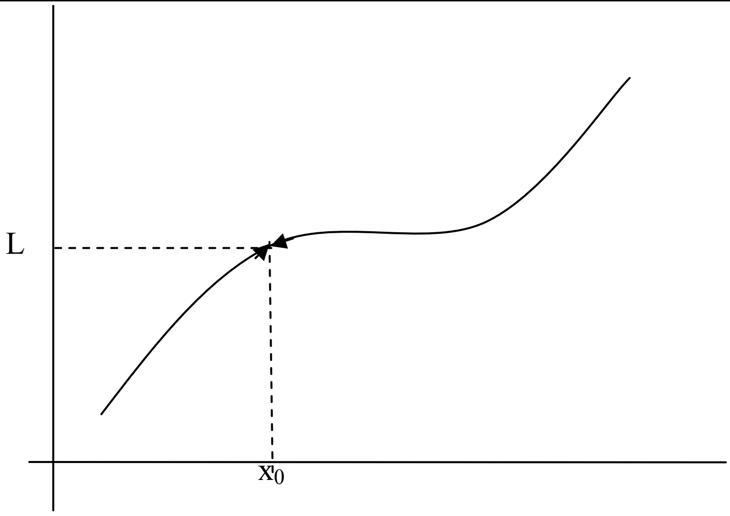
Tema 11. Limite de funciones. Continuidad

1. Límite de una función. Funciones convergentes

La idea intuitiva de límite de una función en un punto es fácil de comprender: es el valor hacia el que se aproxima la función cuando la variable independiente, x, se aproxima a dicho punto.

Ejemplo: sea f(x)=$\frac{1}{(x-1)^2}$ el límite de la función cuando x tiende a 1 es infinito, ya que cuanto más se aproxima x a 1 entonces $(x-1)^2$ más próximo a cero (positivo), y por tanto la función se hace más grande (1/0.00000001=100000000).

Definición: Matemáticamente una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0, y se denota $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ si se cumple que cuanto más se acerca la x a x_0 (tanto a la derecha, x_0^+, como a la izquierda, x_0^-) el valor de la función, f(x) más se aproxima a L



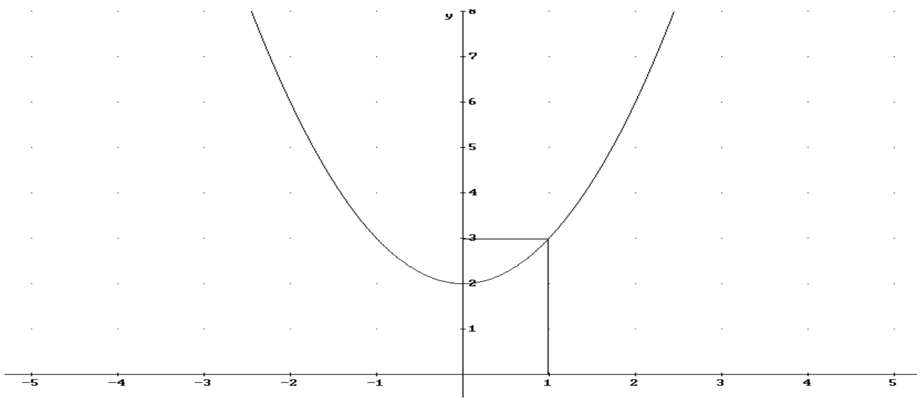
Vamos a considerar dos casos diferentes:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y $f(x_0)=L$ (veremos que es la definición de continua)

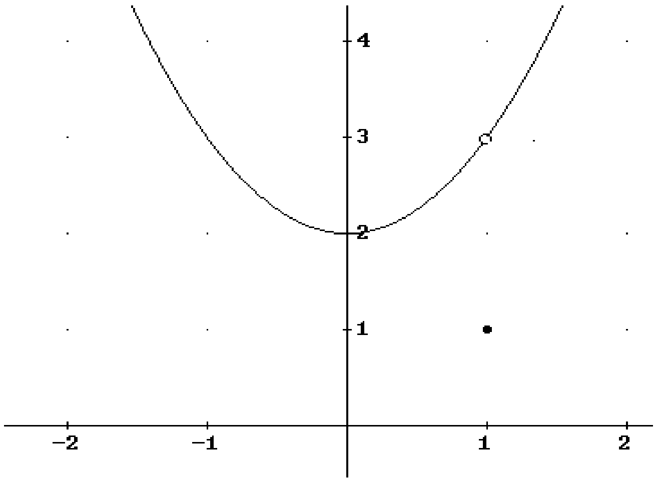
b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ pero $f(x_0) \neq L$

Ejemplo:

a) $f(x)=x^2+2$ → $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$. *Veamos la gráfica de la función:*



b) g(x)= $\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\neq 1 \\ 1 & si \quad x=1 \end{cases}$ → $\lim_{x\to 1} g(x)=3 \quad g(1)=1$



Definición: Dada una función f(x), se dice que es convergente en x_0 si, existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, distinto de $\pm\infty$

Para que f(x) sea convergente en x_0 no es necesario que x_0 pertenezca al dominio, por ejemplo

g(x)=x^2+1 si x≠1 → $\lim_{x\to 1} g(x)=2,\ 1\notin Dom(g(x))$, y la función si es convergente

2. Límites laterales

Existen funciones definidas a trozos, son aquellas que están definidas de diferente manera a lo largo de distintos intervalos de la recta real. En estas funciones, cuando queremos estudiar el límite en los puntos donde cambia la expresión analítica, es necesario calcular los límites laterales, viéndose así la tendencia de la función a ambos lados del punto.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la izquierda, y se denota $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$, si se cumple que cuando nos acercamos al valor de x_0 para x menores que x_0 la función se acerca a L.

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en el entorno a la izquierda de x_0.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la derecha, y se denota $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$, si se cumple que cuando nos acercamos al valor de x_0 para x menores que x_0 la función se acerca a L.

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en todo entorno a la derecha de x_0.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

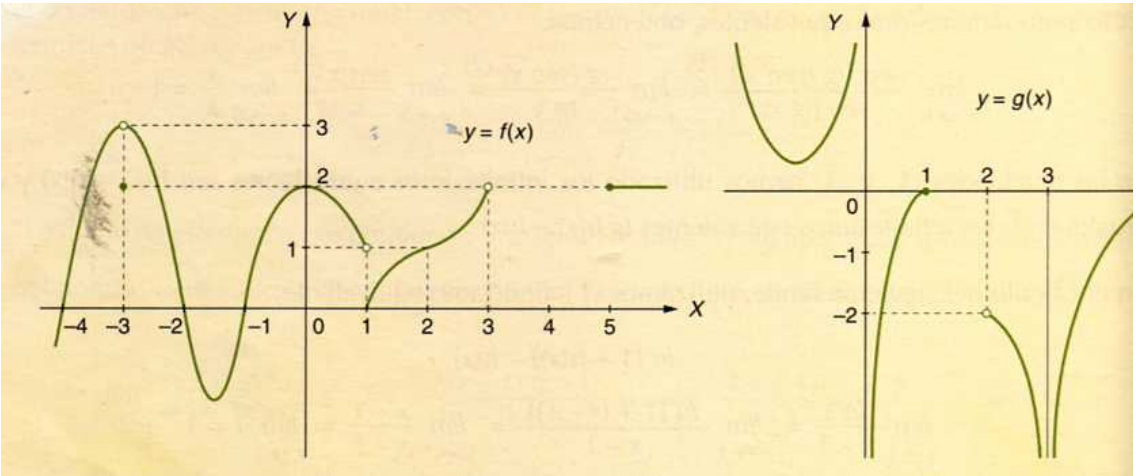
Teorema: El límite de una función f(x) en x_0 existe si, y sólo si, existen los límites laterales y éstos coinciden:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

Este teorema será muy importante en los ejercicios de la PAU donde se nos pide estudiar la continuidad de funciones definidas a trozos. Además, como veremos en el apartado de cálculo de límites, ya que es el método utilizado para resolver las indeterminaciones de los límites del tipo $\frac{k}{0}$

Ejercicio 1. Calcular los límites y valores en la función de las siguientes funciones representadas:



a) f(-3)=2, f(-2)=0, f(0)=2, f(4) 4∉Dom(f(x))

b) $\lim_{x\to -3} f(x)=3$, $\lim_{x\to 0} f(x)=2$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = no\, existe$, $\lim_{x\to 3} f(x) = no\ existe$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1} f(x)=no\ \ existe$, $\lim_{x\to 2} f(x)=1$

c) $\lim_{x\to 3} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 2^+} g(x)=-2$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to -\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$,

$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+} g(x)=no\ existe$, $\lim_{x\to 2} g(x)=no\ existe$

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites a la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & si\ x<-5 \\ 2x^2 & si\ -5\le x<1 \\ \log_2 x & si\ 1\le x<4 \\ 2 & si\ \ x\ge 4 \end{cases}$

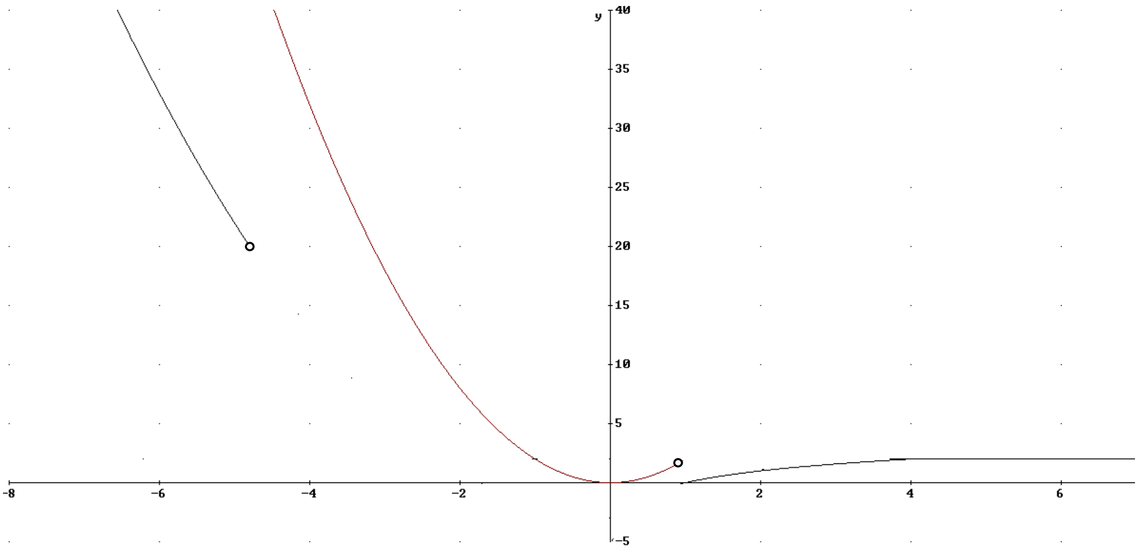
a) $\lim_{x\to -5} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -5^-} f(x) = \lim_{x\to -5^-} x^2-3 = 22 \\ \lim_{x\to -5^+} f(x) = \lim_{x\to -5^+} 2x^2 = 50 \end{cases}$ = no existe al ser los laterales distinto

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \log_2 x=0 \end{cases}$ $=$ no existe al ser los laterales distinto

c) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} \log_2 x=2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 2=2 \end{cases}$ $=2$

Veamos la gráfica de la función:



3. Distintos tipos de límites

3.1 Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical)

En este apartado vamos a estudiar el caso de funciones que cuanto más se aproxima x a un valor x_0, bien por la izquierda, por la derecha o por los dos, la función se hace infinitamente grande (tiende a $+\infty$) o pequeña (tiende a $-\infty$). Cuando esto ocurre se dice que la función f(x) tiene asíntota vertical en $x=x_0$ Veamos los siguientes casos:

Definición: Una función f(x) tiene limite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda si cuando al acercamos a x_0 con $x<x_0$ la función crece de forma infinita. Se escribe como:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$$

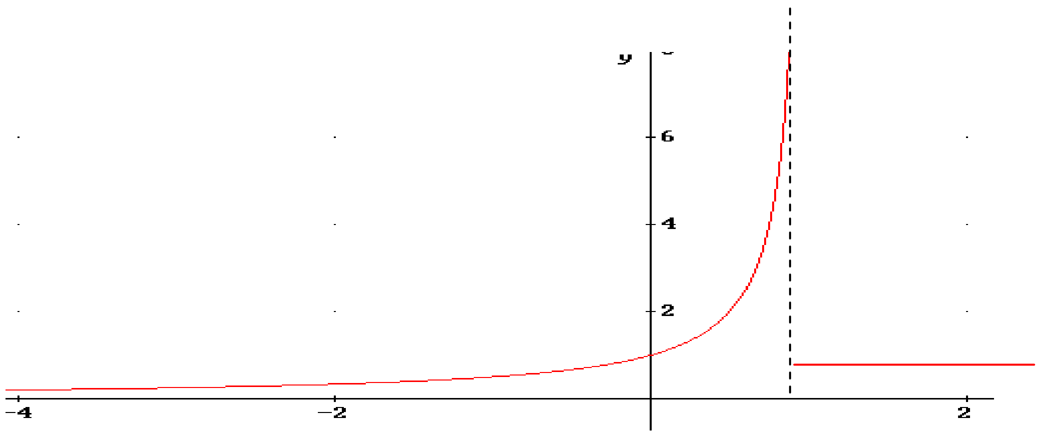
Ejemplo: f(x)= $\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ ya que cuanto más se aproxime x a 1 por la izquierda entonces x-1 más pequeño y positivo y por tanto f(x) más grande. Es decir, cuando $x\to 1^-$ entonces la función $f(x)\to+\infty$.

