1. Determina el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ b) $g(x)=\log\dfrac{x+1}{2x-5}$ c) $h(x)=2^{x+3}-1$

2. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ y $g(x)=4x-5$, halla:

   a) $\dfrac{g}{f}$ b) $f\circ g$ c) $(f+g)(3)$ d) $(g\circ f)(2)$

3. Dada la función $h(x)=2^{x+3}-1$, se pide:

   a) ¿Qué relación existe entre las gráficas de la función *h* y *f* siendo $f(x)=2^x$?

   b) Halla la expresión de la función inversa de *h* y explica cómo son las gráficas de *h* y h^{-1}.

4. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+2}{x+3} & \text{si} \quad x<-3\\ x^2+2x-4 & \text{si} \quad -3\le x<2\\ -\dfrac{1}{2}x+7 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

   se pide:

   a) Estudio analítico de la continuidad.

   b) Gráfica.

   c) Tiene asíntotas. Justifica la respuesta.

5. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-5x+4}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+3}$

6. Estudia las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1-x}$.

Soluciones

1. a) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

Dom $f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,16-x^2\geq 0\}$

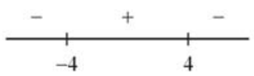
$16-x^2\geq 0$

$16-x^2=0$

$x^2=16$

$x=\pm 4$

signo$\left(16-x^2\right)$



Dom $f=[-4,\,4]$

b) $g(x)=\log\dfrac{x+1}{2x-5}$

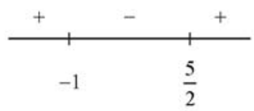
Dom $f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\dfrac{x+1}{2x-5}>0\ \ y\ \ 2x-5\neq 0\right\}$

$\dfrac{x+1}{2x-5}>0$

$x+1=0$ $\qquad$ $2x-5=0$

$x=-1$ $\qquad$ $x=\dfrac{5}{2}$

signo$\dfrac{x+1}{2x-5}$



Dom $g=(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

c) Dom $h=\mathbb{R}$

$x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ x+3\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ 2^{x+3}\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ 2^{x+3}-1\in\mathbb{R}$

2. a) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{4x-5}{\dfrac{2x-1}{x+3}}=\dfrac{(4x-5)(x+3)}{2x-1}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{(4x-5)(x+3)}{2x-1}$$

b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x-5)=\dfrac{2(4x-5)-1}{4x-5+3}=\dfrac{8x-10-1}{4x-2}=\dfrac{8x-11}{4x-2}$

$$(f\circ g)(x)=\frac{8x-11}{4x-2}$$

c) $(f+g)(3)=f(3)+g(3)=\dfrac{2\cdot 3-1}{3+3}+4\cdot 3-5=\dfrac{5}{6}+7=\dfrac{47}{6}$

$$(f+g)(3)=\frac{47}{6}$$

d) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g\left(\dfrac{2\cdot 2-1}{2+3}\right)=g\left(\dfrac{3}{5}\right)=4\cdot\dfrac{3}{5}-5=\dfrac{12}{5}-5=-\dfrac{13}{5}$

$$(g\circ f)(2)=-\frac{13}{5}$$

3. a) La gráfica de *h* es la gráfica de *f* trasladada tres unidades a la izquierda y una unidad hacia abajo.

$f(x)=2^x$	$g(x)=2^{x+3}$	$h(x)=2^{x+3}-1$
	La gráfica de *g* es la gráfica de *f* trasladada 3 unidades a la izquierda.	La gráfica de *h* es la gráfica de *g* trasladada 1 unidad hacia abajo.

b) $h(x)=2^{x+3}-1$

$$y=2^{x+3}-1 \quad \Rightarrow \quad y+1=2^{x+3} \quad \Rightarrow \quad x+3=\log_2(y+1) \quad \Rightarrow \quad x=\log_2(y+1)-3 \quad \Rightarrow \quad y=\log_2(x+1)-3$$

$$h^{-1}(x)=\log_2(x+1)-3$$

Las gráficas de *h* y h^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, respecto a la gráfica de la función identidad, $I(x)=x$.

4. Dom $f=\mathbb{R}$

a) *f* es continua en $(-\infty,-3)$ por estar definida en ese intervalo por una función racional, continua en $\mathbb{R}-\{-3\}$ y, en particular, en ese intervalo.

f es continua en $(-3,2)$ y $(2,+\infty)$ por estar definida en esos intervalos por funciones polinómicas, continuas en $\mathbb{R}$ y, en particular, en esos intervalos.

Puntos conflictivos: –3 y 2.

- $x=-3$

  Estudiemos la continuidad en $x=-3$

  1) $f(3)$

  $$f(3)=(-3)^2+2(-3)-4=9-6-4=-1$$

  $\exists\ f(3)$ y $f(3)=-1$

  2) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{2x+2}{x+3}=\dfrac{-4}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\left(x^2+2x-4\right)=-1\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \nexists \lim_{x\to-3} f(x)$$

  Por lo tanto, *f* no es continua en $x=-3$

  Como los límites laterales en $x=-3$ existen y uno de ellos es infinito,

  f tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=-3$.

