

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas

Contenidos

I	Ecuaciones y sistemas ecuaciones trigonométricas	1
1	Ecuaciones trigonométricas	1
1.1	Ejemplos de ecuaciones trigonométricas	2
1.2	Ejercicios ecuaciones trigonométricas	10
2	Sistemas de ecuaciones trigonométricas	21
2.1	Ejemplos de sistemas de ecuaciones trigonométricas	21
2.2	Ejercicios sistemas de ecs. trigonométricas	28

Part I

Ecuaciones y sistemas ecuaciones trigonométricas

1 Ecuaciones trigonométricas

Para resolver las ecuaciones trigonométricas no existen procedimientos específicos. A veces tendremos que:

a) Factorizar utilizando adecuadamente las fórmulas que conocemos.

Veamos algunos ejemplos:

b) Intentar que en la ecuación trigonométrica, tan solo aparezca una sola razón trigonométrica del mismo ángulo

c) Aislar una razón trigonométrica y elevar al cuadrado. Cuando utilicemos este procedimiento; es conveniente comprobar las soluciones (alguna puede que no lo sea).

d) Combinando los procedimientos explicados con anterioridad etc,etc,etc...

1.1 Ejemplos de ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 1 Resuelve la ecuación $2 \sin x \cos x = \sin x$

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x &= \sin x \\ 2 \sin x \cos x - \sin x &= 0 \\ \sin x(2 \cos x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ejemplo 2 Resuelve la ecuación $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$

Para resolver esta ecuación utilizaremos la fórmula:

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \left(\frac{C+D}{2} \right) \cos \left(\frac{C-D}{2} \right)$$

para transformar $\cos 3x + \cos x$ en forma de producto.

Fíjate que:

$$\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$$

Así pues ; resolver la ecuación $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$ es lo mismo que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 2 \cos 2x \cos x &= \cos 2x \\ 2 \cos 2x \cos x - \cos 2x &= 0 \\ \cos 2x(2 \cos x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 0 \rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

El conjunto solución de esta ecuación trigonométrica es :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Observación 3 Vamos a resolver esta ecuación de otra manera. Para ello; vamos a escribir $\cos 3x$ en función sólo del $\cos x$ y $\cos 2x$ en función del $\cos x$

$$\begin{aligned}
 \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\
 &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \\
 &= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \\
 &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \\
 &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = \\
 &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1 \\
 \text{Como } \left\{ \begin{array}{c} \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \end{array} \right\} &\text{ entonces resolver la ecuación}
 \end{aligned}$$

$$\cos 3x + \cos x = \cos 2x$$

Es equivalente a resolver la ecuación

$$\begin{aligned}
 \cos 3x + \cos x &= \cos 2x \\
 4 \cos^3 x - 3 \cos x + \cos x &= 2 \cos^2 x - 1 \\
 4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1 &= 0
 \end{aligned}$$

Si llamamos a $\cos x = X$. Tendremos que resolver la ecuación:

$$4X^3 - 2X^2 - 2X + 1 = 0$$

Para ello; factorizamos aplicando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -2 & -2 & 1 \\
 \frac{1}{2} & & 2 & 0 & -1 \\
 \hline
 & 4 & 0 & -2 & \boxed{0}
 \end{array}$$

$$\left(X - \frac{1}{2}\right) (4X^2 - 2) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow X = \frac{1}{2} \\ 4X^2 - 2 = 0 \rightarrow X = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Deshaciendo el cambio de variable, el problema ha quedado reducido a resolver las tres ecuaciones trigonométricas siguientes:

$$1. \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3. \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Puedes comprobar que el conjunto $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$ coincide con el conjunto siguiente $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$

Con lo que; el conjunto solución de la ecuación trigonométrica es:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Las soluciones en $[0, 2\pi)$ son :

$$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Ejemplo 4 Resuelve $\cos^2 x + 2 \sin x = 2$