En cambio $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Cuando esto ocurre la función se aproxima a la asíntota vertical x=1. Es decir cuando la función se aproxima a 1 por la izquierda, ésta se acerca infinitamente a la recta x=1, que es paralela al eje OY. Veamos la gráfica:



Definición: Una función f(x) tiene limite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 por la derecha si cuando al cercamos a x_0 con $x>x_0$ la función crece de forma infinita. Se escribe como:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

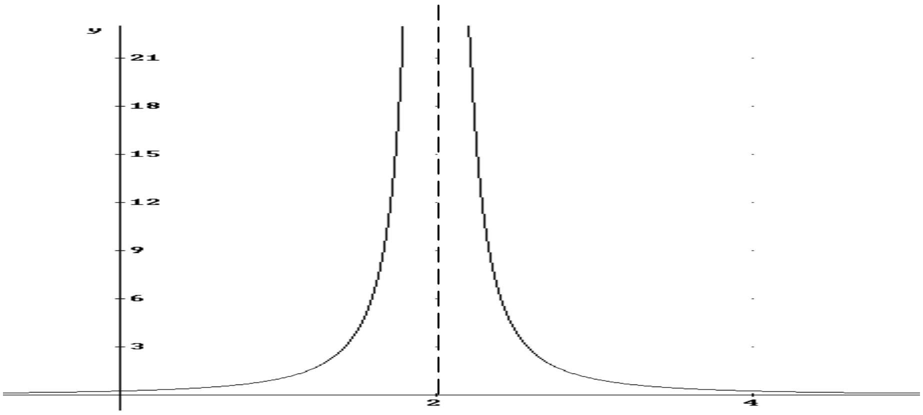
Definición: Una función f(x) tiene limite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 si cuando al cercamos a x_0 con $x>x_0$ y $x<x_0$ la función crece de forma infinita. Esto ocurre cuando los dos límites laterales valen ∞. Se escribe como:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

Ejemplo: f(x)=$\dfrac{1}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \end{cases} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

Veamos la gráfica de la función y así podremos interpretar el significado del límite:



De igual forma que hemos estudiado el límite a +∞ , el límite a -∞ es equivalente., sólo hay que cambiar crecimiento infinito por decrecimiento infinito

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

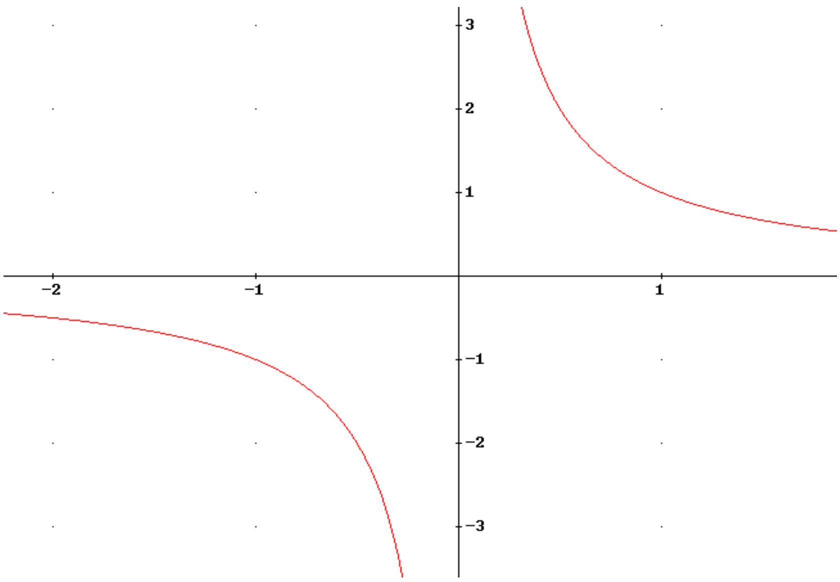
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Muchas veces las funciones f(x) tienden a +∞ por un lado de x_0 y a -∞ por el otro lado de x_0; cuando esto ocurre el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe, ya que para existir debe coincidir los límites laterales. Si bien aunque el límite no exista la función si tiene asíntota vertical.

Ejemplo:

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ → $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = no\, existe$ →Asíntota Vertical x=0

Veamos la gráfica:



Definición: La función f(x) tiene asíntota vertical en x_0 cuando se cumpla alguno de estos 6 límites:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

3.2 Límites finitos cuando x tiende a infinito (asíntota horizontal)

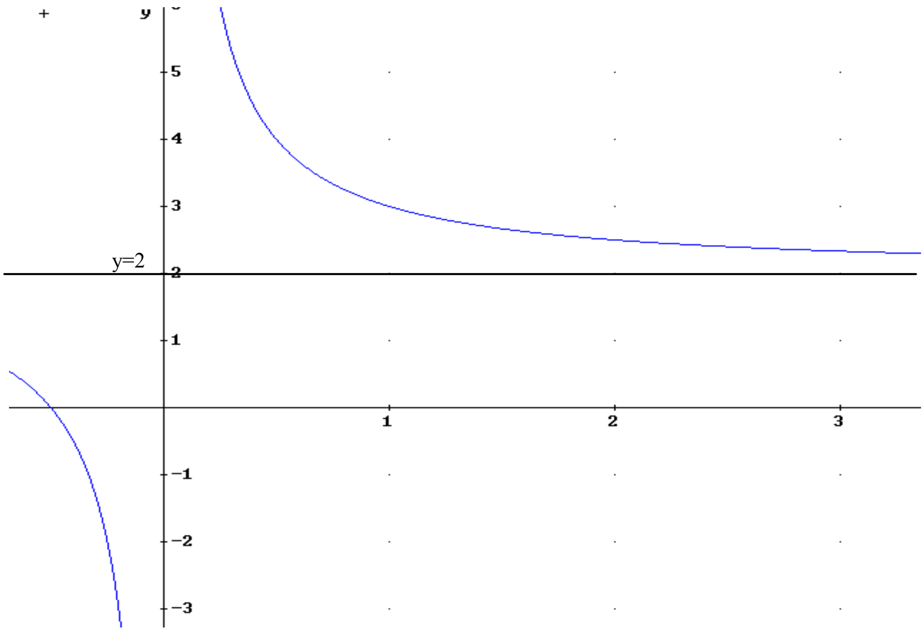
En este apartado estudiamos el comportamiento de algunas funciones en las que, cuando la x toma valores muy grandes o muy pequeños, la función se aproxima cada vez más a un valor L. Si esto ocurre se dice que f(x) tiende a L cuando x tiende a +∞ o a -∞. Veamos la definición:

Definición: Una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a +∞, si se cumple que cuanto mayor es el valor de x el valor de la función se aproxima más a y=L. Se escribe como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Ejemplo:

y=f(x)=(2x+1)/x → $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$



Definición: Una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a -∞, si se cumple que cuanto menor es el valor de x el valor de la función se aproxima más a y=L. Se escribe como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

La función anterior y=f(x)=(2x+1)/x cumple también que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

***Definición**:* Una función f(x) tiene una asíntota horizontal en $y=y_0$ si se cumple una de las siguientes condiciones (o las 2):

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

Cuando esto ocurre la función tiene una asíntota horizontal y=L. Es decir, cuando x se hace infinitamente grande ($x\to\infty$) o infinitamente pequeño ($x\to-\infty$), la función se acerca a la recta paralela al eje OX y=L

3.3 Límites infinitos cuando x tiende a infinito

En este último apartado estudiaremos 4 casos:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

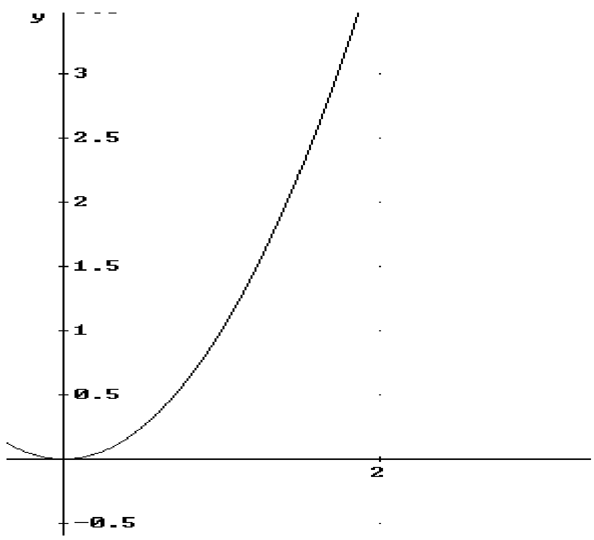
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ → cuando x se hace muy grande el valor de la función también.

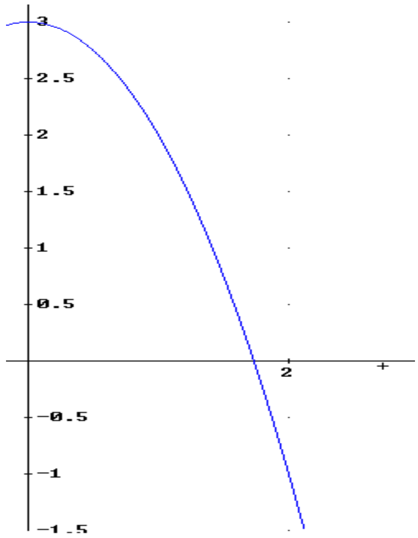
Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

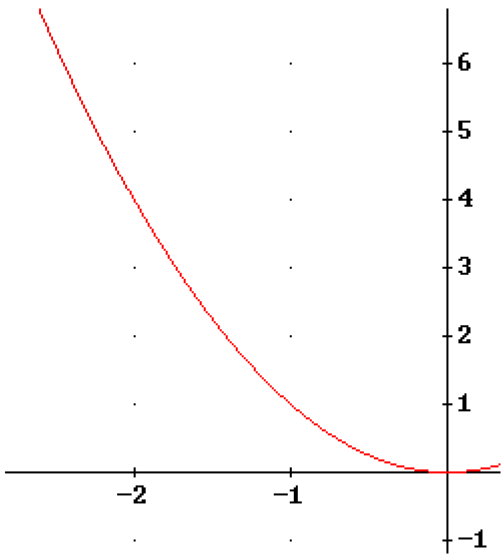
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ → cuando x se hace muy grande el valor de la función muy pequeña (negativa).

