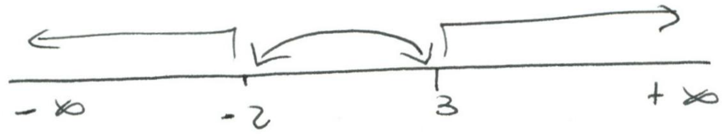
121) $|x-3|+2|x+2|=9$ ECUACIÓN

Valores que anulan a los argumentos de los | |:

$x-3=0 \Rightarrow x=3 \qquad x+2=0 \Rightarrow x=-2$

Las zonas en donde estudiamos la ecuación son:



1) Si $x \leq -2$: es $x+2 \leq 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2)$
$x-3<0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3)$ } y la ecuación queda:

$-(x-3)-2(x+2)=9 \Rightarrow -x+3-2x-4=9 \Rightarrow -3x=10$

$\Rightarrow x=\frac{10}{-3}$ y como $x=\frac{10}{-3}$ está en la zona $x \leq -2$

ya que $\frac{10}{-3} \leq -2$, por tanto $x=\frac{10}{-3}$ es solución de la ecuación

2) Si $-2<x<3$: es $x+2>0 \Rightarrow |x+2| = x+2$
$x-3<0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3)$ } y la ecuación queda:

$-(x-3)+2(x+2)=9 \Rightarrow -x+3+2x+4=9 \Rightarrow x=2$

y como $x=2$ está en la zona $-2<x<3$ ya que $-2<2<3$
es por tanto $x=2$ otra solución de la ecuación

3) Si $x \geq 3$: es $x-3 \geq 0 \Rightarrow |x-3| = x-3$
$x+2>0 \Rightarrow |x+2| = x+2$ } y la ecuación queda:

$x-3+2(x+2)=9 \Rightarrow x-3+2x+4=9 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

pero $x=\frac{8}{3}$ no está en la zona $x \geq 3$ ya que $\frac{8}{3} \not\geq 3$

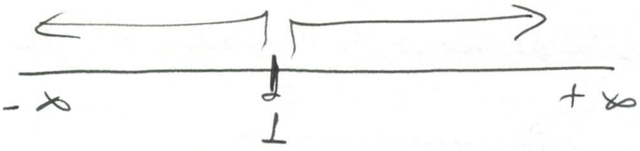
luego $x=\frac{8}{3}$ no es solución

Resumiendo: las únicas soluciones son: $x=\frac{10}{-3}$ y $x=2$

(b) $2|x-1| = x^2-2x-14$ ECUACIÓN

Vemos cuando se anula $x-1=0 \Rightarrow x=1$

Las zonas en donde estudiamos la ecuación son:



1) Si $x \le 1$: es $x-1 \le 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$ y queda:

$-2(x-1) = x^2-2x-14 \Rightarrow -2x+2 = x^2-2x-14 \Rightarrow 16 = x^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{16} =$ $x=4$ no sirve pues $4 \not\le 1$ (no está el $x=4$ en la zona $x \le 1$)

$x=-4$ sí sirve pues $-4 \le 1$

La solución en la zona $x \le 1$ será $x=-4$

2) Si $x > 1$: es $x-1>0 \Rightarrow |x-1| = x-1$ y queda:

$2(x-1) = x^2-2x-14 \Rightarrow 2x-2 = x^2-2x-14 \Rightarrow x^2-4x-12=0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(-12)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} x=6 \\ x=-2 \end{cases}$$

pero $x=-2$ no sirve pues no está en la zona $x>1$

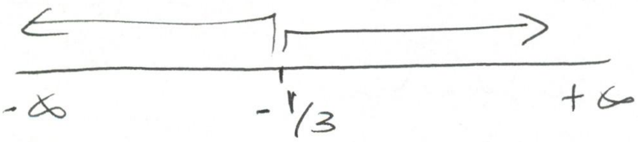
y $x=6$ sí está en la zona $x>1$ $(6>1)$ sí es solución

Resumiendo: las soluciones de la ecuación son $x=-4$
$x=6$

(c) $x^2-x-4 = |3x+1|$ ECUACIÓN

Vemos cuando se anula $3x+1=0 \Rightarrow x = -1/3$

Las zonas a estudiar la ecuación son:



1) Si $x \le -1/3$ es: $3x+1 \le 0 \Rightarrow |3x+1| = -(3x+1)$

la ecuación queda: $x^2-x-4 = -(3x+1)$ ⟶

$x^2 - x - 4 = -3x - 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ es:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

para $x = 1$ no sirve, pues no está en la zona $x \leq -1/3$

y $x = -3$ sí sirve pues sí está en la zona $x \leq -1/3$ $(-3 < -1/3)$

luego $x = -3$ es solución

2) Si $x > -1/3$: es $3x + 1 > 0 \Rightarrow |3x+1| = 3x + 1$ y queda:

$$x^2 - x - 4 = 3x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-5)}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 5 \text{ sí sirve pues } 5 > -1/3 \\ x = -1 \text{ no sirve pues } -1 \not> -1/3 \end{cases}$$