Tendremos que expresar el $\cos^2 x$ en función del $\sin x$. Para ello; utilizamos la fórmula fundamental de trigonometría ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$). Con lo que :

$$\begin{aligned} \cos^2 x + 2 \sin x &= 2 \\ 1 - \sin^2 x + 2 \sin x &= 2 \\ -\sin^2 x + 2 \sin x - 1 &= 0 \\ \sin^2 x - 2 \sin x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación obtenida, es una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es $\sin x$.

$$\sin x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 5 Resolver la ecuación $-\frac{1}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

Sabemos que $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

Por lo tanto, resolver la ecuación $-\frac{1}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ es lo mismo que resolver:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + \cos^2 x + \frac{1 + \cos x}{2} &= 0 \\ 2 \cos^2 x + \cos x &= 0 \end{aligned}$$

Factorizando; tendremos:

$$\cos x (2 \cos x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} & \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} & \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La solución es el conjunto

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

que coincide con éste:

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Observación 6 También se puede resolver la ecuación $-\frac{1}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ si expresamos el $\cos^2 x$ en función del $\cos \frac{x}{2}$

Como $\cos x = \cos \left(2 \frac{x}{2} \right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$ entonces:

$$\cos^2 x = \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right)^2 = 4 \cos^4 \frac{x}{2} - 4 \cos^2 \frac{x}{2} + 1$$

Resolver $-\frac{1}{2} + \cos^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ es lo mismo que resolver:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + 4 \cos^4 \left(\frac{x}{2} \right) - 4 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 1 + \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) &= 0 \\ 8 \cos^4 \left(\frac{x}{2} \right) - 6 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Si llamamos a $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = T$ tendremos que resolver la ecuación bicuadrada siguiente:

$$8T^4 - 6T^2 + 1 = 0 \rightarrow T = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable; el problema queda reducido a resolver las ecuaciones trigonométricas elementales:

$$1. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Multiplicando por 2

$$x = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \\ \frac{10\pi}{3} + 4k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Multiplicando por 2

$$x = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \\ \frac{8\pi}{3} + 4k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Las soluciones de las ecuaciones 1 y 2 se pueden expresar conjuntamente así:

$$x = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$3. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Multiplicando por 2

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 4k\pi \\ \frac{7\pi}{2} + 4k\pi \end{cases}$$

$$4. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Multiplicando por 2

$$x = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \\ \frac{5\pi}{2} + 4k\pi \end{cases}$$

Las soluciones de las ecuaciones 3 y 4 se pueden agrupar así:

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Por lo tanto; la solución de la ecuación inicial es el conjunto:

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ejemplo 7 Resolver la ecuación $\sin x + \cos x = 1$

Aislamos el $\sin x$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación al cuadrado

$$\sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

Utilizamos la F.F.T para expresar el $\sin^2 x$ en función del $\cos^2 x$. Como $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; entonces:

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 x &= 1 - 2\cos x + \cos^2 x \\ 2\cos^2 x - 2\cos x &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos x(\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comprobemos ahora si los valores $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 0$ son soluciones de la ecuación

Para $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que es solución

Para $x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - 1 = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ no es solución

Para $x = 0 \rightarrow \cos 0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1 \rightarrow x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que es solución

El conjunto solución de la ecuación es :

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Observación 8 *Vamos a resolver esta ecuación de otra manera*

Como $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ entonces:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1$$

Si utilizamos la fórmula $\sin C + \sin D = 2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$

La ecuación nos quedará así:

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) \cos\left(\frac{x - (\frac{\pi}{2} - x)}{2}\right) &= 1 \\ 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos(x + \frac{\pi}{4}) &= 1 \end{aligned}$$

Como $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;entonces:

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislado x

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2\pi + 2k\pi = 2\pi(k+1) = 2\pi k' \end{cases} \quad \text{con } k, k' \in \mathbb{Z}$$

Observación 9 *Resuelve tú la ecuación $\sin x + \cos x = 1$ considerando que $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ y que $\cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$.*