Ejemplo: y=-x^2 $\lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$



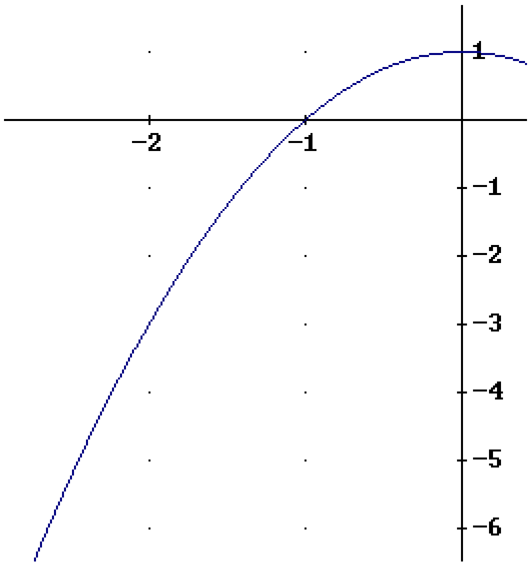
c) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ → cuando x se hace muy pequeña (negativa) el valor de la función se hace muy grande.

Ejemplo: y=f(x)=x^2, $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$



d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ → cuando x se hace muy pequeña (negativa) el valor de la función también.

Ejemplo: y=f(x)=-x^2+1 $\lim_{x\to-\infty} -x^2+1 = -\infty$



Ejercicio 3. Calcular las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones. Trata de bocetar la gráfica de la función:

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{x+3}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3-4x}$

Solución

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{x+3}$

A.V.: Verticales cuando el límite es infinito (donde se anula el denominador): x=-3:

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \begin{matrix} \lim_{x\to-3^+} f(x) = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to-3^-} f(x) = \dfrac{-3}{0^-} = \infty \end{matrix}$$ el limite no existe pero hay AV en x=-3

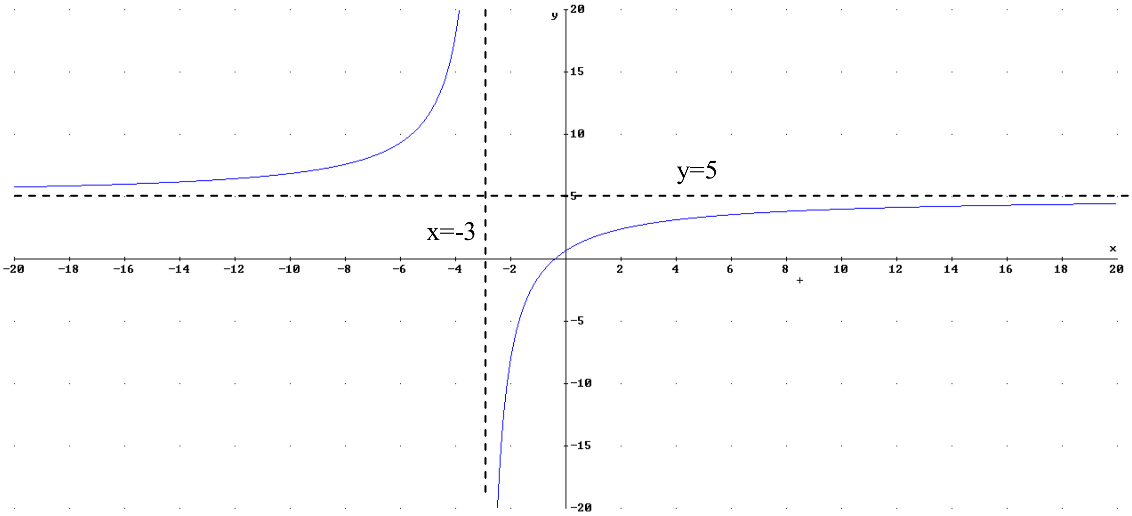
A.H.: Cuando el límite en ∞ y/o -∞ es un número:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

Lugo tiene asíntota horizontal y=5, tanto cuando x→∞ como cuando x→-∞.

Veamos la gráfica:



b) $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3-9x}$

A.V.: x^3-9x=0 → x(x^2-4)=0 → x=0, x=9, x=-9. Son asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x(x-3)(x+3)}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\dfrac{2}{0^+\cdot(-9)}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\dfrac{2}{0^-\cdot(-9)}=\infty \end{cases}$$

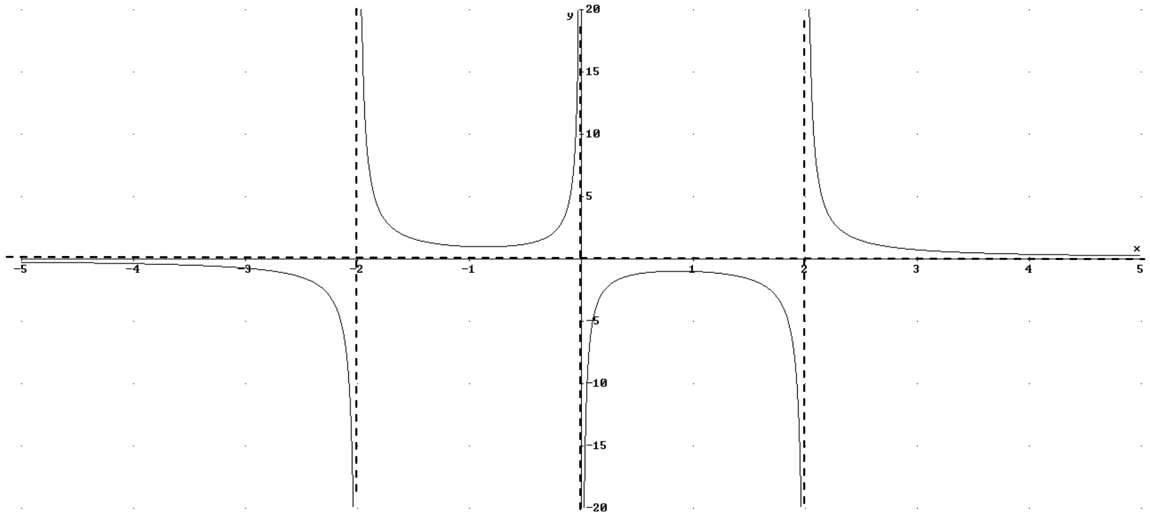
$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2}{x(x-3)(x+3)}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\dfrac{11}{3\cdot 0^+\cdot 6}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\dfrac{11}{3\cdot 0^-\cdot 6}=-\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -3} g(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2}{x(x-3)(x+3)}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^+} g(x)=\dfrac{11}{-3\cdot(-6)\cdot 0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^-} g(x)=\dfrac{11}{-3\cdot(-6)\cdot 0^-}=-\infty \end{cases}$$

A.H. : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{x^3-4x}=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{x^3-4x}=0$

La asíntota horizontal es y=0, tanto para cuando x tiene a +∞ como a -∞

Veamos la gráfica:



Ejercicio 4. Representar una función que cumpla las siguientes premisas:

a)

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$

c) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\infty$

g) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-1$

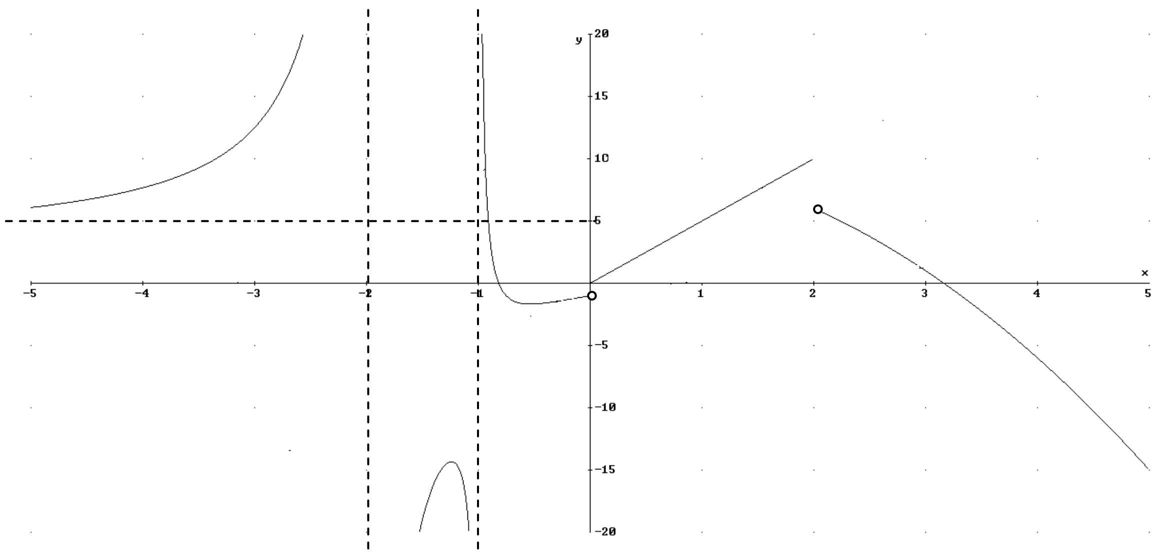
f) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$

h) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=10$

i) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=6$

j) f(0)=0

k) f(2)=10



b)

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to \infty} f(x) = 1$

c) $\lim_{x\to -10^-} f(x) = 2$

d) -10$\notin$Dom(f(x))

e) $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$

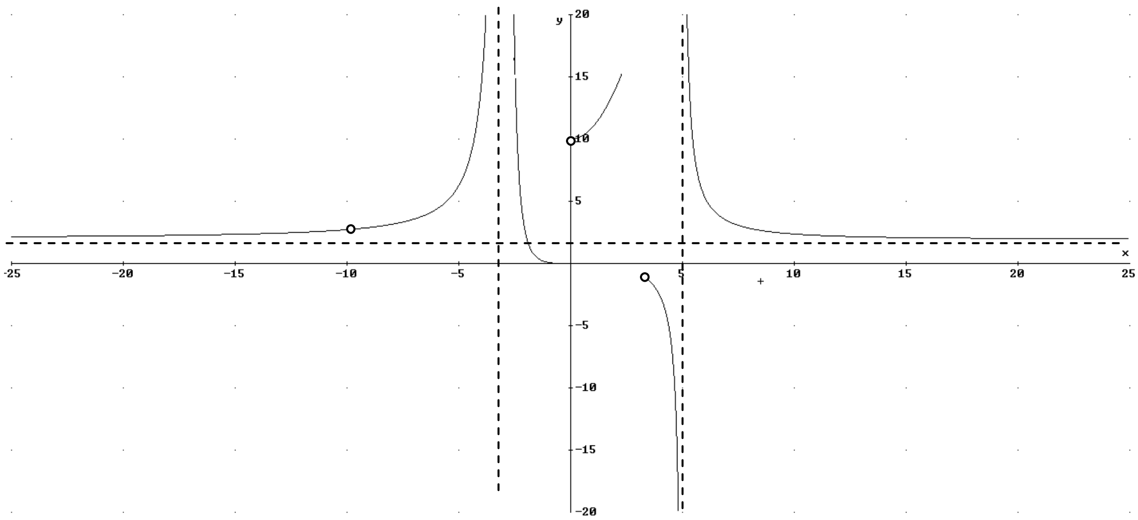
f) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$

g) $\lim_{x\to -5^+} f(x) = \infty$

h) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 10$

j) f(0)=10



4. Cálculo de límites

4.1 Operaciones con límites. Indeterminaciones

Al haber límites cuyo valor es ∞ y -∞, tendremos que ver cómo operan los números reales con ±∞. Veámoslo:

<u>Suma y diferencia</u>:

1) $\forall k\in R$ k±∞=±∞

2) ∞+∞=∞

3) -∞-∞=-∞

<u>Producto:</u>

1) $\forall k\in R^+$ (k>0) k·∞=∞ → ejemplo $\lim_{x\to +\infty} 3x = +\infty$

2) $\forall -k\in R^-$ (-k<0) k·∞=-∞ → ejemplo $\lim_{x\to +\infty} -3x = -\infty$

3) $\forall k\in R^+$ (k>0) k·(-∞)=-∞ → ejemplo $\lim_{x\to -\infty} 3x = -\infty$

