Tema 12. Derivabilidad de funciones.

1. Tasa de Variación media. Derivada en un punto. Interpretación

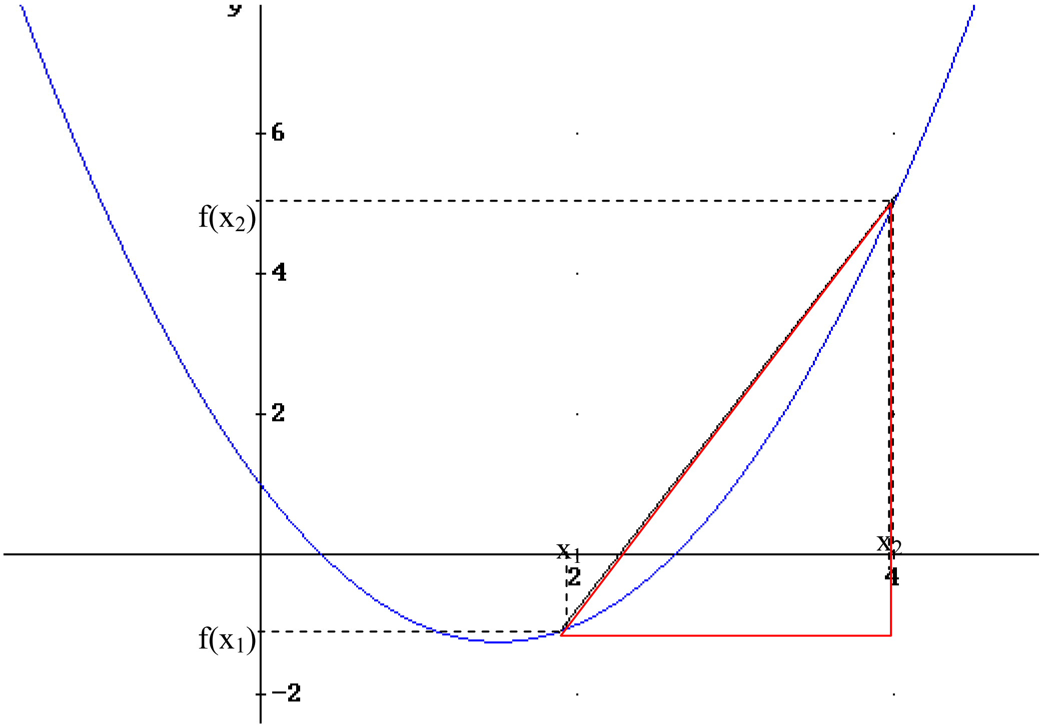
1.1 Tasa de variación Media

Definición: se llama tasa de variación media de una función f(x) entre los valores x_1 y x_2 al cociente entre el incremento que experimenta la variable dependiente "y", y la variable independiente "x":

$$T_{vm}(x_1,x_2,f(x))=\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Interpretemos gráficamente su significado:

Ejemplo*:* $f(x)=x^2-3x+1$



Veamos la tasa de variación media entre 2y 4: $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{2,4}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{5-(-1)}{4-2}=3$

Para interpretar $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ fijémonos en el triángulo rectángulo rojo de la imagen, donde los catetos son $(f(x_2)-f(x_1))$ y (x_2-x_1). De esta forma $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es el cociente de los dos catetos, y así $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es la tangente del ángulo que forma la recta que une los puntos $(x_1,f(x_1))$ y $(x_2,f(x_2))$ con el eje x, y por tanto $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es la pendiente de dicha recta

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

1.2 Definición de derivada de una función en un punto

Definición: la derivada de una función f(x) en el punto x_0, se denota como f'(x_0), es la tasa de variación instantánea, es decir:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Generalmente suele ser más fácil calcular esta derivada a partir de la segunda igualdad de la definición.

Una *función es derivable en un punto* cuando el límite existe, aunque este sea ∞ o -∞.

Ejemplos:

a) $f(x)=x^2+1$ en x=2

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((2+h)^2+1\right)-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+4}{1}=4$$

La función f(x) es derivable en x=2 y f'(2)=4

b) $f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & si\ x>1 \\ -x+1 & si\ x\leq 1\end{cases}$ en x=1

$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h-1)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$

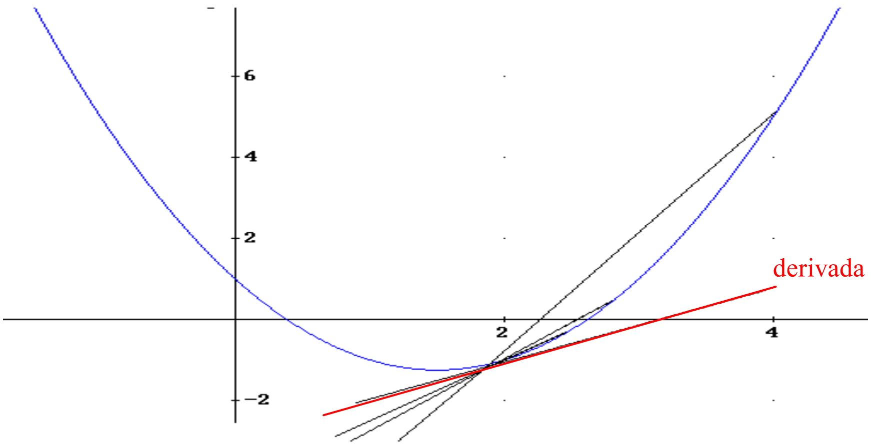
$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(1+h)+1-0}{h}=\lim_{h\to 0^{-+}}\frac{-h}{h}=-1$

No existe el límite por tanto la función f(x) no es derivable en x=1.