Ejemplo 10 *Resuelve la ecuación $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$*

Aislamos el $\cos x$

$$\cos x = 1 - \sqrt{3} \sin x$$

Elevando al cuadrado:

$$\cos^2 x = 1 - 2\sqrt{3} \sin x + 3 \sin^2 x$$

Utilizamos la F.F.T para expresar el $\cos^2 x$ en función del $\sin^2 x$. Como $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; entonces:

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 x &= 1 - 2\sqrt{3} \sin x + 3 \sin^2 x \\ 4 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x &= 0 \\ 2 \sin x (2 \sin x - \sqrt{3}) &= 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobemos ahora si los valores $0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, son soluciones de la ecuación

Para $x = 0 \rightarrow \sqrt{3} \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1 \rightarrow x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que es solución

Para $x = \pi \rightarrow \sqrt{3} \sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1 \rightarrow x = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ no es solución

Para $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ no es solución

Para $x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que es solución

El conjunto solución de la ecuación es :

$$\left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Observación 11 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$.

Divido la ecuación por 2 $\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}$

Como $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ y $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ entonces la ecuación queda así:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x &= \frac{1}{2} \\ \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aislado x

$$x = \begin{cases} 2k\pi \\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Fíjate bien; que este procedimiento es más corto que el anterior

Ejemplo 12 Resuelve $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$

Sugerencia : Determina los ángulos tales que $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

1.2 Ejercicios ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 13 Resuelve $4 \sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} 4 \sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) &= \sqrt{3} \rightarrow 2 \cdot 2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \\ 2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Como $2 \sin A \cdot \cos A = \sin 2A$ entonces la ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned} \sin(2x - \frac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2x - \frac{\pi}{3} &= \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aislado x , tendremos:

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 14 $4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cos x = 3$

Fíjate que $\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Por lo tanto; la ecuación quedará así:

$$\begin{aligned} 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \left[1 - 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] &= 3 \\ -4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1 &= 0 \\ 4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

El problema queda reducido a resolver una ecuación de segundo grado (cuya incógnita es $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$). con lo que:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} &= \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Aislado x

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 4k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 15 Resuelve $\sin 2x = \cos 120^\circ$

$$\sin 2x = \cos 120^\circ \rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \begin{cases} \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislado x

$$x = \begin{cases} \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ \frac{11\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 16 Resuelve $\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = -\sqrt{2}$

En primer lugar, vamos a transformar la expresión que queda a la derecha de la ecuación

$$\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)}$$

Como $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, entonces:

$$\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}$$

Así pues; la ecuación inicial quedará como:

$$\frac{1}{\sin x} = -\sqrt{2} \rightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \begin{cases} \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 17 Resuelve tú la ecuación $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = -2$

Ejercicio 18 Resuelve $\cos^2(x + \frac{\pi}{6}) - \sin^2(x + \frac{\pi}{6}) = 1$

Como $\cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A$; la ecuación $\cos^2(x + \frac{\pi}{6}) - \sin^2(x + \frac{\pi}{6}) = 1$ queda:

$$\begin{aligned} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= 1 \\ 2x + \frac{\pi}{3} &= 2k\pi \\ x &= -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $-\frac{\pi}{6} + k\pi = -\pi + \frac{5\pi}{6} + k\pi = \frac{5\pi}{6} + (k-1)\pi = \frac{5\pi}{6} + k'\pi$ con $k' \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 19 Resuelve tú la ecuación $\cos^2(x - \frac{\pi}{6}) - \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

Ejercicio 20 Resuelve $\cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x$

Como
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos C - \cos D = -2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \\ \sin C + \sin D = 2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \end{array} \right\}$$

entonces
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2x - \cos 6x = -2 \sin(4x) \sin(-2x) = 2 \sin 4x \sin 2x \\ \sin 5x + \sin 3x = 2 \sin 4x \cos x \end{array} \right\}$$

