 300x^2 + 400xh \text{ pesos} .$$

En el problema aparece la siguiente restricción: el volumen de la cisterna debe ser igual a 12 000 pies^3, es decir, que $x^2h = 12\,000$.
Tenemos pues:
Una función $C = 300x^2 + 400xh$ y una ecuación $x^2h = 12\,000$.
De la ecuación despejamos una de las variables (la que más convenga) para sustituirla en la función.
Conviene despejar h.

$$x^2h = 12\,000 \Rightarrow h = \frac{12\,000}{x^2} .$$

Sustituyendo en la función se obtiene

$$C = 300x^2 + 400xh = 300x^2 + 400x\left(\frac{12\,000}{x^2}\right) ;$$

$$C(x) = 300x^2 + \frac{4\,800\,000}{x} .$$

Ésta es la función (de una sola variable: x) que se quiere minimizar.

$$C(x) = 300x^2 + 4\,800\,000x^{-1} \Rightarrow C'(x) = 600x - 4\,800\,000x^{-2} .$$

Derivando y calculando sus puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 600x - \frac{4\,800\,000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 600x = \frac{4\,800\,000}{x^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{4\,800\,000}{600} = 8\,000 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8\,000} = 20\,.$$

Es decir, la función $C(x)$ tiene un punto crítico en $x = 20$. Ahora bien

$$C'(x) = 600x - 4\,800\,000x^{-2} \Rightarrow C''(x) = 600 + 9\,600\,000x^{-3} > 0 \text{ para cualquier } x > 0\,.$$

Lo cual implica que el punto crítico es un mínimo para $C(x)$ (por el criterio de la segunda derivada). El costo C de la cisterna es mínimo cuando $x = 20$ pies y por tanto

$$h = \frac{12\,000}{x^2} = \frac{12\,000}{(20)^2} = \frac{12\,000}{400} = 30\,.$$

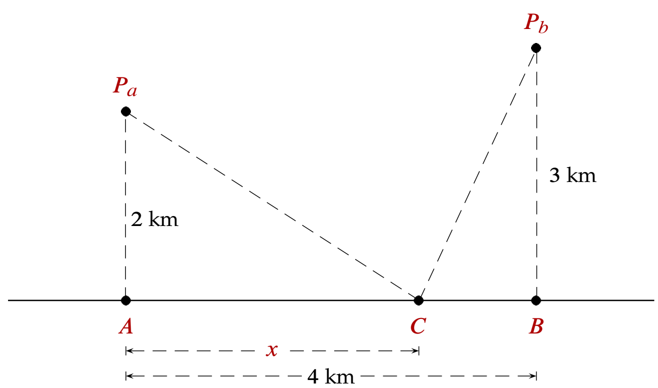
Esto es, el costo mínimo es cuando $x = 20$ pies y $h = 30$ pies. Con lo cual:

$$\begin{aligned} C &= 300x^2 + 400xh\,; \\ C_{\text{min}} &= C(20) = 300(20)^2 + 400(20)(30) = 120\,000 + 240\,000\,; \\ C_{\text{min}} &= \$360\,000\,. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 10.1.7 *Dos poblados P_a y P_b están a 2 km y 3 km, respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una línea de transmisión, los cuales están a 4 km uno del otro. Si los dos poblados se van a conectar con un cable a un mismo punto de la línea, ¿cuál debe ser la ubicación de dicho punto para utilizar el mínimo de cable?*

▼



Sea C el punto de conexión ubicado, digamos, a x km del punto A y por supuesto a $4 - x$ km del punto B.
Si l es la longitud del cable utilizado para conectar P_a y P_b con C, entonces:

$$l = \overline{P_aC} + \overline{P_bC} = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(4 - x)^2 + 3^3}\,.$$

La función a minimizar es:

$$l(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{(4-x)^2+9} = (x^2+4)^{\frac{1}{2}} + \left[(4-x)^2+9\right]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$\begin{gathered} l\,'(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}2x + \frac{1}{2}\left[(4-x)^2+9\right]^{-\frac{1}{2}}2(4-x)(-1)\,; \\ l\,'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}}\,; \\ l\,'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; x\sqrt{(4-x)^2+9} = (4-x)\sqrt{x^2+4}\,. \end{gathered}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{gathered} x^2[(4-x)^2+9] = (4-x)^2(x^2+4) \;\Rightarrow\; x^2(4-x)^2 + 9x^2 = x^2(4-x)^2 + 4(4-x)^2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; 9x^2 = 4(4-x)^2 \;\Rightarrow\; 9x^2 = 4(16-8x+x^2) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; 9x^2 = 64 - 32x + 4x^2 \;\Rightarrow\; 5x^2 + 32x - 64 = 0\,. \end{gathered}$$

Esta última ecuación tiene por soluciones:

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4(5)(-64)}}{2(5)} = \frac{-32 \pm \sqrt{2304}}{10} = \frac{-32 \pm 48}{10}\,.$$

De donde se obtienen dos puntos críticos que son:

$$x_1 = \frac{-32+48}{10} = \frac{16}{10} = 1.6 \text{ así como } x_2 = \frac{-32-48}{10} = \frac{-80}{10} = -8\,.$$

Claramente el valor $x_2 = -8 < 0$ es descartado y sólo consideramos $x_1 = 1.6$.