Nota: las funciones *valor absoluto* no son derivables en los puntos de x donde se anulan. En estos puntos las derivadas laterales son de distinto signo.

1.3 Interpretación geométrica de la derivada

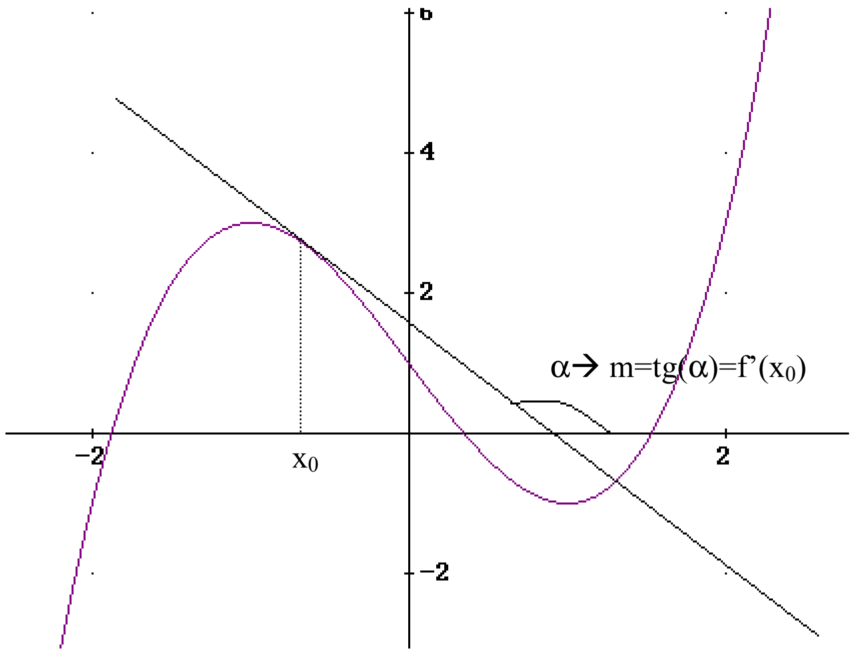
En el apartado 1.1 vimos que la tasa de variación media se interpretaba como la pendiente de la recta que unía los dos puntos. La derivada es el límite de la variación media cuando los puntos se acercan infinitamente, veamos esto de forma gráfica en x=2



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Como vemos en la gráfica anterior si nos acercamos infinitamente al punto la recta que une los dos puntos tiende a ser la recta tangente a la función.

Por tanto ***la derivada en x_0 de f(x), es decir $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $(x_0, f(x_0))$.***



Conclusión*: $f'(x_0)=tg(\alpha)=m_{\text{recta tangente en xo}}$*

Conociendo la pendiente de la recta y el punto por el que pasa $(x_0,f(x_0))$ es fácil calcular la ecuación de la recta tangente y normal (la pendiente es $-1/m=-1/f'(x_0)$):

· ***Ecuación de la recta tangente a la función f(x) en x_0:***

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

· ***Ecuación de la recta normal a la función f(x) en x_0:***

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

Ejemplo: calcular la recta tangente y normal a la curva $y=f(x)=x^2+3x$ en el punto de abscisa $x_0=1$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+3(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+5h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+5}{1}=5$$

$m_{\text{recta tang}}=f'(1)=5$ y el punto es P $(1,f(1)) \rightarrow P(1,4)$

recta tangente → $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-4=5(x-1)$ $y=5x-1$

recta normal → $y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$ $y-4=-\frac{1}{5}(x-1)$ $y=-\frac{1}{5}x+\frac{21}{5}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2. Continuidad y derivabilidad

Teorema: toda función f(x) derivable en un punto, es continua en este punto. El contrario no siempre es cierto para toda función.

Ejemplo: como vimos la función $f(x)=x^2+1$ era derivable en x=2 (existe el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$) luego es continua en x=2

Nota: Todas las funciones polinómicas, son continuas y derivables en todos los puntos.

Veamos otros dos ejemplos donde el recíproco al teorema no es cierto, son continuas y no derivables:

a) $f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & si\ x>1 \\ -x+1 & si\ x\leq 1 \end{cases}$ en x=1 es continua → $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$