Con lo que; la ecuación se transforma así:

$$\begin{aligned} 2 \sin 4x \sin 2x &= 2 \sin 4x \cos x \\ \sin 4x \sin 2x - \sin 4x \cos x &= 0 \end{aligned}$$

Sacando factor comun $\sin 4x$

$$\sin 4x(\sin 2x - \cos x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 2x - \cos x = 0 \end{cases}$$

$$1^a \sin 4x = 0 \rightarrow 4x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{k\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$2^a \sin 2x - \cos x = 0 \quad *$$

Resolvamos ahora la ecuación $\sin 2x - \cos x = 0$

Teniendo presente que $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2 \sin x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejercicio 21 Resuelve $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sin x$

$$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A \rightarrow \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \cos \left[2 \left(\frac{x}{2}\right)\right] = \cos x$$

Luego

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) &= \sin x \\ \cos x &= \sin x \end{aligned}$$

Dividiendo por $\cos x$,y teniendo presente que la función $y = \tan x$ es una función periódica de periodo π

$$\tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 22 Resuelve $\cos 2x + \sin x = 4 \sin^2 x$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\begin{aligned} \cos 2x + \sin x &= 4 \sin^2 x \\ 1 - 2 \sin^2 x + \sin x &= 4 \sin^2 x \\ 6 \sin^2 x - \sin x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

El, problema queda reducido a resolver una ecuación de segundo grado (cuya incógnita es $\sin x$). con lo que:

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

El problema queda reducido a resolver las ecuaciones trigonométricas elementales:

$$\begin{aligned} 1. \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x &= \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 2. \sin x = -\frac{1}{3} \rightarrow x &= \begin{cases} \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \\ 2\pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejercicio 23 Resuelve tú $\sin 2x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$

$$\text{Sugerencia } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ y } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x;$$

Ejercicio 24 Resuelve $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

$$\text{Sugerencia: Determina los ángulos tales que } \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 25 Resuelve $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$

Sugerencia: Determina los ángulos tales que $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 26 Resuelve $8 \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) = 1 + \sec x$

Como $\tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ y $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ entonces, la ecuación queda así:

$$\begin{aligned} \frac{8(1 - \cos x)}{1 + \cos x} &= 1 + \frac{1}{\cos x} \\ \frac{8(1 - \cos x)}{1 + \cos x} &= \frac{1 + \cos x}{\cos x} \\ 8 \cos x - 8 \cos^2 x &= 1 + 2 \cos x + \cos^2 x \\ 0 &= 9 \cos^2 x - 6 \cos x + 1 \\ 0 &= (3 \cos x - 1)^2 \\ \cos x &= \frac{1}{3} \rightarrow x = \begin{cases} \arccos \left(\frac{1}{3} \right) + 2k\pi \\ 2\pi - \arccos \left(\frac{1}{3} \right) + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejercicio 27 Resuelve $\tan 2x = -\tan x$

Como $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$; entonces, la ecuación queda así:

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} &= -\tan x \\ 2 \tan x &= -\tan x + \tan^3 x \\ 0 &= \tan^3 x - 3 \tan x \end{aligned}$$

Factorizando:

$$\tan x (\tan^2 x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \rightarrow x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \tan^2 x = 3 \rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = -\sqrt{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 28 Resuelve $\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Transformemos en primer lugar la suma $\sin 3x + \cos 3x$ como producto
Para ello; utilizaremos que:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) \\ &\quad y \\ \sin C + \sin D &= 2 \sin \left(\frac{C + D}{2} \right) \cos \left(\frac{C - D}{2} \right) \end{aligned}$$

