

ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO SUPERIOR A 2

1) $2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

se factoriza el polinomio según como sabemos

divisores de $-2 : \pm 1, \pm$

2	-7	6	1	-2	
1		2	-5	1	2
2	-5	1	2	0	
1		2	-3	-2	
2	-3	-2	0		

→ al llegar al de 2º grado resolvemos mejor la ecuac

para obtener sus raíces: $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{3+5}{4} = 2 \\ \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Luego las raíces son:

$x = 1 \rightarrow \text{doble}$

$x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$

Por tanto:

$$2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 2 = 2(x-1)^2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x-1)^2(x-2)(2x+1)$$

La ecuación queda:

producto de factores $(x-1)^2(x-2)(2x+1) \stackrel{!}{=} 0$

un producto vale 0 cuando es nulo

algún factor. Las soluc son: $\boxed{x=1, 2 \text{ y } -\frac{1}{2}}$

$$16) \underline{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0}$$

divisores de $-6 : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 2 & & 2 & 8 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & & -3 & -3 & -3 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Resolvemos la de 2º grado

que queda: $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2}$
 $= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ y $\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$ luego esta

ecuación de 2º grado no tiene soluciones reales
 la factorización del polinomio queda:

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x+3)(x^2+x+1)$$

y la ecuación ~~sea~~ : $(x-2)(x+3)(x^2+x+1) = 0$

un producto de factores se anula cuando es nulo algún factor, luego las soluciones son:

$$x = 2 \text{ y } -3 \text{ pero no } x^2 + x + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$17) \underline{x^4 + 7x^3 + 10x^2 - 14x - 24 = 0}$$

divisores de $-24 : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$

	1	7	10	-14	-24
-4		-4	-12	8	24
	1	3	-2	-6	0
-3		-3	0	6	
	1	0	-2		0

de 2: grado $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$

de factorización queda:

$$x^4 + 7x^3 + 10x^2 - 14x - 24 = (x+4)(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

y la ecuación:

$$\underbrace{(x+4)(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}_{\text{producto de factores}} = 0$$

luego las soluciones son $x = -4, -3, \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

$$13) x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6 = 0$$

divisores del término independiente 6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

	1	5	7	5	6
-2		-2	-6	-2	-6
	1	3	1	3	0
-3		-3	0	-3	
	1	0	1	0	

la de 2º grado : $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{-1}$ y $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ luego la factorización

queda : $x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)(x^2+1)$

y la ecuación : $\underbrace{(x+2)(x+3)(x^2+1)}_{\text{producto de factores}} = 0$

Soluciones : $x = -2$ y -3

ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO SUPERIOR A 2.

Ecuaciones Polinómicas de Grado Superior a 2.

Lo que haremos será expresar el polinomio en producto de factores, de esta forma la ecuación se reduce a una de la forma producto de factores igual a cero:

$$\underbrace{(x-a)}_{x=a} \underbrace{(x+b)}_{x=-b} \underbrace{(x-c)}_{x=c} \dots \underbrace{(x-d)}_{x=d} = 0$$

43º Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

1) $2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

	2	-7	6	1	-2
1		2	-5	1	2
	2	-5	1	2	0
1		2	-3	-2	
	2	-3	-2	0	

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} =$$
$$= \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$$

$$2.(x-1)^2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

SOLUCIONES DE LA
ECUACIÓN.

$$2) x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0$$

1	-3	-7	+27	-18
3	3	0	-21	18
1	0	-7	6	0
-3	-3	9	-6	
1	-3	2	0	

Divisores T. ind:
 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6,$
 $\pm 18, \pm 9$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0$$

$$(x-3)(x+3)(x-2)(x-1) = 0$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

SOLUCIONES DE LA
ECUACIÓN

$$3) 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(2x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$1) x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2) 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot (-4)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} =$$

$$= \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 \cdot (x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

} SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

$$4) x^4 - 3x^3 + 4x = 0$$

$$x(x^3 - 3x^2 + 4) = 0$$

$$1) x = 0$$

$$2) \quad x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$$

$$x^4 - 3x^3 + 4x = 0$$

$$x(x-2)^2(x+1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{array} \right\} \text{SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN.}$$

$$5) \quad 3x^3 + 10x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 10 & 9 & 2 \\ -2 & & -6 & -8 & -2 \\ \hline & 3 & 4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$3x^3 + 10x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$3(x+2)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+1) = 0$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN

$$6) x^4 - 1 = 0$$

1	1	0	0	0	-1
1		1	1	1	1
	1	1	1	1	0
-1		-1	0	-1	
	1	0	1	0	

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm \sqrt{-1} \quad x \notin \mathbb{R}.$$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x^2+1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1=0 \implies x=-1 \\ x-1=0 \implies x=+1 \end{array} \right\} \text{ SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN }$$

$$7) x^4 - 9 = 0$$

Hacemos un cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 9 = 0$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