Resumiendo: las soluciones de la ecuación son:

$x = -3$ y $x = 5$

d) $x^2 + |x| - 6 = 0$ ECUACIÓN

Vemos cuando $x = 0$ (obvio) Zonas $-\infty$ 0 $+\infty$

1) Si $x \leq 0$: es $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x$ y queda la ecuación

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Solo sirve $x = -2$ pues es la que cumple $x \leq 0$

2) Si $x > 0$: es $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ y queda la ecuación

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = \ldots \end{cases}$$

Solo sirve la $x = 2$ pues es la que cumple $x > 0$

Resumiendo: las soluciones de la ecuación son

$x = 2$ y $x = -2$

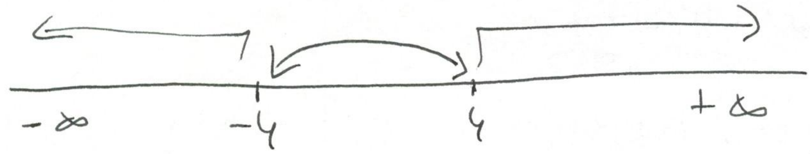
e) $|x-4| - |x^2-16| = 0$

Vemos cuando se anulan los argumentos de los $| \, |$:

$x-4=0 \Rightarrow x=4$ $\qquad x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm\sqrt{16}=\pm 4$

$x=-4$ y $x=4$

Las zonas a estudiar son:



1) Si $x \le -4$: es $x-4<0 \Rightarrow |x-4| = -(x-4)$
$x^2-16 \ge 0 \Rightarrow |x^2-16| = +(x^2-16)$ } y queda

$-(x-4)-(x^2-16)=0 \Rightarrow -x^2-x+20=0$ y entonces:

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1-4(-20)}}{-2} = \frac{1\pm\sqrt{1+80}}{-2} = \frac{1\pm\sqrt{81}}{-2} = \frac{1\pm 9}{-2} = \begin{cases} x=-5 \\ x=4 \end{cases}$$

de las dos $x=-5$ está en la zona $x \le -4$
sólo $x=4$ → no sirve.

luego en esta zona la ecuación → tiene solución $x=-5$

2) Si $-4<x<4$: es $x-4<0 \Rightarrow |x-4| = -(x-4)$
$x^2-16<0 \Rightarrow |x^2-16| = -(x^2-16)$ }

y queda $-(x-4)+x^2-16=0 \Rightarrow x^2-x-12=0$ y queda:

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1-4(-12)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{1\pm 7}{2} = \begin{cases} x=4 \\ x=-3 \end{cases}$$

y sólo $x=-3$ está en la zona $-4<x<4$

3) Si $x \ge 4$: es $x-4 \ge 0 \Rightarrow |x-4| = x-4$
$x^2-16 \ge 0 \Rightarrow |x^2-16| = x^2-16$ } y queda:

$x-4-(x^2-16)=0 \Rightarrow -x^2+x+12=0$ y por tanto:

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4(-1)12}}{-2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{-2} = \frac{-1\pm\sqrt{49}}{-2} = \frac{-1\pm 7}{-2} = \begin{cases} x=-3 \\ x=4 \end{cases}$$

y de las "candidatas" $x=-3$ y $x=4$ la que está en la zona $x \geq 4$ $\longrightarrow$ es $x=4$.

Resumiendo: las soluciones de la ecuación son:

$x=-5$ y $x=4$ y $x=-3$

Otra forma: $|x-4|-|x^2-16|=0$

aprovechando que el término independiente es 0, podríamos haberlo hecho así: $|\underbrace{x-4}|=|\underbrace{x^2-16}|$

y si son iguales sus | | es porque:

a) $x-4=x^2-16$ ---- etc

ó b) $x-4=-(x^2-16)$ ---- etc.

terminarlas ----.

Nota
$|x|=|y| \Rightarrow x=y$ ó $x=-y$

f) $|x^2-9| \geq 7$ INECUACIÓN (tipo $|\text{cosa}| \geq n^o$)

Tenemos dos casos:

ojo!!

1) $x^2-9 \geq 7 \Rightarrow x^2 \geq 16 \Rightarrow \sqrt{x^2} \geq 4 \Rightarrow |x| \geq 4$

$\Rightarrow$ $x \geq 4$ / $x \leq -4$ $\Rightarrow x \in (-\infty,-4] \cup [4,+\infty)$

2) $x^2-9 < -7 \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{2} \Rightarrow |x| < \sqrt{2}$

ojo!

$\Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow x \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$

Resumiendo, la solución de la inecuación es:

$x \in (-\infty,-4] \cup (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \cup [4,+\infty)$