Ya que

$$l\,''(x) = \frac{4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9}{[(4-x)^2+9]^{\frac{3}{2}}}\,,$$

entonces $l\,''(x) > 0$ para cada x. En particular $l\,''(1.6) > 0$, por lo que $l(x)$ es mínima cuando $x = 1.6$ km.

Puesto que $0 \le x \le 4$, calculemos los números $l(0)$, $l(1.6)$ y $l(4)$ a manera de ejemplo:

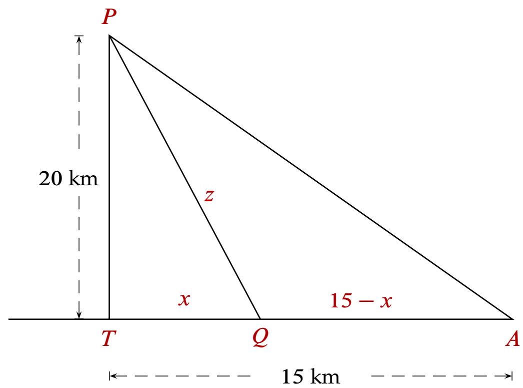
$$\begin{gathered} l(0) = \sqrt{0^2+4} + \sqrt{(4-0)^2+9} = 2 + \sqrt{25} = 2 + 5 = 7\,; \\ l(1.6) = \sqrt{(1.6)^2+4} + \sqrt{(4-1.6)^2+9} = \sqrt{6.56} + \sqrt{14.76} \approx 6.4\,; \\ l(4) = \sqrt{4^2+4} + \sqrt{(4-4)^2+9} = \sqrt{20} + 3 \approx 7.5\,. \end{gathered}$$

Se ve pues que $l(x)$ es menor cuando $x = 1.6$ km, siendo la longitud mínima del cable igual a 6.4 km aproximadamente.

□

Ejemplo 10.1.8 *Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de 2 000 000 de dólares y en tierra es de 1 000 000, ¿a qué distancia hacia el este debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?*

▼ Usamos la siguiente figura:



Consideremos que la plataforma está en P y que T es el punto de la playa más cercano a ella; que A es donde están los tanques de almacenamiento y Q es el punto de la playa donde debe de salir el oleoducto submarino.

Si x representa la distancia del punto T al punto Q, entonces considerando el triángulo rectángulo PTQ:

$$z^2 = x^2 + (20)^2 \;\Rightarrow\; z = \sqrt{x^2 + 400}\,,$$

que es la porción de oleoducto submarino; $\overline{QA} = 15 - x$ es la porción de oleoducto en tierra.

Es importante notar que $0 \le x \le 15$.

El costo de construir z kilómetros de oleoducto submarino, a razón de 2 000 000 de dólares por km es de $2z$ millones de dólares y el costo de construir $15-x$ km de oleoducto terrestre, a razón de 1 000 000 de dólares por km es $1\cdot(15-x)$ millones de dólares. Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto (en millones de dólares) es

$$C = 2z + (15 - x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x \;\Rightarrow\; C(x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x = 2(x^2 + 400)^{\frac{1}{2}} + 15 - x$$

que es la función a minimizar. Derivando y calculando puntos críticos:

$$C\,'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}}2x - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 1\,;$$

$$C\,'(x) = 0 \;\Rightarrow\; C\,'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 400}} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x = \sqrt{x^2 + 400} \;\Rightarrow\; 4x^2 = x^2 + 400 \;\Rightarrow\; 3x^2 = 400 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 = \frac{400}{3} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{20}{\sqrt{3}}\,.$$

Por ser $x \geq 0$ podemos descartar $x = -\dfrac{20}{\sqrt{3}} < 0$ y solamente analizaremos el costo en $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

$$C'(x) = 2x(x^2+400)^{-\frac{1}{2}} - 1\,;$$
$$C''(x) = 2x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+400)^{-\frac{3}{2}}2x + 2(x^2+400)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-2x^2}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{(x^2+400)^{\frac{1}{2}}}\,;$$
$$C''(x) = \frac{-2x^2 + 2(x^2+400)}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}} = \frac{800}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Vemos que $C''(x) > 0$ para cualquier x.

Por lo cual $C(x)$ tiene un mínimo local estricto en $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

Ahora bien, no debemos olvidar que $0 \leq x \leq 15$.

¿Cuál será el costo $C(x)$ en los casos extremos $x = 0$ y en $x = 15$?