- $x=2$

  Estudiemos la continuidad en $x=2$

  1) $f(2)$

  $$f(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2+7=-1+7=6$$

  $\exists\ f(2)$ y $f(2)=6$

  2) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

  $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2+2x-4\right)=4\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(-\dfrac{1}{2}x+7\right)=6\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \nexists \lim_{x\to2} f(x)$$

  Por lo tanto, *f* no es continua en $x=2$

  Como los límites laterales en $x=2$ existen y son finitos, pero distintos,

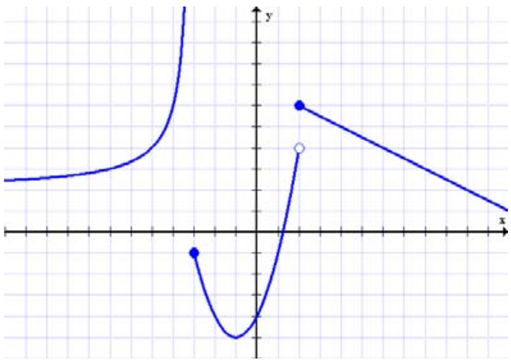
  f tiene una discontinuidad de salto finito en $x=2$.

  Así pues:

  - *f* es continua en $\mathbb{R}-\{-3,2\}$
  - *f* tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=-3$.
  - *f* tiene una discontinuidad de salto finito en $x=2$.

b) Gráfica

$x<-3$	$-3\le x<2$	$x\ge 2$
$f(x)=\dfrac{2x+2}{x+3}$	$f(x)=x^2+2x-4$	$f(x)=-\dfrac{1}{2}x+7$
(Hipérbola) $\begin{array}{c\|c} x & f(x) \\ \hline -3{,}5 & 10 \\ -4 & 6 \\ -5 & 4 \\ -6 & 3{,}3 \\ -7 & 3 \\ -8 & 2{,}8 \\ -9 & 2{,}6 \end{array}$	(Parábola) $\begin{array}{c\|c} x & f(x) \\ \hline -3 & -1 \\ -2 & -4 \\ -1 & -5 \\ 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{array}$ $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-2}{2\cdot 1}=-1$ $V(-1,-5)$	(Recta) $\begin{array}{c\|c} x & f(x) \\ \hline 2 & 6 \\ 4 & 5 \\ 6 & 4 \end{array}$
Extremos de los intervalos		
	$(-3,-1)$ $\bullet-$ $(2,4)$ $-\circ$	$(2,6)$ $\bullet-$



c) Asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+2}{x+3}=2 \quad\Rightarrow\quad$ f tiene una asíntota horizontal por la izquierda en $y=2$.

Por la derecha no tiene asíntota horizontal por estar definida por una función polinómica.

Asíntotas verticales

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{2x+2}{x+3}=\dfrac{-4}{0^-}=+\infty \quad\Rightarrow\quad$ f tiene una asíntota vertical por la izquierda en $x=-3$.

5. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}=\dfrac{0}{0}$ Indeterminación

$$(x-3)\quad \begin{array}{c|ccc} & 2 & -7 & 3 \\ 3 & & 6 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad (x-3)\quad \begin{array}{c|ccc} & 3 & -8 & -3 \\ 3 & & 9 & 3 \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(2x-1) \qquad\qquad (3x+1)$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x-1)}{(x-3)(3x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-5x+4}\right)=+\infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-5x+4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x-\sqrt{9x^2-5x+4}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2-5x+4}\right)}{3x+\sqrt{9x^2-5x+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x)^2-\left(\sqrt{9x^2-5x+4}\right)^2}{3x+\sqrt{9x^2-5x+4}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-\left(9x^2-5x+4\right)}{3x+\sqrt{9x^2-5x+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-9x^2+5x-4}{3x+\sqrt{9x^2-5x+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{3x+\sqrt{9x^2-5x+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{3x}{x}+\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{3+\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\frac{5-0}{3+\sqrt{9-0+0}}=\frac{5}{6}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+3}=1^{+\infty}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+3}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)(x+3)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)(x+3)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{x-1}\right)(x+3)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+6}{x-1}}=e^2$$

7. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1-x}$.

<u>Asíntotas horizontales</u> $y=k$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{1-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ no tiene asíntotas horizontales}$$

(Puede tener asíntotas oblicuas)

<u>Asíntotas verticales</u> $x=a$

$1-x=0 \quad\Rightarrow\quad x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2+2}{1-x}=\frac{3}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+2}{1-x}=\frac{3}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ tiene una asíntota vertical en } x=1 \text{ por ambos lados}$$

<u>Asíntotas oblicuas</u> $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+2}{1-x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2}{x-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}(-1)=-1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2}{1-x}-(-1)x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2+x-x^2}{1-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+x}{1-x}=-1$$

Por lo tanto,

f tiene una asíntota oblicua en $y=-x-1$ por ambos lados

Posición de la curva respecto a la asíntota

$x=10$ $f(10)=\frac{102}{-9}=-11,\widehat{3}$ $a_o(10)=-10-1=-11$ Por la derecha la curva está por debajo de la asíntota oblicua.	$x=-10$ $f(10)=\frac{102}{11}=9,27$ $a_o(10)=10-1=9$ Por la izquierda la curva está por encima de la asíntota oblicua.