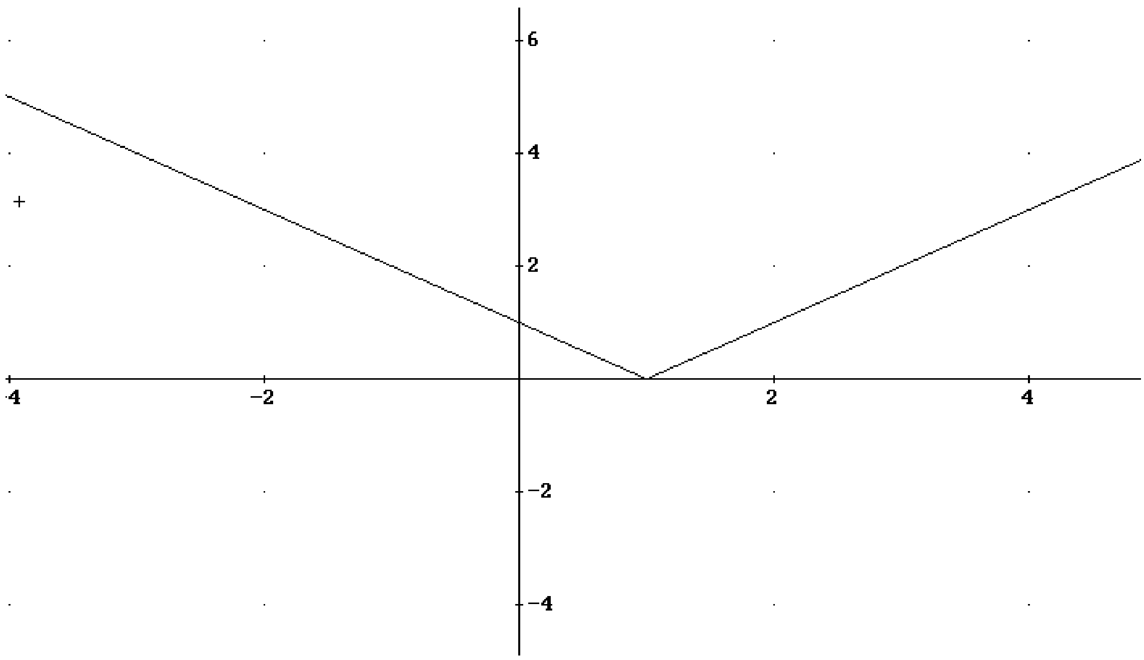
en x=1 no es derivable (ver página 3)

b) $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ en x=0 es continua pero no es derivable :

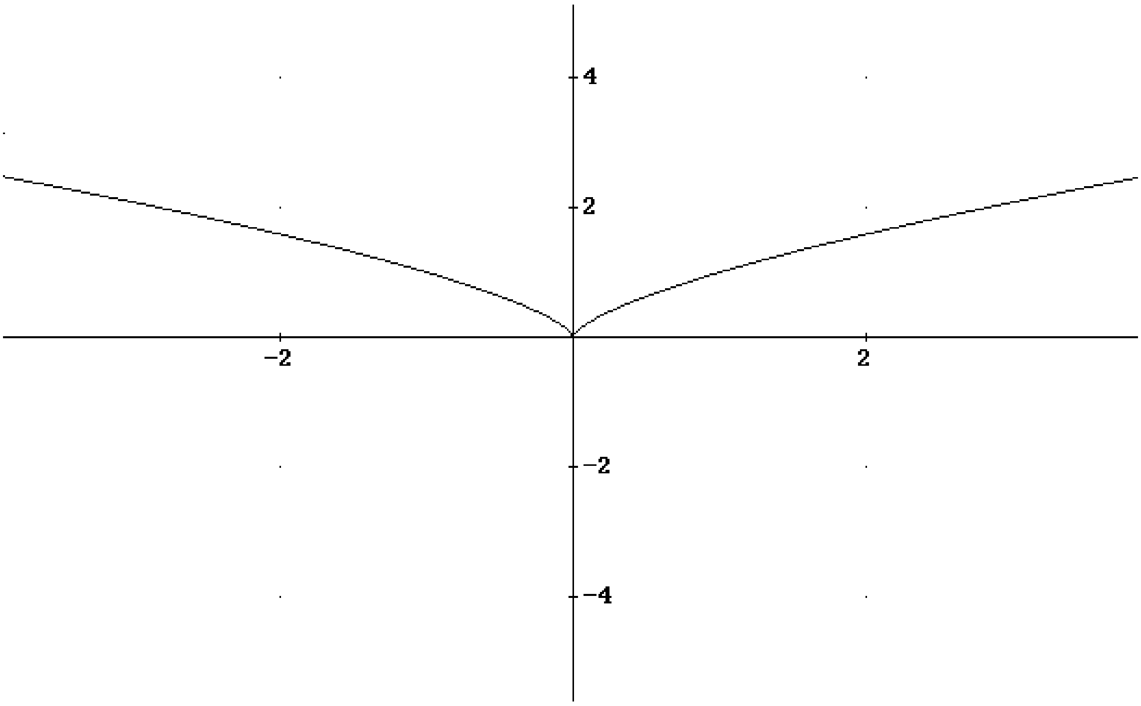
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}-0}{h}=\begin{cases} \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^{-1/3}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=+\infty \\ \lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0^{-+}}h^{-1/3}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=-\infty \end{cases}$$

Veamos la representación gráfica de estas dos funciones no derivables, y veremos su interpretación gráfica:

a) f(x)=|x-1|



b) g(x)= $\sqrt[3]{x^2}$



Gráficamente vemos que en los puntos donde la función no es derivable existe un "**pico**" o punto anguloso que nos indica el cambio de pendiente de la recta tangente en dichos puntos (límites laterales son diferentes).

Ejercicio 1: Sea la función f(x)=$\begin{cases} \sin x & si\ \ x \leq 0 \\ x^2+ax+b & si\ x > 0 \end{cases}$ calcular a y b para que f(x) sea continua y derivable.