Ya que $C(x) = 2\sqrt{x^2+400} + 15 - x$, entonces

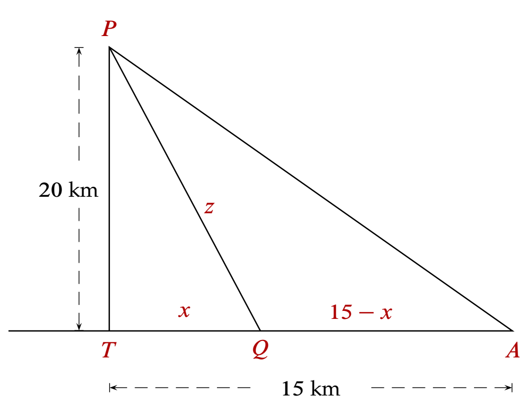
$$C(0) = 2\sqrt{400} + 15 = 55\,;$$
$$C\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{400}{9} + 400} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{400+3\,600}{9}} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{4\,000}{9}} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{4\,000}}{3} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 45.6167\,;$$
$$C(15) = 2\sqrt{225+400} + 15 - 15 = 50\,.$$

El costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 45.6167 millones de dólares y se tiene cuando $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \approx 11.547$ km.

□

Ejemplo 10.1.9 *Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada kilómetro de oleoducto en el mar es de 3 000 000 y en tierra es de 2 000 000, ¿qué tan alejado debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?*

▼ Usamos la siguiente figura:



El costo de construir z km de oleoducto submarino, a razón de 3 000 000 de dólares por km, es de $3z$ millones de dólares y el costo de construir $15 - x$ km de oleoducto terrestre, a razón de 2 000 000 de dólares por km, es $2(15 - x)$ millones de dólares.

Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto es (en millones de dólares)

$$C = 3z + 2(15 - x) = 3\sqrt{x^2 + 400} + 2(15 - x)\,;$$
$$C(x) = 3\sqrt{x^2 + 400} + 2(15 - x) = 3(x^2 + 400)^{\frac{1}{2}} + 30 - 2x\,;$$

que es la función a minimizar. Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$C'(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}}2x - 2 = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 2\,;$$
$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x = 2\sqrt{x^2 + 400} \Rightarrow 9x^2 = 4(x^2 + 400) \Rightarrow 5x^2 = 1\,600 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1\,600}{5} = 320 \Rightarrow x = \pm\sqrt{320}\,.$$

Por ser $x \geq 0$, podemos descartar $x = -\sqrt{320}$.

Pero cuidado, $x = \sqrt{320} \approx 17.889$ no cumple con la restricción $0 \leq x \leq 15$. Esto nos indica que la función costo $C(x)$ no tiene puntos críticos en el intervalo cerrado $[0, 15]$, por lo cual no hay mínimo local estricto (ni máximo) para el costo $C(x)$ en $[0, 15]$.

Esto es, la función $C(x)$ es estrictamente creciente o decreciente en el intervalo $[0, 15]$.

Por lo tanto, el costo mínimo aparece en uno de los extremos del intervalo y, por ende, el costo máximo aparece en el otro extremo.

Valuamos pues $C(x)$ en $x = 0$ y en $x = 15$.

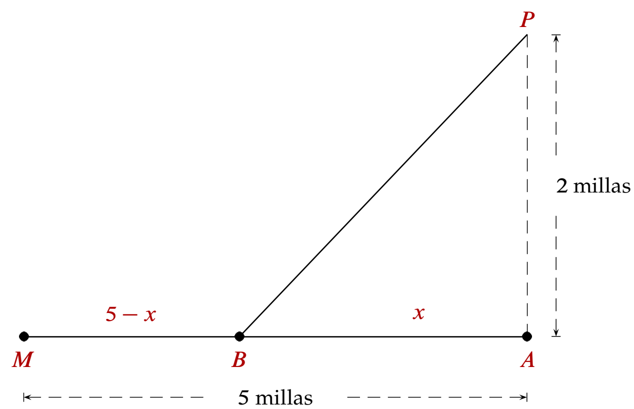
$$C(x = 0) = 3\sqrt{400} + 2(15) = 3(20) + 30 = 90\,;$$
$$C(x = 15) = 3\sqrt{225 + 400} + 2(0) = 3\sqrt{625} = 3(25) = 75\,.$$

Por lo tanto, el costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 75 000 000 de dólares y se obtiene cuando todo el oleoducto es submarino y sale a la playa precisamente donde están los tanques de almacenamiento.
Notamos además que en $[0, 15]$ la función $C(x)$ es decreciente, ya que $C'(x) < 0$ si $0 \leq x < \sqrt{320} \approx 17.889$.

□

Ejemplo 10.1.10 *En un concurso de resistencia, los participantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla (tierra firme) que está a 5 millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar 4 millas por hora y correr 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?*

▼ Usamos la figura siguiente:



Sean P el punto de partida, A el punto de la playa más cercano a P, M la meta y B el punto de la playa donde el concursante sale del mar.
Es decir: $\overline{PA} = 2$ millas, $\overline{MA} = 5$ millas, $\overline{PB}$ es el recorrido nadando y $\overline{BM}$ es el recorrido corriendo por la playa.
Si suponemos que B está a x millas de A, entonces

$$\overline{BA} = x \;\Rightarrow\; \overline{MB} = 5 - x \;\&\; \overline{BP} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Si el concursante nada $\overline{PB} = \sqrt{x^2 + 4}$ millas a razón de 4 millas por hora, entonces el tiempo que tarda nadando es $t_n = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{4}$ horas.
Si el concursante corre $\overline{MB} = 5 - x$ millas a razón de 10 millas por hora, entonces el tiempo que tarda corriendo es $t_c = \dfrac{5 - x}{10}$ horas.
El tiempo total de recorrido del concursante es

$$t = t_n + t_c = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + \frac{5 - x}{10}.$$

Es decir,

$$t(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{x}{10} \text{ con } 0 \le x \le 5,$$

que es la función que debemos minimizar.