4) $\forall -k\in R^-$ (-k<0) -k·(-∞)=∞ → ejemplo $\lim_{x\to -\infty} -3x = +\infty$

Cociente:

1) $\forall k\in R$ $\dfrac{k}{\pm\infty}=0$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$

2) $\forall k\in R^{+}$ $\dfrac{\pm\infty}{k}=\pm\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{4}=-\infty$

3) $\forall -k\in R^{-}$ $\dfrac{\pm\infty}{-k}=\mp\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{-4}=-\infty$

Exponente:

1) $\forall k\in R$ k>1 $k^{+\infty}=+\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{x}=+\infty$

2) $\forall k\in R$ 0<k<1 $k^{+\infty}=0$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=0$

3) $\forall k\in R$ k>1 $k^{-\infty}=0$ →ejemplo $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{x}=0$

4) $\forall k\in R$ 0<k<1 $k^{-\infty}=+\infty$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=+\infty$

Indeterminaciones:

1) ∞-∞ , -∞+∞ → ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}x-x^{2}$

2) 0·(±∞) → ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-2}(x^{2}+3x)$

3) $\dfrac{k}{0}$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$

4) $\dfrac{\pm\infty}{0}$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x^{2}}}{x}$

5) $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}+2}{x}$

6) $\dfrac{0}{0}$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}+2x}{x}$

7) 1^{∞} → ejemplo: $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

4.2 Resolución de límites sin indeterminaciones.

En este apartado vamos a ver como se resuelven los límites en los que no hay indeterminaciones. Es sencillo sólo consiste en sustituir el valor de la x por el valor del límite y operar conforme a lo explicado en el apartado anterior (4.1). Veamos algunos ejemplos:

1. $\lim_{x\to\infty} 2^{x+1} = 2^{\infty+1} = 2^{\infty} = \infty$
2. $\lim_{x\to 10} \frac{x^2-100}{2x+1} = \frac{0}{21} = 0$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3}{-2} = \frac{\infty-3}{-2} = \frac{\infty}{-2} = -\infty$
4. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty} = 3^{\infty} = \infty$
5. $\lim_{x\to\infty} (1)^{2x+1} = (1)^{\infty+1} = 1$ *nota: la indeterminación 1^{∞} es cuando tiende a 1, no cuando es 1.*
6. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2+3}\right)^{2x} = 1^{\infty}(ind)$

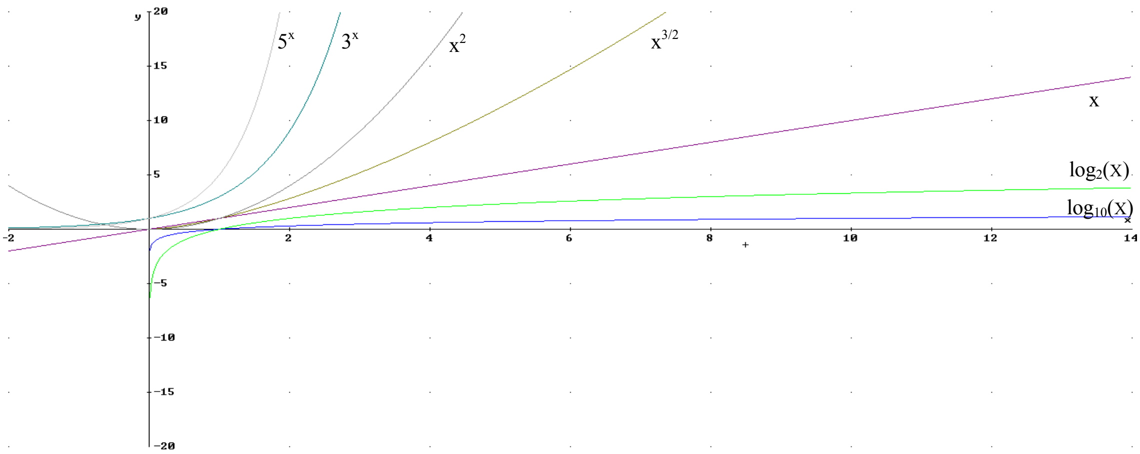
4.3 Resolución indeterminaciones del tipo ∞-∞

Las indeterminaciones de este tipo es cuando una o varias funciones tienden a +∞ y otra u otras a -∞. Para resolver estas indeterminaciones no tenemos más que comparar el crecimiento de las funciones, de tal forma que prevalece aquella cuya tendencia a +∞ o -∞ se mayor al resto.

Orden de crecimiento a ∞ (de menor a mayor):

$\log_{a_1}(x)<\log_{a_2}(x)<x<x^{3/2}<x^2<\ldots<x^n<(b_2)^x<(b_1)^x$
donde $a_1>a_2$ y $b_1>b_2$. Tanto a como b mayores que 1

Todas estas funciones tienden a ∞, pero crece mucho más rápido las funciones exponenciales que las polinómica, y estas que los logaritmos… Veámoslo:



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplos:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2x^2 - \log_3(x) = \infty - \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2^x + \log_3(x) = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} -2^x = -\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2^x + \log_3(x) = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} -2^x = -\infty$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty} x^{103} - 3^x + 2^x = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} -3^x = -\infty$$

4.4.Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Las situaciones más simples en las que aparece es al calcular los límites infinitos de fracciones polinómica. Estas indeterminaciones se resuelven dividiendo el numerador y el denominador por la máxima potencia de x del denominador

Ejemplos: $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3x+2}{x^3+3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x^2-3x+2}{x^3}}{\frac{x^3+3x-5}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+3x+2}{-x^2+3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x^3+3x+2}{x^2}}{\frac{-x^2+3x-5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+3x+2}{-2x^2+3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-3x^2+3x+2}{x^2}}{\frac{-2x^2+3x-5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Conclusión*:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0}$$

a) n>m → $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = 0$

b) m>n → $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \begin{cases} -\infty & \text{signo(P(x))} \neq \text{signo(Q(x))} \\ +\infty & si\, \text{signo(P(x))} = \text{signo(Q(x))} \end{cases}$

c) m=n→ $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \frac{a_n}{a_n}$

Ejercicio 5. Calcular los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x^2-3}{-3x^3-3}=\dfrac{-\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{-3x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x^2-3}{x^2-3}=\dfrac{-\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-2x}{-3x^4+4x}=\dfrac{\infty}{-\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{-3x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{-3x}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4-3x}+5x^2-1}{5x^2-3x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4}+5x^2}{5x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2}+5\right)x^2}{5x^2}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+5\right)}{5}$

(nota el grado dentro de una raíz se divide entre el índice de la raíz, así $\sqrt{2x^4}$ tiene grado 2.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-3x}+2x-3}{15x^2+12x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^3}}{15x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{3/2}}{15x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{15x^{1/2}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

Estos no son los únicos tipos de límites en donde aparece la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, veamos otros casos diferentes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}...+a_0}{k^x}=0\quad(k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k^x}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0}=+\infty\quad(k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}...+a_0}{\log_k x}=+\infty\quad(k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_k x}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0}=0\quad(k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0}{\log_k x}=\infty\quad(k>1\ y\ b_n>0)$$

4.5. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Aparece este tipo de límites principalmente en 2 casos diferentes:

1) *Cociente de funciones polinómica:* Se resuelven descomponiendo factorialmente numerador y denominador (aplicando Ruffini con raíz la del límite, ya que es el valor donde sea anulan los dos polinomios), simplificando los factores comunes.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-7x^2+14x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2-5x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x^2-5x+4)}=\frac{5}{-2}$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+2x+1)}{(x+1)(x^2-x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+2x+1)}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x-2)}=\frac{0}{-3}=0$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2}{2x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-3)}{x(2x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{(2x-1)}=\frac{0}{-1}=0$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{2x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-3)}{x(2x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-3)}{(2x-1)}=\frac{-3}{-1}=3$

nota: cuando el límite tiende a 0 en vez de Ruffini sacamos factor común, pues la raíz es cero, y por tanto el factor es (x-0)=x.

2) *Cociente con funciones racionales:* Se resuelven multiplicando numerador y denominado por la expresión conjugada de la que lleva raíz,(cambiando el signo):

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(\sqrt{x+4}+2)}{1}=-4$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4.6. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$

Este límite puede ser $+\infty$, $-\infty$ o no existir por ser los límites laterales diferentes. Se calcula a partir de los límites laterales (son siempre asíntotas verticales):

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0^-}=-\infty\end{cases}\quad \textit{no existe el límite}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0^+}=+\infty\end{cases}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=+\infty$$

4.7. Resolución de indeterminaciones del tipo 0·∞

Se resuelven transformándolas en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

***Ejemplo**:*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^4-2}}\cdot(2x-3)=0\cdot\infty=\lim_{x\to-\infty}\frac{3(2x-3)}{\sqrt{x^4-2}}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x}=0$$

4.8. Resolución de indeterminaciones del tipo ∞ -∞

Las indeterminaciones de este tipo ya las vimos en el apartado 4.2. En este apartado vimos que el límite era ∞ o -∞, dependiendo qué función tendía más rápido a ∞. En el apartado no consideramos cuando eran funciones con crecimiento semejante; esto ocurre cuando tenemos una raíz con un polinomio de grado n y un polinomio restando de grado la mitad (n/2). Si esto ocurre lo que se hace es multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada, eliminando así la indeterminación del tipo ∞-∞ y quedando expresión del tipo ∞/∞.

***Ejemplo**:*

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-(x+3)=\infty-\infty\ (\text{mismo grado})=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-(x+3)\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+(x+3)\right)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-(x^2+6x+9)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-9}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1+\frac{3}{x}}=-\frac{1}{2}$$

4.9. Resolución de indeterminaciones del tipo 1^{∞}

Estas indeterminaciones están relacionadas con el número e. El valor decimal del número e es: e=2,718281… es un número irracional que debe su nombre al matemático suizo Euler.

Este número es el límite de la siguiente expresión: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$. Demos valores:

x=1→ 2

x=10→ 2,59

x=1000→ 2,7169…

x=10^6 → 2,718280…

En la práctica todo límite de la forma $\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=0$ cuando $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$. La forma de resolver esta indeterminación será buscar esta expresión:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x^2+4}\right)^{x^2}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-3x}{x^2+4}-1\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3x-4}{x^2+4}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\underbrace{\left(1+\frac{-3x-4}{x^2+4}\right)^{\frac{x^2+4}{-3x-4}}}_{e}\right)^{\frac{-3x-4}{x^2+4}}\right)^{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{-3x-4}{x^2+4})}=e^{\lim_{x\to\infty}x^2\frac{-3x-4}{x^2+4}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3-4x^2}{x^2+4}}=e^{-\infty}=0$$

Ejercicio 6. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4x+2}{5x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4x+2}{5x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{4x+2}{5x}-1\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2-x}{5x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(\left(\underbrace{\left(1+\frac{2-x}{5x}\right)^{\frac{5x}{2-x}}}_{e}\right)^{\frac{2-x}{5x}}\right)^{\frac{1}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}e^{\frac{2-x}{5x}\cdot\frac{1}{x-2}}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{-1}{5x}}=e^{\frac{-1}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$$

b) $\lim_{x\to 0}\left(1-x^3+2x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-x+2x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(-x+2x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(\underbrace{\left(1+\left(-x+2x^2\right)\right)^{\frac{1}{-x+2x^2}}}_{e}\right)^{-x+2x^2}\right)^{\frac{1}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-x+2x^2}{x^4}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-1+2x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-1}{0}}=ind\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{-1+2x}{x^3}}=e^{\frac{-1}{0^+}}=e^{-\infty}=0\\ \lim_{x\to 0^-}e^{\frac{-1+2x}{x^3}}=e^{\frac{-1}{0^-}}=e^{\infty}=\infty\end{cases}\text{ no existe el limite}$$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(-x^3\right)^{\frac{2x+3}{x-1}}$