La función está definida a trozos pero tanto sen(x) como $-x^2+ax+b$ son continuas y derivables en todos los puntos, luego punto donde hay que estudiar la continuidad y derivabilidad es x=0 donde la función cambia de expresión algebraica

a) Continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = sen(0) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{continua\ \ si} b = 0$$

Luego si b=0 independientemente del valor de a la función es continua

b) Derivabilidad

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h^2+ah-0}{h} = a \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{sen(h)-0}{h} = (L'Hopital) = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{derivable\ \ si} a = 1$$

Otro método más sencillo: cuando la función es continua podemos derivarla (veremos cómo se deriva en el apartado 4) :

$$f'(x)=\begin{cases}\cos(x) & si\ \ x\leq 0\\ -2x+a & si\ \ x>0\end{cases}$$

La función será derivable en el punto x=0 si existe el límite $\lim_{x\to 0} f'(x)$, aunque este sea infinito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f'(x)=a\\ \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\cos(0)=1\end{array}\right\}\xrightarrow{derivable\ si} a=1$$

3. Función derivada. Derivadas sucesivas

3.1 Función derivada

Cuando la función f(x) es continua podemos obtener su función derivada f'(x). La función derivada, f´(x), para cada valor de x nos da el valor de la derivada en ese punto, es decir la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

$$f:R\longrightarrow R \qquad\qquad f':R\longrightarrow R$$
$$x\longrightarrow f(x) \qquad\qquad x\longrightarrow f'(x)$$

A la función f'(x) se le llama ***función derivada*** de f(x), tal que si somos capaces de calcular esta función la derivada de f(x) en un punto x_0 es f´(x_0), es decir la imagen de f´(x) en el punto x=x_0.

A partir de definición de derivada la función f(x) se obtiene aplicando la definición de derivada para una x genérica:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Calculo de alguna función derivada:

1) f(x)=x^2-3x →

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)-x^2+3x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx-3xh}{h}=2x-3$$

2) f(x)=K (cte)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Si bien para el cálculo de la función derivada veremos en el siguiente apartado la tabla de derivadas y las reglas necesarias para realizar cualquier tipo de derivada.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

3.2 Derivadas de orden superior

En todos los puntos del dominio de f'(x) (donde f(x) es derivable) podemos considerar otra función f ''(x), que asigna a cada punto de x el valor de la derivada de f'(x) en este punto.

$$f'': R \longrightarrow R \qquad\qquad f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$
$$x \longrightarrow f''(x)$$

La función así definida recibe el nombre de ***segunda derivada*** de f(x), f´´(x). De forma análoga podemos definir la tercera derivada f´´´(x), cuarta $f^{(IV}(x)$, etc.

4. Derivada de funciones elementales. Operaciones con derivadas

4.1 Derivadas de las funciones elementales

Se puede calcular a partir de la definición vista en el apartado anterior la función derivada de las funciones elementales. Veamos en la siguiente tabla la derivada de algunas funciones elementales.

Derivada elementales		
Función	**Función derivada**	**Ejemplo**
f(x)=K	f´(x)=0	f(x)=-e → f´(x)=0
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln(a)$	$f(x)=5^x \rightarrow f'(x)=5^x\ln(5)$
f(x)=ln(x)	f´(x)=1/x	
$f(x)=\log_a(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$	$f(x)=\log_3(x) \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln(3)}$
f(x)=sen(x)	f´(x)=cos(x)	
f(x)=cos(x)	f´(x)=-sen(x)	
f(x)=tg(x)	$f'(x)=1+tg^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	
f(x)=arc sen(x)	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
f(x)=arc cos(x)	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
f(x)=arc tg(x)	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4.2 Operaciones con derivadas

Aplicamos la definición de la derivada y las propiedades de los límites se obtienen las reglas que permiten derivar funciones que son resultado de operar con otras funciones derivables.

Para ver las propiedades de las derivadas veamos otra tabla:

Propiedades de las derivadas	
Propiedad	**Ejemplo**
Suma: (f+g)´(x)=f´(x)+g´(x)	$(x^2-x+\cos(x)+e^x)'=2x-1-\text{sen}(x)+e^x$
Constante por una función: (kf)´(x)=kf´(x)	$(5\text{arc sen}(x))'=\dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}$
Producto: (f·g)´(x)=f´(x)·g(x)+f(x)·g´(x)	(5x·sen(x))´=5sen(x)+5x·cos(x)
Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$\left(\dfrac{7x}{\ln(x)}\right)'=\dfrac{7\ln(x)-7x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\dfrac{7\ln(x)-7}{\ln^2(x)}$
Función compuesta(g∘f)´(x)=(g(f(x))´=g´(f(x)·f´(x)	$\left(e^{\cos^2(x^3)}\right)'=e^{\cos^2(x^3)}\cdot 2\cdot\cos(x^3)\cdot(-sen(x^3))\cdot 3x^2$

A partir de las derivadas elementales y de las propiedades de las derivadas es sencillo calcular la derivada de toda función, sólo hay que aplicar las propiedades con orden.

Ejercicio 2: calcular las derivadas siguientes

a) $D[(x^2-3)^5]=5(x^2-3)^4\cdot 2x=10x\cdot(x^2-3)^4$

b) $D[(3x)^{1/3}]=\dfrac{1}{3}(3x)^{-2/3}\cdot 3=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x)^2}}$

c) $D[x\cdot 4^x]=4^x+x\cdot 4^x\cdot\ln(4)$

d) $D[(e^{2x}+3)^4]=4\cdot(e^{2x}+3)^3\cdot(2\cdot e^{2x})=8\cdot(e^{2x}+3)^3\cdot(e^{2x})$

e) $D[\ln(2-3x^2)^4]=\dfrac{1}{(2-3x^2)^4}\cdot 4(2-3x^2)^3(-6x)=\dfrac{-24x}{2-3x^2}$