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$
\begin{aligned}
t'(x) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+4)^{-1/2}2x - \frac{1}{10} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{10};\\
t'(x) = 0 \;&\Rightarrow\; \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{10} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{10} \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; 10x = 4\sqrt{x^2+4} \;\Rightarrow\; (10x)^2 = 4^2(x^2+4) \;\Rightarrow\; 100x^2 = 16x^2 + 64 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; 100x^2 - 16x^2 = 64 \;\Rightarrow\; 84x^2 = 64 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{64}{84} \approx 0.762 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; x \approx \pm\sqrt{0.762} \approx \pm 0.87.
\end{aligned}
$$

Entonces $t(x)$ tiene un punto crítico en $x \approx 0.87$ millas.

Ya que $t''(x) = \dfrac{1}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$, entonces $t''(x) > 0$ para cada x. En particular $t''(0.87) > 0$ por lo que $tx)$ es mínimo cuando $x = 0.87$ millas.
A manera de ejemplo valuamos $t(x)$ en $x = 0.87$, $x = 0$ & $x = 5$, para comparar los tiempos obtenidos.

$$
\begin{aligned}
t(x) &= \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{5-x}{10};\\
t(0.87) &= \frac{\sqrt{(0.87)^2+4}}{4} + \frac{5-0.87}{10} \approx 0.958 \text{ hora};\\
t(0) &= \frac{\sqrt{0^2+4}}{4} + \frac{5-0}{10} = 1 \text{ hora};\\
t(5) &= \frac{\sqrt{5^2+4}}{4} + \frac{5-5}{10} \approx 1.34629 \text{ h}.
\end{aligned}
$$

Luego el tiempo mínimo es 0.958 de hora, esto es 57 min 29.727 s.

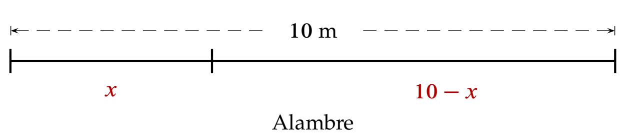
□

Ejemplo 10.1.11 *Un trozo de alambre de* 10 *m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea:*

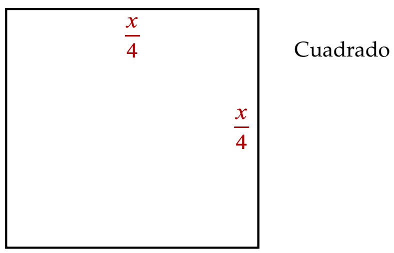
1. *Máxima.*
2. *Mínima.*

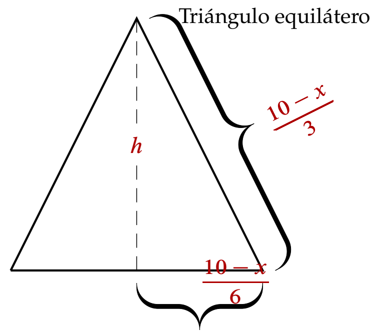
Interpretar prácticamente los resultados.

▼ Usando la siguiente figura



La parte x del alambre se usa para el cuadrado, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{x}{4}$.
La parte $10 - x$ del alambre se usa para el triángulo equilátero, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{10-x}{3}$.





De la figura del triángulo, usando el teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente relación:

$$h^2 + \left(\frac{10-x}{6}\right)^2 = \left(\frac{10-x}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{9}(10-x)^2 - \frac{1}{36}(10-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{36}(10-x)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x).$$

El área del cuadrado es

$$A_C(x) = \frac{x^2}{16}.$$

El área del triángulo es

$$A_T(x) = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(10-x) \times \frac{\sqrt{3}}{6}(10-x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

El área de ambas figuras es

$$A(x) = A_T(x) + A_C(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2 + \frac{x^2}{16}.$$

Ésta es la función a la cual deseamos calcular sus máximo y mínimo.

Nótese que el dominio de esta función es $D_A = [0, 10]$ (la longitud del alambre es de 10 m).