Con lo que

$$\begin{aligned}\sin 3x + \cos 3x &= \sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\ \sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) &= 2 \sin\left(\frac{3x + \frac{\pi}{2} - 3x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{2} + 3x}{2}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sin 3x + \cos 3x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Después de todo esto, la ecuación inicial $\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ queda:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{2} \rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Si aislamos $3x$

$$3x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislado x ; tendremos la solución

$$\begin{aligned}x &= \begin{cases} \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ x &= \begin{cases} \frac{11}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{19}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación entre 0 y 2π son:

$$\begin{aligned}\frac{11}{36}\pi, \frac{35}{36}\pi \left(\frac{11}{36}\pi + \frac{2\pi}{3}\right), \frac{59}{36}\pi \left(\frac{11}{36}\pi + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{19}{36}\pi, \frac{43}{36}\pi \left(\frac{19}{36}\pi + \frac{2\pi}{3}\right), \frac{67}{36}\pi \left(\frac{19}{36}\pi + \frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Observación 29 *Fíjate en como la resolvemos ahora*

$$\sin 3x + \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aislamos $\sin 3x$

$$\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos 3x$$

Elevamos al cuadrado

$$\sin^2 3x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos 3x\right)^2 \rightarrow \sin^2 3x = \cos^2 3x + \sqrt{2} \cos 3x + \frac{1}{2}$$

Expresamos el $\sin^2 3x$ en función del $\cos^2 3x$ utilizando la F.F.T

$$1 - \cos^2 3x = \cos^2 3x + \sqrt{2} \cos 3x + \frac{1}{2}$$

Transponiendo términos;obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$2 \cos^2 3x + \sqrt{2} \cos 3x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 4 \cos^2 3x + 2\sqrt{2} \cos 3x - 1 = 0$$

Resolviéndola:

$$\cos 3x = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{24}}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Si determinas los ángulos tales que su coseno vale $\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$ verás que son $\frac{5}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi (2\pi - \frac{5}{12}\pi)$ y análogamente los ángulos cuyo coseno vale $-\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$ son $\frac{11}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi (\pi + \frac{1}{12}\pi)$.

Perdona; pero como no lo comprobarás. Te lo voy a calcular:

$$\begin{aligned} \cos \frac{5}{12}\pi &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) \\ \cos \frac{19}{12}\pi &= \cos(2\pi - \frac{5}{12}\pi) = \cos \frac{5}{12}\pi = \sqrt{2} \left(\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right) \\ \cos \frac{11}{12}\pi &= -\sin \frac{5\pi}{12} = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\right) \\ \cos \frac{13}{12}\pi &= \cos \frac{11}{12}\pi = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Con lo que podemos afirmar con todo rigor; que el ángulo $3x$ valdrá:

$$3x = \begin{cases} \frac{5}{12}\pi + 2k\pi \\ \frac{19}{12}\pi + 2k\pi \\ \frac{11}{12}\pi + 2k\pi \\ \frac{13}{12}\pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislado x

$$x = \begin{cases} \frac{5}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{19}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{11}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{13}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Como has elevado al cuadrado, algunas de las soluciones obtenidas no verifican la ecuación.

Comprueba tú que los valores $\frac{5}{36}\pi$, $\frac{13}{36}\pi$ no son solución

Conclusión : las soluciones de la ecuación son

$$x = \begin{cases} \frac{11}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{19}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 30 Resuelve la ecuación $\sin 3x - 2 \sin x = 0$

Fíjate en la siguiente transformación:

$$\sin 3x - \sin x = \sin x$$

Teniendo presente que $\sin(C) - \sin(D) = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ tendremos
 $\sin 3x - \sin x = 2 \cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2 \cos 2x \sin x$

Con lo que la ecuación nos queda así:

$$\begin{aligned} 2 \cos 2x \sin x &= \sin x \\ 2 \cos 2x \sin x - \sin x &= 0 \end{aligned}$$

Sacando factor común $\sin x$

$$\sin x(2 \cos 2x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1^a \sin x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ 2^a \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1^a \sin x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$2^a \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Las soluciones de la ecuación en $[0, 2\pi)$ son:

$$0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \left(\frac{\pi}{6} + \pi\right), \left(\frac{5\pi}{6} + \pi\right)$$