f) $D\left[\dfrac{2}{(x^3-3x^2)^6}\right]=\left[\dfrac{-2\cdot 6\cdot(x^3-3x^2)^5(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2)^{12}}\right]=\dfrac{-12\cdot(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2)^7}$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right]=\dfrac{-\frac{1}{2}(4-5x^2)^{-1/2}\cdot(-10x)}{4-5x^2}=\dfrac{5x}{(4-5x^2)\cdot\sqrt{4-5x^2}}=\dfrac{5x}{\sqrt{(4-5x^2)^3}}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

h) $D\left[(4x+2)\sqrt{4x-2}\right]=4\sqrt{4x-2}+(4x+2)\cdot\frac{4}{2\sqrt{4x-2}}=4\sqrt{4x-2}+(4x+2)\cdot\frac{2}{\sqrt{4x-2}}=\frac{24x-4}{\sqrt{4x-2}}$

i) $D[sen^4(x)]=4\cdot sen^3(x)\cdot \cos(x)$

j) $D[sen(x^4)]=\cos(x^4)\cdot 4x^3$

k) $D\left[\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^3\right]=3\cdot\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=3\cdot\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

l) $D[sen^2(x^2)]=2sen(x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot 2x= 4x\cdot sen(x^2)\cdot\cos(x^2)$

m) $D\left[arc\,sen\left(\sqrt{x-1}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2-x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$

n) $D\left[\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}}\cdot\frac{7\cdot(1-7x)-(-7)\cdot(1+7x)}{(1-7x)^2}=\frac{14}{2\cdot(1-7x)^2}\sqrt{\frac{1-7x}{1+7x}}=\frac{7}{\sqrt{(1+7x)(1-7x)^3}}$

o) $D\left[arc\,tg(\sqrt{x})\right]=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot(1+x)\sqrt{x}}$

p) $D\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right]=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{1}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\frac{1}{x\sqrt{x}-x+x-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$

q) $D\left[sen^3(2x)\cdot\cos^2(3x)\right]=3\cdot sen^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2\cdot\cos^2(3x)-sen^3(2x)\cdot 2\cos(3x)\cdot sen(3x)\cdot 3=$

$=6\cdot sen^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot\cos^2(3x)-6\cdot sen^3(2x)\cdot\cos(3x)\cdot sen(3x)$

r) $D\left[arc\,sen(tg(x))\right]=\frac{1+tg^2(x)}{\sqrt{1-tg^2(x)}}$

Ejercicios del tema

Ejercicio 3: Estudiar la derivabilidad de $y = f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

La función es continua en R, pues es una raíz cúbica que existe para números negativos. Veamos la derivabilidad:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(3x^2-x^3)^{-2/3}(6x-3x^2)=\frac{2x-x^2}{\sqrt[3]{9x^4+x^6-6x^5}}=\frac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=$$

Se anula el denominador en x=0 y x=3, estudiemos la derivabilidad en estos puntos

x=0

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2-x}{\sqrt[3]{9x+x^3-6x^2}}=\begin{cases} f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{2}{0^+}=\infty \\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \end{cases} \quad \text{No derivable}$$

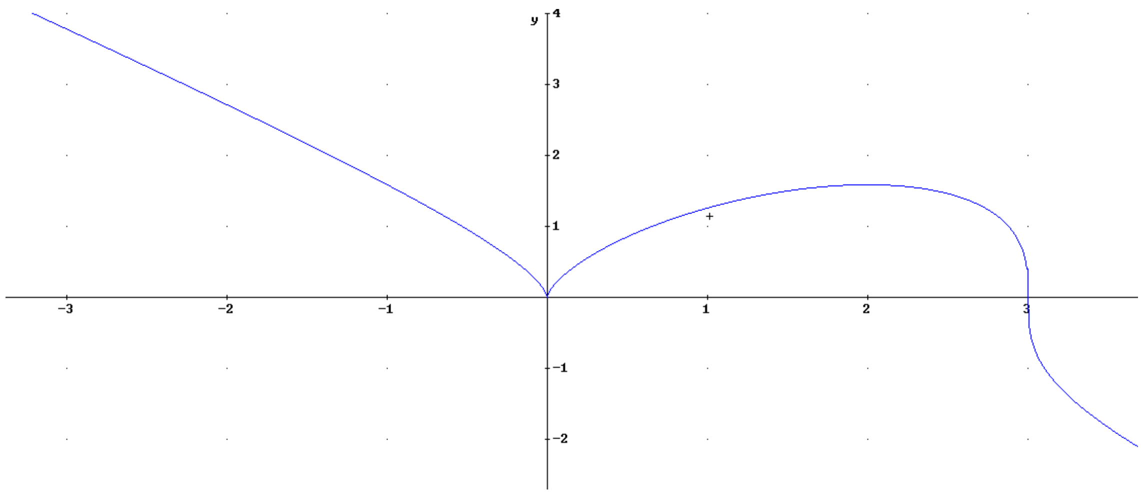
x=3

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{2-x}{\sqrt[3]{9x+x^3-6x^2}}=\begin{cases} f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \\ f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=-\dfrac{1}{0^+}=-\infty \end{cases} \quad \text{derivable } m=-\infty,$$

es decir la tangente es una recta paralela al eje OY.

Nota: una función derivable en un punto si existe la derivada, aunque esta sea infinito.

Veamos la gráfica para interpretar los resultados en x=0 y x=3



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 4: estudiar la derivabilidad de $y = g(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$ en x=0.