Calculamos la primera derivada:

$$A'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{36} \times 2(10-x)(-1) = \frac{1}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{18}(10-x) =$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18}x = \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

Calculamos el punto crítico:

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0 \Rightarrow x = \frac{72(5\sqrt{3})}{9(9+4\sqrt{3})} = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 4.34965.$$

Puesto que al calcular la segunda derivada obtenemos:

$$A''(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{72} > 0,$$

entonces el punto crítico anterior es un mínimo local.
Calculamos la función $A(x)$ en los extremos de su dominio:

$$A(0) = \frac{\sqrt{3}}{36}100 \approx 4.81125 \text{ y } A(10) = \frac{100}{16} = 6.25.$$

Vemos entonces que la máxima área encerrada es cuando $x = 10$, es decir, cuando sólo se construye el cuadrado.
Y la mínima área encerrada es cuando $x = 4.34965$, caso en el que se construyen ambas figuras.

□

Ejemplo 10.1.12 *Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.*

▼ Consideramos un cilindro recto con base circular de radio r y altura h (inscrito en una esfera). Suponiendo (imaginando) que tanto la esfera como el cilindro son transparentes y que sólo sus contornos se ven, esto es, si consideramos una sección transversal del cuerpo, la figura representativa de ellos es la misma que se tiene para una circunferencia de radio R y un rectángulo inscrito en ella de base $2r$ y altura h.

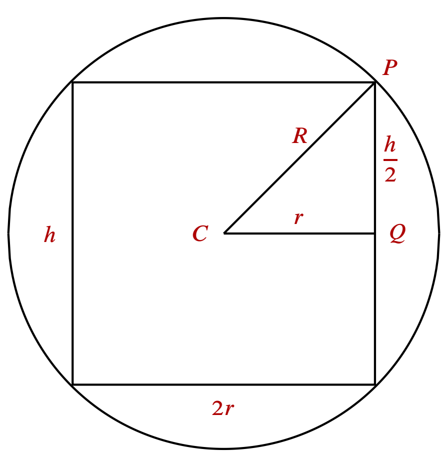
El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h$$

que es una función de dos variables (r y h).
En el triángulo rectángulo CQP (por el teorema de Pitágoras) obtenemos

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

que es una ecuación representativa de una restricción, (la esfera es de radio R).



Tenemos pues una función:

$$V = \pi r^2 h$$

y por el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 .$$

De la ecuación despejaremos una de las variables para luego sustituirla en la función.
¿Cuál variable se despeja? La que más convenga.
En este caso conviene despejar r^2, a saber:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} .$$

Sustituyendo en la función:

$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi(R^2 h - \frac{1}{4}h^3) .$$

Así tenemos (R es una constante):

$$V(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{1}{4}h^3\right) ;$$

que es la función a maximizar. Derivando para obtener puntos críticos:

$$V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) ;$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) = 0 \Rightarrow R^2 - \frac{3}{4}h^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}h^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow h = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}R .$$

Esto implica que la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos, uno para $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ y el otro para $h = -\frac{2}{\sqrt{3}}R$. Pero este último $\left(h = -\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$ no tiene significado en el contexto del problema por ser un valor negativo (que daría lugar a una altura negativa).
Por lo tanto veamos qué tipo de punto crítico tiene $V(h)$ para $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$:

$$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 ;$$

$$V''(h) = -\frac{3}{2}\pi h < 0, \text{ para cualquier } h > 0 .$$

Luego $V(h)$ tiene un máximo local estricto cuando $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$. Además

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}R^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}R .$$

Por lo tanto el volumen del cilindro es máximo cuando

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}R \text{ y } r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\,.$$

Dicho volumen máximo es

$$V_{max} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\right)^2 (\frac{2}{\sqrt{3}}R) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3\,.$$

Notemos que

$$V(h) = \pi h(R^2 - \frac{1}{4}h^2) \text{ con } 0 \le h \le 2R\,.$$

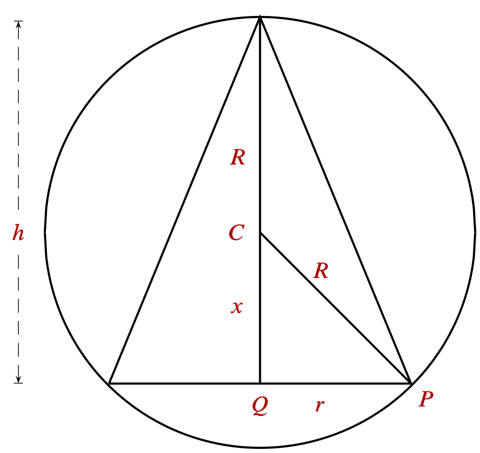
También que $h = 0 \Rightarrow V(h = 0) = 0$ y además que $h = 2R \Rightarrow V(h = 2R) = 0$.

□

Ejemplo 10.1.13 *Determinar las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.*

▼ Consideramos una esfera de radio $R > 0$ y un cono que tiene base circular de radio $r > 0$ y altura $h > 0$.

Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje se muestra en el croquis siguiente:



El volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

que es una función de dos variables (r & h).
En el triángulo rectángulo CQP, por el teorema de Pitágoras, vemos que $R^2 = x^2 + r^2$ con $x = h - R$, por lo que $R^2 = (h - R)^2 + r^2$, es decir, la ecuación asociada a la restricción en el problema (que la esfera sea de radio R).

