FRACCIONES ALGEBRÁICAS.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de polinomios.

Para hallar el MCD y el mcm de varios polinomios:

1º Se factorizan cada uno de los polinomios.

2º Para hallar el MCD se toman factores comunes elevados al menor exponente.

Para el m.cm se toman factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

39º Calcula el M.C.D y el m.c.m de cada pareja de polinomios.

$$\left.\begin{array}{l} A(x) = x^2 + x - 12 \\ B(x) = x^3 - 9x \end{array}\right\}$$

1º Factorizar cada uno.

$$A(x) = x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$$

$x_1 + x_2 = -12$

$x_1 + x_2 = -1$

$-4, 3.$

$$B(x) = x^3 - 9x =$$

$$= x(x^2 - 9) = x(x+3)(x-3)$$

$$MCD(A(x), B(x)) = x - 3$$

$$mcm(A(x), B(x)) = (x+4)(x-3)(x+3)x$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x) = x^2 - 4 \\ B(x) = x^2 - 4x + 4 \end{array}\right\}$$

1º Factorizar cada uno:

$$A(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$B(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$MCD\,(A(x), B(x)) = x - 2$$

$$m.c.m\,(A(x), B(x)) = (x+2)(x-2)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2 \\ B(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 \end{array}\right\}$$

1º Factorizamos cada uno.

$$A(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2 =$$

$$= x^2(x^2 - 7x + 12)$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm 1}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

$$A(x) = (x-4)(x-3)\,x^2$$

Fracciones algebraicas.

Son fracciones en las que el numerador y el denominador son polinomios.

Si queremos sumar fracciones algebraicas en primer lugar se descomponen los denominadores en producto de factores, se halla el m.c.m. de esos denominadores, y de forma análoga a como hacíamos con fracciones ordinarias efectuaremos la suma.

40º Efectuar, simplificando el resultado lo más posible:

1) $$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2-x} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{3}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{3x - 2(x-1) - 3}{x(x-1)} = \frac{3x - 2x + 2 - 3}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{\cancel{x-1}}{x\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x}$$

2) $$\frac{7}{x-7} - \frac{7}{x+7} + \frac{x^2+49}{x^2-49} = \frac{7}{x-7} - \frac{7}{x+7} + \frac{x^2+49}{(x+7)(x-7)} =$$

$$= \frac{7(x+7) - 7(x-7) + x^2 + 49}{(x+7)(x-7)} = \frac{\cancel{7x} + 49 - \cancel{7x} + 49 + x^2 + 49}{(x-7)(x+7)} =$$

$$= \frac{x^2 + 147}{(x-7)(x+7)}$$

3) $$\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2+4x+4} =$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{1}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x(x+2) - (x+2)^2 + x(x-2)}{x(x-2)(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x - (x^2 + 4 + 4x) + x^2 - 2x}{x(x-2)(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - 4 - 4x \cancel{+x^2} - \cancel{2x}}{x(x-2)(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 4x - 4}{x(x-2)(x+2)^2}$$

4) $\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) \frac{4x}{x^2-6x+9} = \frac{x^2-9}{x^2} \cdot \frac{4x}{x^2-6x+9} =$

$$= \frac{(x+3)(x-3)}{x^2} \cdot \frac{4x}{(x-3)^2} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}\, 4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}} (x-3)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{4(x+3)}{x(x-3)}$$

5) $\left(1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right)\left(\frac{3}{x+3} + \frac{3}{x-3}\right) =$

$$= \left(\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{3(x-3) + 3(x+3)}{(x+3)(x-3)}\right) =$$

$$= \left(\frac{(x+3)^2}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{3x - \cancel{9} + 3x + \cancel{9}}{(x+3)(x-3)} \right) =$$

$$= \left(\frac{\cancel{(x+3)}^2}{\cancel{x^2}} \right) \left(\frac{6\cancel{x}}{\cancel{(x+3)}(x-3)} \right) = \frac{6(x+3)}{(x-3) \cdot x}$$