Veamos primero la continuidad:

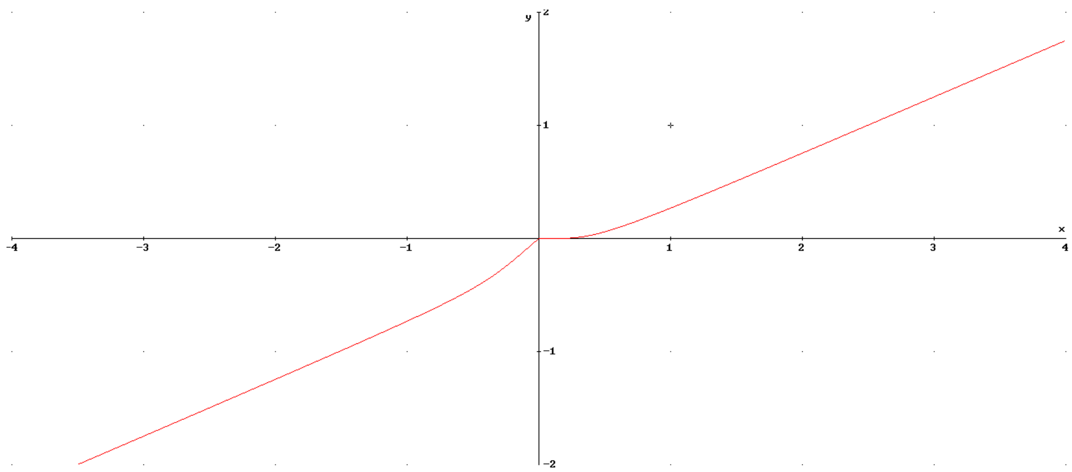
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+e^{1/x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} = \dfrac{0}{1+\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} = \dfrac{0}{1+0} = 0 \end{cases} \quad \text{Continua}$$

Veamos ahora la derivabilidad por la definición:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{1+e^{1/h}}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(1+e^{1/h})} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{(1+e^{1/h})} = \dfrac{1}{1+\infty} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{(1+e^{1/h})} = \dfrac{1}{1+0} = 1 \end{cases}$$

No es derivable en x=0

Veamos la gráfica:



Ejercicio 5: Deriva la función f(x)= ln(cos(x))+x·e^{2x}

$$f'(x) = -\frac{sen(x)}{\cos(x)} + e^{2x} + 2x\cdot e^{2x} = -tg(x) + e^{2x}(1+2x)$$

Ejercicio 6: Calcula un punto de la función f(x)=x^2+x+5 en la que la recta tangente sea paralela a la recta y=3x-2

Si la rectas son paralelas misma pendiente, luego la recta tangente tiene pendiente m=3, por tanto buscamos el punto donde f'(x)=3 → f'(x)=2x+1=3 → x=1→ P(1,f(1))=(1,7)

Ejercicio 7: Hallar b y c para que f(x) sea continua y derivable en (0,2)

$$f(x)=\begin{cases} x^3-12x+1 & si\ 0\leq x\leq 1 \\ 20x^2+bx+c & si\ 1<x\leq 2 \end{cases}$$

1. Continuidad: las funciones definidas en los dos trozos son polinomios y por tanto el único punto hay que estudiar la continuidad es en x=1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-10 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=20+b+c \end{cases} \quad -10=20+b+c$$

2. Derivabilidad: si b y c cumplen la anterior ecuación f(x) continua y podemos calcular la derivada en todos los puntos del dominio

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-12 & si\ 0\leq x\leq 1 \\ 40x+b & si\ 1<x\leq 2 \end{cases}$$

Volvemos a tener dos polinomios, así que el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad es en x=1:

$$\lim_{x\to 1} f'(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-9 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=40+b \end{cases} \quad -9=40+b$$

Resolviendo el sistema b=-49 y c=19

Ejercicio 8: Dada la función f(x) a) hallar a, b para que f(x) sea continua. b) Calcular los puntos donde es derivable)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si\ x\leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & si\ 0<x\leq 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si\ x>2 \end{cases}$$

a) Las funciones x^2+2 y $\dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ son continuas en R. La función $\sqrt{ax+b}$ será continua en (0,2] dependiendo de a y b. Veamos los valores de a y b para que sea continua en 0 y 2

<u>x=0</u> → $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2 \end{cases} \rightarrow b=4$

<u>x=2</u> → $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\sqrt{2a+4} \end{cases} \rightarrow a=-1$

Para estos valores de a y b $\sqrt{-x+4}$ es continua en (0,2] ya que –x+4 en este intervalo es mayor de cero.

Luego si a=-1 b=4 la función f(x) continua en R, y podemos calcular f'(x)

b) f'(x)= $\begin{cases} 2x & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+4}} & si\ \ 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & si\ x > 2 \end{cases}$

Derivabilidad en x=0 → $f'(0) = \begin{cases} f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$ → No derivable

Derivabilidad en x=2 → $f'(2) = \begin{cases} f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ → derivable en x=2

Luego f(x) derivable en R-{0}

Ejercicio 9: Calcular los puntos donde la recta tangente a $y=2x^3+3x^2-30x-6$ paralela a la recta y=6x-5

Si es paralela tienen misma pendiente, es decir m=6. Como la pendiente de la recta tangente es f'(x) se tiene que cumplir que f'(x)=6

$f'(x)=6x^2+6x-30=6$ → $x_1=2$, $x_2=-3$.