Tenemos pues una función :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

y una ecuación:

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2 .$$

De la ecuación despejamos (por conveniencia) r^2

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2 = R^2 - h^2 + 2hR - R^2 = 2hR - h^2 .$$

Y sustituyendo en la función:

$$V = \frac{1}{3}\pi(2hR - h^2)h .$$

Así tenemos (R es una constante):

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3) ,$$

que es la función a maximizar. Derivando para obtener puntos críticos:

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) ;$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = 0 \Rightarrow h(4R - 3h) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ o bien } h = \frac{4}{3}R .$$

Esto implica que la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos, uno para $h = 0$ y otro para $h = \frac{4}{3}R$. En el contexto del problema, el caso $h = 0$ queda descartado (ya que el volumen sería $V = 0$). Sólo consideramos el caso en que $h = \frac{4}{3}R$.

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) \Rightarrow V''(h) = \frac{1}{3}\pi(4R - 6h) .$$

Así:

$$V''(h = \frac{4}{3}R) = \frac{1}{3}\pi\left[4R - 6\left(\frac{4}{3}R\right)\right] = \frac{1}{3}\pi[4R - 8R] = -\frac{4}{3}\pi R < 0 .$$

Luego $V(h)$ tiene un máximo local estricto cuando $h = \frac{4}{3}R$.

Además,

$$r = \sqrt{R^2 - (h - R)^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{4}{3}R - R)^2} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}R^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}R = \frac{2\sqrt{2}}{3}R .$$

Por lo tanto, el volumen del cono es máximo cuando $h = \frac{4}{3}R$ y cuando $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.
Dicho volumen máximo es:

$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3 .$$

Notemos que

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h) \text{ con } 0 \le h \le 2R .$$

Además,

$$h = 0 \;\Rightarrow\; V(h = 0) = 0$$

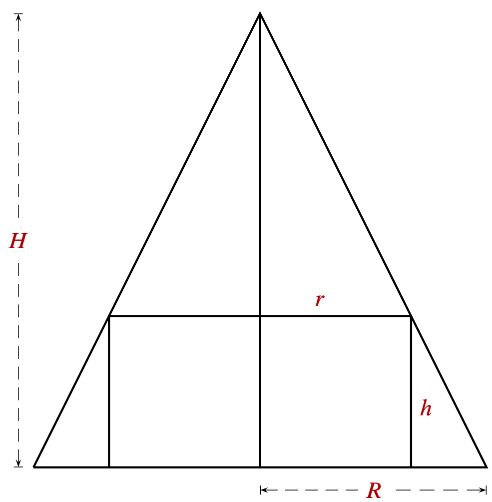
así como

$$h = 2R \;\Rightarrow\; V(h = 2R) = 0\,.$$

□

Ejemplo 10.1.14 *Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H.*

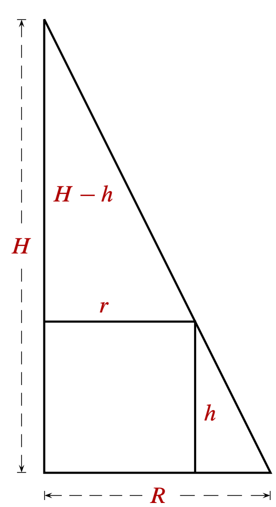
▼ Consideramos que el cilindro tiene radio r y altura h.
Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje, se muestra en el croquis siguiente:



El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h\,,$$

que es una función de dos variables (r y h).
Para tener una ecuación con las mismas variables r, h veamos los dos triángulos semejantes que hay en la figura.



Por semejanza se cumple la proporción:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-h}\,.$$

De donde se obtiene la ecuación: $R(H-h) = rH$, de la cual despejaremos una de las variables para después sustituirla en la función volumen.

Despejaremos r:

$$rH = R(H-h) \;\Rightarrow\; r = \frac{R}{H}(H-h)\,;$$

sustituyendo

$$V = \pi r^2 h = \pi\left[\frac{R}{H}(H-h)\right]^2 h = \pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 h = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2-2Hh+h^2)h\,.$$

Así tenemos:

$$V(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2h - 2Hh^2 + h^3)\,,$$

que es la función a maximizar. Derivamos para obtener los puntos críticos:

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2-4Hh+3h^2) = \frac{\pi R^2}{H^2}(3h^2-4Hh+H^2)\,;$$
$$V'(h) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\pi R^2}{H^2}\left(3h^2-4Hh+H^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; 3h^2-4Hh+H^2 = 0\,.$$

Tenemos que:

$$h = \frac{4H \pm \sqrt{(-4H)^2 - 4(3)H^2}}{2(3)} = \frac{4H \pm \sqrt{16H^2-12H^2}}{6} =$$
$$= \frac{4H \pm \sqrt{4H^2}}{6} = \frac{4H \pm 2H}{6}\,.$$

Entonces:

$$h_1 = \frac{4H+2H}{6} = \frac{6H}{6} = H$$

y

$$h_2 = \frac{4H-2H}{6} = \frac{2H}{6} = \frac{1}{3}H\,.$$

Luego la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos: uno cuando $h = h_1 = H$ y otro cuando $h = h_2 = \frac{1}{3}H$.