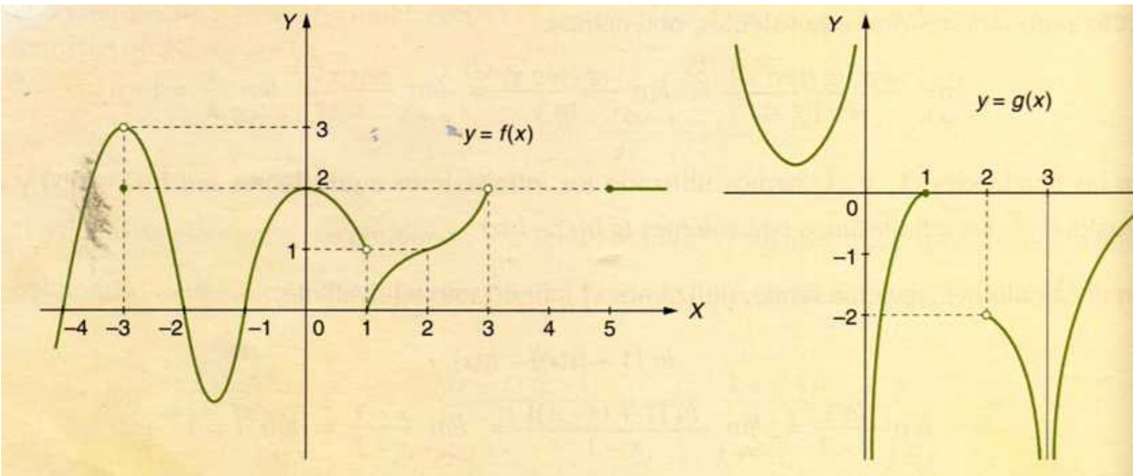
$$\lim_{x\to\infty}\left(-x^3\right)^{\frac{2x+3}{x-1}}=(-\infty)^2=\infty$$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)^{\frac{-2x^2+3}{x-1}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)^{\frac{-2x^2+3}{x-1}}=\infty^{-\infty}=\frac{1}{\infty^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Ejercicios

Ejercicio 7. Calcula, en las siguientes funciones representadas, las siguientes cuestiones:



a) f(-3)=2, f(-2)=0, f(0)=2, f(4) $4\notin$ Dom(f(x))

b) $\lim_{x\to -3}f(x)=3$, $\lim_{x\to 0}f(x)=2$, $\lim_{x\to 3^-}f(x)=2$, $\lim_{x\to 3^+}f(x)=no\ existe$, $\lim_{x\to 3}f(x)=no\ existe$

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1^+}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1}f(x)=no\ \ existe$, $\lim_{x\to -2}f(x)=0$

c) $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = -2$, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$,

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \text{no existe}$, $\lim_{x\to 2} g(x) = \text{no existe}$

Ejercicio 8: Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}} = \begin{cases} e^{\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = 0 \\ e^{\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = \text{no existe}$$

Ejercicio 9: Calcula cuánto debe valer "a" para que la siguiente función, f(x), sea convergente en x=1: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3-a$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$. El límite $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe siempre que a=1.

Ejercicio 10: Siendo f(x)=$\sqrt{2x+3}$ calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} = \frac{\sqrt{11}-3}{1} = \sqrt{11}-3$$

Ejercicio 11: Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to +\infty} x^{-4} = 0$, **b)** $\lim_{x\to -\infty} 4x^4 = \infty$, **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^3} = \frac{3}{0}(ind)\begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x^3} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{3}{x^3} = -\infty \end{cases} \text{no existe}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^{-2}}{5} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^2} = \frac{1}{0}(ind)\begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{5x^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{5x^2} = +\infty \end{cases} = \infty$ **e)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{3} = 0$, **f)** $\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{x^5} = 0$

g) $\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right] = 0+0 = 0$, **h)** $\lim_{x\to +\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = 0$ **i)** $\lim_{x\to -\infty} 3^{-x} = 3^{\infty} = \infty$

j) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0$ **k)** $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \frac{\infty}{1} = \infty$

l) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3} = -\infty$ **m)** $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1} = 0$ **n)** $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-x+6}{x^2+3x+2} = -\infty$

o) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}$ **p)** $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x+2)}=\frac{-5}{2}$

q) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-2)}=\frac{-1}{0}\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=\infty\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$ no existe

r) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=2$

s) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{x(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4+x}{x(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{1}{4}$

t) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{1+x-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}=1$

u) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0^-}=-\infty\end{cases}$ no existe

v) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{0}\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{(0^+)^2-0^+}=\frac{-3}{(0^+)^2+0^-}=\frac{-3}{0^-}=\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{0^+}=-\infty\end{cases}$ no existe

w) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-(x-2)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}=\frac{4}{\infty}=0$

x) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x+2}=1^\infty=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+2)\left(\frac{5x+1}{5x-1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+4}{5x-1}\right)}=e^{\frac{6}{5}}$

y) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}=1^\infty=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}\right)\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}\right)\left(\frac{x^2(x-1)}{x^2+1}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{x^2+1}}=e^{\frac{3}{2}}$

z) $\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}=1^\infty=e^{\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}(x-2)}=e^3$ **aa)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

ab) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5-(4x^2-12x+9)}{\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-14}{\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}=\frac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12-\frac{14}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+(2-\frac{3}{x})}=\frac{12}{4}=3$$

ac) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2}\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{2}}{0^+}=+\infty$

Ejercicios PAU

Septiembre 2004. Prueba B. C-4. Determínese el valor del parámetro *a* para que se verifique $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2$.(1 punto)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+ax+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+1)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\frac{a}{\sqrt{1}+1}=\frac{a}{2}=2\ \rightarrow\ a=4$$

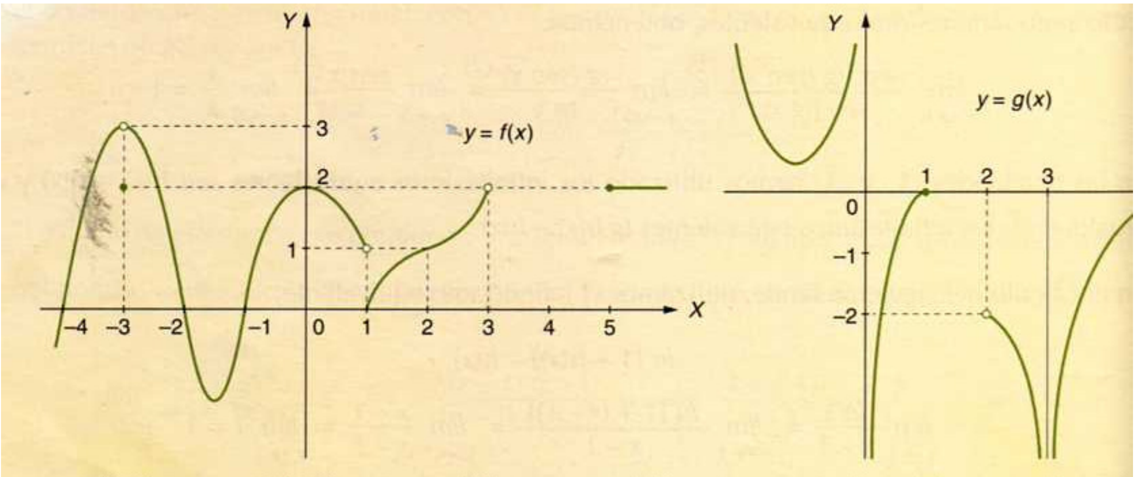
5. Definición de continuidad

Veamos la definición de la continuidad:

Definición: Una función f(x) es continua en un punto x_0 si en dicho punto se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y no vale $+\infty$ ni $-\infty$ (es decir es convergente en x_0)
2. La función definida en x_0, es decir $x_0 \in Dom(f(x))$
3. Los dos valores anteriores coinciden: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ejemplo:



1) $Dom(f(x))=(-\infty,3)\cup[5,\infty)$

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=-3 → $\lim_{x\to -3} f(x) = 3 \neq f(3) = 2$

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

c) x=5 → $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

2) $Dom(g(x))=(-\infty,0)\cup(0,1]\cup(2,3)\cup(3,\infty)$

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=0 → $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la derecha

c) x=2 → $\lim_{x\to 2} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

d) x=3 → $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$ pero $3 \notin Dom(g(x))$

Definición: Una función f(x) es continua en un intervalo (a,b) si en todos los puntos del intervalo es continua. Esto ocurre cuando al dibujar la gráfica "no levantamos el boli de la hoja para dibujarla"

En el ejemplo anterior f(x) continua en (-∞,-3), (-3,1), (1,3) y (5,∞). La función g(x) en (-∞,0), (0,1), (2,3) y (3,∞).

Ejercicio 12. Calcular la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1} & si \;\; x \leq 0 \\ 2x+3 & si \;\; 0 < x < 1 \\ 4x+1 & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

Pasos:

1) Estudiar la continuidad de los "trozos" en sus dominios de definición:

- $\frac{1}{x^2-1}$ es continua en R-{-1,1}, ya que el denominador se hace cero y el límite en x=1 y x=-1 vale ∞ (asíntota vertical). Pero de los dos valores sólo x=-1 pertenece al dominio de definición, x≤ 0.
- 2x+3 y 4x+1 son rectas y por tanto continuas en todos los reales.

Luego por ahora la función no continua en x=-1

2) Estudiar la continuidad en los puntos donde la función cambia de expresión analítica, en nuestro ejemplo x=0 y x=1.

<u>En x=0</u>

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x+3 = 3 \end{cases} \text{ no existe el limite}$$

Luego la función no continua en x=0 tampoco.

<u>En x=1</u>

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x+3 = 5 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4x+1 = 5 \end{cases} = 5$$

Aunque el límite existe la función no continua pues 1∉Dom(f(x)). Ya que para x=1 la función no definida

Luego la función no continua en x=1 tampoco

La función tiene tres puntos de discontinuidad en x=-1, x=0, x=1.

6. Tipos de discontinuidades

***Definición**:* Una función f(x) es discontinua en un punto x_0 si no es continua en dicho punto.

Existen dos tipos de discontinuidades:

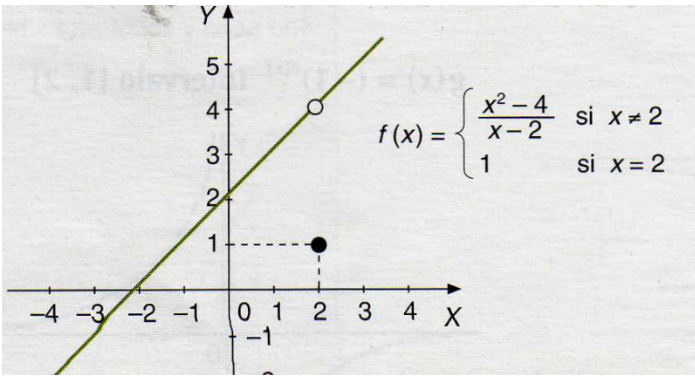
a) Discontinuidad evitable
b) Discontinuidad no evitable

***Discontinuidad evitable*:** Una función f(x) presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0 si cumple las siguientes condiciones:

1. La función convergente, es decir el límite de la función en x_0 existe, y es un numero → $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$
2. Una de las dos siguientes condiciones:
   a. o el límite no coincide con $f(x_0)$
   b. o bien la función no está definida en x_0 (es decir $x_0 \notin Dom(f(x))$)

Ejemplos:

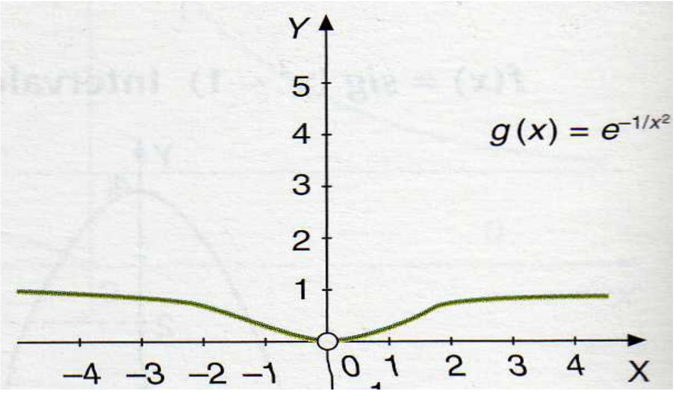
1)