$P_1(2,f(2))=(2,-38)$

$P_2(-3,f(-3))=(-3,57)$

Ejercicio 10: Dada la función $f(x)=x^2-4x+3$ encontrar los puntos donde la recta tangente a esta función sea paralela a la recta que corta la curva en x=1, x=4

Si son paralelas tienen la misma pendiente, calculemos las dos pendientes

Pendiente recta secante en x01, x=4→ m=$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{3-0}{3} = 1$

Pendiente rectas tangentes f'(x)=2x-4

Luego 2x-4=1 → x=5/2 P(5/2,-3/4)

Ejercicio 11: Hallar los valores de a y b para que la recta tangente a la curva con función $y=x^2+bx+c$ en el punto P(3,0) sea perpendicular a y=-0.5x+3

Primera condición la curva pasa por P, es decir f(3)=0 → 9+3b+c=0

Segunda condición al ser perpendicular la pendiente de la recta tangente será la inversa con signo menos m=-1/(-0.5)=2 para la recta tangente en x=3→ f'(3)=2 → 6+b=2

b=4,c=-21

Ejercicio 12: Estudiar la derivabilidad de f(x)=x/(1+|x|), y calcular f''(x)

a) f(x) es continua en todo R pues el denominador no se anula y la función valor absoluta es continua en R. Calculemos la derivada, para esto primero ponemos la función definida a trozos conforme a los valores del x que cambian el signo de |x|:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & si\ \ x\le 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & si\ \ x>0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & si\ \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & si\ \ x>0 \end{cases}$$

El único punto donde hay que estudiar la derivabilidad es en x=0, donde cambia de expresión analítica, ya que los denominadores no se anulan en ningún punto donde estén definidas.

$$\lim_{x\to o} f'(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to o^+} f'(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to o^-} f'(x)=1 \end{cases} \lim_{x\to o} f'(x)=1.$$

Función derivable en R, pues $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ continua si x<0, $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ continua si x>0 y f'(0)=1.

Como es derivable en R podemos definir la segunda derivada:

b) $f''(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{(1-x)^3} & si\ \ x\le 0 \\ \dfrac{2}{(1+x)^3} & si\ \ x>0 \end{cases}$ en x=0 la función f(x) no es dos veces derivable pues

$$\lim_{x\to o^+} f''(x)=2\ne \lim_{x\to o^-} f''(x)=-2$$

Ejercicio 13 Sea f(x) a) estudiar los valores de a que hacen continua f(x), b) ver para estos valores si la función es derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq a \\ 2ax-2a+1 & si\, x>a \end{cases}$$

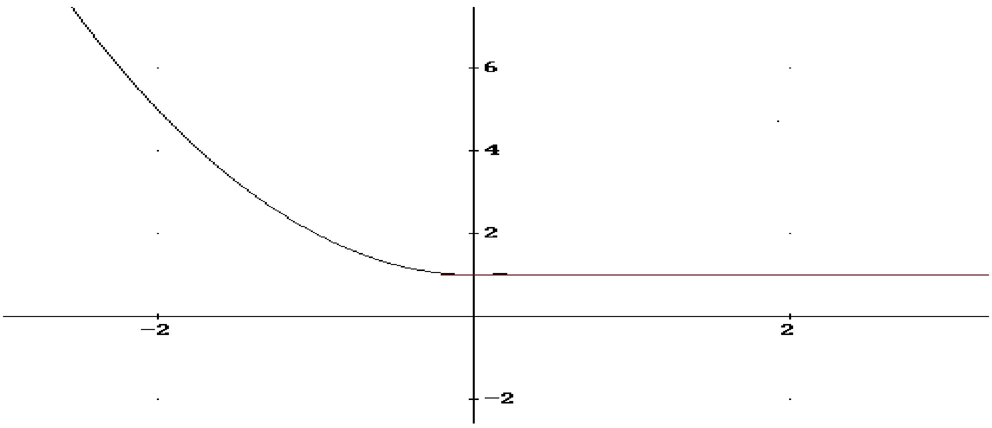
a) Los dos trozos de definición de f(x) son polinomios luego continuos en todo R y en por tanto en su dominio de definición. Sólo nos falta por estudiar la continuidad en a:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=a^2+1 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=2a^2-2a+1 \end{cases}$$ → $a^2+1=2a^2-2a+1$ → $a^2-2a=0$ → a=0,a=2

b) a=0 → f(x)= $\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq 0 \\ 1 & si\, x>0 \end{cases}$ → f'(x)= $\begin{cases} 2x & si\ \ x\leq 0 \\ 0 & si\, x>0 \end{cases}$

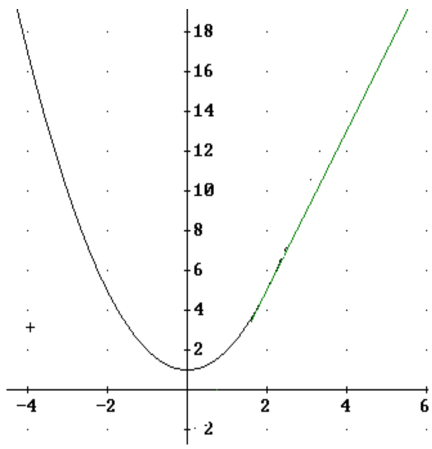
$f'(0^+)=f'(0^-)=0$

Luego es derivable en x=0. Veamos la gráfica



a=2 → f(x)= $\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq 2 \\ 4x-3 & si\, x>2 \end{cases}$ → f'(x)= $\begin{cases} 2x & si\ \ x\leq 2 \\ 4 & si\, x>2 \end{cases}$

$f'(2^-)=f'(2^+)=4$, luego es derivable en x=2. Veamos la gráfica:



Ejercicios de la P.A.U.