$V'(h) = \dfrac{\pi R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2) \;\Rightarrow\; V''(h) = \dfrac{\pi R^2}{H^2}(6h - 4H).$
Así:

$$V''(h_1) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h_1 - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6H - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}2H > 0\,;$$

$V''(h_1) > 0 \;\Rightarrow\; V(h)$ tiene un mínimo local estricto para $h_1 = H$.

Además:

$$V''(h_2) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h_2 - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}\left[6(\frac{1}{3}H) - 4H\right] = \frac{\pi R^2}{H^2}(2H - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}(-2H) < 0\,;$$

$V''(h_2) = -\dfrac{2\pi R^2}{H} < 0 \;\Rightarrow\; V(h)$ tiene un máximo local estricto para $h_2 = \dfrac{H}{3}$.

Por lo tanto el volumen $V(h)$ es máximo cuando $h = h_2 = \dfrac{1}{3}H$.
¿Qué sucede en los extremos del intervalo $[0, H]$?
$V(h = 0) = 0$ y $V(h = H) = 0$.
Por lo anterior concluimos que dicho volumen máximo es:

$$\begin{aligned} V_{max} &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(H - \frac{1}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(\frac{2}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{4}{9}H^2\frac{1}{3}H = \\ &= \frac{4}{27}\pi R^2 H\,. \end{aligned}$$

Este volumen máximo se obtiene para el cilindro de altura $h_2 = \dfrac{1}{3}H$
y radio

$$r_2 = \frac{R}{H}(H - h_2) = \frac{R}{H}(H - \frac{1}{3}H) = \frac{2}{3}R\,.$$

□

Ejercicios 10.1.1 *Soluciones en la página 28*

1. Hallar dos números positivos cuya suma sea S y cuyo producto sea máximo.
2. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y cuya suma sea mínima.
3. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y la suma del primero más tres veces el segundo sea mínima.
4. Hallar dos números positivos tales que el segundo número sea el inverso multiplicativo del primero y la suma sea mínima.

5. Hallar dos números positivos tales que el primero más n veces el segundo sumen S y el producto sea máximo.

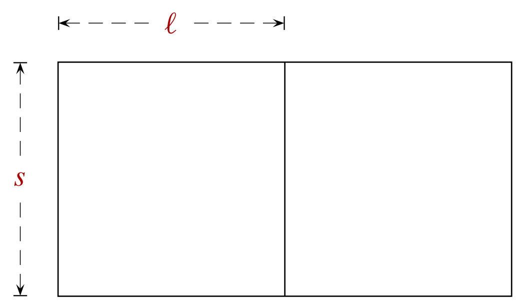
6. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

7. Un granjero que tiene 24 m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en tres corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los tres corrales?

8. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en cuatro corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los cuatro corrales?

9. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en n corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los n corrales?

10. Un ranchero quiere bardear dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno de 300 m^2 de área como se muestra en la figura.



    ¿Cuánto deben medir s & ℓ para que se utilice la mínima cantidad de barda?

11. Un ganadero desea cercar un prado rectangular junto a un río. El prado ha de tener 180 000 m^2 para proporcionar suficiente pasto. ¿Qué dimensiones debe tener el prado para que requiera la menor cantidad de cerca posible, teniendo en cuenta que no hay que cercar en el lado que da al río?

12. Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados.

    ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima?

    ¿Cuál es la mayor área que pueda cercarse con un cable de 800 m?

13. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

14. Se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene L metros de lado, recortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener la caja.

15. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio r.

16. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

17. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de 50 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

18. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

19. Se quiere construir una cisterna con base rectangular y sin tapa, de manera tal que el ancho de la base sea el doble de la altura de la cisterna. Calcular las dimensiones que debe tener la cisterna para que el volumen sea de 20 m^3 y se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

20. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de V m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta B pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta L pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

21. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

22. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

23. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

24. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

25. Demuestre que, de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el menor perímetro es un cuadrado.

26. Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado el que tiene el área máxima es un cuadrado.

27. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 3 pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta 2 pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

28. Halle el punto de la recta $y = -2x + 3$ más cercano al origen.

29. Halle el punto de la recta $y = mx + b$ más cercano al origen.

30. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de P m, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

31. Una pista de entrenamiento consta de dos semicírculos adosados en los lados opuestos de un rectángulo. Si su perímetro es de P m, hallar las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.

32. Un triágulo rectángulo está formado por los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (a, b). Hallar los vértices de modo que su área sea mínima.

33. Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular con tapa y una capacidad para 600 ℓ. Calcular las dimensiones que debe tener para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

    (Considerar que $1\ \ell = 1\ \text{dm}^3$.)

34. Un cilindro circular recto ha de contener V cm^3 de refresco y usar la mínima cantidad posible de material para su construcción. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

35. Determine el volumen máximo posible de un cilindro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo las dos bases circulares, es de 150π m^2.