$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 1$. Esta discontinuidad se evita redefiniendo la función en x=2, haciendo que en este punto la función tome el mismo valor que el límite es decir f(2)=4

Así la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \;\; x \neq 2 \\ 4 & si \;\; x = 2 \end{cases}$ si es continua pues $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$

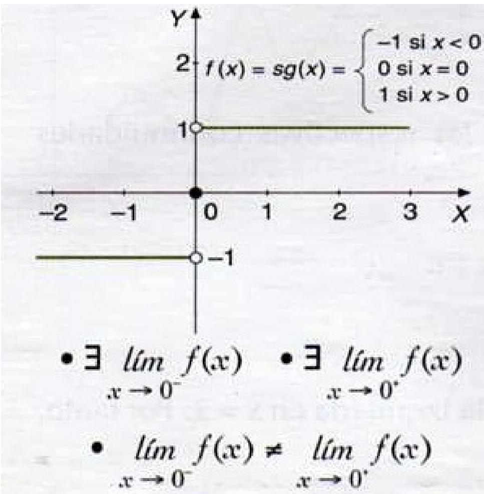
2)



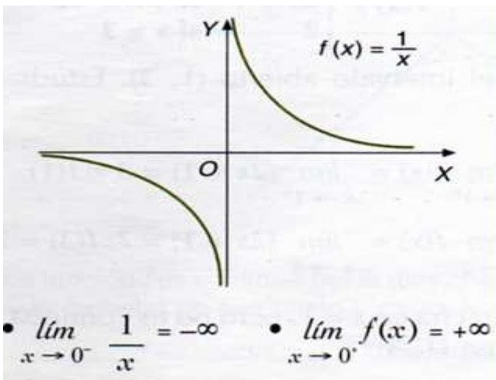
$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ pero $0 \notin$ Don(g(x)). Esta discontinuidad se evitaría si redefinimos la función tal que en x=0 esta valga lo mismo que el límite: g(x)=$\begin{cases} e^{-1/x^2} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$

Discontinuidad no evitable: Es aquella en la que el límite en el punto o no existe o es infinito. Pueden ser a su vez de 2 tipos:

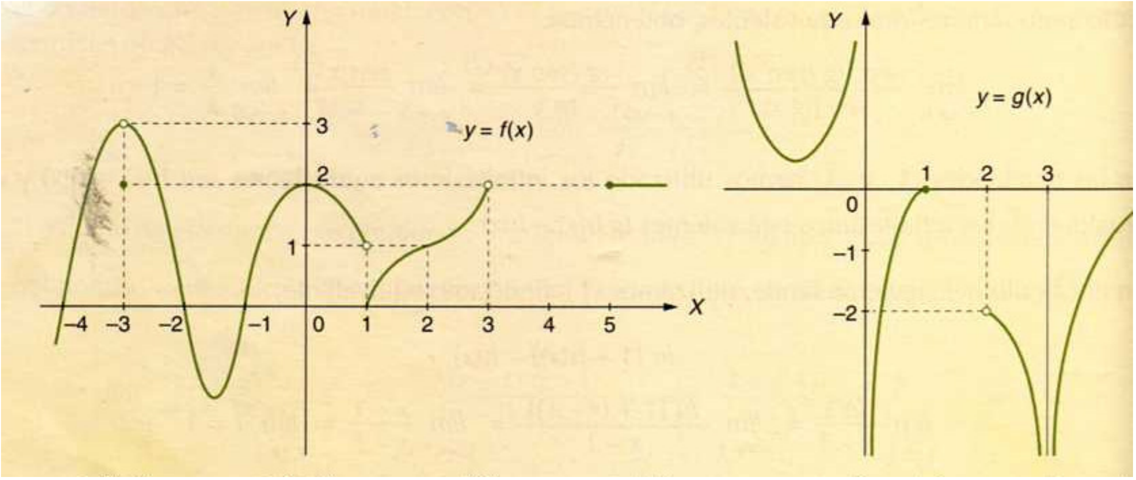
1) *Salto finito en x_0*: los límites laterales no coinciden pero son números reales $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$



2) *Salto infinito en x_0:* cuando los dos límites laterales en x_0 o al menos uno de ellos es $+\infty$ o $-\infty$.



Ejercicio 13. Decir de las siguientes funciones los tipos de discontinuidades de las siguientes funciones



f(x): x=-3 evitable, x=1 no evitable de salto finito. Entre [3,5) la función no definida

g(x): x=0 y x=3 no evitable de salto infinito. Entre (1,2] función no definida.

Ejercicio 14. Decir que tipo de discontinuidad hay en la función del ejercicio 12

La función tiene tres puntos de discontinuidad en x=-1, x=0, x=1.

- En x=-1 no evitable de salto infinito
- En x=0 no evitable de salto finito
- En x=1 evitable

7. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas

Las funciones elementales, por lo general, son continuas en todos los puntos del dominio. Las discontinuidades más importantes aparecen en funciones definidas a trozos (discontinuidades evitables o de salto finito), y en funciones con denominador en el valor donde se anula éste (discontinuidad de salto infinito).

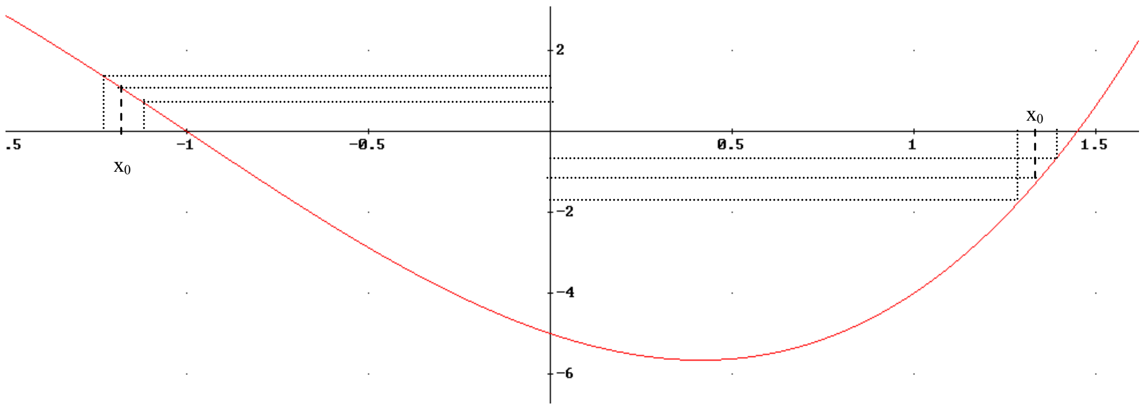
Operaciones de funciones continuas: Sean f(x) y g(x) funciones continuas en x_0

1) Las funciones suma y resta $(f \pm g)(x)$ son continua en x_0
2) La función producto $(f\cdot g)(x)$ es continua en x_0
3) La función división $(f/g)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0)\neq 0$
4) Si g(x) es continua en x_0 y f(x) es continua en $g(x_0)$ entonces la función compuesta $(f\circ g)(x)$ es continua en x_0.

8. Teoremas de Continuidad

8.1. Teorema de conservación del signo

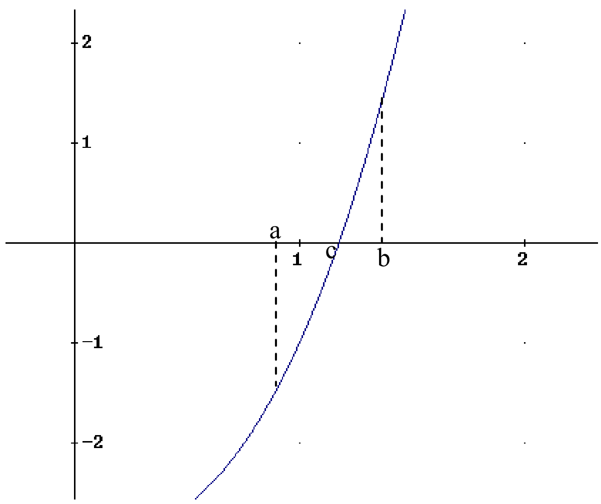
Teorema de conservación del signo: si una función f(x) es continua en el punto x_0 de manera que $f(x_0)\neq 0$, se cumple que en un entorno del punto la función conserva el signo, Esto es si $f(x_0)>0$ se cumple que en un entorno de x_0 la función positiva, y si $f(x_0)<0$ entonces en un entorno de x_0 la función es negativa.

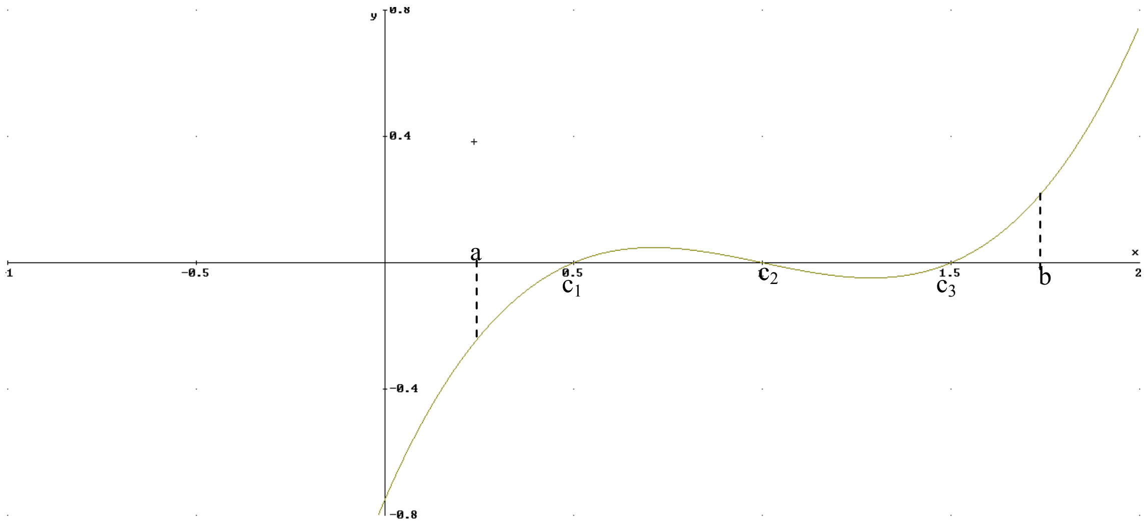


8.2 Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b] tal que f(a) y f(b) tienen distinto signo ($f(a)\cdot f(b)<0$), entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Veámoslo gráficamente:

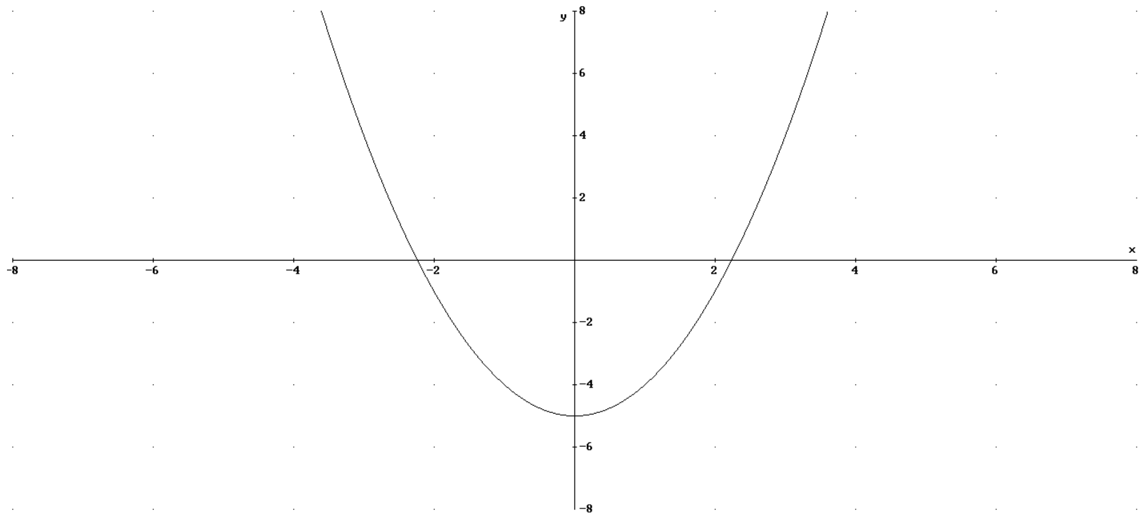




Vemos que el teorema de Bolzano nos asegura al menos una valor c tal que f(c)=0, pero como vemos puede ocurrir que no sea única. Para asegurar que sólo es única debemos además de aplicar Bolzano ver que la función en el intervalo (a,b) es siempre creciente o decreciente.