Observación 31 Vamos a resolver la misma ecuación; pero, expresando el $\sin 3x$ en función del $\sin x$

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$$

Como $\begin{bmatrix} \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \end{bmatrix}$ entonces:

$$\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x$$

Sustituyendo $\cos^2 x$ por $(1 - \sin^2 x)$ F.F.T

$$\sin 3x = 2 \sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x$$

Operando y reduciendo términos semejantes

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad (a)$$

Resolvamos ahora la ecuación

$$\sin 3x - 3 \sin x = 0$$

Usando la expresión (a), la ecuación se transforma en:

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x - 3 \sin x = 0$$

Reduciendo términos semejantes

$$-4 \sin^3 x = 0$$

Factorizando la ecuación:

$$\begin{aligned} \sin x(1 - 4 \sin^2 x) = 0 &\rightarrow \begin{cases} 1^a \sin x = 0 \\ 2^a 4 \sin^2 x - 1 = 0 \end{cases} \\ 1^a \sin x = 0 &\rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 2^a \sin^2 x = \frac{1}{4} &\rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Las soluciones de la 2ª ecuación se pueden agrupar así $x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Las soluciones de la ecuación en $[0, 2\pi)$ son:

$$0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \left(\frac{\pi}{6} + \pi\right), \left(\frac{5\pi}{6} + \pi\right)$$

Ejercicio 32 Resuelve la ecuación $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -\sqrt{2}$

Divido la ecuación por 2

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \\ y \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$ la ecuación queda:

$$\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Aislado x

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

Conclusión final : Las soluciones de la ecuación entre 0 y 2π son :

$$\frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$$

Observación 33 Vamos a resolver la misma ecuación con otro procedimiento

Aislamos de la ecuación $\cos x$

$$\cos x = -\sqrt{2} - \sqrt{3} \sin x$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación al cuadrado

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \left(-\sqrt{2} - \sqrt{3} \sin x\right)^2 \\ \cos^2 x &= 2 + 2\sqrt{6} \sin x + 3 \sin^2 x \end{aligned}$$

Sustituyendo $\cos^2 x$ por $(1 - \sin^2 x)$ F.F.T

$$1 - \sin^2 x = 2 + 2\sqrt{6} \sin x + 3 \sin^2 x$$

Transponiendo términos, obtenemos una ecuación de segundo grado (la incógnita es $\sin x$)

$$0 = 4 \sin^2 x + 2\sqrt{6} \sin x + 1$$

Resolviéndola

$$\sin x = \frac{-2\sqrt{6} \pm 2\sqrt{2}}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \end{cases} \quad (b)$$

El problema se reduce a resolver las ecuaciones elementales $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \sin x = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \end{cases}$

Nota: Para poder conseguirlo, lee detenidamente estas notas enumeradas que vienen a continuación (Si tienes problemas al trabajar en radianes, considera su equivalente en grados)

1º Vamos a calcular el $\sin \frac{13\pi}{12}$ considerando que $\sin \frac{13\pi}{12} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin \frac{\pi}{12}$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Por lo tanto: $\sin \frac{13\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12} = -\left(\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$

2° Vamos a calcular el $\sin \frac{23\pi}{12}$

Hemos de tener presente que $\sin \frac{23\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12}$ puesto que $\frac{23\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{12}$ y $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\sin \frac{\pi}{12}$

Así pues:

$$\sin \frac{23\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Conclusión 1ª: Los únicos ángulos entre $[0, 2\pi)$ tales que $\sin x = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$ son $\frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$

3° Vamos a calcular el $\sin \frac{17\pi}{12}$ considerando que $\sin \frac{17\pi}{12} = \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = -\sin \frac{5\pi}{12}$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Por lo tanto: $\sin \frac{17\pi}{12} = -\sin \frac{5\pi}{12} = -\left(\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$