36. Dos puntos A, B se encuentran en la orilla de una playa recta, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta \$400.00 tender 1 km de tubería en la playa y \$500.00 en el mar. Determine la forma más económica de trazar la tubería desde A hasta C. (No necesariamente debe pasar por B.)

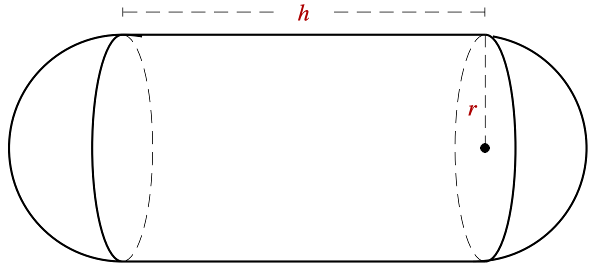
37. Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más próximos estos dos navíos?

38. A las 13:00 horas un barco A se encuentra 20 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

39. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 10 ℓ en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

40. Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1 000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

41. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pies^3?



42. Una página ha de contener 30 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

43. Los costos de la empresa Alfa están dados por la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$, donde x representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1 700 y 1 800 artículos.

    ¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.

44. Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto enfrente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8 km a la derecha y en la misma orilla de C.

    El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible?

45. La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

Soluciones

Soluciones a los ejercicios del capt́ítulo 10

Ejercicios 10.1.1 *Optimización, página 23*

1. $x = \dfrac{S}{2}$ & $y = \dfrac{S}{2}$.
2. $x = \sqrt{P}$ & $y = \dfrac{P}{\sqrt{P}} = \sqrt{P}$.
3. $x = \sqrt{3P}$ & $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{3P}$.
4. $x = 1$ & $y = 1$.
5. $x = \dfrac{S}{2}$ & $y = \dfrac{S}{2n}$.
6. $x = y = z = 10$.
7. $A = 18$ para $x = 3$ & $y = 6$.
8. $A = \dfrac{C^2}{40}$ para $x = \dfrac{C}{10}$ & $y = \dfrac{5}{2}\dfrac{C}{10}$.
9. $A = \dfrac{C^2}{8(n+1)}$ m^2 para $x = \dfrac{C}{2(n+1)}$ & $y = \dfrac{C}{4}$.
10. $s = 20$ & $l = 15$ m.
11. $x = 300$ m & $y = 600$ m.
12. $y = 200$; $x = 2y = 400$ & $A = 80\,000$.
13. Volumen máximo: $V(3) = 108$ cm^3.
14. $V\left(\dfrac{L}{6}\right) = \dfrac{2}{27}L^3$.
15. $x = \dfrac{2}{\sqrt{2}}r = y$.
16. $x = \sqrt[3]{2V}$ & $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.
17. $x = \sqrt[3]{50}$ & $y = \sqrt[3]{50}$.
18. $x = \sqrt[3]{V}$ & $y = \sqrt[3]{V}$.
19. Base cuadrada de lado $2 \times 5^{\frac{1}{3}}$ y con altura $5^{\frac{1}{3}}$.
20. $x = \sqrt[3]{\dfrac{3LV}{4B}}$ & $y = \dfrac{2}{3}\dfrac{B}{L}\left(\dfrac{3LV}{4B}\right)^{\frac{1}{3}}$.
21. $V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1\,000}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ para $x = \sqrt{\dfrac{1\,000}{3}}$ & $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1\,000}{3}}$.
22. $V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.
23. $V = \dfrac{500}{3}\sqrt{\dfrac{500}{3}}$.
24. $V = \dfrac{M}{6}\sqrt{\dfrac{M}{6}}$.
25. $y = \sqrt{A} = x$.
26. $y = \dfrac{P}{4} = x$.
27. $y = \sqrt[3]{5} = x$.
28. $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.
29. $\left(-\dfrac{bm}{1+m^2}, \dfrac{b}{1+m^2}\right)$.
30. $x = \dfrac{2P}{4+\pi}$; $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P}{4+\pi}\right)$.
31. $y = \dfrac{P}{2\pi}$ & $x = \dfrac{\pi}{2}y = \dfrac{P}{4}$.
32. $x = 2a$ & $y = 2b$.
33. $r = \sqrt{\dfrac{300}{\pi}}$ & $h = 2r$.
34. $r = \left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$; $h = 2\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r$.
35. $V = 250\pi$ m^3.
36. El costo es 3 300 pesos.
37. $t = \dfrac{3}{10}$ h.

38. $13 + \dfrac{12}{13}$ h.

39. $r = 1.3365$ & $l = 0$.

40. $r \approx 5.75882$ & $h = r$.

41. $r \approx 1.233$ & $h \approx 4.932$.

42. $x = \sqrt{15}$ & $y = 2x$.

43. Es verdadero, pues el costo es mínimo cuando se venden 1 732.058 artículos.

44. A 2.27 km de C.

45. $x = \dfrac{16}{\pi + 4}$ & $r = \dfrac{8}{\pi + 4} = \dfrac{1}{2}x$.