Nota: existen multitud de funciones que en el intervalo donde están definidas no cumplen Bolzano y cortan con el eje. El teorema de Bolzano asegura que existe el punto de corte, pero si no cumple Bolzano no se puede decir si exista o no. Veamos dos ejemplos:

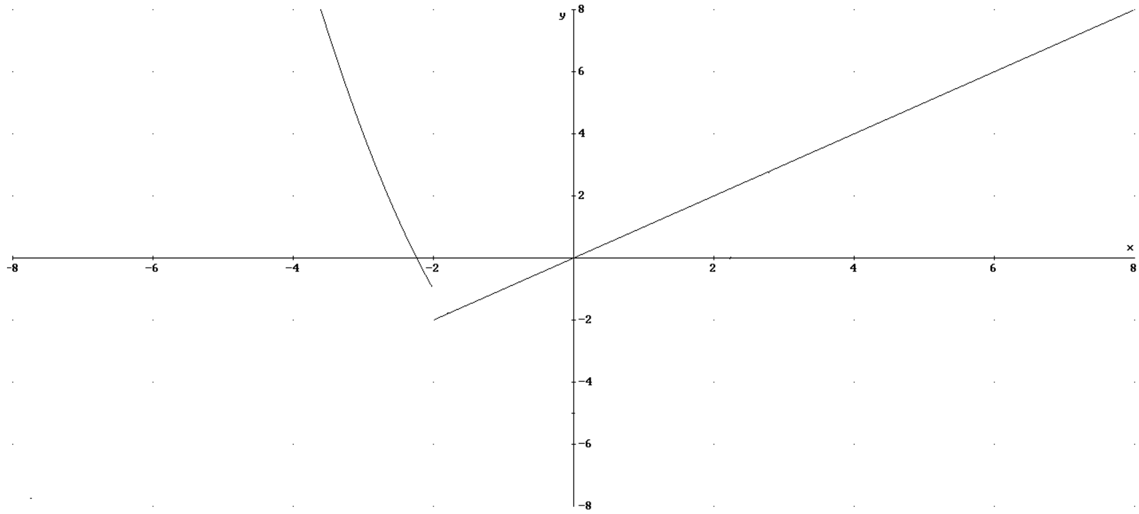
a) $f(x)=x^2-5$ en el intervalo [-3,3] no cumple Bolzano pues f(3)>0 y f(-3)>0 y en cambio si corta al eje OX



b) $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & si \ \ x<2 \\ x & si \ \ x\geq 2 \end{cases}$ en [-4,2]. La función no continua en x=2:

$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x)=-1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=2 \end{cases}$ no existe el limite, no continua en x = 2 y en cambio corta eje OX

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Ejercicio 15. Encontrar un intervalo donde la función f(x)=$\frac{x^5+x^4-1}{x-3}$ corte al eje x, es decir $f(x_0)=0$.

Tenemos que la función es continua en R-{3}. Busquemos un intervalo, que no contenga x=3, tal que el signo de sus extremos sea diferente.

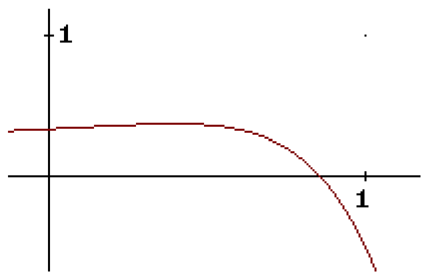
f(0)= 1/3>0 f(1)=-1/2<0

Así la función f(x) cumple Bolzano en [0,1]:

- es continua en este intervalo
- f(0)·f(1)<0

Luego ∃ c∈(0,1) : f(c)=0.

Veamos la función:



Ejercicio 16: Decir un intervalo de x donde la función f(x)=x^4-x+3 valga 8.

Tenemos que buscar una función igualada a cero: x^4-x+3=8 →x^4-x-5=0. Si llamamos a x^4-x-5=g(x), tenemos que buscar un intervalo donde g(x)=0, es decir buscar el intervalo donde cumpla Bolzano:

1) Primera condición, continuidad: g(x) es continua en R,

2) Tenemos que buscar un intervalo [a,b] tal que g(a) y g(b) distinto signo. Sea [1,2] se cumple g(1)=-5 y g(2)=9 luego cumple Bolzano.

Existe c∈(1,2) tal que g(c)=0, y por tanto g(c)=5.

Ejercicios

Ejercicio 17: Estudia la continuidad de las siguientes funciones

a) f(x)= $\begin{cases} 5-\dfrac{|x|}{x} & si \ \ x \neq 0 \\ 5 & si \ \ x=0 \end{cases}$

El valor absoluto puede dividirse en dos partes: cuando lo que está dentro del valor es negativo este cambia de signo, y si es positivo no se cambia.

f(x)= $=\begin{cases} 5-\dfrac{-x}{x} & si \ x<0 \\ 5 & si \ \ x=0 \\ 5-\dfrac{x}{x} & si \ \ x>0 \end{cases} = \begin{cases} 6 & si \ \ x<0 \\ 5 & si \ \ x=0 \\ 4 & si \ \ x>0 \end{cases}$

$\lim_{x\to o} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to o^+} f(x)=4 \\ \lim_{x\to o^+} f(x)=6 \end{cases}$ *no existe*, discontinuidad de salto finito

f(x) es por tanto continua en R-{0}

b) g(x)= $\begin{cases} x^2-1 & si \ \ x\leq 2 \\ x+1 & si \ \ x>2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, donde cada uno de ellos es un polinomio, que son continuos en R; De esta forma en el único punto que tenemos que estudiar la continuidad es en x=2, donde f(x) cambia de expresión analítica:

$\lim_{x\to 2} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} x+1=3 \\ \lim_{x\to 2^-} x^2-1=3 \end{cases} = 3$ =f(2).

Luego g(x) continua en R.

c) h(x)= $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \ \ x\neq 3 \\ 6 & si \ \ x=3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, uno de ellos es una fracción algebraica, así que en los puntos donde se anule el denominador puede no ser continua. Como coincide el punto donde se anula el denominador con el cambio de expresión analítica (x=3) sólo hay que estudiar la continuidad en este punto.

$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$=f(3)=6

La función h(x) es continua en R

d) l(x)= $\begin{cases} 2x-1 & si \;\; x>-1 \\ 3 & si \;\; x\leq -1 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ello la función es un polinomio, así que el único punto donde hay que estudiar la continuidad es en x=-1, allí donde cambia de expresión analítica:

$\lim\limits_{x\to -1} l(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} l(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} l(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 2x-1 = -3 \end{cases} \to \textit{No existe}$, luego no es continua en x=-1, de salto finito.

De esta forma l(x) continua en R-{-1}.

Ejercicio 18: Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo R

a) f(x)= $\begin{cases} sen(3x) & si \;\; x\leq \pi/2 \\ 2k+\cos(2x) & si \;\; x>\pi/2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son expresiones trigonométricas, continuas en R. Luego el único punto donde puede presentar discontinuidad es en x=π/2, allí donde la función cambia de expresión analítica. Veamos si f(x) es continua en π/2

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} 2k+\cos(2x) = 2k-1 \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} sen(3x) = -1 \end{cases}$$

El límite existe si los límites laterales son iguales, esto ocurre si k=0. Además cuando k=0 se cumple f(π/2)=-1,y por tanto la función es continua en x=π/2

De esta forma la función es continua en R si k=0

b) g(x)= $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} & si \;\; x\neq 2 \\ k & si \;\; x=2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en uno de ellos la función es una fracción algebraica que puede no ser continua en los puntos donde se anual el denominador (x=2). Como este punto coincide con el punto donde la función cambia de expresión analítica, es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad de g(x).

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0}\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$ el límite no existe, así que indiferentemente del valor de k la función g(x) no es continua en x=2

c) k(x)= $\begin{cases} 1+|x| & si\ x<0 \\ k & si\ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ x>0 \end{cases}$

Como |x| está definido para valores negativos (x<0), es equivalente a sustituir |x| por –x:

k(x)= $\begin{cases} 1-x & si\ x<0 \\ k & si\ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ x>0 \end{cases}$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son polinomios, y estos son continuos en R. Luego el único punto donde puede presentar discontinuidad es en x=0, allí donde la función cambia de expresión analítica.

$$\lim_{x\to 0} k(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} 1+|x|=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x+1=1 \end{cases} = 1$$

Para que sea continua ha de cumplir que k(0)= $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$. Por tanto k(x) será continua si k(0)=k=1 → k=1

e) $m(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x-2} & si\ x>3 \\ \frac{x+3}{x-4}+k\, si\, x\leq 3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ellos las funciones son fracciones algebraicas, que no son continuas en los puntos donde se anulan el denominador. En la primera de ellas ocurre en x=2, pero como esa expresión analítica sólo existe para x>3, nuca tomará ese valor. La segunda se anula para x=4, pero como la expresión definida para x≤3 nunca tomará ese valor. Así que sólo hay que estudiar la continuidad en x=3, donde la función cambia de expresión analítica:

$$\lim_{x\to 3} m(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x-4}+k=-6+k \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2+2}{x-2}=\frac{11}{1}=11 \end{cases}$$ El límite existe si k=17. Además si k=17 m(3)=11 y por tanto continua en 3 y en todo R.

Ejercicio 19: Hallar el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

a) f(x)=|x^2-6x+5|

El dominio de la función f(x)=|x^2-6x+5| y su continuidad es todo R, ya que el valor absoluto de f(x) es continuo en los mismos puntos en los que sea continua la función x^2-6x+5, que es un polinomio.

b) $g(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-2\sqrt{2}$.

El dominio de una raíz cuadrada son todos los puntos donde el radicando es positivo o cero. Como g(x) está definida a partir de suma la de tres funciones, el dominio será la intersección de los tres dominios. Veamos uno a uno por separado:

$\sqrt{4+x}$ Dom=[-4,∞)

$\sqrt{4-x}$ Dom=(-∞,4]

$2\sqrt{2}$ Dom=R

Dom(g(x))= [-4,∞)∩(-∞,4]∩R=[-4,4]

En los puntos del dominio la función es continua, pues el límite de la función coincide con el valor en el punto.

Ejercicio 20: Determinar los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & si\ x\le 0 \\ ax+b & si\ 0<x\le 1 \\ 1+x\ln(x) & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, y en cada trozo la función es continua en su dominio de definición, ya que el único que no es continua en todo R es $1+x\ln(x)$, pero como está definida para x≥1 en este intervalo es continua.

Tendremos que ver la continuidad en x=0 y x=1 para asegurar que la función f(x) continua en todo R.

· Continuidad en x=0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{x^2}=0\cdot 1=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax+b=b \end{cases}$$

El límite existe si b=0, además para este valor de b f(0)=0 y por tanto la función será continua

· Continuidad en x=1

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+x\ln(x))=1+1\cdot 0=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax=a \end{cases}$$

El límite existe si a=1, además para este valor f(a)=1 y por tanto la función será continua

Si a=1 y b=0 la función será continua en R

Ejercicio 21: Sean las funciones $f(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x\in[0,1) \\ x \ \ si \ x\in[1, \infty) \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x+1 \ \ si \ x\in[0,2) \\ x \ \ \ \ si \ \ x\in[2, \infty) \end{cases}$ estudiar la continuidad de f+g, f·g, f/g

Estudiemos la continuidad de las funciones f(x) y g(x)

Fácilmente se puede comprobar que f(x) es continua en todo el dominio de definición $[0,\infty)$, y g(x) continua en todos los puntos de definición menos en x=2, donde los límites laterales no coinciden, es decir en $[0,2)\cup(2,\infty)$.

a) (f+g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$

b) (f·g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$

c) (f/g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$, ya que g(x) no se anula para ningún valor de x

Ejercicio 22: Hallar y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones

a) $\mathbf{f(x)} = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

Será continua en R menos en los puntos donde se anula el denominador es decir x=0 y x=2, por tanto $0,2\notin$ Dom(f(x)). Veamos el límite en estos puntos para discernir el tipo de discontinuidad.