4° Vamos a calcular el $\sin \frac{19\pi}{12}$

Hemos de tener presente que $\sin \frac{19\pi}{12} = -\sin \frac{5\pi}{12}$ puesto que $\frac{19\pi}{12} = 2\pi - \frac{5\pi}{12}$ y $\sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\sin \frac{5\pi}{12}$

Así pues:

$$\sin \frac{19\pi}{12} = -\sin \frac{5\pi}{12} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

Conclusión 2ª: Los únicos ángulos entre $[0, 2\pi)$ tales que $\sin x = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}$ son $\frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$

Utilizando las dos conclusiones anteriores podemos determinar las soluciones de las ecuaciones trigonométricas elementales:

1. $\sin x = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$ (por la 1ª concl.)
2. $\sin x = -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} \rightarrow x = \begin{cases} \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \\ \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$ (por la 2ª concl.)

Observación importante: Al elevar al cuadrado la ecuación, puede ocurrir que no todas las soluciones sean válidas. Comprueba tú que los ángulos $\frac{23\pi}{12}$ y $\frac{17\pi}{12}$ no verifican la solución inicial

Conclusión final : Las soluciones de la ecuación entre 0 y 2π son :

$$\frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$$

Después de explicar todo este procedimiento, es evidente que este último procedimiento es muy complejo. Así que: querido alumno, evítalo en la medida de lo posible.

2.2 Ejercicios sistemas de ecs. trigonométricas

Ejercicio 36 Resuelve el sistema $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$,

De la 2ª ecuación aislamos x

$$x = \frac{\pi}{2} - y$$

Y sustituimos dicha expresión en la 1ª ecuación:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (3)$$

Nota a) : Como $\sin C + \sin D = 2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$; entonces podemos transformar la expresión que hay a la izquierda de la igualdad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - y + y}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - y - y}{2}\right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) \end{aligned}$$

Quedando la ecuación (3) así:

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Aislando $\cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Nota b) Como $\cos A = \cos(-A)$ la ecuación anterior se transforma en:

$$\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad (4)$$

Nota c) El ángulo agudo cuyo coseno vale $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ es $\frac{\pi}{12}$ (15°).¹

¹ $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Por la nota anterior; la solución de la ecuación (4) es:

$$y - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow y = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{13\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Como $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \rightarrow \frac{13\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi(k+1)$.
Entonces, las soluciones de la incógnita y se pueden expresar :

$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Obtenidos todos los valores de la incógnita " y ", vamos a calcular los correspondientes valores de la incógnita " x ". (recuerda que $x = \frac{\pi}{2} - y$)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si } y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - 2k\pi = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \text{Si } y = \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - 2(k+1)\pi = \frac{\pi}{3} - 2(k+1)\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

El conjunto solución del sistema es:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{6} - 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\pi}{3} - 2(k+1)\pi, \frac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ejercicio 37 Resuelve el sistema $\begin{cases} \sin x + \cos y = \sqrt{3} \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

De la 2ª ecuación aislamos x

$$x = \frac{\pi}{2} + y$$

Y sustituimos dicha expresión en la 1ª ecuación:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos y = \sqrt{3} \quad (5)$$

Nota a) : Como $\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos y + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin y = {}^2\cos y$; entonces, podemos transformar la expresión que hay a la izquierda de la igualdad de la siguiente manera:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \sin y = 2\cos y$$

Quedando la ecuación (5) así:

$$2\cos y = \sqrt{3} \rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$${}^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ y } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Los valores de y que se obtienen son

$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Obtenidos todos los valores de la incógnita " y ", vamos a calcular los correspondientes valores de la incógnita " x ". (recuerda que $x = \frac{\pi}{2} + y$)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si } y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \text{Si } y = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{11\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2(k+1)\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

El conjunto solución del sistema es:

$$S = \left\{ \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + 2(k+1)\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ejercicio 38 Resuelve el sistema $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3} \end{cases}$

Ejercicio 39 Resuelve el sistema $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \sin y \end{cases}$