Sustituimos:

$$\text{Como } x^2 = y$$

$$1) 3 = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$2) -3 = x^2$$

$$x = \sqrt{-3} \quad x \notin \mathbb{R}.$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x = +\sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{3}$$

$$8) x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$$

	1	6	13	12	4
-1		-1	-5	-8	-4
	1	5	8	4	0
-1		-1	-4	-4	
	1	4	4		0

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$(x+1)^2 (x+2)^2 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$(x+1)(x+1) = 0$$

$$x+1 = 0 \implies x = -1$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$(x+2)(x+2) = 0$$

$$x+2 = 0 \implies x = -2$$

SOLUCIONES DE
LA ECUACIÓN.

$$9) x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

	1	2	-3	-4	4
1		1	3	0	-4
	1	3	0	-4	0

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
 1 & & 1 & 4 & 4 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0}
 \end{array}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2$$

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-1)^2 (x+2)^2 = 0$$

$$\begin{array}{l}
 x-1=0 \Rightarrow x=1 \\
 x+2=0 \Rightarrow x=-2
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{SOLUCIONES DE} \\ \text{LA ECUACIÓN.} \end{array}$$

$$11) 3x^5 + 2x^4 + x = 0$$

$$x(3x^4 + 2x^2 + 1) = 0 \quad \text{Hacemos un cambio de variable.}$$

$$1) x = 0$$

$$2) 3x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \quad \nearrow \quad x^2 = y$$

$$3y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6} \quad x \notin \mathbb{R}$$

Única solución $x = 0$

12) $x^4 - 16 = 0$. Hacemos un cambio de variable.

$$y^2 - 16 = 0 \quad x^2 = y$$

$$y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

Sustituimos:

Como $x^2 = y$

1) $x^2 = 4$

$$x = \pm \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

2) $x^2 = -4$

$$x = \pm \sqrt{-4} \quad x \notin \mathbb{R}$$

Las únicas soluciones reales son:

$$x = 2$$

$$x = -2$$

13) $x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6 = 0$

	1	5	7	5	6
-3		-3	-6	-3	-6
	1	2	1	2	0
-2		-2	0	-2	
	1	0	1	0	

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm \sqrt{-1}$$

$$x \notin \mathbb{R}$$

-31-

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$(x+3)(x+2)(x^2+1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{array} \right\} \text{Soluciones de la ECUACIÓN.}$$

$$14) x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$$

3	1	1	-9	-9
		3	12	9
	1	4	3	0

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -1$$

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$$

$$(x-3)(x+3)(x+1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{array} \right\} \text{Soluciones de la ECUACIÓN.}$$

$$15) x^3 - 6x^2 - 5x + 30 = 0$$

6	1	-6	-5	30
		6	0	-30
	1	0	-5	<u>0</u>

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm \sqrt{5}$$

$$x^3 - 6x^2 - 5x + 30 = 0$$

$$(x - 6)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$$

$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$x + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$$

$$x - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

}

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN.

$$16) x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

	1	2	-4	-5	-6
2		2	8	8	6
	1	4	4	3	<u>0</u>
-3		-3	-3	-3	
	1	1	1	<u>0</u>	

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3)(x^2+x+1)=0$$

$$\left. \begin{array}{l} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{SOLUCIONES DE LA} \\ \text{ECUACIÓN} \end{array}$$

$$17) x^4 + 7x^3 + 10x^2 - 14x - 24 = 0$$

	1	7	10	-14	-24
-3		-3	-12	+6	+24
	1	4	-2	-8	0
-4		-4	0	8	
	1	0	-2	0	

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$x^4 + 7x^3 + 10x^2 - 14x - 24 = 0$$

$$(x+3)(x+4)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x+4=0 \Rightarrow x=-4$$

$$x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$$

$$x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=+\sqrt{2}$$

SOLUCIONES DE
LA ECUACIÓN

$$18) x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x - 6 = 0$$

1	2	-4	-6	-6
-3	-3	3	3	6
	1	-1	-1	-2
2	2	2	2	0
	1	1	1	0

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2)(x^2+x+1) = 0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

SOLUCIONES DE LA
ECUACIÓN.

$$19) -2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & & -2 & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 & -2 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \\
 1 & & -2 & -1 & -1 & \\
 \hline
 & -2 & -1 & -1 & \boxed{0} &
 \end{array}$$

$$-2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(-1)}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{-4} \notin \mathbb{R}.$$

$$-2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$(x-1)^2(-2x^2 - x - 1) = 0$$

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

La única solución real es $x = 1$.