6) $$\left(1 - \frac{49}{x^2} \right) \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 14x + 49} \right) \left(\frac{3x}{x^2 - 4} \right) =$$

$$= \left(\frac{x^2 - 49}{\cancel{x^2}} \right) \left(\frac{\cancel{x}\cancel{(x-2)}}{(x-7)^2} \right) \left(\frac{3\cancel{x}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} \right) =$$

$$= \frac{(x+7)\cancel{(x-7)}3}{(x-7)^{\cancel{2}}(x+2)} = \frac{3(x+7)}{(x+2)(x-7)}$$

7) $$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 4} : \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2} \right) =$$

$$= \frac{x(x-3)}{(x-2)^2} : \frac{x(x+2) - x(x-2)}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{x(x-3)}{(x-2)^2} : \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} + 2x}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{\cancel{x}(x-3)(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}} \cdot 4\cancel{x}} = \frac{(x-3)(x+2)}{4(x-2)}$$

8) $$\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{x^2+5x}{x^2-1}\cdot\frac{4x}{x^2-25}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1}{x^2}\cdot\frac{x(x+5)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{4x}{(x+5)(x-5)}=$$

$$=\frac{(x+1)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{x}\,\cancel{(x+5)}\cdot 4\cancel{x}}{\cancel{x^2}\,\cancel{(x+1)}(x-1)\cancel{(x+5)}(x-5)}=\frac{4(x+1)}{(x-1)(x-5)}$$

9) $$\frac{3}{x^3-4x}-\frac{3}{x^3-2x^2}+\frac{1}{x^4-4x^3+4x^2}=$$

$$=\frac{3}{x(x^2-4)}-\frac{3}{x^2(x-2)}+\frac{1}{x^2(x^2-4x+4)}=$$

$$=\frac{3}{x(x+2)(x-2)}-\frac{3}{x^2(x-2)}+\frac{1}{x^2(x-2)^2}=$$

$$=\frac{3x(x-2)-3(x-2)(x+2)+(x+2)}{x^2(x-2)^2(x+2)}=$$

$$=\frac{3x^2-6x-3(x^2-4)+x+2}{x^2(x-2)^2(x+2)}=$$

$$=\frac{\cancel{3x^2}-6x-\cancel{3x^2}+12+x+2}{x^2(x-2)^2(x+2)}=$$

$$=\frac{-5x+14}{x^2(x-2)^2(x+2)}$$

10) $$\frac{x^3-x^2}{x^2-5x+6} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x} =$$

$$= \frac{x^2(x-1)}{(\cancel{x-2})(x-3)} \cdot \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{x(x-1)(x+2)}{(x-3)\;x+1)}$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

11) $$\frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{1}{x^2-11x+30} + \frac{1}{x^2-10x+24} =$$

$$= \frac{1}{(x-4)(x-5)} - \frac{1}{(x-6)(x-5)} + \frac{1}{(x-6)(x-4)} =$$

$$= \frac{(x-6)-(x-4)+(x-5)}{(x-4)(x-5)(x-6)} = \frac{\cancel{x}-6-\cancel{x}+4+x-5}{(x-4)(x-5)(x-6)} =$$

$$= \frac{x-7}{(x-4)(x-5)(x-6)}$$

$$x^2-9x+20=0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

12) $$\frac{3x^2+6x+3}{x^4+x^2} : \frac{x^2+2x+1}{x^3+x^2} =$$

$$= \frac{3(x^2+2x+1)}{x^2(x^2+1)} : \frac{x^2+2x+1}{x^2(x+1)} =$$

$$= \frac{3\cancel{(x^2+2x}+1) \cdot \cancel{x^2}(x+1)}{\cancel{x^2}(x^2+1) \cdot \cancel{(x^2+2x}+1)} = \frac{3(x+1)}{x^2+1}$$

13) $$\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) : \left[\left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\right] =$$

$$= \frac{(x+1)^2 - (1-x)^2}{(1-x)(1+x)} : \left[\left(\frac{(1+x)-(1-x)}{1-x}\right)\left(\frac{(1+x)-1}{1+x}\right)\right] =$$

$$= \frac{x^2+1+2x-(x^2+1-2x)}{(1-x)(1+x)} : \left[\left(\frac{1+\cancel{x}-1+\cancel{x}}{1-x}\right)\left(\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{1+x}\right)\right] =$$