Ejercicio 40 Resuelve el sistema $\begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3} \\ \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Ejercicio 41 Resuelve el sistema $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \sin x - \sin y = \frac{3}{2} \end{cases}$

Sumando y restando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} 2 \sin x = 2 \\ 2 \sin y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Los ángulos que verifican cada una de las ecuaciones anteriores son:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \begin{cases} \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

La solución del sistema es el conjunto:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Resuelve tú, los 2 sistemas siguientes

Ejercicio 42 Resuelve los sistemas $\begin{cases} \cos x + 3 \cos y = 1 \\ 3 \cos x - \cos y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 4 \sin x + 5 \sin y = 2 \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$

Ejercicio 43 Resuelve el sistema $\begin{cases} \sin x = 2 \sin y \\ \sin x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Si realizamos el siguiente cambio de variable $\sin x = Z$ y $\cos x = T$, tendremos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} Z = 2T \\ ZT = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Multiplicamos la 1ª ecuación por T y la 2ª por -1

$$\begin{cases} ZT = 2T^2 \\ -ZT = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$0 = 2T^2 - \frac{1}{2} \rightarrow T^2 = \frac{1}{4} \rightarrow T = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si } T = \frac{1}{2} \rightarrow Z = 1 \\ \text{Si } T = -\frac{1}{2} \rightarrow Z = -1 \end{array} \right]$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si } \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin y = 1 \\ \text{Si } \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin y = -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Si } x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \text{Si } x = \begin{cases} \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow y = \frac{3\pi}{2} + k\pi \end{array} \right]$$

La solución del sistema es el conjunto de puntos del plano siguiente:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) \right\}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 44 Resuelve el sistema $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$

Aislamos de la primera $\sin x$ y de la segunda $\cos x$; obteniendo:

$$\begin{cases} \sin x = 1 - \sin y \\ \cos x = 1 + \cos y \end{cases}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 - 2 \sin y + \sin^2 y \\ \cos^2 x = 1 + 2 \cos y + \cos^2 y \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 2 - 2 \sin y + 2 \cos y + \sin^2 y + \cos^2 y$$

como $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$; la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - 2 \sin y + 2 \cos y + 1 \\ -1 &= \cos y - \sin y \end{aligned}$$

Como $\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin y$, tendremos que resolver la ecuación trigonométrica:

$$\cos y + \cos(\frac{\pi}{2} + y) = -1$$

Para ello, utilizamos que $\cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$; con lo que la ecuación a resolver es ésta:

$$2 \cos\left(\frac{y + \frac{\pi}{2} + y}{2}\right) \cos\left(\frac{y - (\frac{\pi}{2} + y)}{2}\right) = -1$$

Operando:

$$2 \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Como $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2 \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

La ecuación se reduce al final a resolver la ecuación trigonométrica elemental:

$$\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y + \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Aislado la incógnita, tendremos que:

$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Si $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ substituyendo en cualquiera de la dos ecuaciones iniciales determinaremos el valor de la correspondiente incógnita x . Vamos a hacerlo en la 1ª

$$\sin x = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Con lo que obtenemos los siguientes puntos del plano:

$$(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ y } (\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Si $y = \pi + 2k\pi$ sustituyendo en la 1ª determinaremos el valor de la correspondiente incógnita x .

$$\sin x = 1 - \sin(\pi + 2k\pi) \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Con lo que obtenemos los siguientes puntos del plano:

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Recuerda que al elevar al cuadrado las ecuaciones, alguno de estos pares de puntos puede que no sean solución del sistema

Comprobaciones:

$$\text{Si } x = 0 \text{ e } y = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

Los puntos del plano $(0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que son solución del sistema.

$$\text{Si } x = \pi \text{ e } y = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

Los puntos del plano $(\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ no son solución del sistema.

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{2} \text{ e } y = \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi = 1 \\ \cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi = 1 \end{cases}$$

Los puntos del plano $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ si que son solución del sistema.

La solución del sistema es el conjunto siguiente:

$$S = \left\{ (0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$