Septiembre 2004. Prueba A.

PR-2

a) Sea f la función dada por $f(x)=x^2-3|x|+2$, estúdiese la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada

a) $f(x) = x^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & si\ x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 & si\ x < 0 \end{cases}, \quad x \in R.$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2-3h+2-2}{h} = -3 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2+3h+2-2}{h} = 3 \end{cases}$$ No derivable x=0.

Septiembre 2005. Prueba A

PR-2. a) Estúdiese la derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2) & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

Primero tenemos que estudiar la continuidad de f(x): los dos trozos de la función son continuos, pues el argumento del logaritmo es siempre positivo. De esta forma sólo tenemos que ver la continuidad en x=0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln(1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \end{cases}$$ f(0)=0,

luego es continua en R y podemos calcular la función derivada en todos los puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}, & x > 0 \\ 2x, & \mathrm{x} \leq 0 \end{cases}$$

Los dos trozos son continuos pues uno es un polinomio y el otro es un denominador que nunca se anula. Sólo tenemos que calcular la derivabilidad en x=0:

$f'(0^+)=f'(0^-)=0$ luego es derivable en x=0 y por tanto en R

Junio 2006. Prueba B.

C-3. Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Determínense a, b, c y d para que la recta y+1=0 sea tangente a la gráfica de f en el punto (0,-1), y la recta x-y-2=0 sea tangente a la gráfica de f en el punto (1,-1).

a) Recta y=-1 → m=0 y Pasa por (0,-1)

f(0)=**d=-1**

f'(0)=**c=0**

b) Recta y=x-2 → m=1 y Pasa por (1,-1)

f(1)=a+b-1=-1

f'(1)=3a+2b=1

a=1, b=-1

Septiembre 2006. Prueba B.

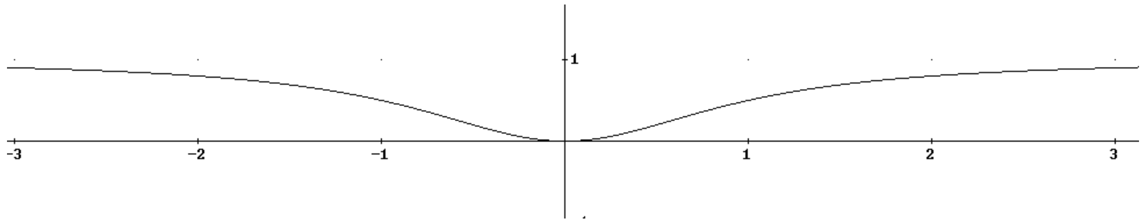
C-3 Calcúlense las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ en el punto $x=0$.

$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ la pendiente de la recta paralela es m=f'(0)=0, es decir paralela al eje x, y la de la recta normal es m=∞, paralela al eje y. Las dos pasan por el punto P(0,f(0)) →P(0,0)

a) Tangente en x=0 (y-0)= 0x+0 → y=0 (eje X)

b) Normal x=0 (eje Y)

Veamos la gráfica de f(x):



Septiembre 2007. Prueba A

C-3.- Determinar en qué puntos de la gráfica de la función $y=x^3-3x^2+x+1$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta y=x+7.

Si las rectas son tangentes misma pendiente. La pendiente de la recta y=x+7 es m=1. La pendiente de la recta tangente es igual a $f'(x)=3x^2-6x+1$. Obliguemos a que la pendiente sea 1 y calculemos el valor de la coordenada x de los puntos buscados:

$3x^2-6x+1=1$ →$x(3x-6)=0$ →$x_1=0$, $x_2=2$

$P_1(0,f(0))$→ $P_1(0,1)$

$P_2(2,f(2))$→ $P_1(2,-1)$

Junio 2008. Prueba A

C-2.- Determinar el valor de a para que la recta tangente a la función $f(x)=x^3+ax$ en el punto x = 0 sea perpendicular a la recta y + x = −3.

Si la recta tangente es perpendicular a y=-x-3, entonces la pendiente es m=-1/-1=1. La pendiente de las rectas tangente en x=0 es $f'(0)=3\cdot 0^2+a=a$. Igualando la derivada al valor de m obtenemos que a=1.

Prueba B

PR-2 Dada la función f(x)=$\begin{cases} \frac{sen(x^2)}{x} & si \quad x > 0 \\ x^2 - 2x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$, se pide a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f(x)

<u>Continuidad</u>: sólo hay que estudiar la continuidad en x=0 que es donde la función cambia de expresión analítica y donde se anula en denominador de la primera.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x^2)}{x} = 0 \ (L'Hopital \ tema\, siguiente) \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \end{cases}$$

f(x) es por tanto continua en R

<u>Derivabilidad:</u> como es continua en R podemos definir la función derivada en todos los puntos:

f'(x)= $\begin{cases} 2\cos(x^2) - \frac{sen(x^2)}{x^2} & si \quad x > 0 \\ 2x - 2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

Sólo hay que estudiar la derivabilidad en x=0

f'(0^+)= $\lim_{x\to 0^+} 2\cos(x^2) - \frac{sen(x^2)}{x^2} = 2 - \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x^2)}{x^2} = 2 - 1 = 1 \ (L'Hopital \ tema\, 4)$

f'(0^-)=-2

Luego no es derivable en x=0

La función f(x) es derivable en R-{0}

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)