· En x=0

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{-4}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \dfrac{-4}{-2\cdot 0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^{-+}}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \dfrac{-4}{-2\cdot 0^-} = -\infty \end{cases} \to salto \ \inf inito \ en \ x=0$$

· En x=2

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{4}{2} = 2 \to evitable$$

b) $g(x) = \begin{cases} 2-x & si \ x\leq 0 \\ e^{-x} & si \ \ x>0 \end{cases}$

Tanto 2-x como e^{-x} son continuas para todo R, luego la única posible discontinuidad puede ocurrir en x=0.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2-x = 2 \end{cases}$$ Discontinuidad de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} 2 \ \ si \ x=0 \\ e^{-x} \ \ \ si \ \ x\neq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{-x}=1\neq f(0)=2$ → Evitable

Ejercicio 23: Estudiar la continuidad de f(x)

$$f(x)=\begin{cases} \ln(-x) & si \quad x<-2 \\ sen(\pi x) & si \quad -2\leq x\leq 2 \\ 0 & si \quad 2<x<4 \\ x^2-12 & si \quad x\geq 4 \end{cases}$$

Función definida a trozos y en cada uno de ellos la función es continua en su dominio de definición, (ln(-x) es continua si x<0). Veamos la continuidad en los puntos donde cambia la expresión analítica:

En x=-2 → $\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -2^+} f(x)=sen(-2\pi)=0 \\ \lim_{x\to -2^-} f(x)=\ln(2) \end{cases}$ Discontinua de salto finito

En x=2→ $\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} f(x)=0 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=sen(2\pi)=0 \end{cases}$ Continua en x=2

En x=4→ $\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 4^+} f(x)=16-12=4 \\ \lim_{x\to 4^-} f(x)=0 \end{cases}$ Discontinua de salto finito

Ejercicio 24: Demuestra:

a) x=xsen(x)+cos(x) tiene solución en [-π,π]:

Definimos f(x)= xsen(x)+cos(x)-x tal que

1. Es continua en R y por tanto en [-π,π].
2. f(-π)=-1+π>0, f(π)=0+1-π<0.

De esta forma cumple Bolzano → ∃c∈(-π,π): f(c)=0, es decir, la ecuación tiene solución en este entorno.

b) 3sen(x)=e^{-x}cos(x) en algún valor de x.

Definimos f(x)=e^{-x}cos(x)-3sen(x) tal que

1. es continua en R.
2. Tomamos el intervalo [0,π/2] → f(0)=1>0 f(π/2)=0-3<0.

Cumple Bolzano→ ∃c∈(0,π/2): f(c)=0, es decir la ecuación solución en este entorno.

Ejercicio 25: La función cotg(x) tiene distintos signos en los extremos del intervalo [3π/4, 5π/4] y sin embargo no corta el eje x. ¿Entonces contradice esto Bolzano?

No contradice Bolzano pues cotag(x) no es continua en $\pi \in [3\pi/4, 5\pi/4]$

Ejercicio 26: Demostrar $f(x)=x^3-8x+2$ corta al eje OX en (0,2). ¿se puede decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$?

f(x) cumple:

1. Continua en (0,2)
2. f(0)=2>0, f(2)=-6<0

Luego cumple Bolzano → $\exists c \in (0,2)$: f(c)=0

No podemos decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$, pues en $x=1 \in (0,2)$ no es continua.

Ejercicio 27: Sea f(x) una función que cumple f(-2)<0 y f(0)>0 ¿Es siempre cierto que existe un valor c en (-2,0) tal que f(c)=0

Si f(x) es continua en el intervalo [-2,0] podemos asegurar que se cumple dicha afirmación (por el teorema de Bolzano). Sino no es así no podemos asegurar tal afirmación. Lo cual no contradice que alguna función discontinua en donde f(a)·f(b)<0 esta corte al eje x en (a,b)

Ejercicio 28: Estudiar el dominio y discontinuidad de $f(x)=\ln((x+2)/x^2)$

Pasos:

1) Dominio de $(x+2)/x^2$ → R-{0}

2) Al ser un logaritmo→ $(x+2)/x^2>0$: Como x^2 siempre positivo tenemos que ver cuándo (x+2)>0, esto ocurre en el intervalo (-2,∞)

De esta forma el dominio será (-2,∞) menos el punto x=0→Dom(f(x))=(-2,0)∪(0,∞).

En todos los puntos del dominio la función es continua pues, el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto.

Ejercicio 29: Hallar a y b para que f(x) cumpla Bolzano en [-π,π]. Hallar c que cumple Bolzano

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x) & si \quad -\pi\leq x\leq 0\\ a+x^2 & si \quad 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & si \quad 1\leq x\leq \pi\end{cases}$$

Para que cumpla Bolzano tenemos que obligar a la función a que sea continua en [-π,π], y por tanto en x=0 y x=1

En x=0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\cos(0)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a+0=a\end{cases}$ → a=1

En x=1: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1^2+1=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{b}{1}=b\end{cases}$ → b=2

Si a=1 y b=2 la función es continua en [-π,π], veamos ahora que cumple la segunda condición:

f(-π)=-1<0

f(π)=1/π>0

Luego cumple Bolzano ∃c∈(-π,π): f(c)=0

Busquemos el valor c:

a) Veamos si c∈[-π,0]→ cos(c)=0 → c=-π/2

b) Veamos si c∈[0,1]→1+x^2=0 no solución

c) Veamos si c∈[1,π]→2/x=0 no solución

Ejercicio 30: Demuestra que la ecuación π^x =e tiene solución en (0,1), ¿lo cumple también ϕ^x=e?

a) π^x=e solución en (0,1)→ definimos f(x)=π^x-e, se cumple:

a) Continua en [0,1]

b) Además f(0)=1-e<0 y f(1)=π-e>0

Al cumplir Bolzano ∃c: (0,1): f(c)=0, y por tanto la ecuación tiene solución en (0,1)

b) ϕ^x=e solución en (0,1) → definimos f(x)= ϕ^x-e, se cumple:

a) continua en [0,1]

b) pero f(0)=1-e<0 y f(1)= ϕ-e<0

Luego no cumple Bolzano y no podemos asegurar que la ecuación tenga solución.

Ejercicios de la P.A.U.

Junio de 2004.Prueba A

C-2: Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto si $x>0$

Si se cortan f(x)=g(x).

Definimos $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1/x$. Si h(x)=0 entonces f(x)=g(x) y las funciones se cortarán.

Veamos que h(x) cumple Bolzano, y por tanto h(x)=0:

a) Es continua para x>0 (no se anula el denominador).
b) Busquemos un intervalo donde cumpla Bolzano, por ejemplo [0.1,1]: $h(0.1)=e^{0.1}-1<0$; $h(1)=e-1>0$

Luego cumple Bolzano $\exists c\in(0.1,1)$: h(c)=0, y por tanto f(c)=g(c), cortándose en c estas dos funciones

Junio de 2005. Prueba B

C-3.- Estúdiese, según los valores de los números reales α y β, la continuidad de la función *f* definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0\\ \beta & \text{si } x=0\end{cases}.$$

La función $\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}$ es continua en R-{0}, pues $1+e^{1/x}$ nunca se anula. El único problema está en x=0, al anularse el denominador del exponente. Por otro lado en x=0 la función cambia de expresión analítica, luego es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad:

Continua en x=0 si $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\beta$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\frac{\alpha}{1+e^{1/0}}=(ind)=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^+}}=\dfrac{\alpha}{\infty}=0\\ \lim_{x\to 0^-}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^-}}=\dfrac{\alpha}{1}\end{cases}$$

Para que exista el límite α=0. Si α=0 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

Por otro lado para ser continua $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$ → β=0

Luego si β=0 y α=0 la función será continua en x=0, y por lio tanto en todo R.

Septiembre de 2006. Prueba A

PR2. b) Pruébese que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,1]$

Definamos la función $f(x)=3x-e^x$; si demostramos que f(x)=0 en $(-\infty,1]$, entonces se cumplirá la ecuación. Para esto apliquemos Bolzano:

a) f(x) es continua en R y por tanto continua en todo el intervalo
b) busquemos el intervalo [a,b] comprendido en $(-\infty,1]$ y tal que $f(a)\cdot f(b)<0$. Por ejemplo [0.5, 1]: f(1)=3-e<0, $f(0.5)=1.5-e^{0.5}>0$.

Así f(x) cumplirá Bolzano en [0.5, 1], y por lo tanto, existe al menos un valor $c\in(0.5,1)$, luego $c\in(-\infty,1]$ tal que f(c)=0, es deci se cumple la ecuación.

Junio de 2007.Prueba A

C-4. Demostrar que las curva f(x)=sen(x) y g(x)=1/x se cortan en algún punto del intervalo $(2\pi, 5\pi/2)$

Si f(x) y g(x) se cortan en algún punto → f(x)=g(x) → sen(x)=1/x . Para poder aplicar Bolzano pasamos 1/x al otro miembro → $\underbrace{sen(x)-\frac{1}{x}}_{h(x)}=0$. De esta forma resolver la ecuación es lo mismo que ver que h(x)=0.

Apliquemos Bolzano a h(x) en el intervalo marcado $(2\pi,5\pi/2)$:

a) Continua en $[2\pi,5\pi/2]$, ya que h(x) es continua en todos los reales menos en el 0, y $0\notin[2\pi,5\pi/2]$.

b) $h(2\pi)=sen(2\pi)-1/(2\pi)=-1/(2\pi)<0$, $h(5\pi/2)=sen(5\pi/2)-1/(5\pi/2)=1-2/(5\pi)>0$

Luego cumple Bolzano, y por lo tanto, existe un punto $c\in(2\pi,5\pi/2)$ tal que h(c)=0, y por ello en este punto se cumple la igualdad f(c)=g(c), cortándose las dos gráficas

Junio de 2007.Prueba B

PR-2 (b) Demostrar que existe algún número real c tal que $c+e^{-c} = 4$.

Si modificamos la igualdad → $\underbrace{x+e^{-x}-4}_{f(x)}=0$ tendremos que la ecuación solución si existe un punto c tal que f(x)=0,es decir si podemos aplica Bolzano:

a) Continua en R, luego podemos tomar cualquier intervalo para aplicar Bolzano

b) Busquemos el intervalo f(0)=1-4<0. Si tomamos x=4, como e^{-x} siempre es positivo entonces $f(4)=4+e^{-4}-4>0$.

Luego cumple Bolzano en [0.4], y por lo tanto, existe $c\in(0,4)$ tal que f(c)=0, y entonces $c+e^{-c}=4$ solución en (0,4).

Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

C1. Hallar a y b para que f(x) continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} a+x\ln(x) & si\ \ x>0 \\ b & si\ x=0 \\ \dfrac{sen(\pi x)}{x} & si\ \ x<0 \end{cases}$$

La función xln(x) es continua si x>0 y $\frac{sen(\pi x)}{x}$ es continua en x<0, pues no toma el valor x=0. De esta forma, en cada trozo las funciones son continuas en los dominios de definición. Por esta razón sólo hay que estudiar la continuidad en x=0

Continuidad en x=0. Será continua si $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=(*)=\pi \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=(*)=a \end{cases}$ → el límite existe si a=π y valdrá $\lim_{x\to 0} f(x)$=π

(*) Calcularemos estos límites en el tema 12 (Teorema de L'Hopital)

f(0)=b, como $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ →b=π

De esta forma si a=π y b=π la función es continua en x=0, y por lo tanto en todo R.